SYSTÈME TRIANGULAIRE OU POUTRE WARREN

Les six premiers systèmes se rattachant au système triangulaire proprement dit, nous en traiterons en premier lieu ; puis nous arriverons, comme conséquence directe, à la dérivation des autres.

Système triangulaire isocèle.

Poutre triangulaire chargée à la partie supérieure en un seul point.

Supposons une poutre triangulaire isocèle chargée sur un seul point à la partie supérieure d'un poids P, placé au sommet de la troisième maille (fig. 23).

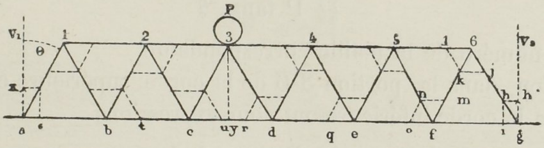

Fig. 23.

Soient V_1 et V_2 les réactions sur les culées, il est clair que nous aurons :

$$V_1 = \frac{yg}{ag} P, \quad V_2 = \frac{ay}{ag} P.$$

Soit $h'g = V_2$, si l'on décompose cette réaction suivant 6 g et $g\ f$, les composantes seront $h\ g$ et $i\ g$.

Transportons maintenant $h\ g$ en 6 j et décomposons-la suivant 5-6 et f 6, nous aurons 6 k pour la force qui agit sur 6 f, et l 6 pour celle qui agit sur 5-6, et l'on voit que, puisque les triangles qui forment la travée sont isocèles, on aura : 6 k = 6 j.

Maintenant, comme la force 6 k agit sur f, en la transportant en ce point et en la décomposant comme antérieurement selon $e\ f$ et 5 f nous aurons $o\ f$ qui agit sur la corde inférieure et $f\ n$ sur 5 f. En continuant de cette manière la décomposition, nous arriverons jusqu'au poids P placé en 3.

En opérant d'une manière analogue dans la partie opposée, en prenant $a\ x = V_2$ nous arriverons par décompositions successives au même point 3.

Il est donc facile de voir que la force qui agit sur la corde inférieure sera dans la partie $g\ f$ égale à $i\ g$; dans $f\ e$ égale à $i\ g + f\ o$; dans $e\ d$ égale à $i\ g + f\ o + c\ q$ et dans $c\ d$ égale à $i\ g + f\ o + c\ q + d\ r$.

De la même façon, en commençant par a on voit que la force sur $a\ b$ sera $a\ s$; sur $b\ c$ sera $a\ s + b\ t$ et sur $c\ d$ sera $a\ s + b\ t + c\ u$, et que pour qu'il y ait équilibre on devra avoir $a\ s + b\ t + c\ u = r\ d + c\ q + o\ f + i\ g$.

On obtiendra la pression qui s'exerce sur la corde supérieure en opérant d'une manière analogue.

Si maintenant nous appelons θ l'angle aigu que forme la direction des bras avec la verticale, il est clair que nous aurons pour force de compression sur chacun des bras compris de a à 3

$$\frac{y\ g}{a\ g}\ \text{P séc. } \theta,$$

et de g à 3

$$\frac{a\ y}{a\ g}\ \text{P séc. } \theta,$$

La compression sur la portion 1-3 de la corde supérieure et la tension dans la portion $a\ y$ de la corde inférieure ont pour expressions

$$\frac{y\ g}{a\ g}\ \text{P tang. } \theta$$

multiplié par le numéro de la maille correspondante.

La compression dans la portion 3-6 de la corde supérieure et la tension dans la portion $y\ g$ de la corde inférieure ont pour expressions

$$\frac{a\ y}{a\ g}\ \text{P tang. } \theta$$

multiplié par le numéro de la maille correspondante.

Poutre triangulaire d'un nombre pair de mailles à la corde inférieure, uniformément chargée à la partie supérieure

Appelons N le nombre des mailles et soit $N = 6$ nous aurons autant d'assemblages à la corde supérieure qu'il y a de portions dans la corde inférieure (fig. 24)

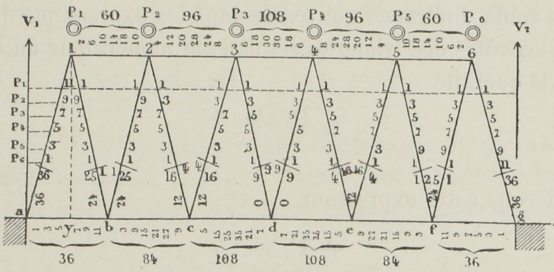

Fig. 24.

Soient :

$P_1\ P_2 \ldots\ P_6$ les poids placés sur la corde supérieure en 1, 2, . . . 6
$V_1\ V_2 \ldots\ V_6$ les réactions des poids $P_1\ P_2 \ldots\ P_6$ sur a
$V^{I}\ V^{II} \ldots\ V^{VI}$ les réactions des poids $P_1\ P_2 \ldots\ P_6$ sur g

De ce que nous avons dit antérieurement nous déduisons :

$$V_1 = \frac{y\,g}{a\,g} P_1 = \frac{11}{12} P_1$$
$$V^{I} = \frac{a\,y}{a\,g} P_1 = \frac{1}{12} P_1$$
$$V^{I} + V_1 = P_1$$

Si θ est l'angle de la verticale avec les côtés du triangle, il est clair qu'en décomposant V^{I} selon g 6 nous aurons

$$\frac{1}{12} P_1 \text{ séc. } \theta$$

pour la compression sur le bras g 6.

Mais cette compression, l'équilibre existant, doit se transmettre en tension sur 6 f et en compression sur 5-6 et comme nous avons supposé les triangles isocèles, la tension sur 6 f devra être égale à la compression sur g 6, soit :

$$\frac{1}{12} P_1 \text{ séc. } \theta$$

Cette tension se transmettra en f en produisant une pression sur 5 f, une tension sur 5 e et ainsi de suite jusqu'au point 1 : il est clair que toutes ces tensions et ces compressions seront toutes égales à

$$\frac{1}{12} P_1 \text{ séc. } \theta,$$

d'où il suit que tous les bras inclinés vers 1 seront en pression et ceux en sens opposé en tension.

Décomposons maintenant V_1 selon 1 a nous aurons :

$$\frac{11}{12} P_1 \text{ séc. } \theta$$

On voit que la seule différence qui existe dans les expressions des forces qui se développent sur les côtés des triangles est dans le numérateur du coefficient fractionnaire et que la quantité

$$\frac{1}{12} P_1 \text{ séc. } \theta$$

reste commune.

Si nous considérons cette expression

$$\frac{1}{12} P_1 \text{ séc. } \theta$$

comme une unité de force, les numérateurs des coefficients fractionnaires représenteront les valeurs des différents efforts développés dans les côtés des triangles par les poids P_1 $P_2 \ldots\ldots P_6$.

Dans la figure (24) ces numérateurs exprimant les forces sont disposés sur la même ligne horizontale que les poids correspondants $P_1 P_2 \ldots P_6$ et écrits à la droite des côtés des triangles quand ils expriment les compressions, et à la gauche lorsqu'ils expriment des tensions.

Pour P_2 nous aurons :

$$V_2 = \frac{9}{12} P_2$$
$$V'' = \frac{3}{12} P_2$$
$$V_2 + V'' = P_2$$

d'où il suit que les nombres 9 et 3 placés à la droite de P_2 sur les côtés des triangles expriment des tensions ou des compressions, selon qu'ils seront placés à la gauche ou à la droite. Il en est de même pour tous les efforts correspondant aux poids $P_3 \ldots P_6$, et les nombres placés sur la figure au-dessous de ceux-ci ne sont que la somme de ces tensions ou compressions sur un des côtés des triangles. De plus, on a inscrit la différence résultante à droite, si elle représente une compression et à gauche, si c'est une tension.

CONSÉQUENCES.

Examinant le diagramme ainsi composé, nous en tirerons les conséquences suivantes :

1° Que, soit que les poids soient égaux ou inégaux, la poutre entièrement chargée ou seulement en partie, les deux extrémités seront toujours en pression.

2° Que la tension ou la compression sur les côtés des triangles, en supposant tous les poids égaux, ne sera pas plus grande lorsque tous les sommets des triangles à la corde supérieure seront chargés. Ainsi, par exemple, si nous considérons un côté *c* 3, on voit que les poids P_1 et P_2 produiront des tensions et tous les autres des compressions, donc la force qui agit sur *c* 3 sera égale la différence de ces deux actions, c'est-à-dire $16 - 4 = +12$ et ce sera une force de compression (1).

3° Que, soit que les poids soient égaux ou inégaux, la poutre chargée entièrement ou seulement en partie, les côtés inclinés des triangles à la fin d'une maille sont assujettis à la même force, seulement l'une est une tension et l'autre une compression.

4° Qu'on produit le maximum des forces sur les côtés inclinés des triangles aboutissant à la fin d'une maille par un poids uniformément réparti, si tous les sommets à la corde supérieure sont chargés à partir de ce point jusqu'à l'extrémité la plus éloignée de la travée, l'autre partie de la travée n'étant pas chargée.

Ainsi *c* 3 sera comprimé par une force 16 si les nœuds 3, 4, 5, 6, sont chargés (2) et si les nœuds 1 et 2 sont libres. Si 1 ou 2 sont chargés ou tous les deux en même temps, la force totale sur *c* 3 sera la précédente diminuée de la tension produite par les poids en 1 et 2.

5° Qu'un maximum en sens opposé s'obtient en chargeant les nœuds qu'on avait considérés comme libres : c'est-à-dire ceux compris entre le point chargé et la culée la plus rapprochée. Par conséquent le maximum de compression pour les charges sur les points 3, 4, 5 et 6, le maximum de tension pour les charges sur les points 1 et 2, auront lieu sur le côté *c* 3, le maximum de tension pour les charges sur les points 3, 4, 5 et 6 et le maximum de compression pour les charges sur les points 1 et 2 auront lieu sur le côté *c* 2.

Pour distinguer ces deux maximum on les désignera par les noms de *premier maximum* et *deuxième maximum*.

(1) Le chiffre accompagné du signe — indique une tension et celui accompagné du signe + une compression.

(2) On appelle ainsi dans la théorie américaine les sommets des triangles qui aboutissent aux cordes et s'y attachent.

6° On voit que si la poutre est uniformément chargée, les côtés des triangles au milieu de la poutre ne sont soumis à aucune force de tension ni de compression.

7° Les forces développées sur les côtés des triangles dans le cas où tous les poids seraient égaux à P, sont proportionnelles à leurs distances au centre de la travée. Ainsi, dans le cas de 6 mailles, nous aurons :

Pour les 2 bras du centre. . . . . $= 0$

Pour les 2 premiers bras les plus rapprochés du centre . . . . $= 12\frac{1}{12}$P séc. $\theta =$ P séc. θ

Pour les 2 autres bras qui suivent . . . . . $= 24\frac{1}{12}$P séc. $\theta = 2$ P séc. θ

Puis pour la 3ᵉ paire de bras . . . . $= 36\frac{1}{12}$P séc. $\theta = 3$ P séc. θ

Et en passant au cas général, x étant le numéro de la maille en partant du milieu, nous aurons : x P séc. θ.

8° Si tous les poids sont égaux et si nous supposons nuls les poids P_3 et P_4, il n'y aura pas de forces dans les côtés des triangles compris entre 2 et 5.

Si nous supposons de plus que P_2 et P_5 sont aussi nuls, il n'y aura pas de forces agissant sur les côtés des triangles entre 1 et 6.

Formule générale indiquant la force que donne sur les côtés des triangles un poids uniformément réparti en comptant les mailles à partir d'une des extrémités de la poutre chargée supérieurement.

Soient : N le nombre des mailles de la poutre.

n le nombre des mailles compté à partir d'une des extrémités jusqu'aux deux bras qu'on considère.

x le nombre des mailles partant du centre jusqu'à ces deux mêmes bras.

P le poids uniformément réparti sur chaque sommet supérieur des mailles.

Il est clair que nous aurons :

$$n + x = \tfrac{1}{2}\text{ N quand } n < \tfrac{1}{2}\text{ N},$$
$$n - x = \tfrac{1}{2}\text{ N quand } n > \tfrac{1}{2}\text{ N};$$

d'où $x = \pm\left(\frac{1}{2}\text{ N} - n\right)$.

Substituons maintenant cette valeur de x dans la formule générale trouvée antérieurement pour la force sur les bras comptée en partant du centre, nous aurons :

$$x\text{ P séc. }\theta = \pm\left(\tfrac{1}{2}\text{ N} - n\right)\text{ P séc. }\theta,$$

qui sera la formule donnant la tension ou la compression à la fin de la nᵐᵉ maille sur un côté d'un triangle.

Autre solution. — On peut arriver au même résultat en employant une autre méthode, aussi très simple, qui consiste à additionner les différentes forces produites par les poids sur un même côté d'un triangle.

La force sur les bras extrêmes, ainsi que nous l'avons déjà dit, sera donnée par :

$$(1+3+5+7\ldots\ldots+\text{à N termes})\frac{\text{P séc. }\theta}{2\text{ N}}=\tfrac{1}{2}\text{ N P séc. }\theta,$$

c'est-à-dire que l'on arrive au même résultat.

La force sur les deux côtés des triangles à la fin de la n^{me} maille est donnée par :

$$[1+3+5+7\ldots\ldots\text{ à }(\text{N}-n\text{ termes})-(1+3+5\ldots\ldots\text{ à }n\text{ termes})]\frac{\text{P séc. }\theta}{2\text{ N}}$$

$$=(\text{N}-n)^2\frac{\text{P séc. }\theta}{2\text{ N}}-n^2\frac{\text{P séc. }\theta}{2\text{ N}};$$

$$=(\text{N}^2-2\,n\,\text{N})\frac{\text{P séc. }\theta}{2\text{ N}};$$

$$=[\tfrac{1}{2}\text{ N}-n]\text{ P séc. }\theta;$$

même résultat que précédemment.

Maximum de force sur les bras ou côtés des triangles. — En nous reportant au diagramme précédent nous verrons facilement que le premier maximum dont nous avons déjà parlé pour les deux bras à la fin de la n^e maille sera donné par la formule suivante, quand $n<\frac{1}{2}$ N :

$$[1+3+5\ldots\ldots\text{ à }(\text{N}-n)\text{ termes}]\frac{\text{P séc. }\theta}{2\text{ N}}=(\text{N}-n)^2\frac{\text{P séc. }\theta}{2\text{ N}}.$$

En supposant $n>\frac{1}{2}$ N, nous obtiendrions avec la même formule le 2^e maximum.

Force sur les cordes. — Cherchons d'abord la force de tension qui se développe sur la corde inférieure.

Appelons D la hauteur de la travée, $t_1\ t_2\ldots\ldots\ t_n$ les forces sur la corde inférieure dans les différentes mailles, l la longueur d'une maille.

Considérons d'abord la force qui se développe sur la première maille dans $a\ b$, fig. (24). Pour cela prenons le moment par rapport au point 1, il est clair que V_1 étant la réaction en A nous aurons pour l'équilibre :

$$\text{V}_1\,a\,y=t_1\times y\,1\,;$$

donc

$$t=\text{V}_1\frac{a\,y}{y\,1}=\text{V}_1\frac{\frac{1}{2}\,l}{\text{D}},$$

qui est l'équation donnant la force de tension sur la première maille de la corde inférieure.

Si maintenant nous voulons la force sur la corde inférieure dans la seconde maille $b\ c$, prenons les moments par rapport au point 2 ; pour l'équilibre nous aurons :

$$V_1 \frac{3\,l}{2} - P_1\, l = t_2\, D\,;$$

d'où
$$t_2 = (3\,V_1 - 2\,P_1)\,\frac{l}{2\,D}.$$

Opérant d'une manière analogue sur la corde inférieure dans la troisième et dans la quatrième maille nous aurons :

$$t_3 = (5\,V_1 - 4\,P_1 - 2\,P_2)\,\frac{l}{2\,D}$$

$$t_4 = (7\,V_1 - 6\,P_1 + 4\,P_2 - 2\,P_1)\,\frac{l}{2\,D}$$

et, pour la corde inférieure de la n^e maille,

$$t_n = \left[(2\,n - 1)\,V_1 - (2\,n - 2)\,P_1 - (2\,n - 4)\,P_2 \ldots .\ P_n)\right]\frac{l}{2\,D}.$$

Si maintenant nous supposons tous les poids égaux, l'équation précédente se simplifiera beaucoup.

En effet nous aurons :

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\,N\,P.$$

Le moment pour une maille quelconque, la n^e, par exemple, sera :

$$V_1\,(n - \tfrac{1}{2})\,l = \tfrac{1}{2}\,N\,P\,(n - \tfrac{1}{2})\,l = \tfrac{1}{4}\,N\,P\,(2\,n - 1)\,l$$

mais le poids de la travée, dans l'hypothèse de poids égaux jusqu'à la n^e maille, sera n P et l'abcisse du centre de gravité de ce poids, par rapport à l'origine des moments qui est sur le sommet de la n^e maille, sera :

$$\tfrac{1}{2}\,(n - 1)\,l,$$

et le moment par rapport au n^e nœud sera :

$$\tfrac{1}{2}\,(n - 1)\,l \times n\,P\,;$$

mais la somme de ce moment et de celui de la réaction sur l'appui a, pour que l'équilibre subsiste, doit être égale au moment de la tension t_n, par rapport au même point. Donc on aura :

$$t_n\,D = \tfrac{1}{4}\,N\,P\,(2\,n - 1)\,l - \tfrac{1}{2}\,(n - 1)\,l \times n\,P,$$

$$t_n\,D = [N\,(2\,n - 1) - 2\,n\,(n - 1)]\,\frac{P\,l}{4};$$

$$\text{d'où } t_n = [N(2n-1) - 2n(n-1)]\frac{P\,l}{4\,D},$$

qui est la formule donnant la tension dans la n^e maille pour des poids égaux.

Si maintenant dans cette formule nous faisons $n = \frac{1}{2}$ N,
nous aurons :

$$t_n = \frac{1}{8}\frac{N^2 P\,l}{D};$$

et, si nous observons que N P est le poids total sur la travée et que N. l est la longueur totale de la travée que nous appellerons L, la formule qui précède deviendra :

$$t_n = \frac{W\,L}{8\,D},$$

formule très simple pouvant servir au contrôle quand on calcule séparément les forces qui se produisent sur chaque maille de la corde inférieure.

Pour arriver maintenant à la pression qui se développe sur la corde supérieure, nous procéderons comme précédemment, avec cette seule différence que les moments sont pris relativement aux nœuds de la corde inférieure.

Ainsi, par exemple, si on veut la pression se développant sur 2-3, on n'aura qu'à prendre le moment relativement au point c et tirer de l'équation des moments la valeur C_2 de la compression. Et, comme précédemment, l'expression générale, qui donne les pressions dans la corde supérieure sur la n^e maille, sera :

$$C_n\,[(2n-1)\,V - (2n-2)\,P_1 - (2n-4)\,P_2 \ldots\, P_n]\,\frac{l}{2\,D}.$$

En supposant tous les poids égaux, cette expression se simplifiera également.

En effet, considérons la compression s'exerçant sur une maille quelconque, la n^e, et prenant l'origine des moments au n^e nœud de la corde inférieure, le moment de V_1 sera :

$$V_1\,n\,l = \tfrac{1}{2}\,N\,P\,n\,l.$$

Le poids total, réparti jusqu'à la fin de la n^e maille, sera : nP, et la distance de son centre de gravité à l'origine des moments sera $\frac{1}{2}\,n\,l$; donc le moment sera :

$$\tfrac{1}{2}\,n^2\,P\,l,$$

donc on aura pour l'équilibre, en appelant C_n la compression sur la n^e maille,

$$C_n\,D = \tfrac{1}{2}\,N\,P\,n\,l - \tfrac{1}{2}\,n^2\,P\,l;$$

$$C_n = (\tfrac{1}{2}\,N\,P\,n\,l - \tfrac{1}{2}\,n^2\,P\,l)\,\frac{1}{D};$$

$$C_n = (N-n)\,\frac{n\,P\,l}{2\,D};$$

ce qui donne la compression sur la corde supérieure dans le cas des poids égaux.

Dans cette équation, si l'on pose $n = \frac{1}{2}$ N, en conservant les mêmes notations que précédemment, on aura :

$$C_n = \frac{1}{8} N^2 \frac{l P}{D} = \frac{1}{8} W \frac{L}{D}.$$

Dans la figure qui précède, afin de rendre plus clair l'effet produit par chaque poids, j'ai placé dans chaque maille les chiffres qui expriment la valeur des forces dues à chaque poids, tant sur la corde supérieure que sur la corde inférieure, en sorte que la somme de ces chiffres donne la force se développant sur chaque maille, soit en tension, soit en compression, sur chaque maille des cordes.

Poutre triangulaire d'un nombre impair de mailles à la corde inférieure, uniformément chargée à la partie supérieure.

Opérons comme dans le cas précédent pour trouver les forces qui agissent sur les différentes parties de la poutre, fig. (25), et supposons que N = 5.

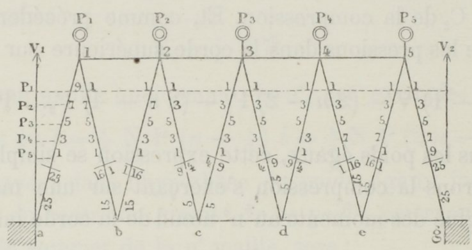

Fig. (25).

En employant les mêmes notations et en conservant la même disposition qu'antérieurement, on voit que leur distribution est tout à fait identique à celle du cas d'un nombre pair de mailles, la seule différence existant est que la force sur les deux bras du milieu n'est pas zéro mais $\frac{5}{10}$ P séc. $\theta = \frac{1}{2}$ P séc. θ, ce qui d'ailleurs est bien clair, puisque dans ce cas la poutre est chargée à son milieu, à la partie supérieure, d'un poids P. Si ce poids n'existait pas, on retomberait dans le cas précédent, c'est-à-dire que les deux bras du centre ne seraient ni en tension ni en pression.

A présent que nous avons vu comment se distribuent les diverses forces sur une poutre triangulaire chargée à la partie supérieure, tant pour les nombres pairs que pour les nombres impairs de mailles, il ne sera pas difficile de se rendre compte, pour peu que l'on observe ce que nous avons dit antérieurement, que les mêmes

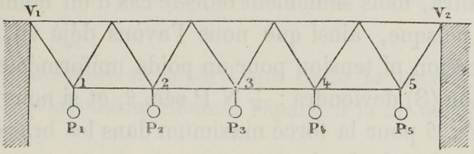

Fig. (26).

forces et propriétés subsisteront également lorsque la poutre est renversée comme l'indique la fig. (26), avec les poids sur la corde inférieure, mais leurs actions seront alors interverties et les parties qui étaient en pression passeront en compression et *vice versâ*.

Forces agissant sur les bras d'une poutre triangulaire chargée supérieurement, dans le cas de deux poids uniformément répartis, l'un sur toute la longueur de la travée, l'autre sur une de ses parties seulement.

Soit W le poids réparti uniformément sur toute la travée, N le nombre de mailles, nous aurons alors, pour le poids sur chaque maille :

$$\frac{W}{N} = w,$$

que nous supposons concentré à la fin de chaque maille. Il s'ensuit, qu'ainsi que nous l'avons démontré antérieurement, la force produite par ces poids sur un bras quelconque, le n^e, par exemple, sera donnée par :

$$\left(\tfrac{1}{2}\,N - n\right) w \text{ séc. } \theta = \tfrac{1}{2}\,(N - 2\,n)\, w \text{ séc. } \theta = (N - 2\,n)\,\frac{N w \text{ séc. } \theta}{2\,N} \qquad (1)$$

La force maximum produite sur la n^e maille par les poids P, qui n'existent que sur une partie de la poutre, est donnée, comme nous l'avons déjà vu, par :

$$(N - n)^2\,\frac{P \text{ séc. } \theta}{2\,N} \qquad (2)$$

et, en additionnant ces deux actions, nous aurons :

$$F = [(N - n)^2\,P + (N - 2\,n)\,N\,w]\,\frac{\text{séc. } \theta}{2\,N} \qquad (3)$$

qui sera l'expression de la force totale développée sur les bras dans la n^e maille par un poids uniformément réparti sur toute la travée et par un autre poids uniformément réparti entre la n^e maille et l'extrémité opposée à l'origine des mailles, ces poids étant toujours appliqués sur la corde supérieure.

Comme conséquence de l'équation qui précède, il résulte que :

1° Si nous supposons $n = \frac{1}{2}$ N, nous verrons que dans cette équation le terme contenant w disparaîtra, mais seulement dans le cas d'un nombre pair de mailles, ce qui est évident, puisque, ainsi que nous l'avons déjà vu, les bras du centre ne supportent ni pression ni tension pour un poids uniformément réparti sur toute la travée, et l'équation (3) deviendra : $\frac{1}{8}$ N P séc. θ, et si nous faisons N P = W, nous aurons $\frac{1}{8}$ W séc. θ pour la force maximum dans les bras du milieu.

2° Si $n = 0$, l'équation deviendra :

$$\frac{1}{2}\,(\mathrm{N\,P} + \mathrm{N}\,w)\ \text{séc.}\ \theta,$$

et faisant $\mathrm{N}\,(\mathrm{P} + w) = \mathrm{W}_3$, c'est-à-dire les deux poids P et w uniformément répartis sur la travée, ou, pour mieux dire, la somme du poids total du pont et du poids uniformément réparti $= \mathrm{W}_3$, nous aurons :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{W}_3\ \text{séc.}\ \theta,$$

qui est, comme on voit, la force qui agit sur les bras extrêmes.

3° Si $n < \frac{1}{2}$ N, les coefficients de P et w sont tous les deux positifs ; d'où il résulte que le poids mort et le poids vif augmenteront la force sur les bras quand le poids vif passe la moitié de la travée.

4° Si $n > \frac{1}{2}$ N, le coefficient de w devient négatif, tandis que le coefficient de l'autre terme reste positif. Donc le poids mort et le poids vif agissent sur les bras en sens contraire et la force qui agit sur eux sera la différence de ces deux termes.

5° Si nous faisons maintenant le premier membre de l'équation (3) égal à zéro, nous aurons :

$$[(\mathrm{N} - n)^2\mathrm{P} + (\mathrm{N} - 2\,n)\,\mathrm{N}\,w]\,\frac{\text{séc.}\ \theta}{2\,\mathrm{N}} = 0$$

et, résolvant cette équation par rapport à n, nous aurons :

$$n = \left[\frac{\mathrm{P} + w}{\mathrm{P}} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{P} + w}{\mathrm{P}}\right)^2 - \frac{\mathrm{P} + w}{\mathrm{P}}}\,\right] \mathrm{N};$$

d'où l'on voit facilement qu'on aura toujours une valeur de n moindre que N et plus grande que $\frac{1}{2}$ N.

Appelant n_0 cette valeur de n, l'autre plus grande que N sera hors des limites du problème, et il est clair qu'au point n_0, l'effort tranchant sera nul.

Forces agissant sur les cordes d'une poutre triangulaire dans le cas de deux poids uniformément répartis, l'un sur toute la longueur de la travée, et l'autre seulement sur une de ses parties.

Soit w le poids uniformément réparti sur toute la travée, et placé à la fin de chaque maille; P le poids uniformément réparti à la fin de chaque maille jusqu'à celle qu'on considère.

Il est clair que $P + w$ sera le poids total appliqué à chaque maille jusqu'à celle qu'on considère inclusivement. Pour avoir la tension sur la corde inférieure, il suffira donc de remplacer, dans la formule antérieure

$$t_n = [N(2n - 1) - 2n(n - 1)] \frac{Pl}{4D}$$

que nous avons vue être celle qui donne la tension sur la corde inférieure à la n^e maille pour un poids uniformément réparti sur toute la longueur, P par $P + w$, et nous aurons ainsi :

$$t_n = [N(2n - 1) - 2n(n - 1)] \frac{(P + w)}{4D} l;$$

ce qui nous donnera la tension à la n^e maille de la corde inférieure pour un poids uniformément réparti sur toute la longueur et pour un poids également uniformément réparti jusqu'à la n^e maille.

De même, pour avoir la compression sur la corde supérieure dans les mêmes conditions de charge qu'antérieurement, nous n'aurons qu'à remplacer, dans l'équation déjà trouvée,

$$C_n = (N - n) \frac{nPl}{2D},$$

qui est l'équation donnant la compression sur la corde supérieure pour un poids uniformément réparti sur toute la longueur, P par $P + w$, et nous aurons l'équation suivante :

$$C_n = (N - n) \frac{nl(P + w)}{2D},$$

qui sera l'équation donnant la compression dans la n^e maille sur la corde supérieure pour un poids uniformément réparti sur toute la longueur et un poids également uniformément réparti jusqu'à la n^e maille.

Poutres triangulaires chargées uniformément aux nœuds de la corde inférieure.

Considérant deux poutres triangulaires chargées uniformément aux nœuds de la corde inférieure, l'une d'un nombre pair de mailles et l'autre d'un nombre impair et déterminant d'une manière analogue les forces qui agissent sur leurs

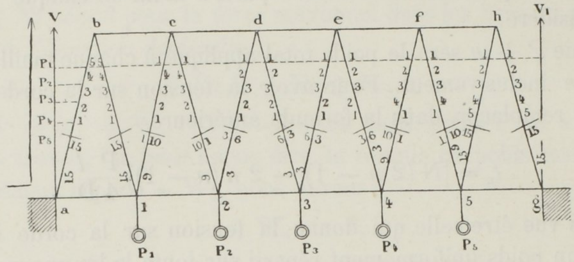

Fig. (27).

parties, nous obtiendrons les deux diagrammes ci-contre, fig. (27 et 28) : et en les observant on voit que la seule différence existant avec le cas précédent, où le poids était placé supérieurement, consiste en ce que la force sur les deux côtés des triangles aux deux extrémités est égale.

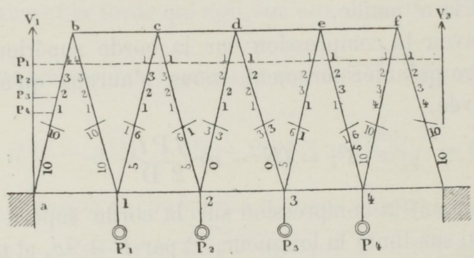

Fig. (28).

Dans ce qui va suivre nous considèrerons le nombre des bras et tiges comptés par paires, de sorte que les n[es] bras et tiges correspondent à la n[e] maille.

Formule donnant la force sur les côtés des triangles pour une poutre triangulaire chargée uniformément à la partie inférieure, sur toute sa longueur, les poids étant concentrés aux nœuds de la corde inférieure.

Si nous appelons P le poids appliqué à chaque extrémité des mailles, et N le nombre des mailles, on verra que le nombre des poids P sera N — 1, donc la réaction sur les appuis sera :

$$\frac{1}{2}(N - 1) P$$

Pour trouver maintenant la force qui agit sur deux bras à la n^e maille, considérons le nombre des poids, entre l'extrémité à partir de laquelle les mailles sont comptées et la n^e maille, il sera :

$$n - 1.$$

Si on se rapporte à la formule générale de la résistance des matériaux, il est évident que l'effort tranchant à la n^e maille sera, en appelant V_1 la réaction de l'appui à partir duquel les poids sont comptés,

$$S_n = V_1 - (n - 1) P; \qquad (4)$$

mais puisque l'on a

$$V_1 = \frac{1}{2}(N - 1) P,$$

l'équation (4) deviendra :

$$S_n = \frac{1}{2}(N - 1) P - (n - 1) P = \frac{1}{2}(N - 2n + 1) P.$$

Maintenant pour avoir la force, agissant sur la n^e maille, due aux poids P, on n'aura qu'à décomposer cet effort tranchant selon les côtés du triangle qui compose la maille, c'est-à-dire, à le multiplier par séc. θ, et on aura :

$$\frac{1}{2}(N - 2n + 1) P \text{ séc. } \theta.$$

formule donnant la force sur les bras et tiges de la n^e maille pour un poids uniformément réparti sur les nœuds de la corde inférieure.

Forces agissant sur les bras d'une poutre triangulaire chargée inférieurement, dans le cas de deux poids uniformément répartis, sur toute la longueur de la travée.

Appelons w les poids appliqués à tous les nœuds de la corde inférieure, nous savons, d'après la formule précédente, que la force produite par ces poids à la n^e paire de bras sera :

$$\frac{1}{2}(N - 2n + 1) w \text{ séc. } \theta.$$

Observons d'une façon analogue que la force produite par les poids P qui agissent sur les n premières mailles sera

$$\frac{1}{2}(N - 2n + 1) P \text{ séc. } \theta.$$

La somme de ces deux forces sera la force définitive qui agit à la n^e paire de bras de la n^e maille et nous aurons ainsi :

$$\frac{1}{2}(N - 2n + 1)(P + w) \text{ séc. } \theta$$

formule donnant la force sur la n^e maille pour deux poids uniformément répartis sur toute la longueur de la poutre à sa partie inférieure.

Maximum de force produit sur les bras d'une poutre triangulaire à la n^e maille pour un poids uniforme placé aux nœuds de la corde inférieure jusqu'à la n^e maille.

En observant les diagrammes précédents on voit qu'on a le même résultat qu'antérieurement, ce qui apparaît aussi en considérant l'effort tranchant qui se produit sur la n^e maille ; le maximum de force sur le n^e bras sera produit quand la partie la plus éloignée de l'extrémité sera chargée et l'autre partie libre.

Ce principe est vrai pour toutes les travées dont les cordes sont horizontales.

Si nous considérons la n^e maille et que nous supposions $n - 1$ nœuds libres et $N - n$ nœuds chargés, le maximum de force pour la n^e paire de bras dans cette maille sera :

$$[1 + 2 + 3 + \ldots \text{ à } (N - n) \text{ termes}] \frac{P \text{ séc. } \theta}{N} = (N - n)(N - n + 1) \frac{P \text{ séc. } \theta}{2\,N}$$

formule qui donne le maximum de force à la n^e maille quand $(N - n)$ mailles sont chargées.

Maximum de force produit sur les bras d'une poutre triangulaire uniformément chargée sur toute sa longueur et par un poids uniformément réparti de l'extrémité la plus lointaine jusqu'à la n^e maill

Il est évident que ce maximum de force sera donné par la somme des actions des deux poids. Pour cela nous n'aurons qu'à additionner les deux efforts produits, l'un par un poids uniforme sur toute la longueur de la poutre et que nous appellerons w, et l'autre par le poids P uniformément réparti sur $(N - n)$ mailles.

L'effort produit par w à la n^e maille sera :

$$\frac{1}{2}(N - 2n + 1)\, w \text{ séc. } \theta$$

et l'effet produit par les $(N - n)$ poids P sera :

$$(N - n)(N - n + 1) \frac{P \text{ séc. } \theta}{2\,N};$$

en additionnant ces deux expressions nous aurons donc :

$$[(N - n)(N - n + 1) P + (N - 2 N + 1) N w] \frac{\text{séc. } \theta}{2 N}$$

expression de la force à la n^e maille, et, afin que cette force soit un premier maximum, n devra être égale à $\frac{1}{2}$ N ou moindre que $\frac{1}{2}$ N.

Force sur les cordes pour un poids uniformément réparti, appliqué aux nœuds de la corde inférieure d'une poutre triangulaire.

Dans la fig. (28) prenons la maille 2-3 comme la n^e. Pour trouver la tension sur cette maille, nous appellerons t_n cette tension.

Prenons le point d de la corde supérieure comme origine des moments. Le moment de la réaction V_1 sur l'appui de gauche par rapport à ce même point d sera, l étant la longueur d'une maille :

$$V \left(n - \tfrac{1}{2}\right) l = \frac{N-1}{2} P \left(n - \tfrac{1}{2}\right) l.$$

Le moment de $(n - 1)$ poids P relativement au même point sera :

$$(n - 1) P \times \tfrac{1}{2}(n - 1) l = \tfrac{1}{2}(n-1)^2 P l$$

Le moment de la tension t_n sera :

$$t_n D$$

D étant la hauteur de la poutre. Donc, pour l'équilibre, nous devrons avoir :

$$t_n D = \left[(N - 1)\left(n - \tfrac{1}{2}\right) P - (n - 1)^2 P\right] \frac{l}{2} \text{ d'où}$$

$$t_n = \left[(N - 1)\, n - \tfrac{1}{2}) - (n - 1)^2\right] \frac{P l}{2 D}.$$

formule donnant la tension sur la n^e maille de la corde inférieure pour un poids uniformément réparti aux nœuds de la corde inférieure.

Pour trouver maintenant la pression sur la n^e maille de la corde supérieure, supposons que $d e$ soit la n^e maille, nous n'aurons qu'à prendre le moment des forces qui agissent sur la travée par rapport au point 3 et, opérant comme antérieurement, nous verrons que le moment de V_1 par rapport au point 3 est :

$$\tfrac{1}{2}(N - 1) P \times n l$$

Le moment de $(n-1)$ poids P, toujours par rapport au même point, sera :

$$(n-1)\,P \times \left[\frac{n-2}{2}+1\right] l$$

$$= (n-1)\, n\, \frac{P\,l}{2}$$

et en appelant C_n la compression sur la corde inférieure le moment de cette force sera C_n D ; donc pour l'équilibre avec la somme des premiers moments on aura :

$$C_n\, D = \frac{l\,P}{2}(N-n)\, n$$

$$C_n \quad = \frac{l\,P}{2\,D}(N-n)$$

formule donnant la compression sur la n^e maille de la corde supérieure pour un poids uniformément réparti appliqué aux nœuds de la corde inférieure.

Force sur les cordes à la n^e maille pour un poids uniformément réparti sur toute la longueur de la poutre et un poids uniformément réparti jusqu'à la n^e maille.

En nous reportant à la théorie des moments nous verrons aisément que la tension sur la n^e maille de la corde inférieure, celle jusqu'où le poids est distribué, sera :

$$t_n = \left[(N-1)\,(n-\tfrac{1}{2}) - (n-1)^2\right]\frac{(P+w)\,l}{2\,D}$$

et d'une façon analogue on trouvera la compression sur la n^e maille de la corde supérieure de la poutre triangulaire placée dans les mêmes conditions, au moyen de la formule :

$$C_n = \left[(N-n)\, n\,(P+w)\right]\frac{l}{2\,D}$$

S'il s'agissait de calculer une poutre triangulaire chargée aux cordes supérieure et inférieure, il faudrait calculer l'effet sur une des cordes, puis sur l'autre ; en additionnant les deux actions on aurait le résultat total.