CALCULS RELATIFS A LA DÉTERMINATION DU MINIMUM DE MÉTAL DANS UN PONT

Dans les publications techniques américaines on rencontre souvent des calculs relatifs à la détermination du minimum de métal. Mais nous ne pouvons les rapporter ici, car ils diffèrent trop et par les hypothèses et par les résultats, et ils sont souvent longs et diffus.

Nous en donnons néanmoins quelques exemples d'après M. Merrill, afin de faire voir la marche que l'on peut suivre. On remarquera que toute la charge est supposée statique.

On consultera avec intérêt, à ce sujet, le journal *Franklin Institute* et le bulletin de la *Société des Ingénieurs civils de New-York.*

Angle économique pour une paire de tiges.

Déterminer l'angle d'inclinaison pour une paire de tiges en fer, qui transmettent un effort donné aux points d'appui avec le minimum de métal nécessaire.

Supposons que D B, fig. (141), soit une poutre de longueur a renforcée par le montant A C et les tiges C D et C B, et chargée d'un poids W en A. Le poids est d'abord transmis à C par A C, puis à D et B par les tiges C D et C B. On veut que l'angle de C B avec la verticale soit tel, que C B transmette la moitié de W en B, avec la quantité minimum de métal.

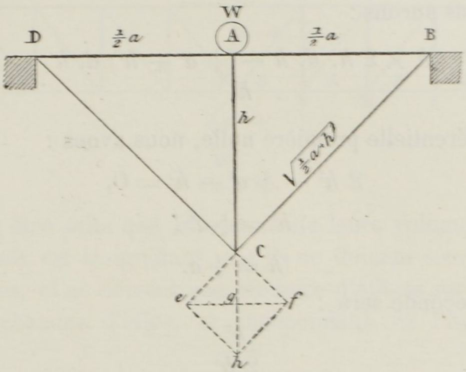

Fig. (141).

W en C est représenté par C h qui se décompose suivant C e et C f. Dans les triangles semblables A B C et C e g, nous avons :

$$\frac{C\,g}{A\,C} = \frac{C\,e}{C\,B}$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2}\,W}{h} = \frac{C\,e}{\sqrt{\frac{1}{4}\,a^2 + h^2}}\,;$$

d'où

$$C\,e = \frac{\frac{1}{2}\,W\,\sqrt{\frac{1}{2}\,a^2 + h^2}}{h}\,.$$

Mais C e est l'effort sur C B. Supposons que l'effort moyen de rupture du fer soit 60,000 livres par pouce carré, si nous divisons C e par 60,000, nous obtiendrons évidemment le nombre de pouces carrés nécessaires dans C B, pour rompre exactement sous l'effort C e.

donc
$$\text{section de C B} = \frac{C\,e}{60.000} = \frac{W\,\sqrt{\frac{1}{4}\,a^2 + h^2}}{120.000\,h}$$

Multiplions ce résultat par la longueur C B, nous aurons :

$$\text{volume de C B} = \frac{W\,(\frac{1}{4}\,a^2 + h^2)}{120.000\,h} = \frac{W}{120.000} \times \frac{\frac{1}{4}\,a^2 + h^2}{h}\,.$$

Si nous trouvons maintenant la valeur de h, pour laquelle cette expression sera minimum, nous aurons résolu le problème.

Le premier facteur étant constant peut être négligé, le volume sera minimum, quand $\frac{\frac{1}{2} a^2 + h^2}{h}$ sera minimum.

Différenciant, nous aurons :

$$\frac{h \times 2\,h.\,d.\,h - (\frac{1}{4}\,a^2 + h^2)\,d.\,h}{h^2}.$$

Supposant la différentielle première nulle, nous avons :

$$2\,h^2 - \frac{1}{4}\,a^2 - h^2 = 0,$$

$$h^2 = \frac{1}{4}\,a^2\,,$$

$$h = \frac{1}{2}\,a.$$

La différentielle seconde sera :

$$\frac{a^2}{2\,h^2}$$

qui est positive pour $h = \frac{1}{2}\,a$.

Donc, cette valeur de h rendra la fonction primitive minimum.

Par conséquent, dans le triangle isocèle D B C, C B fera un angle de 45° avec la verticale, et les deux tiges seront à angle droit l'une sur l'autre.

Si h était moindre que $\frac{1}{2}\,a$, la longueur de C B serait diminuée, mais l'effort sur cette tige serait accru et, par conséquent aussi, sa section transversale et son volume.

Si h était plus grand que $\frac{1}{2}\,a$, la tension sur C B serait diminuée, mais sa longueur serait augmentée, et son volume serait plus grand que quand $h = \frac{1}{2}\,a$.

La loi des efforts de toute autre matière soumise à l'extension étant la même que pour le fer, c'est-à-dire que les efforts varient en raison directe de la section, nous pouvons conclure que le même angle économique sera satisfaisant pour elle dans les mêmes circonstances.

Angle économique pour une série de tiges.

Déterminer l'angle convenable d'inclinaison pour les tiges d'une travée devant transmettre un effort donné aux points d'appui, en employant le minimum de métal.

Supposons une travée de la forme ci-dessus, fig. (142), de portée a et de hauteur h, avec un poids W suspendu au point milieu F de la corde inférieure, poids qui est transmis aux appuis. F B, G C, H D, I E sont les tiges qui transmettront la moitié du poids à la culée de droite. La projection b de chaque tige est

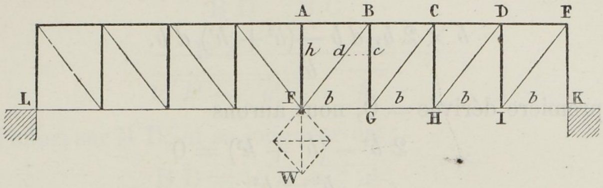

Fig. (142).

inconnue, mais doit être telle que la somme de leurs volumes doit être minima. L'angle des montants est insignifiant, car ils ne doivent servir qu'à maintenir le parallélisme des tiges, et ne doivent pas produire d'efforts sur chaque tige; car il est le même pour chacune d'elles, et indépendant de l'inclinaison des montants.

Les triangles B F G et B d c sont semblables. Dans le dernier, B $c = \frac{1}{2}$ W, et dans B F G, B G $= h$ et B F $= \sqrt{b^2 + h^2}$.

Nous avons
$$\frac{\mathrm{B}\,d}{\mathrm{B\ F}} = \frac{\mathrm{B}\,c}{\mathrm{B\,G}},$$

ou
$$\frac{\mathrm{B}\,d}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{W}}{h};$$

d'où
$$\mathrm{B}\,d = \frac{\mathrm{W}\sqrt{b^2 + h^2}}{2\,h}.$$

Mais la section de B F en pouces carrés est évidemment égale à l'effort qu'elle supporte, divisé par 60.000 ou $\frac{1}{60.000} \times$ B d. Sa longueur est B F $= \sqrt{b^2 + h^2}$ et, si on représente son volume par V,

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{W}\sqrt{b^2 + h^2}}{120.000\,h} \times \sqrt{b^2 + h^2} = \frac{\mathrm{W}\,(b^2 + h^2)}{120.000\,h}$$

L'effort et la longueur étant les mêmes pour chaque tige, leurs volumes doivent être les mêmes. Le nombre de tiges entre le milieu et la culée est évidemment égal à $\frac{1}{2}$ a divisé par b. Multipliant le volume d'une tige par le nombre de tiges, nous aurons la somme entière que nous cherchons :

$$\Sigma\,\mathrm{V} = \frac{\mathrm{W}\,(b^2 + h^2)}{120.000\,h} \times \frac{a}{2\,b} = \frac{a\,\mathrm{W}}{240.000\,h} \times \frac{b^2 + h^2}{b}$$

Nous désirons trouver une valeur de b telle que cette fonction soit minimum.

Le premier facteur est constant, et la fonction sera minimum, en même temps que le second facteur. Différenciant, en nous rappelant que h est constant, nous trouvons :

$$\frac{b \times 2\,b.\ d\,b - (b^2 + h^2)\ d\,b.}{b^2}$$

Posons la première dérivée = 0, nous aurons

$$2\,b^2 - (b^2 + h^2) = 0$$

d'où

$$b^2 = h^2$$

$$b = h$$

La seconde dérivée est :

$$\frac{2\ b\ h^2}{b^4}$$

qui est positive pour $b = h$. Donc cette valeur de b rend la fonction primitive minimum.

Nous trouvons donc que l'angle économique, dans le cas d'une suite de tiges, est le même que celui trouvé pour une paire de tiges, et est 45°.

Angle économique pour une paire de bras.

Déterminer l'angle convenable d'inclinaison pour une paire de bras en fonte travaillant à la compression, de façon à transmettre un effort donné aux points d'appui, avec une quantité de métal minimum.

Supposons la figure (143). A B et B D sont des bras en fonte, B C est une tige verticale et A D est la corde. Le poids est en C. Le poids W est d'abord transmis en B où il est B c, et ses composantes sont B a et B d. La hauteur B C est h et la portée de la travée est A D = a.

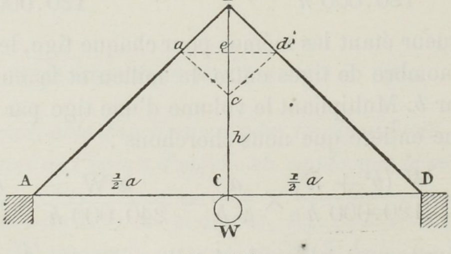

Fig. (143).

Dans B e d et B C D, nous avons :

$$\frac{B\,d}{B\,D} = \frac{B\,e}{B\,C}$$

$$\frac{B\,d}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4} a^2}} = \frac{\frac{1}{2}\,W}{h}$$

Mais B d est l'effort sur B D, et sa longueur est :

$$B\,D = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} a^2}\,.$$

Substituons ces valeurs dans la formule donnant le volume d'une pièce en fonte travaillant à la compression.

$$V = A \times W^{\frac{1}{1.88}} \times l^{\frac{1.79}{0.96}}\,. \qquad (1)^*$$

dans laquelle A est un coefficient numérique variable, selon que la section est pleine ou creuse, et faisons $\frac{1}{1{,}88} = m$ et $\frac{1{,}79}{0{,}94} = n$, nous trouverons :

$$V = A \times \left(\frac{W \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} a^2}}{2\,h}\right)^m \times \left(\sqrt{h^2 + \frac{1}{4} a^2}\right)^n$$

$$V = \left[A + \left(\frac{W}{2}\right)^m\right] \times \frac{\left(\sqrt{h^2 + \frac{1}{4} a^2}\right)^{m+n}}{h^m} = \left[A \times \left(\frac{W}{2}\right)^m\right] \frac{\left(h^2 + \frac{1}{4} a^2\right)^{\frac{m+n}{2}}}{h^m}\,.$$

Dans cette valeur de V, le premier facteur est constant et peut être négligé dans la recherche du minimum.

Différenciant, nous aurons :

$$\frac{h^m \times \frac{m+n}{2} \left(h^2 + \frac{1}{4} a^2\right)^{\frac{m+n}{2}} \times 2\,h\,d\,h - \left(h^2 + \frac{1}{4} a^2\right)^{\frac{m+n}{2}} \times m\,h^{m-1}\,d\,h}{h^{2\,m}}$$

Annulons la première dérivée :

$$h^{m+1}\,(m+n)\,\left(h^2 + \frac{1}{4} a^2\right)^{\frac{m+n}{2}} - m\,h^{m-1}\,\left(h^2 + \frac{1}{4} a^2\right)^{\frac{m+n}{2}} = 0$$

ou en divisant par $h^{m-1}\,\left(h^2 + \frac{1}{4} a^2\right)^{\frac{m+n}{2}} - 1$,

---

* **NOTA BENE.** Nous donnons ce calcul et le suivant pour le cas de bras en fonte, et la formule (1) qui donne le volume a été déduite, comme nous avons vu, de la formule (A); d'une façon analogue, on déduirait le volume de la formule (B), s'il s'agissait de bras en fer, et la détermination de l'angle économique, dans le cas présent comme dans le suivant, se ferait d'une manière identique.

D'ailleurs, comme nous avons eu déjà l'occasion de le dire, le cas de bras en fonte n'est plus actuellement celui qui se présente généralement, l'emploi du fer, même pour les pièces en compression, ayant remplacé celui de la fonte. De plus, ce dernier calcul n'a plus qu'un intérêt rétrospectif, puisque l'on en est arrivé à employer presque partout les pièces en compression verticales.

$$h^2 (m + n) - m \left(h^2 + \tfrac{1}{4} a^2\right) = 0$$

ou

$$n h^2 = \tfrac{1}{4} m a^2$$

$$h^2 = \frac{m}{n} \frac{a^2}{4}$$

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{m}{n}}$$

$$\frac{m}{n} \doteq 0,27933$$

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = 0,528$$

donc

$$h = 0,528 \times \frac{a}{2} = 0,264 \times a$$

ou

$$a = 3,788\ h.$$

Cette valeur de h, substituée dans la deuxième dérivée, la rend positive ; donc la fonction primitive est minimum pour cette valeur de h. Nous voyons donc que la hauteur du triangle sera un peu plus grande que le quart de la portée.

Le nombre 0,528 est la tangente naturelle de l'angle du bras avec l'horizontale ; cet angle est lui-même de 27°51′. L'angle avec la verticale est le complément de celui-là, soit 62°9′.

On pensera avec nous cependant que, quoique l'angle déterminé soit exactement le meilleur pour l'économie dans les bras eux-mêmes, un angle moindre pour l'inclinaison sur la verticale diminuerait la tension sur la corde qui relie les extrémités inférieures de ces bras, et diminuerait un peu la quantité de métal dans l'ensemble du système.

Supposant donc que A D et B C sont en fer forgé, cherchons à déterminer quand la somme de leurs volumes sera minimum.

Dans B e d et B C D, nous avons :

$$\frac{d\ e}{\mathrm{C\ D}} = \frac{\mathrm{B}\ e}{\mathrm{B\ C}}$$

$$\frac{d\ e}{\frac{1}{2}\ a} = \frac{\frac{1}{2}\ \mathrm{W}}{h};$$

d'où

$$d\ e = \frac{a\ \mathrm{W}}{4\ h}$$

L'effort sur C D est égal à $d\ e$ et sa longueur est $\frac{1}{2}\ a$. Donc son volume est :

$$\frac{\frac{a\,W}{4\,h} \times \frac{1}{2}\,a}{5{,}000} = \frac{a^2\,W}{40{,}000\,h}$$

L'effort sur B C est W, et sa longueur est h.

Donc son volume est :

$$\frac{W\,h}{5{,}000}$$

Doublant le volume de C D pour la somme de A C et C D, et ajoutant le volume de B C, nous avons :

$$\frac{a^2\,W}{20{,}000\,h} + \frac{W\,h}{5{,}000}$$

comme fonction d'une variable h, dont nous cherchons la valeur minimum.

La fonction peut s'écrire :

$$\frac{W}{5{,}000}\left(\frac{a^2}{4\,h} + h\right).$$

Le premier facteur est constant et peut être négligé. Différenciant le second facteur, nous aurons :

$$\frac{-\,a^2 \times 4\,d.\,h}{16\,h^2} + d.\,h.$$

Faisons $= 0$, la 1re dérivée, nous avons :

$$\frac{-\,4\,a^2}{16\,h^2} + 1 = 0$$

$$16\,h^2 = 4\,a^2$$

$$h = \frac{1}{2}\,a,$$

Comme cette valeur de h rend la seconde dérivée positive, elle rendra minimum la fonction primitive. La valeur de h précédemment trouvée, quand le métal employé pour les bras est minimum, était $0{,}26 \times a$ ou près de $\frac{1}{4}\,a$.

Donc, une hauteur comprise entre le $\frac{1}{4}$ et la moitié de la portée donnera la plus grande économie dans la quantité de métal de l'ensemble.

Détermination trigonométrique

Soit B l'angle C B D, quand

$$B\,d = \frac{1}{2}\,W \text{ séc. } B,$$

$$B\,D = h \text{ séc. } B$$

Remplaçant W par B d et B D par l, dans la formule donnant le volume d'un bras, nous aurons :

$$V = A\left(\tfrac{1}{2}\,W \text{ séc. } B\right)^m (h \text{ séc. } B)^n$$

ou

$$V = A\left(\tfrac{1}{2}\,W\right)^m \times h^n (\text{séc. } B)^{m+n}.$$

mais

$$h \text{ tg. } B = \tfrac{1}{2}\,a\,,$$

$$h = \frac{a}{2 \text{ tg. } B}$$

Remplaçant h par cette valeur, nous aurons :

$$V = \left[A\left(\tfrac{1}{2}\,W\right)^m \left(\tfrac{1}{2}\,a\right)^n\right] \times \frac{1}{(\text{tg. } B)^n} \times (\text{séc. } B)^{m+n}\,.$$

Négligeant le facteur entre crochets qui est constant, nous pourrons écrire le second facteur :

$$\frac{\left(\dfrac{1}{\text{cos. } B}\right)^{m+n}}{\left(\dfrac{\text{sin. } B}{\text{cos. } B}\right)^n} = \frac{1}{(\text{cos. } B)^{m+n}} \times \frac{(\text{cos. } B)^n}{(\text{sin. } B)^n} = \frac{1}{(\text{cos. } B)^m\,(\text{cos. } B)^n}\,.$$

Différenciant, nous aurons :

$$-\frac{(\sin B)^n \times m\,(\text{cos. } B)^{m-1}(-\text{sin. } B\,dB) + (\text{cos. } B)^m \times n\,(\text{sin. } B)^{n-1}(\text{cos. } B\,dB)}{(\cos B)^{2m}\,(\text{sin. } B)^{2n}}$$

Négligeant le dénominateur, et posant la 1re dérivée $= 0$, nous avons :

$$(\text{sin. } B)^{n+1} \times m\,(\text{cos. } B)^{m-1} - \text{cos. } B^{m+1} \times n\,(\text{sin. } B)^{n-1} = 0$$

$$m \sin.^2 B = n \cos.^2 B$$

$$\text{tg.}^2 B = \frac{n}{m} = 3{,}58$$

$$\text{tg. } B = 1{,}892$$

$$B = 62^\circ 9'$$

Cette valeur de B rend la seconde dérivée positive, et la fonction primitive maximum.

Elle est parfaitement conforme à la valeur trouvée précédemment pour l'angle d'inclinaison sur la verticale.

Angle économique pour une série de bras.

Déterminer l'angle convenable pour l'inclinaison des bras dans une travée, afin qu'ils transmettent un effort donné aux points d'appui avec le minimum de métal.

Soit A B C D, fig. (144), une travée dont la hauteur est h et la portée a. Supposons que le poids W soit en H et qu'il se transmettre en C et D par le système de

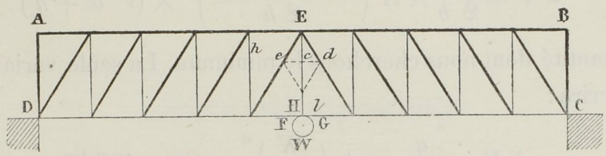

Fig. (144).

bras inclinés et de tiges. Tous les bras sont comprimés également, cette compression dépendant de leur inclinaison et nullement de l'angle des tiges qui les relient. Nous cherchons quelle doit être la valeur de b, la projection des bras, pour que la somme de leurs volumes soit minimum.

Dans le cas d'une paire de bras, il fallait déterminer la valeur de h; dans ce cas, h est fixe et b est variable.

Le poids W se transmet d'abord en E où sa moitié E c se transmet égale à E d sur E G.

Dans E c d et E H G, nous avons :

$$\frac{\mathrm{E}\,c}{\mathrm{E}\,d} = \frac{\mathrm{E\,H}}{\mathrm{E\,G}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{W}}{\mathrm{E}\,d} = \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}}$$

d'où
$$\mathrm{E}\,d = \frac{\mathrm{W}\sqrt{b^2 + h^2}}{2\,h}.$$

E d est l'effort sur le bras E G, et E G $= \sqrt{b^2 + h^2}$ est sa longueur.

Remplaçant ces valeurs dans la formule pour le volume d'un bras de fonte, remplaçant le coefficient numérique par A et les exposants fractionnaires par m et n, nous aurons :

$$V = A \left(\frac{W\sqrt{b^2 + h^2}}{2\,h}\right)^m + \sqrt{b^2 + h^2}$$

pour le volume de E G.

Le nombre entier de bras entre H et C est évidemment égal à $\frac{1}{2}\,a$ divisé par b ou $\frac{a}{2\,b}$. Les volumes des bras étant égaux, nous aurons évidemment la somme de leurs volumes en multipliant cette expression par $\frac{a}{2\,b}$,

et
$$\Sigma\, V = \frac{a}{2\,b} \times A \left(\frac{W\sqrt{b^2 + h^2}}{2\,h}\right)^m \times \left(\sqrt{b^2 + h^2}\right)^n$$

C'est la quantité dont nous cherchons le minimum. La seule variable est b.

On peut écrire :

$$\Sigma\, V = \frac{a}{2\,b} \times A \left(\frac{W}{2\,h}\right)^m \times (b^2 + h^2)^{\frac{m+n}{2}}$$

ou
$$\Sigma\, V = \left[\frac{a}{2\,b} \times A \left(\frac{W}{2\,h}\right)^m\right] \times (b^2 + h^2)^{\frac{m+n}{2}}$$

Comme la quantité entre crochets est constante, on peut la négliger dans la recherche du minimum.

Différenciant l'autre facteur, il vient :

$$\frac{b\,\left(\frac{m+n}{2}\right)\,\left(b^2 + h^2\right)^{\frac{m+n}{2} - 1} \times 2\,b\,d.\,b - \left(b^2 + h^2\right)^{\frac{m+n}{2}} \times d.\,b}{b^2}$$

Faisant la dérivée première $= 0$, nous avons :

$$2\,b^2\left(\frac{m+n}{2}\right)\,\left(b^2 + h^2\right)^{\frac{m+n}{2} - 1} = \left(b^2 + h^2\right)^{\frac{m+n}{2}}$$

d'où
$$2\,b^2\left(\frac{m+n}{2}\right) = b^2 + h^2$$

$$b^2\,(m + n - 1) = h^2 .$$

$$b = \frac{h}{\sqrt{m + n - 1}} .$$

En donnant à m et n leurs valeurs numériques, nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{m+n-1}} = 0{,}8336$$

d'où $$b = h \times 0{,}8336.$$

En donnant à b cette valeur dans la dérivée seconde, elle la rend positive ; donc elle correspond au maximum de la fonction primitive.

Le nombre 0,8336 est la tangente naturelle de l'angle 39°49'. Nous conclurons donc que l'angle le plus économique pour une suite de bras parallèles est de 39°49' avec la verticale ou 50°11' avec l'horizontale.

Détermination trigonométrique.

Soit E l'angle H E G que nous cherchons,

$$E\,d = \tfrac{1}{2}\,W \text{ séc. } E$$

$$E\,G = h \text{ séc. } E.$$

Remplaçant E d, l'effort sur E G, par W et E G par l, dans la formule donnant le volume d'un bras, et introduisant le coefficient numérique A et les exposants m et n, nous aurons :

$$V = A\left(\frac{W}{2}\text{ séc. } E.\right)^m \times (h \text{ séc. } E)^n$$

Multipliant par $\frac{a}{2\,b}$ le nombre de bras, nous aurons :

$$\Sigma V = \frac{a}{2\,b} \times A\left(\frac{W}{2}\text{ séc. } E\right)^m \times (h \text{ séc. } E)^n \ .$$

Remplaçant b par sa valeur h tg. E.

$$\Sigma V = \frac{a}{2\,h} \times \frac{1}{\text{tg. } E} \times A\left(\frac{W}{2}\right)^m \times h^n\,(\text{séc. } E)^{m+n}$$

ou $$\Sigma V = \frac{a \times A \times W^m \times h^{n-1}}{2^{m+1}} = \frac{(\text{séc. } E)^{m+n}}{\text{tg. } E}$$

Le premier facteur est constant et peut être négligé. Différencions la seconde fraction, nous aurons :

$$\frac{\text{tg. E } d. (\text{séc. E})^{m+n} - (\text{séc. E})^{m+n} d \text{ tg. E}}{\text{tg.}^2 \text{ E}}$$

ou

$$\frac{\text{tg. E } (m+n) (\text{séc. E})^{m+n-1} \times \frac{\text{sin. E}}{\text{cos.}^2 \text{ E}} d. \text{E} - (\text{séc. E})^{m+n} \times \frac{1}{\text{cos.}^2 \text{ E}} d. \text{E}}{\text{tg.}^2 \text{ E}}$$

Posant la première différentielle $= 0$,

$$\text{tg. E } (m+n) (\text{séc. E})^{m+n-1} \times \text{sin. E} - (\text{séc. E})^{m+n} = 0$$

$$\text{tg. E } (m+n) \text{ sin. E} = \text{séc. E}$$

$$\text{sin.}^2 \text{ E } (m+n) = 1$$

$$\text{sin.}^2 \text{ E} = \frac{1}{m+n}$$

$$\text{log. } (\text{sin.}^2 \text{ E}) = \bar{1},6132924$$

$$\text{log. sin. E} = 9,8066462$$

$$\text{E} = 39^\circ \, 50' \, 35''$$

ce qui concorde avec nos calculs précédents. Cette valeur de E rend la deuxième dérivée positive, comme il convient.

L'angle le plus économique pour un simple poids au milieu de la portée sera évidemment le meilleur pour le cas général de poids en des points quelconques du pont.