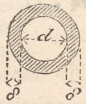
Berechnung der Röhren mit innerem Druck auf Längenbruch.

§ 122. Wenn eine Röhre mit einer Flüssigkeit gefüllt ist, welche unter einem hydrostatischen Druck steht, so wird dieser Druck, indem er überall normal auf die Röhrenwandung wirkt, das Bestreben äufsern, die Röhre zu erweitern, indem er die Wandung der Röhre ausreckt. Diese Ausreckung kann endlich die Grenze der vollkommenen Elastizität überschreiten und demnächst zum Bruche führen, indem die Peripherie der Wandung an irgend einer Stelle aufreifst (Longitudinalbruch). Da die Formveränderungen, welche dem Zerreifsen vorhergehen, gewöhnlich so unbedeutend sind, dafs sie sich der direkten Beobachtung entziehen, so hat man, behufs der Berechnung der Röhren, verschiedene Hypothesen aufgestellt, welche zu verschiedenen und oft zu widersprechenden Resultaten führen. Man hat z. B. angenommen, dafs die Trennung der Röhren immer in zwei, diametral gegenüber liegenden Stellen, und zwar nach dem Gesetz des einfachen Zerreifsens Statt finden werde.

Ist d der innere Durchmesser der Röhre,
δ die Wandstärke,
L die Länge irgend eines Röhrenstücks,

so ergiebt sich die zulässige Belastung gegen Abreifsen $2\delta \,.\, L \,.\, k$, und da die Projektion der gedrückten Fläche $d.L$ ist, so hat man, unter p den Druck auf die Flächen-Einheit verstanden:



$$2\delta \,.\, Lk = d \,.\, Lp,$$

$$1) \quad \delta = \tfrac{1}{2} d \,.\, \frac{p}{k}.$$

Allein jene Annahme, die zuerst von Mariotte aufgestellt worden ist*), trifft nur dann zu, wenn alle Elemente des Querschnitts der Wandung in ganz gleichem Maafse in Anspruch genommen werden, wenn man also von jeder Ausdehnung der Röhre vor dem Zerreifsen und von der Elastizität gänzlich absieht. Es ist schon im Eingange zu diesem Paragraphen erwähnt worden, dafs die Verhältnisse andere sind.

Wenn wir es mit einer cylindrischen Röhre von überall gleicher Wandstärke zu thun haben, und es bezeichnet
d den innern Durchmesser,
D den äufsern Durchmesser,

*) Vergl. einen Aufsatz von Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleifses in Preufsen. Jahrgang 1834. S. 120.

so recken sich durch den Druck die einzelnen koncentrischen Elemente aus, und der innere Durchmesser geht in d', der äuſsere in D' über. Nach Annahmen von Barlow erfolgt nun diese Aenderung des Röhrenquerschnittes in der Weise, daſs der Flächeninhalt der Wandung konstant bleibt, daſs also immer

$$\tfrac{1}{4}\pi(D^2 - d^2) = \tfrac{1}{4}\pi(D'^2 - d'^2)$$

ist, und daſs daher die Dicke der Röhrenwand immer geringer werde, je weiter die Röhre sich ausdehnt. Diese Annahme führt nach einer Entwickelung von Severin in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleiſses in Preuſsen vom Jahre 1828 S. 50 auf den Ausdruck:

$$2)\quad \delta = \tfrac{1}{2} d \frac{p}{k - p},$$

welcher jedenfalls gröſsere Resultate liefert, als der Ausdruck 1), aber für den möglichen Fall, daſs bei irgend einem Material p gleich oder gröſser als k wird, unmögliche Werthe giebt.

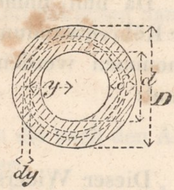
Brix hat in den Verhandlungen des genannten Vereins vom Jahre 1834 S. 124 die mehr wahrscheinliche Hypothese zum Grunde gelegt, daſs die Veränderungen in der Dicke der Röhrenwand, so lange man sich noch innerhalb der Elastizitätsgrenze hält, so unbedeutend seien, daſs man sie vernachlässigen könne. Wir wollen diese Ansicht adoptiren, und also voraussetzen, daſs die Wandstärke für unsere Untersuchungen konstant bleibe. Man hat daher die Grundbedingung:

$$\frac{D - d}{2} = \frac{D' - d'}{2} = \delta = \text{Const.}$$

Es folgt hieraus:

$$D' - D = d' - d.$$

Es drückt aber $\pi(d' - d)$ die Verlängerung eines unendlich dünnen koncentrischen Elementes vom Durchmesser d, welches sich zum Durchmesser d' erweitert, aus, und da $\pi(d' - d) = \pi(D' - D)$ ist, so folgt, daſs diese Verlängerungen für alle Elemente gleich groſs sind, so bald die Röhre überhaupt eine Ausdehnung erleidet.



Denken wir ein unendlich dünnes Element von dem Radius y, der Dicke dy (radial gemessen) und der Breite L (parallel mit der Axe gemessen), so ist der Flächeninhalt des Querschnitts $L.dy$, die Länge dieses Elements aber $2\pi y$; nennen wir die Verlängerung, welche es erleidet, λ, und die Spannung, welche erforderlich ist, um diese Verlängerung zu erzeugen, also auch den Widerstand, mit welchem das Element der Verlängerung widersteht, ds, so folgt, wenn man in die Formel (S. 193)

$$E = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{\lambda}$$

die betreffenden Werthe einsetzt, und ds entwickelt:

$$ds = \frac{E \cdot L \cdot \lambda}{2\pi} \cdot \frac{d \cdot y}{y}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daſs die Spannungen, welche die einzelnen Elemente erleiden, sich umgekehrt verhalten, wie ihre Radien y, daſs also die gröſste Spannung an der innern Peripherie Statt findet, und ferner daſs der Gesammt-Widerstand, welchen die Röhrenwand an irgend einer Stelle der Ausdehnung entgegensetzt, zu finden ist, wenn man auf beiden Seiten integrirt, und das Integral von $y = \frac{1}{2}d$ bis $y = \frac{1}{2}D$ nimmt. Man hat also den Gesammtwiderstand:

$$\int ds = s = \frac{EL\lambda}{2\pi} \int_{\frac{1}{2}D}^{\frac{1}{2}d} \frac{dy}{y}$$

$$= \frac{EL\lambda}{2\pi} \left\{ \log \text{nat} \tfrac{1}{2}D - \log \text{nat} \tfrac{1}{2}d \right\}$$

$$= \frac{EL\lambda}{2\pi} \log \text{nat} \frac{D}{d}.$$

Soll nun die gröſste Spannung höchstens gleich dem oft genannten Werth k sein, so hat man, wenn l die Länge desjenigen Elementes ist, in welchem die Spannung k Statt findet, nach S. 190: $E\lambda = kl$, und da dies Element, nach dem Obigen, das innerste des Querschnitts ist, so folgt, wenn man für l den Werth πd setzt: $E\lambda = \pi dk$, folglich:

$$s = \frac{d}{2} \cdot kL \cdot \log \text{nat} \frac{D}{d}.$$

Da nun immer zwei, diametral gegenüber liegende Stellen der Röhrenwandung gleichzeitig, und in gleicher Weise in Anspruch genommen werden, so ist der Gesammt-Widerstand der Röhrenwand:

$$2s = d \cdot kL \cdot \log \text{nat} \frac{D}{d}.$$

Dieser Widerstand $2s$ muſs aber gleich dem Druck sein, welchen die Flüssigkeit auf die Röhrenwandung erzeugt; derselbe ist nach S. 346 $= pdL$. Setzt man diesen Werth für $2s$ ein, so folgt:

$$\frac{p}{k} = \log \operatorname{nat} \frac{D}{d},$$

oder, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet:

$$\frac{D}{d} = e^{\frac{p}{k}};\ D = d . e^{\frac{p}{k}}.$$

$$3)\ \delta = \frac{D-d}{2} = \frac{d}{2}\left(e^{\frac{p}{k}} - 1\right).$$

Wendet man gemeine Logarithmen an, so ist:
$\log e = \log 2{,}7182818 = 0{,}4342945$, folglich:

$$4)\ \log D = \log d + 0{,}43429 \cdot \frac{p}{k}.$$

Man kann auch in der Gleichung 3) den Ausdruck $e^{\frac{p}{k}}$ in eine Reihe verwandeln nach dem bekannten Gesetz:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \ldots\ldots$$

Es folgt dann:

$$\delta = \frac{d}{2}\left(\frac{p}{k} + \frac{p^2}{2k^2} + \frac{p^3}{6k^3} + \ldots\ldots\right)$$

und, wenn man das dritte Glied in der Klammer, und die folgenden vernachlässigt, was jedoch nur zulässig ist, wenn p im Vergleich zu k sehr klein ist, so hat man näherungsweise:

$$5)\ \delta = \frac{d}{2} \cdot \frac{p}{k}\left(1 + \frac{p}{2k}\right).$$

In diesem Ausdruck bezeichnet:

δ die Wandstärke der Röhre in Zollen (Centimètres),

p den Druck in Pfunden auf den Quadratzoll der Röhrenwandung (oder in Kilogrammes auf den Quadrat-Centimètre),

k die zulässige Belastung des Materials in Pfunden auf den Quadratzoll (oder in Kilogr. auf den Quadrat-Centim.).

Für gewöhnliche Leitungsröhren kann man auch noch das zweite Glied in der Klammer vernachlässigen, und bekommt dann, noch weniger genau:

$$6)\ \delta = \tfrac{1}{2} d \frac{p}{k}.$$

Diese Formel giebt denselben Werth, welchen die nach den Ansichten von Mariotte berechnete Formel 1) liefert.

Für Schmiedeeisen ist $k = 10000$, für Gufseisen aber nach der Bemerkung auf S. 195, da hier das Material ausschliefslich auf Zerreifsen in Anspruch genommen wird, $k = 3500$ zu setzen.

Beispiel. Es sei die Wanddicke eines Prefscylinders für eine hydraulische Presse zu bestimmen. Der Druck auf den Quadratzoll betrage 1500 Pfund, und der innere Durchmesser 10 Zoll. Man hat:

$$\text{Log}\,D = \log 10 + 0{,}43429 \,.\, \tfrac{1500}{3500} = 1{,}18612,$$

$$D = 15{,}351; \quad \delta = \frac{D-d}{2} = 2{,}675 \text{ Zoll},$$

wozu noch nach S. 341 konstant $\frac{1}{3}$ Zoll addirt wird, so dafs sich die Wandstärke gleich 3 Zoll ergiebt. Die Näherungsformel 6) würde geben:

$$\delta = \frac{10}{2} \cdot \frac{1500}{3500} + \tfrac{1}{3} = 2{,}143 + \tfrac{1}{3} = 2{,}47 \text{ Zoll},$$

also eine Wandstärke, die mehr als $\frac{1}{2}$ Zoll zu schwach wäre. Die Näherungsformel 5) dagegen liefert:

$$\delta = \frac{10}{2}\,\frac{1500}{3500}\left(1 + \frac{1500}{7000}\right) + \tfrac{1}{3} \text{ Zoll} = 2{,}934 \text{ Zoll},$$

also ein bei Weitem genaueres Resultat.

Nach der Barlowschen Formel 2) findet man:

$$\delta = \frac{10}{2} \cdot \frac{1500}{3500 - 1500} + \tfrac{1}{3} \text{ Zoll} = 4{,}083 \text{ Zoll}.$$

Häufig findet man als Regel angeführt, dafs man bei hydraulischen Pressen die Wandstärke gleich $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ des innern Durchmessers machen solle; es würde rathsam sein, diese Wandstärke nicht zu überschreiten; man hätte für diesen Fall $D = \frac{5}{3}d$ bis $2d$, folglich nach Formel 4):

$$p = \frac{k}{0{,}43429} \cdot \log \frac{D}{d} = 1788 \text{ bis } 2427.$$

Es würde also für hydraulische Pressen mit Cylinder von Gufseisen ein Druck von 1800 bis 2400 Pfund auf den Quadratzoll nicht zu überschreiten sein.

Gewöhnliche Leitungsröhren haben in der Regel viel geringere Drucke auszuhalten, und man kann sich dann mit vollkommener Sicherheit der Näherungsformel 6) bedienen. Setzt man in jener Formel nach S. 345 $p = 15{,}08n$, wenn n den Druck in Atmosphären bedeutet, und bezeichnet man den konstanten Summanden (S. 341) mit c, so hat man:

$$7)\ \delta = \frac{7{,}54}{k} \cdot dn + c.$$

Folgende Tabelle giebt die Formeln, nach welchen die Wandstärken näherungsweise zu bestimmen sind.

XXIII. Tabelle

über die Formeln zur Berechnung der Wandstärken von Leitungsröhren aus verschiedenen Materialien, nach der Näherungsformel

$$\delta = \frac{7{,}54}{k} \cdot dn + c:$$

Material	Zulässige Belastung pro □Zoll in Pfunden k*)	Formel zur Berechnung der Wandstärke n in Atmosphären	Koeffizient von nd nach Morin
Schmiedeeisen . . .	10000	$\delta = 0{,}000759\,dn + \frac{1}{9}$ Zoll	—
Eisenblech	9000	$\delta = 0{,}00084\,dn + \frac{1}{9}$ »	0,00086
Gufseisen	3500	$\delta = 0{,}00214\,dn + \frac{1}{3}$ »	0,00238
Kupfer, gezogen . .	5000	$\delta = 0{,}00152\,dn + \frac{1}{6}$ »	0,00148
» gegossen . .	3500	$\delta = 0{,}00214\,dn + \frac{1}{6}$ »	—
Blei	800	$\delta = 0{,}00949\,dn + \frac{1}{5}$ »	0,00242
Zinn	730	$\delta = 0{,}01038\,dn + \frac{1}{6}$ »	—
Zink	1500	$\delta = 0{,}00506\,dn + \frac{1}{6}$ »	0,00507
Messing	7000	$d = 0{,}00042\,dn + \frac{1}{8}$ »	—
Holz	230	$d = 0{,}03300\,dn + 1$ »	0,03230
Sandstein	200	$d = 0{,}03795\,dn + 1\frac{1}{6}$ »	0,03690
Gebrannter Thon .	140	$d = 0{,}05421\,dn + 1\frac{1}{2}$ »	0,05380

Wenn die Röhren der Einwirkung der Wärme oder gar der Glühhitze ausgesetzt sind, so vermindert sich ihre Festigkeit bedeutend. Dieser Fall tritt unter andern bei den Dampfkesseln, den Dampfleitungs-Röhren, den Siederöhren etc. ein. Man kann die Belastungsfähigkeit unter solchen Umständen nur etwa gleich der Hälfte derjenigen setzen, welche die vorige Tabelle angiebt, so dafs man für Eisenblech etwa $k = 5000$ Pfund, für Gufseisen nur 1500 Pfund zu rechnen pflegt. Setzt man in die Formel 3) diese Werthe für k ein, und nimmt man anstatt p nach S. 345 $15{,}08n$, so findet man:

$$\text{für Eisenblech } \delta = \tfrac{1}{2}d\left(e^{0{,}003n} - 1\right) + 0{,}1 \text{ Zoll},$$

$$\text{„ Gufseisen } \delta = \tfrac{1}{2}d\left(e^{0{,}01n} - 1\right) + \tfrac{1}{3} \text{ „}$$

Diese Formeln sind diejenigen, welche das preufsische „Regulativ, die Anlage von Dampfkesseln betreffend, vom 6. September 1848“ zur Berechnung der Wandstärken cylindrischer Kessel vorschreibt. Gufseisen ist übrigens nur für Sie-

*) Die Angaben dieser Kolumne dienen zugleich, um mittelst der Formel 4) S. 349 die genaue Wandstärke zu bestimmen.

deröhren bis zu 18 Zoll Durchmesser erlaubt, Messing ist für Röhren mit innerem Druck überhaupt verboten, und kupferne Bleche sollen dieselbe Stärke haben, wie schmiedeeiserne.

Setzt man die genannten Werthe von k in die Näherungsformel 7), so bekommt man für Dampf-Kessel und Röhren

von Eisenblech $\delta = 0{,}0015\,nd + 0{,}1$ Zoll,

„ Gufseisen $\delta = 0{,}0050\,nd + \frac{1}{3}$ „

Das französische, und nach demselben das österreichische, sächsische und belgische Regulativ verbieten für Dampfkessel das Gufseisen ganz und gar, und schreiben zur Bestimmung der Stärke schmiedeeiserner Bleche für Dampfkessel die Formel vor:

$$\delta = 0{,}0018\,nd + \tfrac{1}{9} \text{ Zoll oder } + 3 \text{ Millimètres},$$

worin δ und d in gleichen Maafs-Einheiten zu nehmen sind. Diese Formel entspricht nur einem Werthe von k gleich etwa 4200 Pfund.

Berechnung der Röhren mit innerem Druck auf Querbruch.

§ 123. Wenn eine Röhre am untern Ende geschlossen ist, so kann der Druck der Flüssigkeit auf den Boden der Röhre unter gewissen Umständen auf Abreifsen derselben wirken, in der Weise, dafs er zunächst ein Ausrecken der Röhre nach der Richtung der Axe, und demnächst eine Trennung des Querschnitts, welcher normal zur Axe liegt, herbeiführt. Hat man es mit einem ruhenden Druck (todten Druck) zu thun, so ist die Berechnung sehr einfach, denn es mufs in diesem Falle sein:

$$\tfrac{1}{4}\pi(D'^2 - d^2)\,k = p \,.\, \tfrac{1}{4}\pi d^2,$$

wenn D den äufsern Durchmesser der Röhre,

d den innern Durchmesser der Röhre,

$\frac{D-d}{2} = \delta$ die Wandstärke,

p den Druck der Flüssigkeit auf die Flächen-Einheit,

k die Belastungsfähigkeit der Flächen-Einheit

bezeichnet. Es folgt daraus:

$$1)\; D = d\sqrt{\left(\frac{p}{k} + 1\right)}; \qquad \delta = \tfrac{1}{2} d\left[\sqrt{\left(\frac{p}{k} + 1\right)} - 1\right].$$

Da aber immer $\sqrt{\left(\frac{p}{k} + 1\right)}$ kleiner ist, als $\frac{p}{k} + 1$, also auch $\left[\sqrt{\left(\frac{p}{k} + 1\right)} - 1\right]$ kleiner als $\frac{p}{k}$, so giebt dieser Ausdruck immer einen geringern Werth als die Näherungsformel 6) des vorigen Paragraphen, und es folgt daraus, dafs, wenn man die Röhren auf