THÉORIE DES POUTRES A ARC « BOWSTRING. »

Cas d'un contour polygonal inscrit dans un arc de parabole.

Cette travée a une tige horizontale qui sous-tend l'arc, et l'arc est un polygone inscrit dans un arc de parabole.

Le sommet de la parabole est au milieu de la travée, et la courbe passe par les extrémités de cette travée, fig. (72).

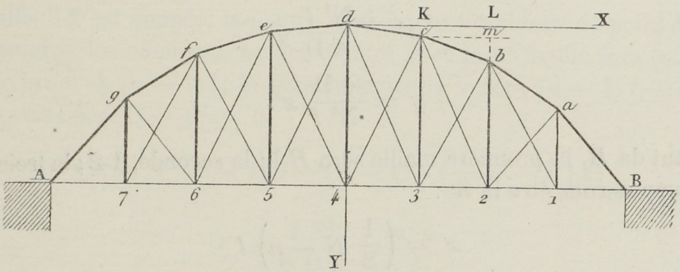

Fig. (72).

Soient :

N = le nombre de mailles de la travée,

n = le numéro d'une maille, compté à partir d'une culée,

c_n = la compression sur la corde supérieure ou arc, dans la n^e maille,

t_n = la tension sur la corde inférieure ou tige, dans la n^e maille,

F = l'effort sur une diagonale,

F_1 = l'effort sur une pièce verticale,

i = l'inclinaison de l'arc sur l'horizontale,
θ = l'angle d'une diagonale avec la verticale,
D = la flèche de l'arc,
h = la hauteur de la travée, en un point quelconque,
l = la longueur d'une maille,
p = un quelconque des poids égaux appliqués aux joints,
et V = la réaction sur le support en B.

Prenons comme origine des coordonnées le sommet de la parabole ; soient x les abscisses et y les ordonnées.

Posons
$$x' = d\,\mathrm{K}, \qquad y' = \mathrm{K}\,c,$$
$$x'' = d\,\mathrm{L}, \qquad y'' = \mathrm{L}\,b,$$

et soit $2\,p_1$, le paramètre de la parabole, l'équation générale d'une parabole est,

$$x^2 = 2\,p\,y$$

et comme B est sur la parabole, on devra avoir :

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{N}^2\,l^2 = 2\,p_1\,\mathrm{D}$$

$$2\,p_1 = \frac{\mathrm{N}^2\,l^2}{4\,\mathrm{D}},$$

et alors l'équation de la parabole considérée sera :

$$x^2 = \frac{\mathrm{N}^2\,l^2}{4\,\mathrm{D}}\,y$$

$$y = \frac{4\,\mathrm{D}}{\mathrm{N}^2\,l^2}\,x^2. \tag{1}$$

En partant de B, la première maille sera B 1 ; la seconde, 1-2 ; la troisième 2-3, que nous supposerons être la n^e :

Alors
$$x' = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{N} - n\right) l$$

et
$$x'' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{N} - n + 1\right) l.$$

Si nous transportons ces valeurs dans l'équation (1), nous aurons :

$$y' = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{N}^2}\,(\mathrm{N} - 2\,n)^2$$

et
$$y'' = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{N}^2}\,(\mathrm{N} - 2\,n + 2)^2$$

Pour les diagonales inclinées vers les culées, comme b 3, nous avons :

$$\text{tg. } \theta = \frac{3-2}{b\,2} = \frac{l}{h} = \frac{l}{D - y''}$$

$$= \frac{N^2 l}{D\,[N^2 - (N - 2\,n + 2)^2]}\,; \qquad (2)$$

pour la diagonale c 2, nous avons :

$$\text{tg. } \theta = \frac{3-2}{c\,3} = \frac{l}{D - y'} = \frac{l\,N^2}{4\,n\,D\,(N-n)},$$

$$\text{tg. } i = \frac{y'' - y'}{l} = \frac{4\,D}{l\,N^2}\,(N - 2\,n + 1)$$

Comme dans les travées à cordes parallèles, les diagonales seront des tiges ou des bras. Ce sont généralement des tiges, et nous les supposerons telles dans la suite.

Supposons que des poids égaux sont placés à tous les points 1, 2, 3, *etc.*

Alors
$$V = \frac{1}{2}(N-1)\,p\,.$$

Si la maille 3-2 est coupée, la poutre tend à tourner autour du point b. Prenons b comme origine des moments. Le poids entre B et la n[e] maille sera $(n-1)\,p$, et son bras de levier $\frac{1}{2}\,(n-1)\,l$; le bras de levier de V sera $(n-1)\,l$, et le bras de levier de t_n sera $h = D - y''$.

$$t_n h = V\,(n-1)\,l - (n-1)\,p\left(\frac{1}{2}\,n - 1\right)l\,;$$

d'où
$$t_n = \frac{l\,N^2}{8\,D\,p} = \frac{p_1\,p}{l}\,.$$

Donc l'effort sur la corde inférieure est constant pour un poids uniformément réparti.

Il en est de même, si les sommets du polygone de la corde sont également chargés.

On serait arrivé au même résultat, si on avait pris c pour origine des moments.

Enfin, il en est toujours de même, que les diagonales soient des bras ou des tiges.

Trouver l'effort sur les tiges diagonales pour des poids égaux appliqués aux joints de la corde inférieure.

Il est évident que la composante horizontale de la compression sur la corde supérieure, diminuée de la composante horizontale de la pression sur la diagonale b 3, devra égaler la tension dans la tige horizontale B A

$$c_n \cos.\ i - \mathrm{F} \sin.\ \theta = t_n = \frac{l\,\mathrm{N}^2}{8\,\mathrm{D}}\, p. \tag{3}$$

La somme des composantes verticales des mêmes efforts donne l'effort tranchant total, ou

$$c_n \sin.\ i + \mathrm{F} \cos.\ \theta = \mathrm{V} - \Sigma p = \frac{1}{2}\,(\mathrm{N} - 2\,n + 1)\,p. \tag{4}$$

Eliminant c_n entre les équations (3) et (4), nous obtiendrons :

$$\mathrm{F}.\cos.\ \theta = \frac{\frac{1}{2}\,(\mathrm{N} - 2\,n + 1 -)\frac{l\,\mathrm{N}^2}{8\,\mathrm{D}}\,\mathrm{tg}.\ \theta}{1 + \mathrm{tg}.\ \theta\ \mathrm{tg}.\ i}\, p$$

Substituons dans le second membre de cette équation les valeurs de tg. θ et de tg. i trouvées plus haut, et réduisons ; on obtient :

$$\mathrm{F} \cos. = 0$$

Donc *il n'y a pas d'effort sur les tiges diagonales pour le cas de poids égaux placés à tous les joints de la corde inférieure.*

Le même résultat est vrai, si les diagonales sont des bras.

Il est aussi évident qu'il n'y aura pas d'effort sur les diagonales, pour le cas de poids égaux appliqués aux sommets du polygone qui constitue la corde supérieure.

Il apparaît aussi comme évident que, pour des poids égaux appliqués à tous les joints de la corde inférieure, l'effort sur les pièces verticales est égal à p. Enfin, il est également clair que, pour des poids égaux sur tous les joints de la corde supérieure, il n'y aura d'effort ni dans les diagonales ni dans les verticales ; et, dans ce cas, elles ne servent seulement qu'à suspendre la corde inférieure.

Faisant F = 0 dans l'équation (3), nous aurons

$$c_n \cos.\ i = t_n\,;$$

c'est l'expression de la composante horizontale de l'effort sur la corde supérieure, et elle égale l'effort sur la corde inférieure.

Cet effort est minimum au milieu, et maximum aux extrémités de la travée.

Cas d'un poids uniformément réparti sur une partie seulement de la portée.

Prenons 3 — 2 pour la n^e maille, comme précédemment ; supposons que le poids s'étende de 3 à A, et qu'il n'existe pas de 2 à B.

Nous aurons :

$$V = \frac{(N - n)(N - n + 1)}{2 N} p$$

$$t_n = \frac{V (n - 1) l}{D - y''} = \frac{V l N^2}{4 D (N - n + 1)} .$$

$$c_n \sin. i + F \cos. \theta = V$$

$$c_n \cos. i - F \sin. \theta = t_n$$

$$F \cos. \theta = \frac{V - t_n \operatorname{tg.} i}{1 + \operatorname{tg.} \theta \times \operatorname{tg.} i} .$$

En remplaçant tg. θ et tg. i par leurs valeurs, il vient :

$$F \cos. \theta = V \frac{1 - \frac{n - 1}{D - y''} l \times \frac{4 D}{N^2 l} (N - 2 n + 1)}{1 + \frac{l}{D - y''} \times \frac{4 D}{N^2 l} (N - 2 n + 1)}$$

d'où
$$F = \frac{(N - n + 1)(n - 1)}{2 N} \times \frac{p}{\cos. \theta} .$$

Telle est l'expression de l'effort sur la tige dans la n^e maille.

n aura successivement toutes les valeurs de $n = 2$ à $n = N - 1$, et l'expression ne devient jamais négative. Il sera nécessaire en conséquence, pour résister aux poids roulant dans des directions opposées, de placer des diagonales inclinées dans les deux sens dans tous les panneaux, sauf dans les deux extrêmes.

Si on fait $n - 1 = n_1$, l'équation précédente devient :

$$F_{n+1} = \frac{(N - n_1) n_1}{2 N} \times \frac{p}{\cos. \theta} ,$$

qui est une plus simple expression et donne l'effort sur la tige dans la $(n-1)^e$ maille.

n_1 prendra toutes les valeurs de $n_1 = 3$ à $n_1 = N$.

L'effort sur la $(n - 1)^e$ verticale sera :

$$F_{n-1} = \frac{(N - n + 1 (n - 1)}{2 N} p$$

Il n'est pas nécessaire de chercher, pour ce cas, l'effort sur les cordes supérieure ou inférieure, et il est évident que cet effort sera maximum sur ces pièces, quand tous les nœuds seront chargés.

Il est évident que cela fait quelque différence que les diagonales soient des bras ou des tiges quand la travée n'est chargée qu'en partie. — Ainsi, si les nœuds 3, 4, 5, etc. jusqu'à 7, sont seulement chargés, fig. (72); si les diagonales sont des tiges, l'élément *b* 3 travaillera ; mais si les diagonales sont des bras, ce sera *c* 2 qui travaillera pour la même charge.

Quand les diagonales sont des bras, nous trouverons que l'effort sur le bras de la n^e maille est :

$$F = \frac{(N-n)\,n}{2\,N} \times \frac{p}{\cos.\,\theta}. \tag{5}$$

dans cette expression, n peut prendre toutes les valeurs de $n = 2$ à $n = N - 1$.

Exemple. — Supposons $N = 8$, $D = 2\,l$.

De la valeur θ, trouvée plus haut et donnée par sa tangente, pour chaque bras particulier, on déduit le tableau suivant :

VALEURS de n	VALEURS de θ	VALEURS de Cos. θ	VALEURS de F
2 ou *b* 1	33° 41′	0,6587	0,9013 p.
3 ou *c* 2	28° 4′	0,8824	1,0624 p.
4 ou *d* 3	26° 34′	0,8944	1,1182 p.
5 ou *e* 4	28° 4′	0,8824	1,0624 p.
6 ou *f* 5	33° 41′	0,6587	0,9013 p.
7 ou *g* 6	48° 48′	0,8321	0,6641 p.

On voit que les diagonales également distantes du milieu sont également comprimées ; et, par conséquent, l'effort maximum sur les diagonales d'un même panneau sera à peu près le même, quand la plus longue ou la plus petite travaille.

Les efforts sur les verticales

$$F_1 = \frac{(N-n)n}{2\,N}\,p,$$

pour un poids partiel uniforme, seront moindres que p, quand $N < 8$, et, dans ce cas, les efforts seront maxima, quand les poids seront appliqués dans la direction même de ces verticales.

Pour $N > 8$, les efforts dus à un poids partiel uniforme excèdent p.

Combinaison du système triangulaire et de l'arc parabolique.

Supposons la travée fig. (73) divisée en mailles égales; les sommets des triangles constituant la travée seront les points de rencontre avec l'arc parabolique des verticales élevées au milieu des mailles. La corde supérieure sera le contour polygonal qui joindra les sommets des triangles.

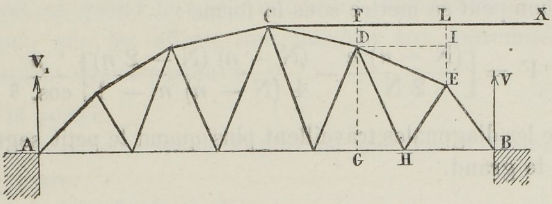

Fig. (73).

On peut démontrer que, dans ce cas, quand tous les nœuds de la corde supérieure sont chargés, il n'y a pas d'effort dans les côtés des triangles. De même, quand tous les nœuds de la corde inférieure sont chargés, les triangles servent seulement à supporter le poids de la corde supérieure, et les efforts sur leurs côtés de la travée seront à peu près $\frac{1}{2}$ p cos. θ, mais pas exactement, parce que celles situées de chaque côté du poids ne sont pas également inclinées.

Pour le cas d'un poids partiel, supposons que chacun des joints de la corde inférieure, excepté H, soit chargé d'un poids p. Supposons que la maille en G est la n^e. Nous aurons pour la diagonale E H les équations suivantes :

Inclinaison de D E sur l'horizontale :

$$\text{tg. } i = \frac{4\,\text{D}}{\text{N}^2\,l}(\text{N} - 2\,n - 2);$$

Angle de E H avec la verticale :

$$\text{tg. } \theta = \frac{l\,\text{N}^2}{2\,\text{D}\,[\text{N}^2 - (\text{N} - 2\,n + 1)]^2};$$

Réaction sur le support en B :

$$\text{V} = \frac{(\text{N} - n)\,(\text{N} - n + 1)}{2\,\text{N}} \times p$$

Effort sur E H :

$$F = \frac{(N-n)(N-n+1)}{2N}\left[\frac{4n^2-1}{4nN-4n^2-1}\right]\frac{p}{\cos.\ \theta}.$$

Poids partiel sur la corde supérieure. Si tous les nœuds de D à A sont chargés d'un poids p, nous déduirons facilement que l'effort sur E H est :

$$F = \frac{(N-n)^2}{2N}\left[\frac{4n^2-1}{4nN-4n^2-1}\right]\frac{p}{\cos.\ \theta},$$

et la même équation est vraie pour D H, sauf la valeur de cos. θ qui n'est pas la même.

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$F = \left[\frac{(N-n)\,n}{2N} - \frac{(N-n)(N-2n)}{4(N-n)\,n-1}\right]\frac{p}{\cos.\ \theta}$$

qui fait voir que les diagonales travaillent plus quand le petit segment est chargé que quand c'est le grand.

Efforts sur la corde supérieure trouvés par les moments.

Les efforts sur la corde supérieure peuvent se déterminer en résolvant les équations :

$$c_n \sin.\ i + F\cos.\ \theta = V$$
$$c_n \cos.\ i - F\sin.\ \theta = t_n$$

en tenant compte que la valeur du second membre de la première de ces équations est la valeur propre pour le cas particulier.

Elle est correcte pour un certain poids partiel, mais si le poids s'avance, d'une façon uniforme ou non, l'équation devient :

$$c_n \sin.\ i + F\cos.\ \theta = V - \Sigma\, p.$$

Mais il est généralement préférable de trouver la valeur de c_n directement par les moments. Ainsi, dans la fig. (72) pour trouver l'effort sur $c\ b$, si cette maille est chargée, et si les diagonales sont des tiges, la travée tend à tourner autour du point 3. Prenons 3 comme l'origine des moments, menons une perpendiculaire de 3 à $c\ b$, et appelons h' sa longueur.

$$h' = h\cos.\ i$$

h étant la longueur c 3.

D'après le principe des moments, nous aurons :

$$c_n \times h' = V \times B\,3 - p_1 \times (3 - 1) - p_2 \times (3 - 2).$$

Dans cette expression p_1 est le poids en 1 et p_2 le poids en 2.

Trouver la forme de la corde supérieure, de façon qu'elle travaille uniformément pour un poids réparti uniformément sur la travée.

Nous avons vu, quand les cordes sont horizontales, que le plus grand effort est au milieu de la portée, et quand la corde inférieure est horizontale et la corde supérieure parabolique, que les efforts sont maxima aux extrémités. Peut-on faire que les efforts soient égaux partout ?

Soit L = A B = la portée.

d = O P = le bras de levier de l'effort sur une maille de la corde supérieure.

d_1 = C E = la valeur de d au milieu.

N = le nombre de mailles de la travée.

l = la longueur de chaque maille.

n = le numéro d'une maille compté à partir d'une extrémité.

m = le rang de la maille centrale ($\frac{1}{2}$ N, si N est pair).

c = la compression sur la corde supérieure.

p = le poids appliqué à chaque nœud.

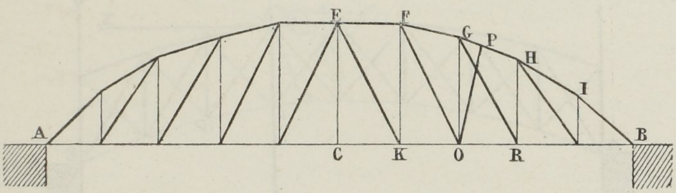

Fig. (74).

Supposons que la maille G H, fig. (74) est chargée, prenons l'origine des moments en O, nous avons :

$$c\,d = \frac{1}{2}\,(N - 1)\,p\,n\,l - \frac{1}{2}\,(n - 1)\,p\,n\,l$$
$$= \frac{1}{2}\,(N - n)\,p\,n\,l.$$

Pour le milieu de la portée l'équation devient :

$$c\,d_1 = \frac{1}{2}\,(N - m)\,m\,p\,l$$

éliminant c et résolvant par rapport à d,

on aura $$d = \frac{(N - n)\, n\, d_1}{(N - m)\, m}$$

Donnons-nous N, d_1, et L ; alors l sera connu, on déduira de l'équation précédente les valeurs successives de d. Alors le polygone se construira comme il suit. Divisons la portée A B en portions égales à l. En son milieu C, élevons une perpendiculaire de longueur d_1. Supposons que les diagonales sont des bras ; alors E K travaillera et E F sera parallèle à A B. Élevons la verticale K F et menons F O. Du point O comme centre avec un rayon égal à d (valeur calculée dans ce cas pour $n = 4$), décrivons un arc G P, et de F menons une tangente à cet arc au point de rencontre avec la verticale passant par O. Menons le bras G R et faisons de même pour I. L'effort sur I B ne sera pas le même que celui entre I à E.

Dans ce cas, les efforts sur la corde inférieure seront plus grands près des extrémités qu'au milieu.

Cas de deux cordes courbes.

Si les deux cordes sont courbes, comme dans la fig. (75), nous trouverons les

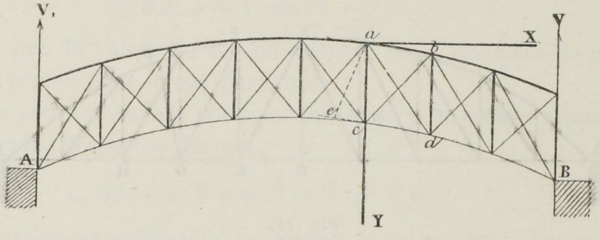

Fig. (75).

efforts sur les cordes par le principe des moments ; ainsi l'effort sur la maille $c\ d$ sera trouvé en prenant l'origine des moments en a. Menons $a\ e$ perpendiculaire à la direction de $d\ c$, nous aurons :

$$t_n \times a\ e = V \times a\ x - \Sigma\ p\ x$$

($a\ x$ étant la distance horizontale de a vers V et $\Sigma\ p\ x$ l'expression générale pour le moment de tous les poids entre a et B).

D'une manière analogue, nous trouverons l'effort sur $a\ b = c_n$.

Alors dans l'équation :

$$F \cos. \theta = \frac{V - t_n \operatorname{tg.} i}{1 + \operatorname{tg.} \theta \operatorname{tg.} i}$$

nous changerons, si c'est nécessaire :

$$V \text{ en } V - \Sigma p.$$

Après ce changement, cette équation donnera l'effort sur les diagonales, en remplaçant par leurs valeurs θ et i.

De cette manière, une travée simple quelconque peut être calculée, mais il n'est pas facile de donner les formules générales qui simplifieraient la solution.