

## Einige Grundlehren der Mechanik.

---

### A. Von den Kräften im Allgemeinen.

#### Begriff von Kraft.

§ 1. Wir erblicken in der Natur fortwährende Veränderungen des augenblicklich vorhandenen Zustandes. Diese Veränderungen gehen zum Theil mit einer solchen Entschiedenheit vor sich, daß sie durch die Sinne sofort erkennbar sind, theils aber auch so allmählig und langsam, daß sie erst durch eine aufmerksame Beobachtung und durch gründliche Forschung wahrgenommen werden können; ja gewisse Veränderungen entziehen sich vollständig unsern Sinnen, und wir können über ihr Dasein nur Vermuthungen aufstellen. Ueberall erscheinen uns diese Veränderungen als Wirkungen von irgend etwas Wirkendem, als Folgen irgend eines Etwas. Dieses Wirkende, dieses, seiner Natur und seinem eigentlichen innern Wesen nach, uns unbekante Etwas nennen wir Kraft. Wir schreiben also jene Veränderungen dem Wirken von Kräften zu.

Hiernach verstehen wir unter Kraft (fr. *force* — engl. *force*) dasjenige Etwas, welches eine Veränderung in einem gegebenen Zustande herbeizuführen vermag, oder wirklich herbeiführt.

#### Zustand des Gleichgewichts. Lebendige Kraft.

§ 2. In der Definition des vorigen Paragraphen ist angedeutet, daß eine Kraft auch in einem solchen Zustand sich befinden könne, daß sie keine Veränderung wirklich hervorbringt. Diesen Zustand nennen wir den Zustand des Gleichgewichtes (fr. *état d'équi-*

*libre* — engl. *state of equilibrium*), oder wir sagen, die Kraft sei gebunden. Wir setzen voraus, daß ein solcher Zustand nur dadurch herbeigeführt werden könne, daß die Wirkung jener Kraft, durch die Wirkung einer oder mehrer andern Kräfte aufgehoben werde. Diese andern Kräfte nennen wir die Gegenkräfte (fr. *contre-forces* — engl. *counter-forces*). Wenn also von dem Zustande des Gleichgewichtes die Rede ist, so setzt dies immer voraus, daß wenigstens zwei, oder auch mehre Kräfte dabei eine Rolle spielen.

Wenn dagegen eine Kraft so wirkt, daß sie in der That Veränderungen herbeiführt, so sagen wir, die Kraft sei frei oder lebendig, es sei eine lebendige Kraft (fr. *force vive* — engl. und lat. *vis viva*).

Eine lebendige Kraft bringt also fortwährend, und so lange Veränderungen hervor, bis diese Veränderungen durch irgend eine Gegenkraft aufgehoben werden.

Das hier Gesagte bezieht sich ganz allgemein auf alle Zustände, die geändert werden können, d. h. auf Alles, was der Einwirkung von Kräften fähig ist. Es gilt in dieser Allgemeinheit beispielsweise auch von geistigen, gesellschaftlichen und ähnlichen Zuständen. Wir lassen diese jedoch hier vollkommen unberührt; beschäftigen uns vielmehr zunächst nur mit den Veränderungen, welche an Naturkörpern vorkommen, und zwar hier wiederum vorläufig in der größten Allgemeinheit.

#### Beharrungsvermögen.

§ 3. Da wir alle Veränderungen, die wir an Körpern wahrnehmen, der Wirkung von Kräften zuschreiben, so folgt daraus, daß kein Körper an und für sich fähig sei, eine Veränderung in seinem eben vorhandenen Zustande hervorzubringen, daß es dazu vielmehr stets der Einwirkung einer Kraft bedürfe. So lange also keine Kraft auf einen Körper einwirkt, oder so lange die Kräfte, welche auf denselben einwirken, im Gleichgewicht sind, beharrt der Körper in dem Zustande, in welchem er sich eben befindet. Dieses Gesetz pflegt man als eine besondere Eigenschaft der Körper anzusehen, obwohl es nur eine nothwendige Folge von der Annahme ist, daß die Ursachen von Veränderungen in der Einwirkung von Kräften bestehen. Als Eigenschaft der Körper betrachtet, pflegt man dieses Gesetz das Beharrungs-Vermögen, oder die Trägheit der Körper (fr. *inertie* — engl. *inertia*) zu nennen. Jenen Zustand, in welchem ein

Körper sich eben befindet, und welcher nur durch die Einwirkung irgend einer Kraft geändert werden kann, nennen wir den Beharrungszustand des Körpers.

#### Verschiedenartige Kräfte.

§ 4. Es ist schon angeführt worden, daß wir das eigentliche Wesen der Kräfte nicht kennen, und es ist anzunehmen, daß, so lange sich unser Geist in dem Zustande befindet, daß er seine Wahrnehmungen nur mit Hilfe der Sinne schöpfen kann, die ihm als Menschen verliehen sind, wir nicht im Stande sein werden, dieses eigentliche innere Wesen der Kräfte zu ergründen. Wir können vielmehr auf das Vorhandensein der Kräfte nur aus den Wirkungen schließen, welche wir wahrnehmen. Es liegt nahe, daß wir diese Wirkungen mit einander vergleichen, daß wir für gleichartige oder ähnliche Wirkungen bestimmte Arten von Kräften annehmen, die wir als verschieden von andern Kräften, welche andere Wirkungen hervorbringen, voraussetzen. In vielen Fällen ist es gelungen, nachzuweisen, daß Wirkungen, welche anfangs sehr verschiedener Art zu sein schienen, dennoch von ein und derselben Ursache hervorgebracht werden können, daß also gewisse, als verschiedenartig angenommene Kräfte, dennoch im Grunde als ein und dieselbe Art von Kräften angesehen werden mußten. Wie weit es dem menschlichen Geist noch gelingen wird, die große Zahl verschiedenartiger Kräfte, welche die Wissenschaft gegenwärtig noch annimmt, auf eine geringere Zahl, oder gar nur auf eine Urkraft zurückzuführen, läßt sich nicht ermessen; es muß hier genügen, festzustellen, daß eben die Annahme verschiedenartiger Kräfte nur eine Hypothese ist, welche gleichwohl die Anschauung und Betrachtung wesentlich erleichtert.

Im Allgemeinen pflegen wir die Kräfte verschieden zu benennen und als verschiedenartig voranzusetzen, je nachdem der Zustand, welcher geändert worden ist, oder die stattgehabte Veränderung verschieden waren. Wir sprechen in diesem Sinne von chemischen, von physikalischen Kräften, und lassen unter diesen allgemeineren Begriffen noch Unterabtheilungen zu, indem wir z. B. von optischen, elektrischen Kräften etc. handeln.

Wenn es darauf ankommt, die Wirkungen gleichartiger Kräfte zu untersuchen, zu beurtheilen und der Rechnung zu unterwerfen, so ist es nöthig, diese Wirkungen zunächst mit einander zu vergleichen, sie zu messen.

## Untersuchung der Kräfte.

§ 5. Sobald wir in derartige Untersuchungen eingehen, tritt uns die Nothwendigkeit entgegen von einander zu unterscheiden: a) die Körperelemente, welche einer Veränderung in ihrem Beharrungszustande durch die Einwirkung von Kräften unterworfen sind; b) die Kräfte, welche diese Veränderungen hervorbringen, und endlich c) die hervorgebrachten Veränderungen selbst.

## Begriff von Masse.

§ 6. a) Die Körperelemente, welche durch die Einwirkung von Kräften einer Veränderung in ihrem Beharrungszustande unterworfen sind, erscheinen uns im Gegensatz zu den Kräften, welche wir uns als thätig (aktiv) denken, als das Leidende (Passive). Sie sind das Bleibende in den Veränderungen, dasjenige, dessen Zustand nur geändert wird, welches aber, seiner Quantität nach, keiner Aenderung unterworfen ist. Die Menge dieser beharrenden, aber einer Aenderung ihres Beharrungszustandes fähigen Elemente in einem Körper, nennen wir die Masse (fr. *masse* — engl. *masse*) des Körpers. Wir bezeichnen sie in der Folge mit *m*. Es ist dabei vorläufig gleichgiltig, durch welche Einheit wir die Masse eines Körpers messen wollen. Die absolute Zahl, welche das Maas für die Masse eines Körpers angiebt, und welche wir künftig für *m* in die Rechnung einzuführen haben, richtet sich natürlich nach dem Werthe der angenommenen Einheit.

Das Wesen der Masse ist uns eben so unzugänglich, wie das der Kräfte; wir erkennen das Vorhandensein der Masse nur aus den Kräften, welche auf sie einwirken. Wir setzen aber voraus, daß die Masse in einem gegebenen Körper etwas Konstantes sei; ein Werth, der unabhängig ist von dem Zustande, in welchem sich der Körper befindet, und unabhängig von den Veränderungen, welche dieser Zustand erleidet.

## Begriff von »Größe einer Kraft«; »Größe ihrer Wirkung«.

§ 7. b) Die Kräfte, welche Veränderungen in dem Beharrungszustande der Körper erzeugen, sind unserer Wahrnehmung nur vermöge jener Veränderungen zugänglich. Sind die Kräfte lebendig, so bieten uns ihre Wirkungen Mittel zu ihrer Beurtheilung dar. Wir können diese Wirkungen messen, und pflegen aus der Größe der Wirkung auf die Größe der Kraft zurückzuschließen. Allein niemals können wir uns darauf einlassen, die Kräfte selbst messen zu wollen. Kräfte, welche im Gleichgewicht sind, brin-

gen keine Veränderungen hervor; ihre Wirkung ist aufgehoben, und in diesem Zustande sind die Kräfte unserer direkten Wahrnehmung im Allgemeinen entzogen; wir können nur durch Vernunftschlüsse auf das Vorhandensein von Kräften geführt werden, die sich im Zustande des Gleichgewichts befinden. Dennoch bietet sich selbst für diesen Zustand ein Mittel dar, auf die Gröfse der Kräfte zu schliessen. Wir pflegen nämlich die Wirkung zu betrachten, welche die Kräfte hervorbringen würden, wenn plötzlich der Zustand des Gleichgewichts aufgehoben würde. Bei der Beurtheilung der Wirkung lebendiger Kräfte sind immer die wirklich hervorgebrachten Veränderungen mit in Betracht zu ziehen; bei der Beurtheilung einer Kraft im Zustande des Gleichgewichts hat man es dagegen niemals mit wirklich hervorgebrachten, sondern nur mit vorausgesetzten, gedachten Veränderungen zu thun. Man stellt sich daher die Sache oft auch so vor, als habe man bei der Untersuchung einer Kraft im Zustande des Gleichgewichts die Kraft selbst, abgesehen von ihren Wirkungen einer Beurtheilung zu unterziehen, während man bei der Untersuchung einer lebendigen Kraft die Kraft in Verbindung mit ihren Wirkungen zu betrachten habe. Wenn man nun für den Zustand des Gleichgewichts aus der Wirkung, welche die Kraft hervorbringen würde, wenn sie plötzlich frei würde, auf die Gröfse der Kraft schliesst, so pflegt man diesen Schluss vorzugsweise als Messen der Kraft, und die Gröfse jener gedachten Wirkung, als Gröfse oder Werth der Kraft zu bezeichnen. Wir wollen diese Bezeichnungen, da sie allgemein üblich sind, beibehalten, dabei aber niemals vergessen, was wir eigentlich darunter zu verstehen haben. Wenn wir dagegen die Wirkungen einer lebendigen Kraft untersuchen, und dieselben durch Messen bestimmen, so nennen wir im Gegensatz zu jenem Falle, das Maafs für dieselben die Wirkungsgröfse, auch die Leistung oder Arbeit der Kraft (fr. *travail* — engl. *work done*).

Maafs der Veränderungen, welche eine Kraft erzeugt.

§ 8. c) Die Veränderungen, welche Kräfte in dem Beharrungszustande der Körper hervorbringen, sind für unser Vorstellungsvermögen nur in einer gewissen Folge denkbar. Diese Folge bedingt, dafs wir uns jene Veränderungen nur in einer bestimmten Zeit denken können. Ist nun  $d\varphi$  die Veränderung, welche eine Kraft in dem Beharrungszustande eines Massenelementes  $dm$  während eines Zeitelementes  $dt$  hervorgebracht hat, so können wir im Allgemeinen setzen:

$$1) \, d\varphi = f \cdot dt,$$

wenn wir die Zeit  $t$  als das Urvariable, und somit  $dt$  als einen absolut konstanten Werth ansehen. In diesem Ausdruck kann nun  $f$  entweder konstant, oder eine Funktion von  $t$ , oder auch eine Funktion von einem oder von mehreren anderen Veränderlichen sein. In allen Fällen drückt sich aus:

$$2) \, f = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Den Werth  $f$  nennen wir das Aenderungsmaafs der Kraft, den Werth  $d\varphi$  das Aenderungselement der Kraft. Eine Kraft, welche so wirkt, daß das Aenderungsmaafs  $f$  in jedem Augenblick konstant ist, so daß sie also in jedem Zeitelement  $dt$  eine gleich große Aenderung  $d\varphi$  hervorbringt, nennen wir eine konstant wirkende Kraft. Wirkt dagegen die Kraft so, daß  $d\varphi$  in jedem Augenblick einen andern Werth hat, so ist auch das Aenderungsmaafs  $f$  in jedem Augenblick ein anderes, und wir nennen eine solche Kraft eine veränderlich wirkende.

Ausdruck für die Gröfse einer Kraft.

§ 9. Nach diesen Erörterungen werden wir im Stande sein Ausdrücke zu finden, welche uns die Gröfse der Kraft und die Gröfse der Wirkung angeben.

Im Allgemeinen sind wir berechtigt die Gröfse der Kraft, welche auf einen Körper einwirkt, für um so beträchtlicher zu halten, je größer die Menge der Körperelemente ist, in deren Beharrungszustand die Kraft eine Aenderung herbeizuführen strebt, und je größer die Veränderung selbst ist, welche die Kraft jedem einzelnen dieser Körperelemente im nächsten Zeitelemente ertheilen würde, wenn sie plötzlich frei würde. Bezeichnen wir mit  $dm$  ein beliebiges Massenelement, mit  $d\varphi$  die Veränderung, welche dasselbe im nächsten Zeitelemente in seinem Beharrungszustande erleiden würde, so würde ein Maafs für die Gröfse der Kraft, die auf den ganzen Körper wirkt, gefunden werden in dem Ausdrücke:

$$3) \, \Sigma(dm \cdot d\varphi) = \Sigma(dm \cdot f \cdot dt),$$

d. h. wir müssen jedes Massenelement mit seinem Aenderungselement multipliciren, und die Summe der Produkte bilden.

Da wir aber auf diese Weise immer noch  $dt$  als Faktor in dem Ausdruck behalten, und da es bequemer ist für das Maafs der Gröfse einer Kraft einen endlichen Ausdruck zu haben, so können wir, da überdies  $dt$  ein konstanter Werth ist, den Ausdruck durch

$dt$  dividiren. Bezeichnen wir das Maafs für die Gröfse der Kraft mit  $K$ , so ergibt sich hiernach:

$$4) dK = dm \frac{d\varphi}{dt} = dm \cdot f.$$

$$5) K = \Sigma \left( dm \frac{d\varphi}{dt} \right) = \Sigma (dm \cdot f).$$

Ist  $f$  eine Funktion von  $m$ , d. h. ändert sich der Aenderungswerth der Kraft in irgend einer Weise mit  $dm$ , so ergibt sich:

$$6) K = \int f_m dm + \text{Const.},$$

wenn dagegen der Aenderungswerth  $f$  für jedes Massenelement derselbe ist, wobei übrigens gar nicht ausgeschlossen bleibt, dafs  $f$  eine Funktion von irgend einem andern Variablen als  $m$  sein kann, so ergibt sich:

$$7) K = m \cdot f,$$

und daraus, mit Berücksichtigung von Gleichung 2):

$$8) f = \frac{K}{m} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ausdruck für die Leistung einer momentan wirkenden Kraft.

§ 10. Von dem eben behandelten Falle haben wir einen andern wesentlich zu unterscheiden. Wir haben nämlich zur Bestimmung der Gröfse einer Kraft die Veränderung in Betracht gezogen, welche die Kraft im nächsten Zeitelemente hervorbringen würde, falls sie frei wäre. Denken wir uns jetzt, die Kraft sei wirklich frei, aber nur während eines einzigen Zeitelementes. Die Wirkung der Kraft würde für diesen Fall sich ausdrücken während eines Zeitelementes für ein Massenelement durch:

$$dm \cdot d\varphi.$$

Diese Wirkung bleibt bestehen, selbst wenn nach Verlauf dieses ersten Zeitelementes die Einwirkung der Kraft wieder aufhörte.

Kräfte, welche in der eben angedeuteten Weise wirksam sind, so nämlich, dafs die Dauer ihrer Einwirkung nur ein Zeitelement beträgt, nennen wir momentan oder plötzlich wirkende Kräfte. Wir unterscheiden von denselben solche Kräfte, deren Einwirkung eine endliche Zeit hindurch währt, und nennen diese für die Zeit ihrer Wirkung kontinuierlich oder dauernd wirkende Kräfte.

Zufolge des Beharrungsvermögens der Körper wird, nachdem eine momentan wirkende Kraft dem Massenelement im ersten Zeit-

element die Veränderung  $d\varphi$  ertheilt hat, diese Veränderung für jedes folgende Zeitelement, und so lange fortbestehen bleiben, bis durch eine Gegenkraft dieselbe wiederum aufgehoben wird. Aber der Werth  $d\varphi$  kann sich, nachdem die Einwirkung der Kraft aufgehört hat, nicht mehr ändern, denn eine solche Aenderung würde immer wieder eine neue Wirkung der Kraft voraussetzen. Man ist daher gezwungen, von dem Augenblicke der Einwirkung an,  $d\varphi$  für das Massenelement  $dm$  als konstant anzusehen, und folglich ist es von diesem Augenblick an nicht mehr möglich,  $d\varphi$  als eine Funktion der Zeit zu betrachten. Das Maafs der Wirkung einer momentan wirkenden Kraft für eine bestimmte endliche Zeit wird sich ausdrücken durch  $dm \int d\varphi$ , welches Integral von dem Augenblicke der Einwirkung an zu nehmen ist. Bezeichnen wir nun mit  $dW$  die Wirkungsgröfse der Kraft auf ein Massenelement, so haben wir:

$$9) dW = dm \int d\varphi = dm \cdot \varphi,$$

oder für den ganzen Körper:

$$10) W = \Sigma(dm \cdot \varphi),$$

d. h. wir können die Wirkungsgröfse einer momentan wirkenden Kraft bestimmen, indem wir jedes Massenelement mit dem Aenderungswerth in einer bestimmten endlichen Zeit multiplizieren und die Summe der Produkte bilden. Wenn nun auch  $\varphi$  nicht eine Funktion der Zeit sein kann, so bleibt doch nicht ausgeschlossen, dafs es eine Funktion von irgend einem andern Werthe, z. B. von  $m$  sein könne; in diesem Falle hat man:

$$11) W = \int \varphi_m dm + \text{Const.},$$

und endlich, wenn  $\varphi$  für jedes Massenelement dasselbe ist:

$$12) W = m\varphi.$$

Ausdruck für die Leistung einer kontinuierlich wirkenden Kraft.

§ 11. Betrachten wir nunmehr lebendige Kräfte, welche kontinuierlich wirken. Hier hört die Einwirkung nicht nach dem ersten Zeitelement auf, sondern es wird in jedem folgenden Zeitelement immer wieder ein Aenderungszuwachs  $= d\varphi$  stattfinden. Wir sind nach dem Obigen zu der Voraussetzung berechtigt, dafs die Leistung einer auf ein Massenelement kontinuierlich wirkenden Kraft in irgend einem Zeitelement um so gröfser sei, je gröfser die Veränderung ist, welche die Kraft bis zu diesem Zeit-

element bereits hervorgebracht hat, und je größer die Veränderung ist, welche die Kraft während dieses Zeitelementes von Neuem hervorbringt. Bezeichnen wir mit  $\varphi$  die Veränderung, welche die Kraft bis zu dem in Betracht zu ziehenden Augenblick bereits erzeugt hat, so drückt sich offenbar die Wirkungsgröße für das nächste Zeitelement und für ein Massenelement aus durch:

$$13) \quad dm \cdot \varphi \, d\varphi,$$

und für eine gewisse Zeit  $t$ , für jedes Massenelement durch:  $dm \Sigma \varphi \, d\varphi$ , folglich für den ganzen Körper durch:

$$14) \quad \Sigma(dm \Sigma \varphi \cdot d\varphi) = \Sigma[dm \cdot \Sigma(\varphi \cdot f \cdot dt)].$$

Ist  $\varphi$  eine Funktion von  $m$  und bezeichnen wir die Wirkungsgröße für ein Zeitelement, oder (wie wir künftig diesen Werth nennen wollen) das Leistungselement (Wirkungselement) mit  $dL$ , so ergibt sich:

$$15) \quad dL = dm \int (\varphi_m \, d\varphi) + \text{Const.},$$

worin das Integral zwischen den Grenzen von  $m$  zu nehmen ist, welche der Masse des ganzen Körpers entsprechen.

Ist dagegen  $\varphi$  für jedes Massenelement dasselbe, wobei  $\varphi$ , wie früher, eine Funktion von irgend einem andern Variablen sein kann, so ergibt sich das Leistungselement:

$$16) \quad dL = m \varphi \, d\varphi.$$

Die Leistung der Kraft auf den ganzen Körper für eine bestimmte Zeit ergibt sich aus den eben bestimmten Werthen, und zwar aus 15):

$$17) \quad L = \int (\int \varphi_m \, d\varphi) \, dm + \text{Const.},$$

und aus 16):

$$18) \quad L = m \int \varphi \, d\varphi + \text{Const.},$$

worin  $\varphi$  zwischen den Grenzen zu nehmen ist, welche der Zeitdauer entsprechen, für welche man die Wirkungsgröße bestimmen will. Ist  $\varphi = \varphi$  der Werth von  $\varphi$  nach der Zeit  $t$ ,  $\varphi = \varphi'$  dagegen der Werth von  $\varphi$  nach der Zeit  $t'$ , so hat man die Leistung für die Zeitdauer  $t - t'$ :

$$19) \quad L_{(t-t')} = m \int_{\varphi'}^{\varphi} \varphi \, d\varphi + \text{Const.},$$

$$= \frac{1}{2} m (\varphi^2 - \varphi'^2).$$

Setzen wir zufolge der Formel 1)  $d\varphi = f \, dt$ , und nehmen wir an, daß  $f = f_t$  eine Funktion von  $t$  sei, so folgt zunächst:

$$\varphi = \int f, dt,$$

folglich, wenn wir  $\varphi$  in Bezug auf  $m$  konstant nehmen, nach 18):

$$20) \quad L = m \int ( \int f, dt ) f, dt + \text{Const.},$$

welches Integral zwischen den Grenzen von  $t$  zu nehmen ist, die der Zeitdauer der Beobachtung entsprechen.

Ist endlich  $f$  keine Funktion von  $t$ , hat man es also mit einer konstant und kontinuierlich wirkenden Kraft zu thun, so ist:

$$21) \quad L_{(t-t')} = \frac{1}{2} m f^2 (t^2 - t'^2)$$

und mit Rücksicht auf 7):

$$22) \quad L_{(t-t')} = \frac{1}{2} K f (t^2 - t'^2).$$

Wir müssen hier darauf verzichten, noch mehr Formeln für eine Reihe von speziellen Fällen herzuleiten, die aus besondern Werthen hervorgehen würden, welche  $\varphi$  oder  $f$  annehmen können. Nur die Bemerkung mag hier schliesslich noch hervorgehoben werden, daß die eben geführten Untersuchungen für alle Arten von Kräften, die auf Körper einwirken, gelten müssen, ohne Rücksicht auf die Art und Beschaffenheit der von den Kräften hervorzubringenden, oder wirklich hervorgebrachten Veränderungen; daß ferner die Begriffe von Masse und lebendiger Kraft ganz bestimmte und allgemeine sind, und nicht, wie Poncelet behauptet \*), nur uneigentliche, konventionelle Benennungen, die man eingeführt hat, um gewisse mathematische Ausdrücke kurz zu bezeichnen.

## B. Von den mechanischen Kräften.

### a) Wirkung einer mechanischen Kraft auf ein Massenelement.

#### Bewegung.

§ 12. Nach Feststellung jener allgemeinen Wahrheiten gehen wir zur Untersuchung derjenigen Kräfte über, welche uns hier besonders beschäftigen.

Unter den zahllosen Veränderungen, welche wir an den Körpern wahrnehmen, spielen eine große Rolle die Veränderungen des Ortes, oder derjenigen Stelle im Raum, welche die Körper einnehmen. Diese Ortsveränderungen nennen wir Bewegungen, und

\*) Poncelet »Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen«, deutsch herausgegeben von Schnuse I. S. 10 und 11.