CALCUL DES MÊMES POUTRES PAR UNE MÉTHODE PLUS SIMPLE

EXAMENS SUCCESSIFS DE CES DIFFÉRENTES POUTRES.

Comme on l'a vu dans le précédent chapitre, tous les systèmes de ponts dont il a été question dans la partie théorique peuvent dériver du système triangulaire ou Warren's Girder; mais nous croyons très-utile et même beaucoup plus expéditif dans la pratique d'étudier tous ces systèmes séparément au moyen d'une méthode élémentaire, ne laissant aucun doute sur le mode d'action des forces dans une travée, et nous ne saurions mieux faire que de suivre la voie tracée par M. Samuel H. Shreve. Sa méthode est d'une très-grande simplicité et n'exige que des connaissances mathématiques fort limitées.

Travée simple reposant sur deux appuis à ses extrémités et chargée seulement au centre

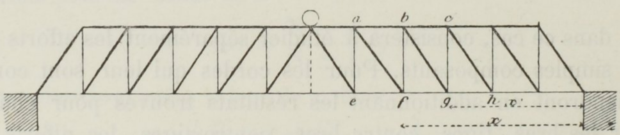

Fig. (38).

Soit w = le poids au milieu,

l = longueur de la travée,

d = hauteur de la travée,

x et x' = distances horizontales partant d'un des appuis aux extrémités d'une maille,
H et H' = forces horizontales sur chaque corde aux extrémités de x et x',
V = forces verticales sur les bras ou tiges.

Il est clair que les forces qui se développent sur les cordes sont une compression sur la corde supérieure et une tension sur la corde inférieure, et que la réaction sur les appuis sera $\frac{w}{2}$.

Supposons la poutre coupée selon $b\,f$; la partie droite sera tenue en équilibre par la réaction sur l'appui de droite et par les forces qui se développent en b et en f.

Et, si nous prenons le moment par rapport à f, en appelant H la force qui agit sur $b\,a$, nous aurons :

$$\mathrm{H}\,d = \frac{w\,x}{2}, \tag{1}$$

et

$$\mathrm{H} = \frac{w\,x}{2\,d}; \tag{2}$$

on voit que H varie en raison directe de x et devient un maximum pour $x = \frac{l}{2}$, variant en raison inverse de la hauteur de la poutre, c'est-à-dire : d.

La force H, qni est une compression, agit à gauche sur $a\,b$ et à droite sur $b\,c$ et $b\,g$. La force qui agit sur $b\,g$ se trouvera de la manière suivante : prenons le moment par rapport à g. Nous aurons comme précédemment

$$\mathrm{H}' = \frac{w\,x'}{2\,d}, \tag{3}$$

pour la compression sur $b\,c$ qui est moindre, comme on le voit, que sur $a\,b$

En retranchant maintenant l'équation (3) de l'équation (2), nous aurons :

$$\mathrm{H} - \mathrm{H}' = \frac{w}{2\,d}(x - x'), \tag{4}$$

qui indique l'excès de compression de $a\,b$ sur $b\,c$, ce qui produit un excès de compression en b, qui devra être balancé par les forces sur $b\,f$ et $b\,g$, les seuls membres venant se réunir au point b. Il est clair que la force sur $b\,g$ sera une compression, et celle sur $b\,f$ une tension. La composante horizontale de la première est naturellement H — H′ et la composante verticale de la seconde sera suivant $b\,f$.

Pour avoir la composante verticale selon $b\,f$, supposons que $b\,f$, $b\,c$, $b\,g$, représentent les forces dans ces mêmes directions, et nous aurons ainsi :

$$\frac{b\,c}{b\,f} = \frac{x - x'}{d}$$

c'est-à-dire
$$\frac{x - x'}{d} = \frac{\frac{w}{2\,d}(x - x')}{V}$$

d'où
$$V = \frac{w}{2}. \tag{5}$$

Ainsi, comme on le voit, V est une constante et est indépendante de la longueur de la travée et de sa hauteur, et sa valeur est celle de la réaction sur les appuis.

La force sur $g\,b$ sera, en faisant :

$$\frac{d}{b\,g} = \frac{\frac{w}{2}}{x}$$

$$x = \frac{w\,b\,g}{2\,d}$$

d'où l'on voit que cette force est constante si les mailles sont égales et qu'elle varie selon la hauteur de la travée.

La tension sur la corde inférieure sera trouvée de la même manière que pour la corde supérieure. En prenant le moment relativement au point b, nous aurons :

$$H = \frac{w\,x}{2\,d}$$

indiquant la tension en f, qui agit sur $f\,g$. Si nous prenons le moment par rapport à c, nous aurons pour la tension en g

$$H' = \frac{w\,x'}{2\,d}$$

qui agit selon $g\,h$.

Maintenant, la tension sur $f\,g$ est plus grande que la tension sur $g\,h$, et pour que l'équilibre se produise, il faudra une pression sur $b\;g$ et une tension sur $c\;g$, qu'on déterminera comme nous l'avons indiqué précédemment.

Ainsi donc la formule (2) donnera la valeur de la pression sur $a\;b$ pour la corde supérieure, et la valeur de la tension $f\,g$ sur la corde inférieure.

Travée simple reposant librement sur deux appuis à ses extrémités et chargée en un point situé entre le milieu et la culée

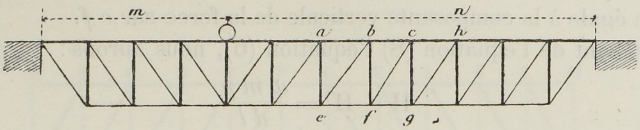

Fig. (39).

Soit w = le poids en un point quelconque,
l = longueur de la travée,
d = hauteur de la travée,
x = distance d'un des appuis à l'extrémité d'une maille,
p = longueur d'une maille,
m = distance du poids à l'appui de gauche,
n = distance du poids à l'appui de droite,
H et H' = forces horizontales sur les cordes,
V = forces verticales sur les bras ou tiges,
F = forces sur les diagonales.

Il est clair que la réaction sur l'appui de droite est $\frac{w\,m}{l}$. Supposant la poutre coupée selon $b\,f$, la partie de droite sera maintenue en équilibre par la réaction sur l'appui de ce côté et par les forces qui se développent en b et en f. Donc, si nous prenons le moment par rapport à f, l'équilibre devra être défini par la relation :

$$\mathrm{H} = \frac{w\,m\,x}{d\,l}, \tag{6}$$

H est la pression sur $b\,c$, et l'on voit qu'elle est en raison directe de x, et que cette force est maxima pour $x = n$.

Pour la partie de gauche, nous aurons en procédant de même :

$$\mathrm{H} = \frac{w\,n\,x}{d\,l}, \tag{7}$$

x étant compté à gauche.

Ces deux dernières formules donnent également la tension sur la corde inférieure.

Si l'on prend le moment pour une maille plus rapprochée de l'extrémité de droite, telle que $c\,g$, nous aurons :

$$\mathrm{H}' = \frac{w\,m\,(x-p)}{d\,l}, \tag{8}$$

valeur moindre que celle de H donnée par la formule (6), d'où l'on voit que la pression sera plus grande sur $b\ c$ que sur $c\ h$. Cet excès de pression sur $b\ c$ devra être équilibré par une tension sur $f\ c$. La force sur $g\ c$ sera, en conséquence, une compression égale à la composante verticale de la force sur $c\ f$.

En retranchant de l'équation (8) l'équation (6), nous aurons :

$$\mathrm{H} - \mathrm{H}' = \frac{w\,m\,p}{d\,l}, \tag{9}$$

c'est-à-dire la composante horizontale de la force sur $c\ f$, soit une constante indépendante de la valeur de x.

Pour la partie de gauche, nous aurons d'une manière analogue :

$$\mathrm{H} - \mathrm{H}' = \frac{w\,n\,p}{d\,l}.$$

La force verticale V sera trouvée comme antérieurement par la proportion :

$$\frac{p}{d} = \frac{\frac{n\,m\,p}{d\,l}}{\mathrm{V}}$$

$$\text{d'où } \mathrm{V} = \frac{w\,m}{l} \tag{10}$$

qui sera la compression sur la partie située à la droite du poids agissant sur la travée, et, en procédant par analogie, nous aurons :

$$\mathrm{V} = \frac{w\,n}{l} \tag{11}$$

pour la partie située à la gauche.

De là, nous tirons cette conséquence que la force verticale, sur les segments d'une poutre chargée en un seul point, est égale à la réaction sur la culée, produite par le même segment.

La tension f sur les diagonales s'obtiendra au moyen de la proportion :

$$\frac{d}{b\,c} = \frac{\frac{w\,m}{l}}{\mathrm{F}} ;$$

$$\text{d'où } \mathrm{F} = \frac{w\,m\,(b\,c)}{d\,l}, \tag{12}$$

qui sera la tension sur les diagonales de la partie droite du poids. D'une manière analogue, nous aurons la tension sur les diagonales de la partie située à la gauche du poids.

Travée uniformément chargée sur toute sa longueur.

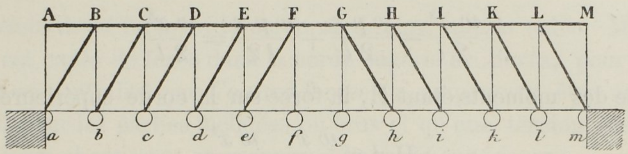

Fig. (40).

Soit w = poids total uniformément réparti sur toute la travée,
l = longueur de la travée,
d = hauteur de la travée,
x = distance de l'extrémité d'une maille à une culée.
$u = x - \frac{P}{2}$,
H = force horizontale,
V = force verticale,
F = forces sur les diagonales.

Nous considérons dans ce cas que le poids est concentré à l'extrémité de chaque maille, et que, par conséquent, aux culées, le poids sur les mailles extrêmes ne sera que de la moitié du poids d'une maille quelconque.

La réaction sur les appuis sera : $\frac{w}{2}$.

Si nous supposons la poutre coupée selon $H\,h$, la partie droite de la poutre sera maintenue en équilibre par la réaction sur la culée de droite et par le poids uniformément réparti sur $h\,m$, et aussi par les forces sur les cordes aux points H et h.

Ainsi que nous l'avons dit déjà, le poids au point m, c'est-à-dire sur la culée, sera le poids de la moitié d'une maille, soit $\frac{w\,p}{2\,l}$, et son moment relativement au point H sera $\frac{w\,p}{2\,l}\,x$.

Le moment du poids au point h est évidemment nul, puisque ce point est l'origine des moments.

Le moment du reste du poids qui agit sur la poutre, c'est-à-dire $(x - p)\frac{w}{l}$, sera :

$$\frac{w}{l}(x-p)\frac{x}{2} = \frac{w\,x^2}{2^2\,l} - \frac{w\,p\,x}{2\,l};$$

par conséquent, le moment du poids total égalera :

$$\frac{w\,x^2}{2\,l} - \frac{w\,p\,x}{2\,l} + \frac{w\,p\,x}{l\,2} = \frac{w\,x^2}{2\,l}$$

donc l'origine des moments étant H, la force sur la corde supérieure au point H sera :

$$\mathrm{H}\,d = \frac{w\,x}{2} - \frac{w\,x^2}{2\,l}$$

$$\mathrm{H} = \frac{w\,x}{2\,d} - \frac{w\,x^2}{2\,l\,d}, \qquad (14)$$

formule donnant la force sur les cordes supérieure et inférieure.

En examinant la relation (14), on verra que H sera maxima pour la valeur de $x = \frac{l}{2}$, soit au centre de la travée, où encore il sera :

$$\mathrm{H} = \frac{w\,l}{8\,d}.$$

Dans le cas que nous avons considéré, alors qu'un seul poids est placé à distances inégales sur la travée, si nous supposons que $m = n$, c'est-à-dire que le poids soit au milieu, les équations (6) et (7) deviendront :

$$\mathrm{H} = \frac{w\,l}{4\,d}$$

soit : la force sur les cordes, quand le poids est tout entier appliqué au milieu, est double de ce qu'elle est lorsqu'il est uniformément réparti.

Prenons la force H qui s'exerce à une distance x de l'une des culées, et la force H' qui s'exerce à la distance $x - p$ de la même culée, nous aurons :

$$\mathrm{H} = \frac{w\,x}{2\,d} - \frac{w\,x^2}{2\,d\,l}$$

$$\mathrm{H}' = \frac{w\,(x-p)}{2\,d} - \frac{w\,(x-p)^2}{2\,d\,l};$$

en retranchant la seconde de ces équations de la première, nous obtiendrons :

$$\mathrm{H} - \mathrm{H}' = \frac{w\,x}{2\,d} - \frac{w\,(x-p)}{2\,d} - \frac{w\,x^2}{2\,d\,l} + \frac{w\,(x-p)^2}{2\,d\,l} = \frac{w\,p}{2\,d} - \frac{w\,p}{d\,l}\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

et puisque $$x - \frac{p}{2} = u$$

nous aurons: $$\mathrm{H} - \mathrm{H}' = \frac{w\,p}{2\,d} - \frac{w\,p\,u}{d\,l}, \tag{17}$$

qui donne l'excès de la force de la corde supérieure vers la culée. Maintenant il est clair que cet excès de force dans la corde supérieure devra, pour que l'équilibre existe, être neutralisé par d'autres forces qui ne peuvent être naturellement qu'une pression sur les parties inclinées ou bras et qu'une tension sur les parties verticales ou tiges aboutissant en ce point à la corde supérieure.

La force verticale V de tension, suivant la même méthode et par les mêmes considérations, sera donnée par la proportion :

$$\frac{p}{d} = \frac{\frac{w\,p}{2\,d} - \frac{w\,p\,u}{d\,l}}{\mathrm{V}},$$

donc $$\mathrm{V} = \frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l} \tag{18}$$

la force verticale sera donc égale à la réaction sur les appuis, moins le poids entre le point qu'on considère et la culée la plus rapprochée.

On observera que, si dans cette formule $u = \frac{l}{2}$, c'est-à-dire la moitié de la travée, le premier membre sera nul et que, par conséquent, il n'y aura pas de force verticale à ce point.

La force, c'est-à-dire la pression sur les diagonales ou bras, s'obtiendra de la manière suivante avec la proportion

$$\frac{d}{\mathrm{H}\,i} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{F}} \text{ d'où } \mathrm{F} = \frac{\mathrm{H}\,i\,\mathrm{V}}{d} \tag{19}$$

c'est-à-dire que la pression sur les parties inclinées sera obtenue en multipliant la force verticale V par la longueur de la diagonale et divisant le tout par la hauteur de la travée.

Nous avons vu qu'au milieu il n'existe pas de force verticale dans le cas d'une poutre uniformément chargée; prenons donc le poids de la première maille suivante en g, nous trouverons qu'il produit une tension égale à son propre poids sur G g et une compression égale à sa composante sur G h, et le poids en h viendra s'ajouter à la composante verticale de G h et, ainsi de suite, on doit faire le même raisonnement pour H i; on verra alors que la force sur I i sera égale à la somme des poids des deux mailles précédentes, plus le poids en i, et ainsi de suite.

Considérant maintenant le poids sur la corde supérieure, et le plaçant en G, il est clair qu'il n'y aura pas de force sur G g, mais la force verticale ou la composante verticale de la force sur G h sera égale à la pression exercée en G, qui donnera la tension sur H h. Si les bras étaient inclinés en sens opposé, comme dans la fig. (41), représentant une maille à la droite du centre, et si le poids

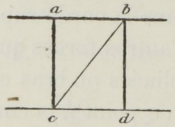

Fig. (41).

était placé sur la corde inférieure, il est évident qu'il n'y aurait pas de force sur a c et la composante verticale de b c serait égale à la force sur b d. Si le poids est placé sur la corde supérieure, la force verticale sur a c sera évidemment égale à celle sur b c. Donc, en tous cas, la force verticale est constante dans les bras parmi les poids.

D'où il résulte que la force verticale, ou composante verticale, reste toujours la même, que la poutre soit chargée à la partie inférieure ou à la partie supérieure, et quel que soit le sens de l'inclinaison des diagonales.

Par conséquent, l'équation (18) donnera la force verticale ou la composante verticale de la force sur une diagonale dont le milieu est à une distance u de la culée.

Observons que l'équation

$$V = \frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l}$$

est l'équation d'une ligne droite, et si nous la construisons en prenant u pour

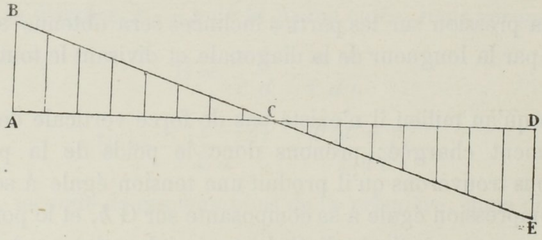

Fig. (42).

abcisse et V pour ordonnée, nous obtiendrons la fig. (42) dont les verticales représentent les différentes valeurs de V, et nous avons ainsi : $AB = DE = \frac{w}{2}$ et $AD = l$; méthode très-simple pour trouver les forces verticales.

Exemple. — Supposons que la fig. (40) représente une travée de 110 pieds de longueur, 12 $\frac{1}{2}$ pieds de hauteur, divisée en 11 panneaux d'égale longueur, et chargée à la corde inférieure d'un poids de 1 $\frac{1}{2}$ tonne le pied courant ou d'un poids total de 165 tonnes.

En conservant les mêmes notations qu'antérieurement, nous aurons :

$$
\begin{aligned}
l &= 110 \text{ pieds } (33^{m}527),\\
d &= 125 \quad — \quad (38^{m}099),\\
w &= 165 \text{ tonnes},\\
p &= 10 \text{ pieds } (3{,}048),
\end{aligned}
$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation qui donne la force horizontale sur les cordes, nous aurons :

$$
H = \frac{w\,x}{2\,d} - \frac{w\,x^2}{2\,d\,l} = \frac{165\,x}{2 \times 125} - \frac{165\,x^2}{2 \times 12{,}5 \times 110} = 6{,}6\,x - 0{,}06\,x^2
$$

donc les forces horizontales sur les cordes seront réparties comme suit :

Valeurs de x . . .	10 ou 100	20 ou 90	30 ou 80	40 ou 70	50 ou 60
Forces en tonnes.	60	108	144	168	180
Compression sur.	K L et B C	I K et C D	H I et D E	G H et E F	F G
Tension sur. . . .	$l\,m$ et $a\,b$	$k\,l$ et $b\,c$	$i\,k$ et $c\,d$	$h\,i$ et $d\,a$	$e\,f$, $f\,g$ et $g\,h$

Pour trouver la force sur les tiges verticales, nous n'avons qu'à prendre l'équation :

$$
V = \frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l}
$$

et en substituant les valeurs comme plus haut, nous aurons :

$$
V = 82{,}5 - 15.u
$$

et les différentes valeurs de u seront 5, 15, 25, 35 et 45; donc l'on obtiendra le tableau suivant :

Valeurs de u. . .	5	15	25	35	45
Forces en tonnes.	75	60	45	30	15
Tension sur. . . .	B b et L I	C c et K k	D d et I i	E e et H h	F f et G g

Quand $u = 55$, $V = 0$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de force au milieu.

Pour la pression sur les diagonales, nous avons vu qu'elle s'obtenait en multipliant la longueur de la diagonale par la force sur les tiges verticales et en divisant ce produit par la hauteur de la poutre. Et comme, dans le cas présent, la longueur de la poutre est de 16 pieds, en remplaçant dans l'équation (19) V par sa valeur, nous aurons :

$$F = 105{,}6 - 1{,}92\,u$$

donc, nous formerons le tableau suivant :

Valeurs de u. . .	5	15	25	35	45
Forces en tonnes.	96	76,8	57,6	38,4	19,2
Compression sur.	L m et B a	K l et C b	I k et D c	H i et E d	G h et F e

Travée chargée à partir d'une culée et seulement sur une partie de sa longueur.

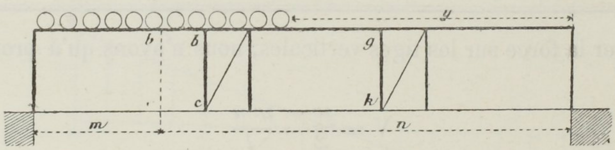

Fig. (43).

Soit w = le poids total uniformément réparti sur la travée, et s'étendant de l'une des culées jusqu'à une distance égale à $2\,m$,

= longueur de la travée,

d = hauteur de la travée,

p = longueur d'une maille,
m = distance du centre de gravité du poids à l'extrémité chargée,
n = distance du centre de gravité du poids à l'extrémité non chargée,
y = longueur de la partie non chargée,
x = distance d'une maille quelconque à la culée non chargée,
H = force horizontale sur les cordes,
V = force verticale,
F = force sur les parties inclinées ou diagonales.

Il est clair que la réaction sur la culée de droite est $\frac{w\ m}{l}$ et, si nous supposons la poutre coupée selon $g\ k$, la partie non chargée à la droite de cette section sera tenue en équilibre par la réaction sur la culée de droite et par les forces qui se développent en $g\ k$, et si nous prenons le moment par rapport à k, nous aurons :

$$H = \frac{w\ m\ x}{d\ l} \tag{20}$$

qui sera la force développée en g, soit une pression, et qui sera aussi l'expression de la force en k, soit une tension.

Il est évident que la force verticale sur la partie non chargée sera toujours $\frac{w\ m}{l}$, c'est-à-dire la réaction sur la culée non chargée.

Nous avons vu que w exprime le poids de la charge sur la travée. Afin de rendre les opérations plus faciles, nous exprimerons ce poids en fonction d'un poids total w sur toute la travée ayant la même valeur linéaire que w.

Donc nous aurons :

$$w = \frac{w}{l}(l - y),$$

en observant que

$$m = \frac{l - y}{2}$$

nous aurons :

$$\frac{w\ m}{l} = \frac{w'\ (l - y)^2}{2\ l}.$$

Considérant maintenant la force horizontale sur la partie chargée, nous supposerons une section selon $b\ c$. Le segment à droite de cette section sera tenu en équilibre par la réaction de la culée de droite, par le poids sur $x - y$ qui est égal à $\frac{w'}{l}(x-y)$ et par les forces qui se développent en b et en c. Prenons le moment relativement au point c se trouvant à une distance x de la culée de droite; $\frac{x-y}{2}$ étant la distance du point c, centre de gravité du poids sur $x-y$, nous aurons :

$$\mathrm{H}\,d=\frac{w\,(l-y)^2\,x}{2\,l^2}-\frac{w'}{l}(x-y)\frac{x-y}{2}$$

d'où
$$\mathrm{H}=\frac{w'\,(l-y)^2\,x}{2\,d\,l^2}-\frac{w'\,(x-y)^2}{2\,d\,l} \qquad (21)$$

qui sera la compression sur la corde supérieure en b, ou bien l'expression de la force sur la corde inférieure en c.

Pour une maille plus rapprochée de l'extrémité vers la culée de droite, nous aurons :

$$\mathrm{H}'=\frac{w'\,(l-y)^2\,(x-p)}{2\,d\,l^2}-\frac{w'\,(x\,p\,y)^2}{2\,d\,l}. \qquad (22)$$

La force verticale, sur la partie chargée, s'obtiendra d'une façon analogue, en soustrayant l'équation (22) de l'équation (21), et nous aurons :

$$\mathrm{H}-\mathrm{H}'=\frac{w'\,(l-y)^2\,p}{2\,d\,l^2}-\frac{w'\,p}{d\,l}\left(x-\frac{p}{2}\right)-y.$$

Maintenant il est clair que : $\frac{p}{d}=\frac{\mathrm{H}-\mathrm{H}'}{\mathrm{V}}$,

d'où
$$\mathrm{V}=\frac{w'\,(l-y)^2}{2\,l^2}-\frac{w'}{l}\left(x-\frac{p}{2}-y\right);$$

en faisant
$$x-\frac{p}{2}=u,$$

nous aurons :
$$\mathrm{V}=\frac{w'\,(l-y)^2}{2\,l^2}-\frac{w'}{l}\left(u-y\right). \qquad (23)$$

Observant cette équation, on voit que V augmente quand $u-y$ diminue, et devient un maximum quand $u-y$ devient nul, et, dans ce cas, nous aurons :

$$\mathrm{V}=\frac{w'\,(l-y)^2}{2\,l^2}$$

c'est-à-dire V devient égal à la réaction sur la culée de droite.

Observons aussi que la valeur numérique de V, diminue quand $u - y$ augmente; il y aura donc un point où V sera nul ; pour trouver ce point, faisons, dans l'équation (23), V = 0, et nous aurons :

$$\frac{w'(l-y)^2}{2l^2} = \frac{w'}{l}(u-y),$$

et, de cette équation, en tirant la valeur de u, nous aurons :

$$u = \frac{l^2 + y^2}{2l},$$

qui sera la distance de la culée de droite, d'où il n'y aura pas de force verticale ; à la droite de ce point, V a une valeur positive, et à la gauche, une valeur négative ; donc, la force verticale passera à l'autre culée.

En dérivant l'équation (21), afin de trouver la valeur maxima de H, nous aurons :

$$x = \frac{l^2 + y^2}{2l},$$

d'où l'on voit que ce point maximum de force horizontale coïncide avec le point où la force verticale est 0.

Dans l'équation (23), u ne peut être égal à $\frac{l^2 \times y^2}{2l}$ qu'alors que :

$$\frac{w'(l-y)}{2l^2} = \frac{w'}{l}(u-y),$$

c'est-à-dire jusqu'à ce que nous ayons passé une quantité de poids égale à celle portée par la culée, d'où résulte la règle suivante :

Dans chaque travée chargée partiellement ou en totalité, il existe un point où la force verticale est nulle, et où la force horizontale est maxima, et ce poin divise le poids en deux parties égales, à la réaction sur les cu ées.

Donc, étant connue la réaction sur les culées, on n'a qu'à compter, de l'extrémité où commence le poids, un poids égal à celui qui agit sur la culée, et on aura ainsi le point où la force verticale est 0.

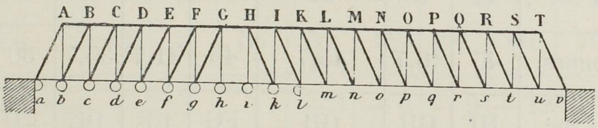

Fig. (44).

Exemple. — Supposons une travée de 80 pieds de longueur, 6 pieds de hauteur, divisée en 20 panneaux égaux, chargée à la corde inférieure d'un poids de

25 tonnes réparti uniformément sur la moitié de la travée, nous aurons donc :

$w = 25$ tonnes.
$w' = 50$ tonnes.
$l = 80$ pieds.
$d = 6$ pieds.
$p = 4$ pieds.
$y = 40$ pieds.

la longueur des bras inclinés = 7, 2 pieds.

L'équation pour les forces horizontales dans la partie non chargée, est :

$$H = \frac{w' x (l - y)^2}{2 d l^2} = \frac{50 x (80 - 41)^2}{2 \times 6 \times 80^2} = 1{,}0417\ x ;$$

d'où le tableau suivant des forces sur les cordes.

Valeurs de x. . .	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
Forces en tonnes.	4,2	8,3	12,5	16,6	20,8	25	29,2	33,3	37,5	41,7
Compression sur.	ST	RS	QR	PQ	OP	NO	MN	LM	KL	IK
Tension sur . . .	$u\ v$	$t\ u$	$s\ t$	$p\ s$	$q\ r$	$p\ q$	$o\ p$	$n\ o$	$m\ n$	$l m$

et l'équation pour les forces horizontales, dans la partie chargée, est :

$$H = \frac{w' x (l - y)^2}{2 d l^2} - \frac{w' (x - y)^2}{2 d l} = \frac{50 x (80 - 40)^2}{2 \times 60 \times 80} -$$

$$- \frac{50 (x - 40)^2}{2 \times 60 \times 80} = 1{,}0417\ x - 0{,}0521\ (x - 40)^2,$$

d'où le tableau suivant :

Valeurs de x . . .	44	48	52	56	60	64	68	72	76
Forces en tonnes..	45	46,7	46,7	45	41,7	36,7	30	21,7	11,7
Compression sur .	HI	GH	GH	FG	EF	DE	CD	BC	AB
Tension sur . . .	$k\ l$	$i\ k$	$h\ i$ et $g\ h$	$f\ g$	$e\ f$	$d\ e$	$c\ d$	$b\ c$	$a\ b$

L'équation pour la force verticale sur la partie non chargée, est :

$$V = \frac{w'(l-y)^2}{2\,l^2} = \frac{50\,(80-40)^2}{2 \times (80)^2} = 6{,}25 \text{ tonnes,}$$

soit la tension sur toutes les tiges verticales de K l à T u inclusivement, et la composante verticale de la force, qui résulte de leur inclinaison, compression, dans les bras inclinés de la partie non chargée.

F = V × la longueur de la diagonale divisée par $d = \frac{7,\,2\ V}{6} = 7,5$ tonnes qui est la compression sur ces diagonales depuis K m jusqu'à T u inclusivement.

L'équation, pour la force verticale dans la partie chargée, est :

$$V = \frac{w'(l-y)^2}{2\,l^2} - \frac{w'(u-y)}{l} = 31{,}25 - 0{,}625\,u.$$

D'où nous formons le tableau suivant pour les tensions dans les tiges sur la partie chargée :

Valeurs de u . .	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78
Forces en tonnes.	5	2,5	0	— 2,5	— 5	— 7,5	— 10	— 12,5	— 15	— 17,5
Tension sur. . .	l k	H i		G h	F g	E f	D e	C d	B c	A b

Du tableau ci-dessus, il résulte clairement qu'il n'existe pas de force verticale dans la maille G H h i, et qu'à la gauche de cette maille, la force prend le signe moins, ce qui montre que le poids passe alors sur la culée opposée à celle à partir de laquelle u est mesuré. On remarque également que la force horizontale est la plus considérable dans la même maille, d'où il suit que c'est de ce point que les bras doivent s'incliner dans des directions opposées aux culées.

En multipliant la force verticale par la longueur de la diagonale, et en divisant

Valeurs de u. . .	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78
Forces en tonnes.	6	3	0	— 3	— 6	— 9	— 12	— 15	— 18	— 21
Compression sur.	I l	H k		G g	F f	E e	D d	C c	B b	A a

le produit par la hauteur de la travée, comme nous l'avons déjà fait, nous aurons les pressions sur les diagonales, dans la partie chargée, résumées dans le tableau ci-contre :

Poutre chargée uniformément sur toute sa longueur et assujettie à une charge roulante uniforme.

Soit w = le poids uniforme sur toute la longueur,
w' = la charge,
l = la longueur de la travée,
d = la hauteur de la travée,
p = la longueur d'une maille,
x = la distance de l'une des culées à l'extrémité d'une maille,
$u = x - \frac{p}{2}$,
y = la longueur de la partie non chargée,
H = la force horizontale,
V = la force verticale.

Pour un poids uniformément réparti sur toute la travée, nous savons que la force horizontale est donnée par la formule (14), soit :

$$\mathrm{H} = \frac{w' x}{2d} - \frac{w' x^2}{2dl}.$$

Pour un poids uniformément réparti sur une partie de la longueur seulement de la travée égale à $l - y$, nous savons que la force horizontale est donnée par la formule (21), c'est-à-dire :

$$\mathrm{H} = \frac{w' x (l-y)^2}{2dl^2} - \frac{w (x-y)^2}{2dl}.$$

Maintenant cette équation peut se mettre sous cette forme :

$$\mathrm{H} = \frac{w' x}{2d} - \frac{w' x^2}{2dl} - \frac{w' y^2}{2dl}\left[l - \frac{x}{l}\right] \qquad (24)$$

qui, comme on le voit, n'est autre chose que l'équation (14) diminuée de :

$$\frac{w' y^2}{2dl}\left[l - \frac{x}{l}\right].$$

Donc, il résulte que la force horizontale sera toujours plus grande sous un poids uniformément distribué sur toute la longueur de la travée, que lorsqu'il ne le serait que sur une de ses parties.

Si nous supposons, en conséquence, que le poids mobile est placé sur toute la longueur de la travée, nous déduirons que, de ce cas, la force horizontale sera maxima, et que sa valeur sera donnée par la formule :

$$H = \frac{(w' + w)\,x}{2\,d} - \frac{(w' + w)\,x^2}{2\,d\,l}. \tag{25}$$

La force verticale, à une distance u d'une des culées, pour un poids partiellement distribué jusqu'à la distance y de la même culée, c'est-à-dire de la culée de droite, sera donnée par la formule (23), soit :

$$V = \frac{w'\,(l-y)^2}{2\,l^2} - \frac{w'}{l}(u-y).$$

Supposons que cette valeur de V soit celle comprise entre le point où il n'y a pas de force verticale et la culée de droite, c'est-à-dire en prenant les valeurs positives, il est évident que, considérant y pour le moment comme une constante, V augmentera quand $u - y$ diminuera, et deviendra un maximum quand u égalera y, c'est-à-dire à l'extrémité du poids roulant, et, à ce point, nous aurons :

$$V = \frac{w'\,(l-y)^2}{2\,l^2}, \tag{26}$$

c'est-à-dire que la force verticale, pour un poids partiel, sera plus grande à la fin de ce poids.

La formule (26) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$V = \frac{w'}{2} - \frac{w'\,u}{l} + \frac{w'\,u^2}{2\,l^2}. \tag{27}$$

La force verticale, pour un poids uniformément distribué sur toute la longueur de la travée, sera donnée au même point par la formule :

$$V = \frac{w'}{2} - \frac{w'\,u}{l}.$$

Si, dans ce cas, u est supposé moindre que $\frac{l}{2}$, c'est-à-dire que la valeur de V soit supposée positive, nous verrons que, quand une travée est partiellement chargée par un poids uniforme pour une partie plus grande que la moitié de la travée, la force verticale, en ce point, sera plus grande d'une quantité $\frac{w'\,u^2}{2\,l^2}$ de ce qu'elle serait, si le même poids était distribué sur toute la longueur de la travée.

La plus grande valeur de la force verticale, qui se produit sur une travée assujettie à supporter un poids roulant et un poids qui est réparti uniformément sur toute sa longueur, sera donnée par la somme des actions des deux poids au même point, et, par cette raison, nous aurons, en ajoutant l'une à l'autre les équations (18) et (26) :

$$\mathrm{V} = \frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l} + \frac{w'\,(l-u)^2}{2\,l^2}, \tag{28}$$

y étant ici égal à u, celui-ci est la force verticale du poids roulant w' et du poids mort w.

Dans une poutre uniformément chargée, le point où la force verticale $= 0$ est au centre, et pour une poutre partiellement chargée, le point où la force verticale $= 0$ est à une distance $\dfrac{l^2 + y^2}{2\,l}$ de l'extrémité non chargée. Mais comme, en aucun cas, il ne peut y avoir dans une travée deux points où la force verticale $= 0$, le point où il n'existera pas de force verticale sera donné en égalant à 0 l'équation (28), et nous aurons alors :

$$\mathrm{V} = \frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l} + \frac{w'\,(l-u)^2}{2\,l^2} = 0,$$

et en faisant $w' = a\,w$, nous aurons, en remplaçant la valeur de w' dans l'équation précédente :

$$\frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l} + \frac{a\,w\,(l\,u)^2}{2\,l^2} = 0$$

d'où
$$w\left(\frac{1}{2} - \frac{u}{l} - \frac{a\,l^2 - a\,l\,u - a\,u^2}{2\,l^2}\right) = 0$$

et en éliminant w et faisant

$$\frac{1}{2} - \frac{u}{l} + \frac{a\,l^2 + 2\,a\,l\,u + a\,u^2}{2\,l^2} = 0$$

nous aurons enfin la valeur de u égale à :

$$u = l + \frac{l}{a} - l\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}}, \tag{29}$$

qui déterminera le point où la force verticale est 0.

Exemple. — Dans une travée de 200 pieds ($60^{m}959$) de longueur, dont le poids roulant uniforme est de 75 tonnes, et dont le poids total est de 150 tonnes, à quelle distance de la culée non chargée se trouvera la tête du poids roulant, quand il sera au point où il n'y a pas de force verticale, c'est-à-dire qu'elle sera la valeur de u?

Dans ce cas, nous aurons :

$$\frac{w}{w} = a = 2$$

$$l = 200$$

d'où
$$l + \frac{l}{a} - l\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}} = u =$$

$$= 200 + \frac{200}{2} - 200\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 126{,}8 \text{ pieds}$$

C'est-à-dire, quand le poids roulant couvrira 73,2 pieds de la travée, l'extrémité de ce poids se trouvera au point où il n'y a pas de force verticale. Le poids supporté par la culée la plus éloignée sera égal au poids de 126,8 pieds du poids de la travée, c'est-à-dire 47,5 tonnes. Quand la travée n'est pas chargée, le poids sur cette culée est de 37,5 tonnes. Quand le poids de 0,75 tonnes par pied courant couvre 73,2 pieds 10 tonnes viendront s'ajouter au poids qui agit sur la culée la plus éloignée. Tandis que le poids roulant reste au point où la force verticale $= 0$, la réaction sur la culée la plus éloignée sera produite seulement par le poids de la travée, et non par le poids roulant qui agit sur elle.

Quand l'extrémité du poids roulant s'approche de la culée non chargée, et a passé le point où il n'y a pas de force verticale, la réaction sur la culée va en augmentant ; mais quand le poids roulant couvre moins que la moitié de la travée, la plus grande portion de ce poids agit sur la culée la plus rapprochée. Donc, le point où il n'y a pas de force verticale ne restera pas stationnaire, mais il s'éloignera de l'extrémité du poids roulant et atteindra le centre de la travée, quand le poids total couvrira la travée.

Il est évident, par conséquent, que de la culée où le poids commence à agir sur la travée, jusqu'au point où la force verticale est 0, aucune force verticale ne peut passer à la culée la plus éloignée ; donc, il sera seulement nécessaire, — à partir de ce point où la force verticale est 0, — de placer des diagonales ou bras, afin de reporter la force sur la culée la plus éloignée. Ces bras ou diagonales, entre ce point où la force verticale est 0 et le centre de la travée, de chaque côté du centre, sont appelés contre-bras ; ils ne travaillent que sous l'action de la charge roulante.

L'équation de la force verticale pour le poids vif est $V = \frac{w' (l - u)^2}{2 l^2}$. Cette équation, si l'on veut obtenir une grande exactitude dans le calcul, doit être modifiée, puisque dans cette formule on ne suppose pas que le poids vient graduellement se placer sur la travée, mais qu'au contraire, le poids roulant passe à l'extrémité de chaque maille directement, sans s'étendre graduellement sur la longueur de la maille.

Si A I représente une travée et A, B, C, D..... les différentes extrémités des mailles, et si nous supposons que le poids s'étende d'une des extrémités A jusqu'à la moitié de la maille B C, la poutre se trouvera ainsi chargée d'un poids équivalent au poids distribué sur une maille et demie, mais, dans ce cas, B ne sera pas soumis au poids d'une maille entière ; il ne supportera ce poids que lorsque le poids roulant sera arrivé en C.

Donc B ne pourra avoir le poids d'une maille entière que quand le point C sera soumis au poids d'une demi-maille. Donc $\frac{w' (l - u)^2}{2 l^2}$ sera plus grand que la force agissant en B, puisqu'une partie de cette charge est portée par le point C.

L'équation $V = \frac{w (l - y)^2}{2 l^2}$ est l'équation d'une parabole, et si nous supposons

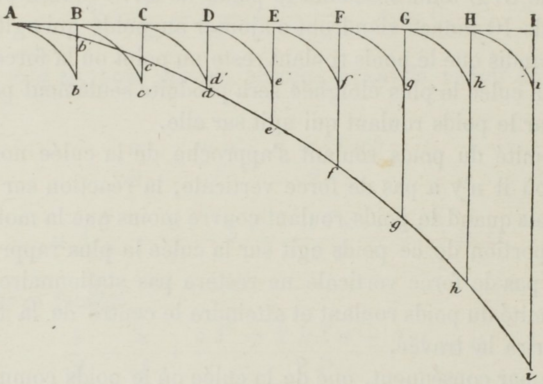

Fig. (45).

que A b c d e f... i soit cette parabole, et que les distances des points de cette parabole à l'axe A 1 représentent les forces agissant à la tête du poids roulant, ou la réaction sur la culée de droite, quand le poids commence à agir sur le pont, à partir de la culée de gauche, nous voyons que ces distances, entre l'axe I et la parabole, représentent les différentes valeurs de V pour les différentes positions du poids roulant sur la poutre, et, si nous traçons de même les petites paraboles A b', B c', C d',... les distances entre ces petites paraboles et l'axe A I représenteront les forces qui viennent agir sur les points B, C, D..., quand le poids roule sur la travée.

Quand le poids s'étend de A à B, B b sera le poids qui agit à la culée I, et B b' sera le poids agissant sur B qui, comme on le voit, est plus grand que le poids sur la culée I.

Si le poids roulant continue son chemin entre B et C, la distance verticale entre la ligne B C et la petite parabole B c' représentera la réaction produite par ce poids au point C, et les distances verticales des points entre B et C à la parabole b c représenteront les réactions sur la culée I. Quand la dernière de ces réactions, c'est-à-dire celle en I est égale à celle en C, ou, pour mieux dire, quand la parabole B c' coupe la partie b c de l'autre parabole, la réaction sur I sera produite par la portion du poids qui agit en C, et aucune des forces qui agissent sur B ne produira d'effet sur la culée I ; la distance verticale entre les deux courbes, avant leur intersection, représentera la force verticale qui agit sur I, et qui dérive des forces agissant sur B. Par conséquent, la plus grande force verticale en B vers I aura lieu quand la distance verticale des deux paraboles entre B et C sera la plus grande. Ceci aura lieu quand une ligne verticale rencontrera les deux courbes en deux points où les tangentes seront parallèles. Alors le poids sur A B sera au poids total sur A I, comme la distance A B est à A I, et les distances horizontales des points de tangence, rapportés à l'extrémité de la maille, seront dans la même proportion avec la longueur d'une maille.

Soit l' la longueur du poids partiel qui s'étend depuis une culée, au-delà d'une maille, jusqu'à la verticale où les tangentes aux deux courbes sont parallèles, p la longueur d'une maille et l la longueur de la poutre. Il résulte de ce que nous avons dit antérieurement que nous aurons la proportion suivante :

$$\frac{l}{p} = \frac{l'}{z}$$

d'où

$$z = \frac{p\,l'}{l}$$

donc z est la distance du poids qui s'étend sur la dernière maille qu'on considère, ce qui nous donnera :

$$l' = p + \frac{p\,l'}{l}$$

$$l'\,l = p\,l + p\,l'$$

d'où
$$l' = \frac{p\,l}{l - p} \tag{31}$$

et, quand le poids couvrira le nombre n de mailles, la valeur de l' sera :

$$l' = \frac{n\,p\,l}{l - p} \tag{32}$$

En divisant le poids roulant par la longueur de la travée, et en multipliant cette valeur par $\frac{n\,p\,l}{l - p}$, nous aurons le poids sur la longueur $\frac{n\,p\,l}{l - p}$, et la réaction sur la culée non chargée sera dans ce cas :

$$\mathrm{V} = \frac{w'}{2\,l^2}\left(\frac{n\,p\,l}{l - p}\right)^2. \tag{33}$$

Mais, comme nous l'avons dit déjà, ce poids est plus grand que la force verticale sur le dernier bras ou montant de la dernière maille chargée, puisqu'une certaine portion de ce poids est portée par la première maille qui suit ce poids, et ce sera cet excès de poids qu'il faudra retrancher du second membre de la formule (33).

La distance de la culée où commence le poids à la fin de la dernière maille chargée sera $n\,p$, donc la longueur du poids sur la maille $(n + 1)^e$, qui est la maille partiellement chargée, sera :

$$\frac{n\,l\,p}{l - p} - n\,p;$$

donc le poids sur cette maille, partiellement chargée, sera :

$$\frac{w'}{l}\left(\frac{n\,p\,l}{l - p} - n\,p\right) = \frac{w'}{l}\left(\frac{n\,p^2}{l - p}\right).$$

Maintenant, le poids, qui s'étend de la dernière maille à l'extrémité du poids roulant, doit nécessairement produire une réaction sur la culée non chargée, représentée par :

$$\frac{w'}{2\,p\,l}\left(\frac{n\,p^2}{l - p}\right)^2. \tag{34}$$

Cette réaction sera la quantité à déduire de la valeur donnée par la formule (33), afin d'obtenir la valeur correcte de la force sur la dernière maille, produite par le poids roulant sur la travée ; donc nous aurons :

$$\frac{w'}{2\,l^2}\left(\frac{n\,p\,l}{l - p}\right)^2 - \frac{w'}{2\,p\,l}\left(\frac{n\,p^2}{l - p}\right)^2 =$$

$$= \frac{w'}{2\,l^2}\left(\frac{n^2\,p^2\,l^2 - n^2\,p^2\,l}{(l-p)^2}\right) =$$

$$= \frac{w'\,n^2\,p^2\,l}{2\,l^2\,(l-p)}$$

$$V = \frac{w'\,n^2\,p^2}{2\,l\,(l-p)} \tag{35}$$

qui représente la plus grande force verticale produite par un poids partiel, quand n représente le nombre des mailles chargées, depuis la culée non chargée jusqu'au bras à la dernière maille jusqu'où arrive le poids.

Exemple. — Soit une travée de 80 pieds de longueur, divisée en huit mailles et chargée à raison d'une tonne par pied courant; quelle sera la plus grande force verticale sur le bras de la dernière maille chargée, quand six mailles seront chargées.

Soit, $w' = 80$ tonnes.
$l = 80$ pieds.
$p = 10$ pieds.
$n = 6$ pieds.

Substituant ces valeurs dans l'équation (35), nous avons:

$$V = \frac{w'\,n^2\,p^2}{2\,l\,(l-p)} = \frac{80 \times 6^2 \times 10^2}{2 \times 80\,(80-10)} = 25{,}71 \text{ tonnes.}$$

Si, dans la formule, $\frac{w'}{2\,l^2}\,(l-u)^2$, on fait $l - u = 65$, nous aurons :

$$\frac{80}{2.80^2}\,(65)^2 = 26{,}41 \text{ tonnes}$$

qui sera la réaction sur la culée non chargée.

Mais, puisque le poids s'étend jusqu'à la moitié de la maille qui suit la sixième, l'extrémité non chargée de cette maille supportera $\frac{1}{4}$ du poids d'une demi-maille ou 1,25 tonnes ; d'où :

26,41 — 1,25 = 25,16 tonnes qui est la plus grande force verticale sur le montant ou bras à la fin de la sixième maille.

Dans le cas supposé, $\frac{n\,p\,l}{l-p} = \frac{6 \times 10 \times 80}{80-10} = 68{,}57$ pieds, qui représentent la longueur du poids, et, par conséquent, 29,38 tonnes est la réaction sur la culée non chargée, et 3,67 tonnes le poids sur la première extrémité de la maille non chargée.

D'où : $$29{,}38 - 3{,}67 = 25{,}71 \text{ tonnes,}$$

ce qui sera, comme nous l'avons dit, la plus grande force verticale sur le bras considéré dans le cas présent.

Quand $n\,p$ est plus grand que $\frac{l}{2}$, ou bien lorsque le poids roulant couvre plus que la moitié de la travée $\frac{w'\,n^2\,p^2}{2\,l\,(l-p)}$ vient s'ajouter à la réaction du poids mort donné par la formule (18), on aura, en additionnant les formules (18) et (35) :

$$V = \frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l} + \frac{w'\,n^2\,p^2}{2\,l\,(l-p)} \tag{36}$$

qui est la force verticale produite par un poids vif et un poids mort sur le bras d'une maille dont le milieu est à une distance u de l'extrémité non chargée et quand n est le numéro de la maille en $l - u$.

En observant que nous pouvons faire :

$$n = \frac{l - u - \frac{p}{2}}{p}$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (36), nous aurons :

$$V = \frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l} + \frac{w'\left(l - u - \frac{p}{2}\right)^2}{2\,l\,(l-p)} \tag{37}$$

équation donnant le même résultat que l'équation (36) et présentant l'avantage de ne contenir qu'une seule variable, u.

Mais quand $n\,p$ dans l'équation (35) est moindre que $\frac{l}{2}$, la force verticale $\frac{w'\,n^2\,p^2}{2\,l\,(l-p)}$ va vers le centre dans la direction opposée à la force verticale $\frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l}$ due au poids mort de la travée au même point, et par conséquent la différence de ces deux forces sera la force verticale en u. La plus petite de ces forces neutralise la plus grande. Mais $\frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l}$, force due au poids mort de la travée s'unira à la force verticale de la première maille au-delà du poids mouvant ou à la quantité $\frac{w'}{2\,p\,l}\left(\frac{n\,p^2}{l-p}\right)^2$, l'équation (34) sera donc diminuée de ce poids. D'où, puisque $\frac{w' n^2 p^2}{2(l-p)^2}$ et $\frac{w}{2} - \frac{w u}{l}$, équation (33), sont l'un et l'autre diminués de la même quantité, nous aurons :

$$V = \frac{w}{2} - \frac{w u}{l} + \frac{w' n^2 p^2}{2(l-p)^2}, \tag{38}$$

formule représentant la réaction exercée sur la culée la plus lointaine, quand la travée est moins qu'à moitié chargée.

En observant que :

$$n = \frac{l - u - \frac{p}{2}}{p}$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (38), nous aurons :

$$V = \frac{w}{2} - \frac{w u}{l} + w' \frac{\left(l - u - \frac{p}{2}\right)^2}{2(l-p)^2}, \tag{39}$$

représentant la force verticale à la culée non chargée quand le poids couvre moins que la moitié de la travée, force agissant sur le bras à l'extrémité de la dernière maille chargée.

Simple travée (système Howe), avec les bras inclinés travaillant à la compression et les tiges verticales à la tension, et soumis à l'action d'un poids mort et à celle d'un poids vivant uniformément distribué.

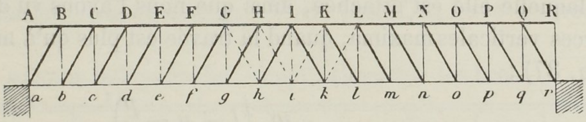

Fig. (46).

Soit w = 150,000 livres, le poids de la travée uniformément distribué,
w' = 300,000 livres, le poids vif,
l = 200 pieds, la longueur de la travée,
d = 18,75 pieds, la hauteur de la travée,
p = 12,5 pieds, la longueur d'une maille,

x = la distance de l'extrémité d'une maille à une culée,

u = la distance du milieu d'une maille à une culée,

H, V et F = les forces horizontales, verticales et les forces sur les diagonales.

Le poids vif, sur la corde inférieure, et le poids de la travée peuvent facilement être considérés comme concentrés aux mêmes points d'une maille de la même corde.

Par l'équation (25), nous avons, pour les forces horizontales qui sont plus grandes quand la travée est entièrement chargée :

$$H = \frac{(w + w')\,x}{2\,d} - \frac{(w + w')\,x^2}{2\,d\,l}$$

en substituant les valeurs des constantes, nous aurons :

$$H = \frac{(150{,}000 + 300{,}000)\,x}{2 \times 18{,}75} - \frac{(150{,}000 + 300{,}000)\,x^2}{2 \times 18{,}75 \times 200} = 12{,}000\;x - 60\;x^2.$$

D'où, la table suivante donnant les efforts sur les cordes :

Valeurs de x.	12,5	25	37,5	50	62,5	75	87,5	100
Forces en livres	140,625	262,500	365,625	450,000	515,625	562,500	590,625	600,000
Compression sur.	B C et P Q	C D et O P	D E et N O	E F et M N	F G et L M	G H et K L	H I et I K	
Tension sur.	*a b* et *q r*	*b c* et *p q*	*c d* et *o p*	*d e* et *n o*	*e f* et *m n*	*f g* et *l m*	*g h* et *k l*	*h i* et *i k*

La force verticale sur chaque tige est la même que sur la poutre à l'extrémité supérieure de laquelle elle est attachée, ainsi que nous l'avons vu déjà.

Pour les forces verticales maxima, quand la travée est plus qu'à moitié chargée, nous avons (Eq. 37) :

$$V = \frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l} + \frac{w'\left(l - u - \frac{p}{2}\right)^2}{2\,l\,(l - p)},$$

et en substituant les valeurs connues des constantes dans cette équation, nous aurons :

$$V = \frac{150{,}000}{2} - \frac{150{,}000\,u}{200} + \frac{300{,}000\,(200 - u - 6{,}25)^2}{2 \times 200\,(200 - 12{,}5)} =$$

$$V = 75{,}000 - 7{,}500 + 4\ (193{,}75 - u)^2$$

Pour les forces verticales maxima quand la travée est moins qu'à moitié chargée, nous avons (Eq. 39) :

$$V = \frac{w}{2} - \frac{w\,u}{l} + \frac{w'\left(l - u - \frac{p}{2}\right)^2}{2\,(l - p)^2},$$

et en remplaçant les constantes par leurs valeurs, on aura :

$$V = 75{,}000 - 750 + 4{,}267\ (193{,}75 - u)^2.$$

Commençant par la travée complètement chargée, nous considérerons le poids comme retiré graduellement, en donnant pour première valeur à u, la longueur de la partie non chargée, 6,25 pieds, pour seconde valeur de u, 18,75 pieds et ainsi de suite. D'où nous aurons le tableau suivant des tensions sur les tiges :

Valeurs de u	6,25	18,75	31,25	43,75	56,25	68,75	81,25	93,75
Forces en livres	210,938	183,438	157,188	132,188	108,438	85,938	64,688	44,688
Tension sur	B *b* et Q *q*	C *c* et P *p*	D *d* et O *o*	E *e* et N *n*	F *f* et M *m*	G *g* et L *l*	H *h* et K *k*	I *i*

Quand la travée est moins qu'à moitié chargée, quelques-unes des tiges agissent comme contre-tiges, c'est-à-dire qu'elles reportent le poids vers le centre ; mais la force qui agit ainsi sur elles est moindre que celle à laquelle elles sont soumises, quand le poids s'éloigne d'elles vers la culée la plus éloignée.

La force verticale multipliée par la longueur de la travée et divisée par la hauteur de cette travée, soit dans le cas présent V $\times$ 1,202, donne la valeur de la compression sur les bras et tant que V est positif, la force ira vers la culée non chargée.

Le tableau suivant indiquera les compressions sur les bras :

Valeurs de u	6,25	18,75	31,25	43,75	56,25	68,75	81,25	93,75	106,25	118,75
Forces en livres	253,547	220,492	188,939	158,889	130,342	103,297	77,754	53,714	33,631	11,945
Compression sur	B *a* et Q *r*	C *b* et P *q*	D *c* et O *p*	E *d* et N *o*	F *e* et M *n*	G *f* et L *m*	H *g* et K *l*	I *h* et I *k*	H *i* et K *i*	G *h* et L *k*

La valeur suivante de u, 131,75, donne à V une valeur négative, c'est-à-dire une force passant à la culée chargée ; par conséquent, G h, H i, K i et L k sont les contre-bras nécessaires dans le cas qui nous occupe.

Il n'y a pas de forces en A B, A a, Q R et R r.

Travée simple avec les pièces verticales en compression et les pièces diagonales ou tiges en tension (système Murphy-Whipple) assujetties à l'action d'un poids mort et à celle d'un poids vif uniformément distribués.

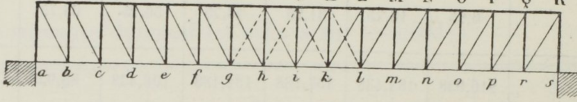

Fig. (47).

Soit w = 40 tonnes, le poids mort uniformément distribué.

w' = 80 tonnes, le poids vif uniformément distribué sur la travée.

l = 80 pieds, la longueur de la travée.

d = 10 pieds, la hauteur de la travée.

p = 5 pieds, la longueur d'une maille.

H, V, F et x et u } = les forces et les distances comme précédemment.

Le maximum de force sur la corde sera donné par la formule.

$$H = \frac{(w + w')\,x}{2\,d} - \frac{(w + w')\,x^2}{2\,d\,l}$$

Si nous substituons les valeurs des constantes, nous aurons :

$$H = \frac{(40 + 80)\,x}{2 \times 10} - \frac{(40 + 80)\,x^2}{2 \times 10 \times 80} = 6\,x - 0{,}075\,x^2.$$

D'où le tableau suivant :

Valeurs de x.	5	10	15	20	25	30	35	40
Forces en tonnes.	28,1	52,5	73,1	90	103,31	112,5	118,1	120
Compression sur.	A B et Q R	B C et P Q	C D et O P	D E et N O	E F et M N	F G et L M	G H et K L	H I et I K
Tension sur.	bc et pq	cd et op	de et no	ef et mn	fg et lm	gh et kl	hi et ik	

Maintenant, si nous substituons, pour avoir les forces sur les bras, les valeurs des constantes dans l'équation (37), nous aurons :

$$V = \frac{40}{2} - \frac{40\,u}{80} + \frac{88\left(80 - u - \frac{5}{2}\right)^2}{2 \times 80\,(80 - 5)} = 20 - \frac{u}{2} + \frac{(77,5 - u)^2}{150},$$

d'où nous déduirons le tableau suivant pour les compressions sur les bras, quand la travée est plus qu'à moitié chargée. Il est évident que A a et R r supportent la moitié du poids ou tout le poids vertical qui se produit sur la travée.

Valeurs de u.. .		2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	42,5	37,5
Forces en tonnes.	60	56,3	48,9	41,9	35,3	28,9	22,9	17,6	17,6
Compression sur.	A a et R r	B b et Q q	C c et P p	D d et O o	E e et N n	F f et M m	G g et L l	H h et K k	H i

Mais puisque V, dans l'équation (37), multiplié par la longueur des tiges et divisé par d, donne V × 1.118 force sur les tiges, quand le poids couvre plus que la moitié de la travée et en substituant les valeurs des constantes dans l'équation (39), nous aurons :

$$V = 20 - \frac{u}{2} + \frac{(77,5 - u)^2}{140,625},$$

qui, multiplié également par 1,118, donne la force sur lés tiges, quand le poids couvre moins que la moitié de la travée, et nous avons le tableau suivant :

13

Valeurs de u...............	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,4
Forces en tonnes...........	62,9	54,7	46,8	39,5	32,3	25,6	19,7	13,3	8,3	3,0
Tension sur.................	A b et R q	B c et Q p	C d et P o	D e et O n	E f et N m	F g et M l	G h et L k	H i et K i	I k et I h	K l et H g

Quand $u = 52,5$, V a une valeur négative ; donc les contre-tiges nécessaires seront I h, K l, H o, I k et la verticale I i.

Travée double (système Linville) avec un nombre pair de mailles.

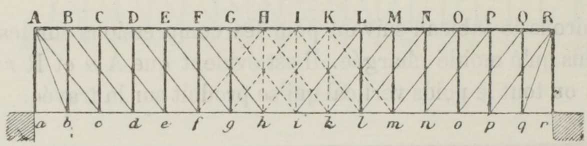

Fig. (48).

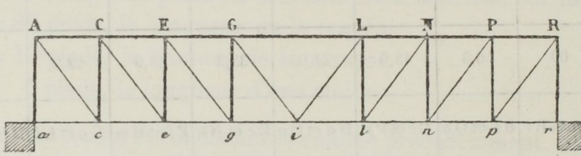

Fig. (49).

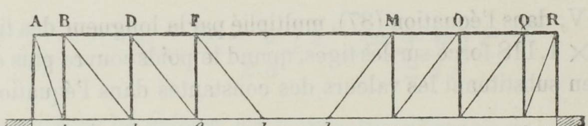

Fig. (50).

Cette travée (fig. 48) n'est autre qu'une combinaison de deux travées simples, dont l'une est représentée (fig. 49) et dont les contre-bras sont omis. Elle est divisée en mailles de longueur uniforme. L'autre travée simple est représentée dans la fig. (50), les contre-bras n'y sont pas indiqués non plus, et les mailles sont également d'une longueur uniforme, à l'exception des deux dernières qui sont la moitié des autres.

Dans la figure (48) qui représente l'ensemble de la travée, les contre-bras sont indiqués par des lignes pointillées.

Les forces verticales, dans les travées simples dont nous venons de parler, sont complètement indépendantes les unes des autres, car rien ne les relie. Les cordes, au contraire, sont toujours communes et les forces agissant sur elles, dans une travée double, seront toujours la somme des forces sur les cordes de chaque travée simple.

Commençons par considérer les forces horizontales ou forces sur les cordes. La force sur M N, par exemple fig. (48), sera la somme des forces sur L N fig. (49) et sur M O fig. (50).

Ainsi nous n'aurons qu'à déterminer les forces dans les travées simples et à les additionner pour obtenir la force agissant sur M N de la travée double. Nous pouvons donc considérer chaque travée simple comme supportant la moitié du poids total, et alors la réaction sur les culées, produite par chaque travée simple, sera $\frac{w}{4}$; il est bien entendu que le poids doit être uniformément distribué sur toute la travée.

Soit l = longueur de la travée.
d = hauteur de la travée.
p = longueur d'une maille de la travée double.
w = poids uniformément distribué sur la travée.
x = la distance de l'extrémité d'une maille à une culée.
H = force sur les cordes.
V = force verticale.

Pour la travée simple, fig. (49), nous avons, d'après l'équation (14), dans notre cas w se changeant en $\frac{w}{2}$:

$$H = \frac{w\,x}{4\,d} - \frac{w\,x^2}{4\,d\,l}. \tag{40}$$

Cette équation ne sera pas applicable à l'autre travée simple, puisque les deux dernières mailles ne sont que la moitié des autres. Cette travée simple uniforme supportera à la fin de chaque maille des poids égaux équivalents au poids sur une maille, à l'exception des deux panneaux extrêmes dont les parties reposant sur les culées ne supporteront qu'un poids équivalent à une demi-maille.

L'autre travée simple sera aussi chargée de poids égaux équivalents au poids distribué sur une maille, et ne supportera aucun poids sur la culée.

Pour obtenir l'équation de la deuxième travée simple, fig. (50), nous aurons $\frac{w}{4} \times x'$ pour le moment de la réaction sur une culée à une distance x' de cette culée ; le poids sur la travée, entre ce point et la culée, sera $\frac{w}{2\,l} \times (x' - p)$, p étant la longueur de la dernière maille ; et la distance de son centre de gravité sera $\frac{x'}{2} + \frac{p}{2}$, d'où :

$$H' = \frac{w\,x'}{4\,d} - \frac{w}{2\,d\,l}(x' - p)\left(\frac{x' + p}{2}\right)$$

$$H' = \frac{w\,x'}{4\,d} - \frac{w\,x'^2}{4\,d\,l} + \frac{w\,p^2}{4\,d\,l}, \tag{41}$$

formule donnant la compression sur la corde supérieure, et la tension sur la corde inférieure dans la fig. (50), à un point placé à la distance x' de la culée.

Si x', dans l'équation (41), est égal à M R de la fig. (50), H' donnera la force sur M O et *m k;* et si x, dans l'équation (40), est égale à L R de la fig. (49), H donnera la force sur L N et *i l.*

Donc la force sur la corde supérieure dans la double travée, dans la partie de la largeur d'une maille, sera égale à la force qui se développe, dans une travée simple, sur la corde supérieure et sur la maille dont l'extrémité est la même que celle de la travée double, plus la force sur la corde supérieure de l'autre travée simple pour la maille qui suit, en allant vers le centre de la travée ; c'est-à-dire, si H et x (fig. 48) sont égaux à H et x dans l'une des travées simples, nous aurons, pour obtenir la force sur la corde de la travée double, à faire dans la valeur de H', qui donne la force sur la corde supérieure dans l'autre travée simple, $x' = x + p$.

Faisant donc dans l'équation (41), $x' = x + p$, et additionnant cette équation ainsi transformée avec l'équation (40), nous aurons :

$$H = \frac{w\,x}{2\,d} - \frac{w\,x^2}{2\,d\,l} - \frac{p\,w\,x}{2\,d\,l} + \frac{p\,w}{4\,d},$$

$$H = \frac{w}{2\,d}\left(x + \frac{p}{2}\right) - \frac{w}{2\,d\,l}\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{w\,p^2}{8d\,l}. \tag{42}$$

Pour l'extrémité d'une maille de la double travée commune à la travée simple fig. (50) la force en x', x' étant la distance de l'extrémité de la maille à la culée dans la travée double, sera égale à la force se développant dans la maille fig. (50)

dont l'extrémité est à une distance x' de la culée ajoutée à la force dans l'autre travée simple sur une maille dont l'extrémité est distante de $x' + p$ de la culée. Faisons donc, dans l'équation (40), $x = x' + p$, et additionnons cette équation ainsi changée avec l'équation (41), on obtiendra le même résultat qu'antérieurement, c'est-à-dire l'équation (42), qui donnera la force dans tous les membres de la corde supérieure sur le côté de la culée la plus rapprochée de la maille, à partir de laquelle x est mesuré.

Dans la corde inférieure, la force sur chaque maille de la travée double sera égale à la force sur la maille de la corde inférieure d'une travée simple, dont l'extrémité est au même point, ajoutée à la force sur la corde inférieure de l'autre travée simple sur la maille suivante vers la culée ; ainsi, si nous faisons $x' = x' - p$ dans l'équation (41), ou bien $x = x - p$ dans l'équation (40), et si nous additionnons l'équation ainsi changée avec l'autre sans altération, on aura le résultat suivant :

$$\mathrm{H} = \frac{w\,x}{2\,d} - \frac{w\,x^2}{2\,d\,l} + \frac{p\,w\,x}{2\,d\,l} - \frac{p\,w}{4\,d}$$

$$\mathrm{H} = \frac{w}{2\,d}\left(x - \frac{p}{2}\right) - \frac{w}{2\,d\,l}\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{w\,p^2}{8\,d\,l}, \tag{43}$$

équation qui donne la tension sur la corde inférieure.

Considérons maintenant les forces verticales qui se développeront dans cette travée double. Les travées simples étant considérées comme indépendantes, les actions verticales seront aussi indépendantes, et l'équation des forces verticales, dans cette travée simple, sera déduite de l'action de la force horizontale dans cette travée, c'est-à-dire au moyen des équations (40) et (41), d'une manière analogue à ce que nous avons fait antérieurement, et nous aurons ainsi l'équation suivante :

$$\mathrm{V} = \frac{w}{4} - \frac{w\,u}{2\,l}, \tag{44}$$

qui donne la force verticale dans les travées simples, pour un poids uniformément distribué, u étant la distance au milieu d'une maille d'une des simples travées, et non celle au milieu d'une maille de la travée double. Dans la travée simple de la fig. (50), le centre de la maille à l'extrémité est considéré comme étant sur la culée et la première valeur de u sera 0.

L'effet du poids roulant sur une travée double, diffère de l'effet de ce poids roulant sur une travée simple, puisque les extrémités des mailles, ou la fin d'une simple travée, peuvent être entièrement chargées, sans que la maille suivante, appartenant à la même travée simple, soit sollicitée par une portion du poids ; ainsi l'effet produit par le poids roulant dans une travée double sera le même que si les différentes portions de ce poids roulant étaient appliquées à l'extrémité de chaque maille.

Par conséquent, appelant w' le poids vif total, nous aurons :

$$V = \frac{w'}{4\,l^2}(l-u)^2,$$

formule qui donnera la plus grande force verticale produite par le poids vif w' sur la travée simple (figure 50). Ainsi, en additionnant cette équation avec l'équation (44), nous aurons :

$$V = \frac{w}{4} - \frac{w\,u}{2\,l} + \frac{w}{4\,l^2}(l-u)^2, \tag{45}$$

équation donnant la force verticale produite par le poids mort w et par le poids vif w' dans la travée simple (fig. 50).

Dans la travée simple (fig. 49), où u' est la distance de la culée non chargée du centre d'une des mailles de cette poutre, $\frac{w'}{2\,l}(l - u' - p)$ sera le poids sur $(l - u)$; et si nous divisons ce poids par l et le multiplions par $\frac{l - u' + p}{2}$, distance du centre de gravité de la culée chargée, nous aurons :

$$V = \frac{w'}{4\,l^2}\left[(l-u')^2 - p^2\right], \tag{46}$$

pour la force verticale produite par le poids vif.

Si maintenant nous ajoutons cette équation à l'équation (44), représentant la force verticale produite par le poids mort, nous aurons :

$$V = \frac{w}{4} - \frac{w\,u'}{2\,l} + \frac{w'}{4\,l^2}\left[(l-u')^2 - p^2\right], \tag{47}$$

équation qui nous donne la force verticale pour les poids mort et vif dans la simple travée fig. (49).

Exemple. — Fig. (48). Poutre Linville de 16 mailles.

Soit w' = 160 tonnes, le poids du poids vif.
w = 80 tonnes, le poids de la travée.
l = 160 pieds, la longueur de la travée.
d = 20 pieds, la hauteur de la travée.
p = 10 pieds, la longueur d'une maille.
x = la distance de la culée à l'extrémité d'une maille.

u = la distance de la culée au milieu d'une maille de chaque travée simple.

le poids étant placé sur la corde inférieure.

En substituant les valeurs de ces constantes dans l'équation (42), nous aurons :

$$\mathrm{H} = \frac{(w' + w)}{2\,d}\left(x + \frac{p}{2}\right) - \frac{(w' + w)}{2\,d\,l}\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{(w' + w)\,p^2}{8\,d\,l}\;;$$

$$\mathrm{H} = \frac{(160 + 80)}{2 \times 20}\left(x - \frac{10}{2}\right) - \frac{160 + 80}{2 \times 20 \times 160}\left(x + \frac{10}{2}\right)^2 + \frac{(160 + 80)\,10^2}{8 \times 20 \times 160} =$$

$$= 6\,(x + 5) - 0{,}0375\,(x + 5)^2 + 0{,}9375,$$

d'où nous pouvons former le tableau suivant des compressions dans les parties de la corde supérieure.

Valeurs de x............	10	20	30	40	50	60	70	80
Forces en tonnes........	82,5	127,5	165	195	217,5	232,5	240	240
Compression sur	AB et QR	BC et PQ	CD et OP	DE et NO	EF et MN	FG et LM	GH et KL	HI et IK

Substituant les valeurs des constantes dans l'équation (43), nous aurons :

$$\mathrm{H} = 6\,(x - 5) + 0{,}0375\,(x - 5)^2 + 0{,}9375,$$

d'où nous formerons le tableau des tensions sur la corde inférieure :

Valeurs de x......	10	20	30	40	50	60	70
Forces en tonnes..	30	82,5	127,5	165	195	217,5	232,5
Tension sur.......	*bc* et *pq*	*cd* et *op*	*de* et *no*	*ef* et *mn*	*fg* et *lm*	*gh* et *kl*	*hi* et *ik*

Il n'y a pas de forces s'exerçant sur $a\,b$ et $q\,r$.

En substituant les valeurs des constantes dans l'éq. (45), nous avons :

$$\mathrm{V} = \frac{80}{4} - \frac{80\,u}{2 \times 160} + \frac{160}{4 \times (160)^2}(160 - u)^2$$

$$\mathrm{V} = 20 - 0{,}25\,u + \frac{(160 - u)^2}{640}\,,$$

qui nous permet de former le tableau suivant des compressions dans les bras de la travée simple, fig. (50).

Valeurs de x..........	0	20	40	60	80
Forces en tonnes......	60	45,6	32,5	20,6	10
Compression sur......	A a et R r	B b et Q q	D d et O o	F f et M m	H h et K k

En divisant cette même équation par d et en multipliant par la longueur de la tige on aura $V \times 1,414$, pour toutes les tiges à l'exception de celles des extrémités pour lesquelles on a $V \times 1,118$, nous obtenons pour les tensions sur les tiges fig. (50) :

Valeurs de u.......	0	20	40	60	80	100
Forces en tonnes...	67,1	64,5	46	29,1	14,1	0,9
Tension sur.......	A b et R q	B d et Q o	D f et O m	F h et M k	H k et K h	K m et H f

On remarquera que les quantités multipliant V sont les sécantes des angles faits par les tiges avec la verticale.

V a une valeur négative quand $u = 110$.

En substituant maintenant les constantes dans l'équation (47), nous avons :

$$V = 20 - 0,25\, u + \frac{(160 - u')^2 - 100}{640},$$

d'où nous formons le tableau suivant des compressions sur les bras de la travée simple, fig. (49) :

Valeurs de u'..........	10	30	50	70
Forces en tonnes.......	52,5	38,8	26,3	15
Compression sur.......	A a et R r	C c et P p	E e et N n	G g et L l

La compression totale sur les montants extrêmes, A a et R r des deux travées simples, est $52{,}5 + 60 = 112{,}5$ tonnes.

Multipliant V de l'équation (47) par 1,414, comme antérieurement, nous avons le tableau suivant des tensions sur les tiges de la travée fig. (49) :

Valeurs de u'.........	10	30	50	70	90
Forces en tonnes......	74,2	54,9	37,2	21,2	7,1
Tension sur..........	A c et R p	C e et P n	E g et N l	G i et L i	I l et I g

La travée double fig. (48) a un nombre pair de mailles, et chaque moitié de cette travée contient aussi un nombre pair de mailles. Si l'on ajoute deux mailles, chaque moitié de la travée contiendra un nombre impair de mailles, et la travée simple fig. (50) sera divisée en mailles d'égale grandeur, tandis que les extrémités de la simple travée fig. (49) deviendront semblables à celles de l'autre travée simple dans l'exemple donné. Chaque travée, cependant, supportera encore la moitié du poids total, et les équations qui donnent la force sur les cordes ne seront pas changées.

Les équations donnant les forces verticales pour le poids vif sont entièrement dépendantes de l'extrémité des travées simples, et l'équation (47) sera applicable à ces travées dont les mailles sont uniformes, c'est-à-dire dont les mailles sont doubles de celles de la travée composée double. L'équation (45) qui donne la force verticale, sera applicable à une simple travée dont les deux mailles extrêmes sont égales à une maille de la travée composée double.

En se reportant aux exemples donnés, on verra que les forces sur les cordes supérieure et inférieure seront toujours égales pour les parties comprises entre deux diagonales.

Travée double (système Linville) contenant un nombre impair de mailles.

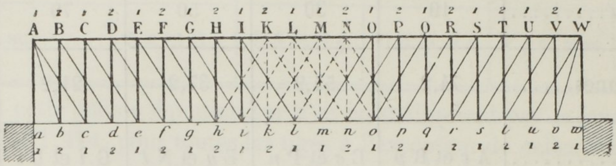

Fig. (51).

La fig. (51) représente une double travée contenant un nombre impair de mailles, dont les contre-bras sont représentés par les lignes pointillées.

Cette travée est composée de deux travées simples, dont les extrémités des mailles sont indiquées, pour l'une d'elles, au moyen des chiffres 1, 1, 1, et dont les extrémités des mailles de la seconde sont indiquées par les chiffres 2, 2, 2. Nous distinguerons ces deux travées simples, par n° 1 et n° 2.

La travée simple n° 1, ayant ses mailles extrêmes entières, peut être considérée comme supportant les poids des deux demi-mailles reposant directement sur les culées, et a, par conséquent, le poids d'une maille en plus que l'autre, c'est-à-dire qu'elle supporte la moitié du poids total et la moitié du poids d'une maille ; tandis que la travée n° 2 supporte la moitié de tout le poids, moins la moitié du poids d'une maille. La travée étant supposée complètement chargée,

Soit l = la longueur de la travée.
d = la hauteur de la travée.
p = la longueur d'une maille de la travée double.
x = les distances de l'une des culées aux extrémités de la maille.
H = la force horizontale sur les cordes.
V = la force verticale.

Le poids sur la travée simple n° 1 étant $\frac{w}{2} + \frac{w\,p}{2\,l}$, la réaction sur chaque culée sera, par conséquent, $\frac{1}{2}\left(\frac{w}{2} + \frac{w\,p}{2\,l}\right)$, et, comme la travée est divisée en mailles égales, le moment du poids sur chaque segment dont la longueur est x, sera $\frac{1}{2}\left(\frac{w\,x^2}{2\,l}\right)$; d'où nous obtiendrons facilement l'équation :

$$\text{H}\,d = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{2} + \frac{w\,p}{2\,l}\right)x - \frac{w\,x^2}{4\,l},$$

d'où $$\text{H} = \frac{w\,x}{4\,d} - \frac{w\,x^2}{4\,d\,l} + \frac{w\,p\,x}{4\,d\,l} \tag{48}$$

qui donne la compression sur la corde supérieure de la simple travée n° 1, du côté de la culée à partir de laquelle x est mesurée, aux points 1, 1, 1, etc., et la tension sur la corde inférieure de la même travée du côté des mêmes points.

La réaction de la travée n° 2, sur chaque culée, est $\frac{1}{2}\left(\frac{w}{2} - \frac{w\,p}{2\,l}\right)$ et le moment du poids, sur chaque segment dont la longueur est x', sera, comme dans la simple travée de la fig. (50) :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w\,x'^2}{2\,l} - \frac{w\,p^2}{2\,l}\right);$$

d'où nous obtiendrons l'équation :

$$\text{H}\,d = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{2} - \frac{w\,p}{2\,l}\right)x' - \left(\frac{w\,x'^2}{2\,l} - \frac{w\,p}{2\,l}\right),$$

d'où $$\text{H} = \frac{w\,x'}{4\,d} - \frac{w\,x'^2}{4\,d\,l} - \frac{w\,p\,x'}{4\,d\,l} + \frac{w\,p^2}{4\,d\,l} \tag{49}$$

qui représente la compression sur la corde supérieure de la travée simple n° 2, du côté de la culée à partir de laquelle x' est mesurée, aux points 2, 2, 2, etc., et la tension sur la corde inférieure du côté des mêmes points.

Il est évident qu'ici, comme dans le cas précédent, la compression sur la corde supérieure de la double travée sera, à chaque point de la maille, la même que celle au même point de l'une des travées simples, ajoutée à la compression dans l'autre travée simple sur la maille la plus rapprochée du centre ; et, de même, sur la corde inférieure de la travée double, la tension à chaque point de la maille est égale à la tension au même point de l'une des travées simples, ajoutée à la tension dans l'autre travée simple dans la maille la plus rapprochée de la culée.

Par conséquent, en faisant x' dans l'équation (49) $= x + p$, et en ajoutant l'équation ainsi changée à l'équation (48), nous aurons :

$$\text{H} = \frac{w\,x}{2\,d} - \frac{w\,x^2}{2\,d\,l} + \frac{w\,p}{4\,d} - \frac{w\,p\,x}{4\,d\,l} - \frac{w\,p^2}{4\,d\,l},$$

$$\text{H} = \frac{w}{2\,d}\left(x + \frac{p}{2}\right) - \frac{w}{2\,d\,l}\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{w\,p^2}{8\,d\,l}, \tag{50}$$

équation qui nous donne la compression sur les parties de la corde supérieure, du côté de la culée aux points, 1, 1, 1, etc.

Si, maintenant, nous faisons x de l'équation (48) $= x' + p$, et additionnons avec l'équation (49), nous avons :

$$\mathrm{H} = \frac{w\,x'}{2\,d} + \frac{w\,p}{4\,d} - \frac{w\,x'^2}{2\,d\,l} - \frac{w\,p\,x'}{2\,d\,l} + \frac{w\,p^2}{4\,d\,l},$$

$$\mathrm{H} = \frac{w}{2\,d}\left(x' + \frac{p}{2}\right) - \frac{w}{2\,d\,l}\left(x' + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3\,w\,p^2}{8\,d\,l}, \qquad (51)$$

formule exprimant la compression dans les parties de la corde supérieure, sur les points 2, 2, 2, etc., du côté de la culée.

Dans ces équations et dans les suivantes, x ne peut avoir une plus grande valeur que $\frac{l}{2}$, car les travées simples ne sont pas symétriques, comme dans les cas précédents, au-delà du centre.

Faisant x' de l'équation (49) $= x - p$, de l'équation (48), et additionnant, nous aurons :

$$\mathrm{H} = \frac{w\,x}{2\,d} - \frac{w\,p}{4\,d} - \frac{w\,x^2}{2\,d\,l} + \frac{w\,p\,x}{2\,d\,l} + \frac{w\,p^2}{4\,d\,l},$$

$$\mathrm{H} = \frac{w}{2\,d}\left(x - \frac{p}{2}\right) - \frac{w}{2\,d\,l}\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3\,w\,p^2}{8\,d\,l}, \qquad (52)$$

qui nous donne la tension sur les membres de la corde inférieure de la double travée, du côté des points de la travée simple n° 1.

Et, en faisant x de l'équation (48) $= x' - p$ de l'équation (49), nous aurons, en les additionnant :

$$\mathrm{H} = \frac{w\,x'}{2\,d} - \frac{w\,p}{4\,d} - \frac{w\,x'^2}{2\,d\,l} + \frac{w\,p'x}{2\,d\,l} + \frac{w\,p^2}{4\,d\,l},$$

$$\mathrm{H} = \frac{w}{2\,d}\left(x' - \frac{p}{2}\right) - \frac{w}{2\,d\,l}\left(x' - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{w\,p^2}{8\,d\,l}, \qquad (53)$$

qui indique la tension sur les parties de la corde inférieure de la double travée, du côté du centre aux points de la simple travée n° 2.

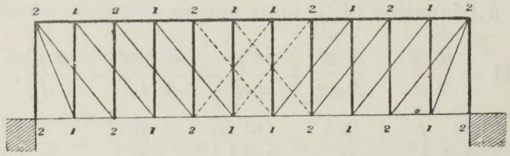

Fig. (52).

Supposons un nombre impair de mailles de chaque côté de la maille du milieu, comme dans la fig. (52), et numérotons les mailles comme nous l'avons fait déjà, la simple travée n° 1 a maintenant une demi-maille à chaque extrémité, tandis que les mailles extrêmes de la simple travée n° 2 sont semblables aux autres.

La travée n° 1 supporte encore le poids d'une maille en plus que la travée n° 2, mais le moment du poids sur le segment x est :

$$\frac{w\,x^2}{4\,l} - \frac{w\,p^2}{4\,l},$$

d'où

$$H = \frac{w\,x}{4\,d} + \frac{w\,p\,x}{4\,d\,l} - \frac{w\,x^2}{4\,d\,l} + \frac{w\,p^2}{4\,d\,l}, \qquad (54)$$

qui est la force horizontale dans la travée simple n° 1.

Le moment du poids sur le segment x' de la simple travée n° 2 est $\frac{w\,x'^2}{4\,d\,l}$, d'où:

$$H = \frac{w\,x'}{4\,d} - \frac{w\,x'^2}{4\,d\,l} - \frac{w\,p\,x'}{4\,d\,l}. \qquad (55)$$

En suivant le même procédé que précédemment, en substituant et en additionnant, nous obtenons les mêmes résultats, c'est-à-dire, l'équation (50) pour la compression sur la corde supérieure aux points 1, 1, 1, etc. ; l'équation (51) pour la compression sur la même corde aux points 2, 2, 2, etc. ; l'équation (52) pour la tension sur la corde inférieure aux points 1, 1, etc. ; et l'équation (53) pour la tension sur la même corde aux points 2, 2, etc.

Observons que ces équations ne sont pas vraies pour les mailles aux extrémités des poutres simples, mais que les équations (50) et (52) se rapportent aux points de la maille de cette travée simple dont les montants forment la maille du centre, et les équations (51) et (53) se rapportent aux points correspondants dans l'autre simple travée.

On évitera, par conséquent, toute confusion en comptant les mailles à partir du milieu de la travée, d'autant plus que les équations seront simplifiées ; remplaçant dans l'équation (50) x par $\frac{l}{2} - z$, z étant la distance du centre de la travée au même point où x est mesuré, nous avons :

$$H = \frac{w\,l}{8\,d} - \frac{w}{2\,d\,l}\left(z - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{w\,p^2}{8\,d\,l}, \qquad (56)$$

représentant les compressions de la corde supérieure aux points de la maille de la travée simple n° 1.

Dans l'équation (51), en remplaçant x' par $\frac{l}{2} - z'$, nous avons :

$$H = \frac{w\,l}{8\,d} - \frac{w}{2\,d\,l}\left(z' - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3\,w\,p^2}{8\,d\,l}, \qquad (57)$$

pour les compressions de la corde supérieure aux points de la maille de la simple travée n° 2.

Dans l'équation (52), en remplaçant x par $\frac{l}{2} - z$, nous avons :

$$H = \frac{w\,l}{8\,d} - \frac{w}{2\,d\,l}\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3\,w\,p^2}{8\,d\,l}, \tag{58}$$

représentant les tensions dans la corde inférieure aux extrémités des mailles de la simple travée n° 1.

Et, dans l'équation (50), en remplaçant x' par $\frac{l}{2} - z'$, nous avons :

$$H = \frac{w\,l}{8\,d} - \frac{w}{2\,d\,l}\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{w\,p^2}{8\,d\,l}, \tag{59}$$

donnant les tensions de la corde inférieure, aux extrémités des mailles de la simple travée n° 2.

Sous un poids uniformément distribué, les forces verticales, dans une simple travée, ne sont pas affectées par les forces verticales dans l'autre travée, et les équations doivent être par conséquent déduites, comme précédemment, des équations des forces horizontales de la travée simple.

Des équations (48) ou (54), nous obtenons pour la simple travée n° 1 :

$$V = \frac{w}{4} - \frac{w\,u}{2\,l} + \frac{w\,p}{4\,l}\,. \tag{60}$$

De l'équation (49) ou de l'équation (55), nous avons pour la simple travée n° 2 :

$$V = \frac{w}{4} - \frac{w\,u'}{2\,l} - \frac{w\,p}{4\,l}\,; \tag{61}$$

u et u' sont les distances aux milieux des mailles des simples travées, et, chaque fois qu'une travée simple commence par une demi-maille, u et u', dans l'équation qui correspond à cette travée, doivent être faits égaux à 0. On doit remarquer que les équations des forces verticales dues au poids mort, comme les équations des forces horizontales de la travée composée, ne sont pas vraies pour les terminaisons des travées simples, mais seulement dans leur application à chaque travée simple pour les bras des mailles intermédiaires.

Si la différence dans les valeurs successives de u et u' est constante quand ces quantités excèdent $\frac{l}{2}$, chacune d'elles représentera alors les distances aux centres des mailles de l'autre travée simple, c'est-à-dire que $\left\{\begin{matrix} u \\ u' \end{matrix}\right\}$ des équations $\left\{\begin{matrix} 60 \\ 61 \end{matrix}\right\}$ indiquant la distance d'une des culées au centre de chaque maille de la travée simple $\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right\}$, quand ces valeurs sont moindres que $\frac{l}{2}$, deviendront la distance de la même culée au centre de chaque maille de la travée simple $\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right\}$, quand ces valeurs sont plus grandes que $\frac{l}{2}$.

En outre, quand u ou u' devient plus grand que $\frac{l}{2}$, l'équation à laquelle il appartient donne la force verticale dans l'autre travée simple, ou celle aux centres des mailles dont u ou u' représente alors les distances ; c'est-à-dire que les équations $\left\{\begin{matrix} 60 \\ 61 \end{matrix}\right\}$, quand $\left\{\begin{matrix} u \\ u' \end{matrix}\right\}$ est plus grand que $\frac{l}{2}$, donnent la force verticale dans la travée simple n° $\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right\}$ passant à la culée opposée à celle de laquelle $\left\{\begin{matrix} u \\ u' \end{matrix}\right\}$ est mesuré. Pour l'équation (60) :

$$V = \frac{w}{4} - \frac{w}{2\,l}\left(u - \frac{p}{2}\right),$$

et devient, quand u est plus grand que $\frac{l}{2}$ et conséquemment égal à $l - u'$, on aura :

$$V = -\left\{\frac{w}{4} - \frac{w}{2\,l}\left(u' + \frac{p}{2}\right)\right\},$$

soit, la même valeur que dans l'équation (61). Quand u' est mesuré, comme l'indique le signe —, de la culée opposée, l'équation (61) est changée d'une façon analogue.

On voit, en examinant la fig. (51), que le poids roulant, avant d'atteindre le centre de la travée, transmet la portion de son poids qui est supportée par la culée la plus éloignée au travers des contre-bras, de l'une des simples travées à l'autre simple travée.

La moitié d'une travée simple étant ainsi en rapport avec la moitié opposée de l'autre travée, nous avons deux travées simples dans cette même travée double, qui sont différentes des premières travées simples, et, dans leur action verticale sous un poids mouvant, entièrement indépendantes l'une de l'autre ; elles sont représentées dans les fig. (53 et 54).

Chacune de celles-ci est l'autre renversée. Dans ce cas, comme dans toute combinaison de simples travées, n'importe quel nombre de mailles, dans chaque

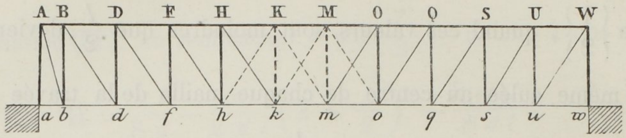

Fig. (53).

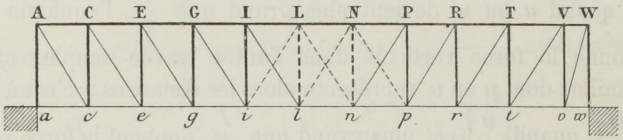

Fig. (54).

travée simple, s'étendant d'une extrémité, peuvent être considérés comme entièrement chargés, sans transmettre aucun poids sur une maille en dehors du poids.

Supposons que le poids mouvant s'étende à une distance quelconque de l'extrémité $\left\{\begin{array}{c}\text{gauche}\\ \text{droite}\end{array}\right\}$ de la travée de la fig. $\left\{\begin{array}{c}53\\ 54\end{array}\right\}$ ou de la culée sur laquelle repose l'extrémité d'une demi-maille de la travée simple, alors :

$$V = \frac{w' \,(l - u)^2}{4\, l^2}$$

indique la réaction de la culée opposée et la plus grande force verticale à un point quelconque du poids mouvant qui passe à la culée non chargée, w' étant le poids du poids mouvant entier. Mais si le poids s'étend de la culée opposée ou de celle sur laquelle est appuyée l'extrémité d'une maille entière de l'une de ces travées, alors l'équation (46) :

$$V = \frac{w'}{4\, l^2}\left[(l - u)^2 - p^2\right],$$

donnera la réaction de la culée opposée et la plus grande force verticale.

L'application de ces équations est restreinte à la longueur de la maille extrême de la travée simple sur laquelle le poids commence à agir, et elles ne sont pas vraies pour la longueur de la maille à l'autre extrémité de cette simple travée. Et puisque chaque simple travée est terminée par une maille entière et par une demi-maille, l'une et l'autre des équations des efforts dus au poids mouvant peut être ajoutée à l'une et à l'autre des équations des efforts dus au poids mort de la simple travée. Il n'y a donc aucune difficulté pour déterminer comment l'addition doit être faite dans chaque cas.

Si le poids mouvant s'étend de l'extrémité de la demi-maille des travées des fig. (53) et fig. (54), et couvre plus de la moitié de la travée, alors il est clair que $\frac{w'(l-u)^2}{4\,l^2}$ doit être ajouté à l'équation de la travée simple qui a une maille entière à son extrémité, puisque ce sont les bras de cette travée qui transmettent la force $\frac{w'(l-u)^2}{4\,l^2}$ à la culée non chargée ; et si le poids couvre moins que la moitié de la travée, alors $\frac{w'(l-u)^2}{4\,l^2}$ agit sur les bras de l'autre travée simple, entre l'extrémité du poids et le centre de la travée. D'où nous avons cette règle fort simple : $\frac{w'(l-u)^2}{4\,l^2}$ doit être ajouté à l'équation de cette travée simple dont les extrémités ont une maille entière.

De même on peut démontrer que $\frac{w}{4\,l^2}\left[(l-u)^2 - p^2\right]$ doit être ajouté à l'équation de la travée simple dont les extrémités sont formées d'une demi-maille.

Exemple. — Soient, dans la (fig. 51) :

l = 210 pieds, longueur de la travée.

d = 20 pieds, hauteur de la travée.

p = 10 pieds, longueur d'une maille.

w = 105 tonnes, poids mort.

w' = 210 tonnes, poids vif.

Puisque la travée simple n° 1 a à ses extrémités des mailles entières, nous avons :

$$V = \frac{w'(l-u)^2}{4\,l^2} + \frac{w}{4} - \frac{w}{2\,l}\left(u - \frac{p}{2}\right), \tag{62}$$

pour le maximum des forces verticales sur les bras de cette travée et sur les contre-bras de la travée n° 2.

En substituant les valeurs données dans l'équation (62), nous avons :

$$V = \frac{210\,(210-u)^2}{4 \times (210)^2} + \frac{105}{4} - \frac{105}{2 \times 210}\left(u - \frac{10}{2}\right),$$

$$V = \frac{(210-u)^2}{840} + 26{,}25 - 0{,}25,\ (u-5),$$

ce qui nous donne le maximum des efforts sur les pièces soumises à la pression.

Pour obtenir la tension sur les tiges, l'équation (62) doit être multipliée par 1.414, sécante de l'angle fait par les tiges avec les verticales ; d'où nous pouvons former le tableau suivant :

Valeurs de x........	10	30	50	70	90	110	130
Forces en tonnes....	75	58,6	45,5	33,3	22,1	11,9	2,6
Compression sur.....	W w et A a	U u et C c	S s et E e	Q q et G g	O o et I i	M m et L l	K k et N n
Forces en tonnes....	106,1	82,9	64,3	47,1	31,2	16,8	3,7
Tension sur.........	W w et A c	U s et C e	S q et E g	Q o et G i	O m et I l	M k et L n	K h et N p

Les forces dans les bras extrêmes, c'est-à-dire, les derniers montants et les tiges qui y sont attachées sont déterminées comme suit dans ce tableau et celui qui suivra : on voit en se reportant à la travée double avec un nombre pair de mailles, que l'effort sur les tiges extrêmes de chaque travée simple est le même que s'il avait été déduit de l'équation verticale du poids constant, avec $w' + w$ substitué à w, ou le même qu'alors que la poutre est entièrement chargée. Cela vient de ce que les travées simples sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, même dans leur action verticale sous un poids total ou partiel. Mais, dans le cas qui nous occupe, quand la travée est partiellement chargée, la moitié d'une des travées simples est réunie par ses contre-bras à la moitié opposée de 'autre travée simple, et les forces se produisent plus ou moins sur ces contre-bras, jusqu'à ce que les moitiés opposées de la même travée simple soient entièrement chargées ; alors les contre-bras sont délivrés et l'équation du poids roulant n'est plus applicable. Il résulte, dans ce cas, que les plus grandes forces sur les bras extrêmes, qui se produisent quand la travée est entièrement chargée, doivent être déterminées par les équations (60) et (61) du poids constant vertical de la travée simple, w dans ces équations étant changé en $w' + w$.

Puisque la travée simple n° 2 a à ses extrémités des demi-mailles, nous avons :

$$V = \frac{w'}{4 l^2} \left[(l - u')^2 - p^2\right] + \frac{w}{4} - \frac{w}{2 l}(w' + p), \tag{63}$$

pour le maximum des forces verticales sur tous les bras de cette simple travée, et dans les contre-bras de la travée simple n° 1.

Et en substituant les constantes dans l'équation (63), nous avons :

$$V = \frac{210}{4 \times (210)^2} [(210 - u')^2 - (10)^2] + \frac{105}{4} - \frac{105}{2 \times 210} \left(u' + \frac{10}{2}\right),$$

$$V = \frac{(210 - u')^2 - 100}{840} + 26{,}25 - 0{,}25\,(u' + 5),$$

qui nous donne le maximum des forces sur les montants ; quant aux forces sur les tiges, nous devons multiplier l'équation (63) par 1,414, comme nous l'avons fait déjà, excepté pour les tiges extrêmes qu'il faut multiplier par 1,118 (la sécante de leur angle) ; d'où nous pouvons former le tableau suivant :

Valeurs de u'.......	0	20	40	60	80	100	120
Forces en tonnes....	75	62,9	49,3	36,7	25	14,4	4,5
Compression sur.....	W *w* et A *a*	V *v* et B *b*	T *t* et D *d*	R *r* et F *f*	P *p* et H *h*	N *n* et K *k*	L *l* et M *m*
Forces en tonnes....	83,9	88,9	67,7	51,9	35,4	20,2	6,4
Tension sur.........	W *v* et A *b*	V *t* et B *a*	T *r* et D *f*	R *p* et F *h*	P *n* et H *k*	N *l* et K *m*	L *i* et M *o*

On observera que les montants L *l* et M *m* sont communs aux deux travées, et sont soumis à une plus grande force (équation 62), et que K *k* et N *n* sont aussi communs, mais soumis à une plus grande force (équation 63), quand le plus long segment est chargé. La compression exercée sur les montants extrêmes A *a* et W *w* par le poids mouvant 75 + 75 = 150 tonnes, est la somme des forces dans les travées simples.

Exemples et applications des formules précédentes.

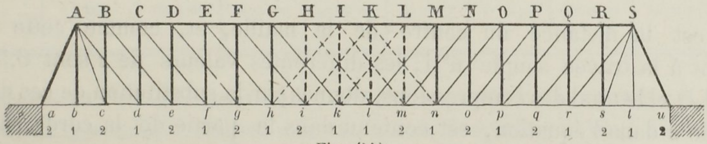

Fig. (55).

Le pont de Quincy (fig. 55), dont nous parlons plus loin, nous offre une excellente occasion pour l'application des formules qui précèdent dans sa plus grande travée, qui est divisée en un nombre pair de mailles, dont les mailles extrêmes diffèrent l'une de l'autre, et présente probablement l'exemple le plus compliqué d'une double travée.

Soit l = 247 pieds, longueur de la travée.
d = 26 pieds, hauteur de la travée.
p = 13 pieds, longueur d'une maille.
w = 198,150 livres, poids de la travée uniformément distribué.
w' = 328,750 livres, poids du poids vif entier uniforme.

Dans ce cas, les nœuds des mailles de la travée simple n° 1, dont les bras forment la maille du centre, sont K, l, M, n, O, p, Q, r, S et t, à la droite du centre ; et à la gauche I, k, G, h, E, f, C, d, A et b ; les autres sont ceux de la travée simple n° 2. Dans la corde supérieure, l'uniformité de la double travée s'étend de A à S, et dans la corde inférieure de c à s ; les équations (56, 57, 58, 59) s'appliqueront par conséquent entre ces points pour les forces horizontales ; de a à c et de s à u, la tension horizontale est facilement trouvée au moyen du moment de la réaction de la culée vers A ou S. Cette tension étant maximum quand $\frac{w'+w}{2}$ est la réaction sur la culée, nous avons, en retranchant le poids de la demi-maille sur la culée :

$$\mathrm{H} = \frac{w\,p}{2\,d} - \frac{w\,p^2}{2\,d\,l}, = \frac{(w'+w)\,p}{2\,d} - \frac{(w'+w)\,p^2}{2\,d\,l},$$

soit la force sur $a\,c$ et $u\,s$.

En substituant les valeurs des constantes dans l'équation (56), w étant égal à $w'+w$, nous avons :

$$\mathrm{H} = \frac{(328,750+198,150)\times 247}{8\times 26} - \frac{328,750+198,150}{2\times 26\times 247}.$$

$$\left(z-\frac{13}{2}\right)^2 \frac{(328,750+198,150)\,13^2}{8\times 26\times 247} =$$

$$= 623,961 - 41,023\,(z-6,5)^2.$$

Ici z est la distance du centre de la maille, et, comme cette équation appartient à la travée simple n° 1, les différentes valeurs de z sont 6,5 ; 32,5 ; 58,5 ; 84,5 et le total des compressions, donnés par la substitution de ces différentes valeurs de z dans l'équation, est contenu dans la partie de la corde supérieure, du côté de la culée à partir de laquelle z est mesuré.

Substituant les valeurs des constantes dans l'équation (57), nous avons :

$$\mathrm{H} = 630,894 - 41,023\,(z-6,5)^2\ .$$

z est ici la distance du centre aux nœuds des mailles de la travée simple n° 2, et ses valeurs sont conséquemment 19,5 ; 45,5 ; 71,5 et 97,5. En les substituant dans l'équation, nous obtenons la compression sur la partie de la corde supérieure vers la culée située du côté de l'extrémité de z.

L'équation (58) devient :

$$H = 630,894 - 41,023\,(z + 6,5)^2$$

et indique la tension sur la corde inférieure aux sommets des mailles du côté du centre de la travée simple n° 1, les valeurs de z étant 6,5 ; 32,5 ; 58,5 et 84,5.

L'équation (59) devient enfin :

$$H = 653,961 - 41,023\,(z + 6,5)^2$$

et indique la tension sur la corde inférieure aux sommets des mailles du côté du centre de la travée simple n° 2, et les valeurs de z sont 19,5 ; 45,5 ; 71,5 et 97,5.

Les totaux des forces sur la corde inférieure sont les mêmes que ceux des forces sur la corde supérieure entre les mêmes bras inclinés, et, conséquemment, les équations établies pour la corde inférieure suffisent dans ce cas pour obtenir la force sur $c\,d$ et $r\,s$.

De ces équations, et en substituant les différentes valeurs de z, nous pouvons former le tableau suivant des forces dans les cordes :

Valeurs de z.....	6,5	19,5	32,5	45,5	58,5	71,5	84,5	97,5	
Forces en livres..	623,961	623,961	596,229	568,498	513,035	457,571	374,377	291,182	
Compression sur..	HI, IK et KL	GH et LM	FG et NM	EF et NO	DE et OP	CD et PQ	BE et QR	AB et RS	
Forces en livres..	623,961	596,229	568,498	513,035	457,571	374,377	291,182	180,256	124,792
Tension sur......	*ki*	*ik* et *lm*	*hi* et *mn*	*gh* et *no*	*fg* et *op*	*ef* et *pq*	*de* et *qr*	*cd* et *ps*	*ab*, *bc*, *st* et *tu*

Le poids est sur la corde inférieure ; par conséquent, les montants ont la même force verticale que celle des tiges, aux extrémités desquelles ils sont fixés.

Dans la figure, les contre-bras nécessaires à cause des effets du poids roulant sont indiqués par les lignes pointillées. Il existe des contre-bras à chaque nœud de la corde inférieure, excepté en b et t.

Quand le poids roulant couvre une partie de la travée, b et t peuvent être considérés comme appartenant à la travée simple n° 1.

Alors dans ce cas, cette travée simple a ses mailles extrêmes de la moitié de la longueur des autres, et elle est réunie au milieu avec la travée simple n° 2 par les contre-bras ; le maximum de la force verticale dans les bras de cette dernière travée, quand u est moindre que $\frac{l}{2}$, et dans les contre-bras de la travée simple n° 1, quand u est plus grand que $\frac{l}{2}$, est, en raison du poids roulant :

$$V = \frac{w'}{4\,l^2}(l - u)^2,$$

u étant, comme auparavant, la distance de la culée au centre de la maille dans laquelle se trouvent les bras dont les forces doivent être déterminées ; et, en ajoutant à l'équation (61), nous avons pour la force verticale totale :

$$V = \frac{w'}{4\,l^2}(l - u)^2 + \frac{w}{4} - \frac{w}{2\,l}\left(u + \frac{p}{2}\right). \tag{64}$$

La partie du poids roulant supportée par les points b et t peut être considérée comme appartenant à chaque travée simple ; puisque pour b la distance à la culée la plus rapprochée est p, il est évident que la réaction de la culée la plus éloignée est $\frac{w' p^2}{l^2}$. Quand le poids commence à agir sur la travée simple n° 2, qui a ses mailles extrêmes uniformes, la force verticale du poids mouvant en résultant est le second membre de l'équation (45) $\frac{w'}{4\,l^2}\left[(l - u')^2 - p^2\right]$, auquel nous devons ajouter $\frac{w' p^2}{l^2}$ et la force due au poids constant, équation (60), ce qui nous donne :

$$V = \frac{w'}{4\,l^2}\left[(l - u')^2 - p^2\right] + \frac{w}{4} - \frac{w}{2\,l}\left(u' - \frac{p}{2}\right), \tag{65}$$

qui représente le maximum total des forces verticales dans les bras de la travée simple n° 1, quand u' est moindre que $\frac{l}{2}$, et dans les contre-bras de la travée simple n° 2, quand il est plus grand que $\frac{l}{2}$.

L'ambiguité, quant aux poids sur les points b et t, rend nécessaire de prévoir un léger excès de force sur une travée simple, et cela vient de ce que la symétrie de la travée est rompue en ces points.

En substituant les valeurs données dans l'équation (64), nous avons :

$$V = \frac{328{,}750}{4 \times (247)^2}\left(247 - u\right)^2 + \frac{198{,}150}{4} - \frac{198{,}150}{2 \times 247}(u \times 6{,}5),$$

$$V = 1{,}347\,(247 - u)^2 + 49{,}537{,}5 - 401{,}1\,(u + 6{,}5),$$

qui est la compression sur les montants de la travée simple n° 2 et la composante verticale de la tension sur les tiges, $V \times 1{,}414$ donne la valeur de cette dernière. D'où nous avons le tableau suivant des forces dans les bras et tiges de cette travée :

Valeur de u	13	39	65	91	117	143
Forces en livres....	124,016	89,564	65,477	43,211	22,765	
Compression sur...	S *u* et A *a*	R *s* et B *c*	P *q* et D *e*	N *o* et E *g*	L *m* et H *i*	
Forces en livres....	124,016	126,643	95,584	61,100	32,189	5,858
Tension sur......	S *s* et A *c*	R *q* et B *e*	P *o* et D *g*	N *m* et F *i*	L *k* et H *i*	I *h* et K *n*

La compression sur A *a* et S *u* et la tension sur A *c* et S *s* sont tirées des équations relatives au poids constant; w est fait égal à $w' + w$ et multiplié par 1,118, la sécante de l'angle de ces deux bras. Quand $u = 130$, la force en I *k* et K *l* est moindre que quand le segment opposé de la travée est chargé.

Substituant les valeurs des constantes dans l'équation (65), nous avons :

$$V = \frac{328{,}750}{4 \times (247)^2}\left[(247 - u)^2 + 3\,(13^2)\right] + \frac{198{,}150}{4} - \frac{198{,}150}{2 \times 247}(u - 6{,}5),$$

$$V = 1{,}347\,(l - u)^2 + 50{,}220 - 401{,}1\,(u - 6{,}5),$$

qui est la compression dans les montants de la travée simple n° 1, et la composante verticale de la tension dans les tiges; $V \times 1{,}414$ donne la valeur de cette tension; d'où nous avons le tableau suivant des forces sur les bras et tiges de cette travée :

Valeur de u	26	52	78	104	130
Forces en livres.......	124,016	83,190	60,013	38,658	19,122
Compression sur......	S u et A a	Q r et C d	O p et E f	M n et G h	K l et I k
Forces en livres.......	156,850	117,731	84,858	54,662	26,028
Tension sur..........	S r et A d	Q p et C f	O n et E h	G k et M l	K i et I m

Comme la compression sur S u et A a vient des deux travées simples, nous avons pour son montant total : $124{,}016 + 124{,}016 + 27{,}732 \times 1.118 = 279{,}035$ livres.

La tension sur A b et S t est due au poids d'une maille, 27,732 livres.

Tous les contre-bras nécessaires dans cette travée sont : I h, I m, K i, K n, L k, H l, H i, I k, K l et L m.

Pour le cas de travées triple et quadruple on suivra la même marche. Nous croyons inutile d'établir les formules qui s'y rapportent.

Travées dont les montants et les tiges sont également inclinés (système Warren) et qui supportent un poids vif et un poids mort.

1er Cas. — Travée simple.

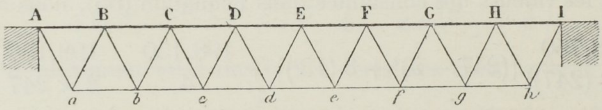

Fig. (56).

Forces sur les cordes. — Ce qu'on appelle généralement une poutre Warren (fig. 56) peut servir d'exemple pour une travée supportant le poids sur la corde supérieure. Dans ce cas, les moments peuvent être pris par rapport aux joints des mailles de la corde supérieure pour obtenir la tension sur les éléments de la corde