element die Veränderung $d\varphi$ ertheilt hat, diese Veränderung für jedes folgende Zeitelement, und so lange fortbestehen bleiben, bis durch eine Gegenkraft dieselbe wiederum aufgehoben wird. Aber der Werth $d\varphi$ kann sich, nachdem die Einwirkung der Kraft aufgehört hat, nicht mehr ändern, denn eine solche Aenderung würde immer wieder eine neue Wirkung der Kraft voraussetzen. Man ist daher gezwungen, von dem Augenblicke der Einwirkung an, $d\varphi$ für das Massenelement dm als konstant anzusehen, und folglich ist es von diesem Augenblick an nicht mehr möglich, $d\varphi$ als eine Funktion der Zeit zu betrachten. Das Maafs der Wirkung einer momentan wirkenden Kraft für eine bestimmte endliche Zeit wird sich ausdrücken durch $dm\int d\varphi$, welches Integral von dem Augenblicke der Einwirkung an zu nehmen ist. Bezeichnen wir nun mit dW die Wirkungsgröfse der Kraft auf ein Massenelement, so haben wir:

$$9)\quad dW = dm\int d\varphi = dm.\varphi,$$

oder für den ganzen Körper:

$$10)\quad W = \Sigma(dm.\varphi),$$

d. h. wir können die Wirkungsgröfse einer momentan wirkenden Kraft bestimmen, indem wir jedes Massenelement mit dem Aenderungswerth in einer bestimmten endlichen Zeit multipliziren und die Summe der Produkte bilden. Wenn nun auch φ nicht eine Funktion der Zeit sein kann, so bleibt doch nicht ausgeschlossen, dafs es eine Funktion von irgend einem andern Werthe, z. B. von m sein könne; in diesem Falle hat man:

$$11)\quad W = \int \varphi_m\, dm + \text{Const.},$$

und endlich, wenn φ für jedes Massenelement dasselbe ist:

$$12)\quad W = m\varphi.$$

Ausdruck für die Leistung einer kontinuirlich wirkenden Kraft.

§ 11. Betrachten wir nunmehr lebendige Kräfte, welche kontinuirlich wirken. Hier hört die Einwirkung nicht nach dem ersten Zeitelement auf, sondern es wird in jedem folgenden Zeitelement immer wieder ein Aenderungszuwachs $= d\varphi$ stattfinden. Wir sind nach dem Obigen zu der Voraussetzung berechtigt, dafs die Leistung einer auf ein Massenelement kontinuirlich wirkenden Kraft in irgend einem Zeitelement um so gröfser sei, je gröfser die Veränderung ist, welche die Kraft bis zu diesem Zeitelement bereits hervorgebracht hat, und je gröfser die Veränderung ist, welche die Kraft während dieses Zeitelementes von Neuem hervorbringt. Bezeichnen wir mit φ die Veränderung, welche die Kraft bis zu dem in Betracht zu ziehenden Augenblick bereits erzeugt hat, so drückt sich offenbar die Wirkungsgröfse für das nächste Zeitelement und für ein Massenelement aus durch:

$$13)\ dm\,.\,\varphi\, d\varphi,$$

und für eine gewisse Zeit t, für jedes Massenelement durch: $dm\Sigma\varphi d\varphi$, folglich für den ganzen Körper durch:

$$14)\ \Sigma(dm\Sigma\,\varphi\,.\,d\varphi) = \Sigma[dm\,.\,\Sigma(\varphi\,.\,f\,.\,dt)].$$

Ist φ eine Funktion von m und bezeichnen wir die Wirkungsgröfse für ein Zeitelement, oder (wie wir künftig diesen Werth nennen wollen) das Leistungselement (Wirkungselement) mit dL, so ergiebt sich:

$$15)\ dL = dm\int\left(\varphi_m\, d\varphi\right) + \text{Const.},$$

worin das Integral zwischen den Grenzen von m zu nehmen ist, welche der Masse des ganzen Körpers entsprechen.

Ist dagegen φ für jedes Massenelement dasselbe, wobei φ, wie früher, eine Funktion von irgend einem andern Variabeln sein kann, so ergiebt sich das Leistungselement:

$$16)\ dL = m\varphi\, d\varphi.$$

Die Leistung der Kraft auf den ganzen Körper für eine bestimmte Zeit ergiebt sich aus den eben bestimmten Werthen, und zwar aus 15):

$$17)\ L = \int\left(\int\varphi_m\, d\varphi\right)dm + \text{Const.},$$

und aus 16):

$$18)\ L = m\int\varphi\, d\varphi + \text{Const.},$$

worin φ zwischen den Grenzen zu nehmen ist, welche der Zeitdauer entsprechen, für welche man die Wirkungsgröfse bestimmen will. Ist $\varphi = \varphi$ der Werth von φ nach der Zeit t, $\varphi = \varphi'$ dagegen der Werth von φ nach der Zeit t', so hat man die Leistung für die Zeitdauer $t - t'$:

$$19)\ L_{(t-t')} = m\int_{\varphi'}^{\varphi}\varphi\, d\varphi + \text{Const.},$$
$$= \tfrac{1}{2}m(\varphi^2 - \varphi'^2).$$

Setzen wir zufolge der Formel 1) $d\varphi = f dt$, und nehmen wir an, dafs $f = f_t$ eine Funktion von t sei, so folgt zunächst:

$$\varphi = \int f_t \, dt,$$

folglich, wenn wir φ in Bezug auf m konstant nehmen, nach 18):

$$20)\ L = m\int\left(\int f_t \, dt\right) f_t \, dt + \text{Const.},$$

welches Integral zwischen den Grenzen von t zu nehmen ist, die der Zeitdauer der Beobachtung entsprechen.

Ist endlich f keine Funktion von t, hat man es also mit einer konstant und kontinuirlich wirkenden Kraft zu thun, so ist:

$$21)\ L_{(t-t')} = \tfrac{1}{2} m f^2 (t^2 - t'^2)$$

und mit Rücksicht auf 7):

$$22)\ L_{(t-t')} = \tfrac{1}{2} K f (t^2 - t'^2).$$

Wir müssen hier darauf verzichten, noch mehr Formeln für eine Reihe von speziellen Fällen herzuleiten, die aus besondern Werthen hervorgehen würden, welche φ oder f annehmen können. Nur die Bemerkung mag hier schliefslich noch hervorgehoben werden, dafs die eben geführten Untersuchungen für alle Arten von Kräften, die auf Körper einwirken, gelten müssen, ohne Rücksicht auf die Art und Beschaffenheit der von den Kräften hervorzubringenden, oder wirklich hervorgebrachten Veränderungen; dafs ferner die Begriffe von Masse und lebendiger Kraft ganz bestimmte und allgemeine sind, und nicht, wie Poncelet behauptet*), nur uneigentliche, konventionelle Benennungen, die man eingeführt hat, um gewisse mathematische Ausdrücke kurz zu bezeichnen.

B. Von den mechanischen Kräften.

a) Wirkung einer mechanischen Kraft auf ein Massenelement.

Bewegung.

§ 12. Nach Feststellung jener allgemeinen Wahrheiten gehen wir zur Untersuchung derjenigen Kräfte über, welche uns hier besonders beschäftigen.

Unter den zahllosen Veränderungen, welche wir an den Körpern wahrnehmen, spielen eine grofse Rolle die Veränderungen des Ortes, oder derjenigen Stelle im Raum, welche die Körper einnehmen. Diese Ortsveränderungen nennen wir Bewegungen, und

*) Poncelet »Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen«, deutsch herausgegeben von Schnuse I. S. 10 und 11.