für den **quadratischen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 29h^3$, $h = 0{,}33\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 17h^3$, $h = 0{,}39\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . $PR = 2{,}5h^3$, $h = 0{,}74\sqrt[3]{(PR)}$.

Nimmt man P in Kilogrammes, R in Mètres, d und h in Centimètres, so hat man für diesen Fall:

für den kreisförmigen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 0{,}165d^3$, $d = 1{,}83\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 0{,}115d^3$, $d = 2{,}06\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . $PR = 0{,}017d^3$, $d = 3{,}89\sqrt[3]{(PR)}$;

für den quadratischen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 0{,}196h^3$, $h = 1{,}72\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 0{,}138h^3$, $h = 1{,}93\sqrt[3]{(PR)}$,

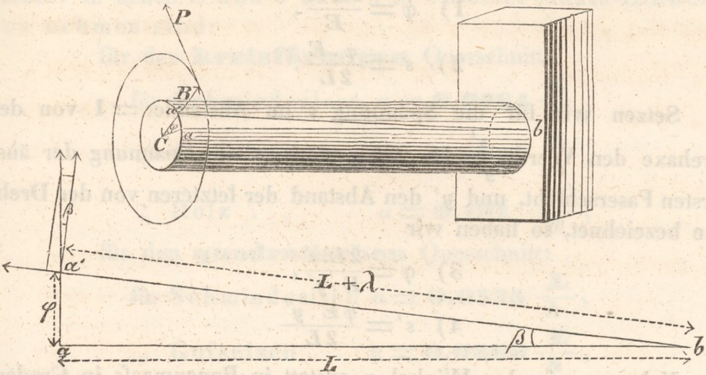
„ Holz . . . . $PR = 0{,}020h^3$, $h = 3{,}69\sqrt[3]{(PR)}$.

Bestimmung des Verdrehungswinkels.

§ 99. Obwohl nun die vorstehend angeführten Formeln Werthe liefern, welche eine Belastung des Körpers bis nur zur Hälfte der Elastizitätsgrenze repräsentiren, und welche folglich genügende Sicherheit gegen eine bleibende Formveränderung gewähren, so kommen doch im Maschinenbau sehr häufig Fälle vor, in denen man aufser auf die Festigkeit des Körpers, auch noch auf den Verdrehungswinkel Rücksicht zu nehmen hat.

Durch das auf Verdrehung des Körpers wirkende Moment PR wird nämlich, wenn in dem Abstande L sich ein Widerstand befindet, welcher den Körper festhält, die Faser ab, welche in der ursprünglichen Lage mit der Axe parallel war, spiralförmig gewunden, dadurch ausgereckt und in die Lage $a'b$ gebracht. Der Winkel aca', welchen die Radien nach den beiden Lagen der Endpunkte der Faser einschliefsen, heifst der Verdrehungswinkel (Torsionswinkel); wir bezeichnen denselben in Bogenmaafs

$d = 0{,}333\sqrt[3]{(PR)}$ kann man nehmen $d = 0{,}35\sqrt[3]{(PR)}$ und dieser Ausdruck ist auf S. 90 bei Berechnung der Schrauben gebraucht worden, weil beim Anziehen der Schrauben durch starkes Rucken am Schraubenschlüssel sehr beträchtliche Stöfse entstehen.



mit φ; denken wir die Faser ab in dem Abstande $= 1$ von der Drehaxe, so ist auch die Länge des Bogens $aa' = \varphi$. Wird das Dreieck aba' abgewickelt, so ist ab die ursprüngliche Länge der Faser $= L$, $a'b$ die Länge der ausgereckten Faser, die, wenn λ die Verlängerung bezeichnet, welche die Faser ab durch das Ausrecken erleidet, durch $L + \lambda$ ausgedrückt werden kann; endlich läfst sich der auf Drehung wirkende Druck, welcher mit der Richtung aa' zusammenfällt, in zwei andere zerlegen, von denen der eine, normal zur Faser, die mit s bezeichnete Spannung hervorbringt, der andere, in der Richtung der Faser wirkend, die Verlängerung λ erzeugt, und mit σ bezeichnet werdeu mag. Man sieht, dafs sich ausdrückt σ durch $s \,.\, \mathrm{cotg}\, \beta$, und weil β gleich dem Winkel bei b ist, so hat man:

$$\sigma = s \frac{\varphi}{L},$$

andererseits folgt nach S. 190, Formel 1, der Druck σ, welcher die Verlängerung λ hervorbringt:

$$\sigma = E \,.\, \frac{\lambda}{L},$$

worin E den Elastizitäts-Modulus bedeutet. Aus der Gleichsetzung beider Werthe von σ hat man:

$$\lambda = \frac{\varphi s}{E},$$

es ist aber $L^2 + \varphi^2 = (L + \lambda)^2$, und wenn wir λ^2 als sehr klein vernachlässigen, so hat man für kleine Verdrehungen:

$$\lambda = \frac{\varphi^2}{2L},$$

und durch Gleichsetzung beider Werthe von λ ergiebt sich:

$$1)\quad \varphi = \frac{2L\,.\,s}{E},$$

$$2)\quad s = \frac{\varphi\,.\,E}{2L}.$$

Setzen wir für die Spannung s im Abstande $= 1$ von der Drehaxe den Werth $\frac{s'}{y'}$ (S. 235), worin s' die Spannung der äussersten Faserschicht, und y' den Abstand der letzteren von der Drehaxe bezeichnet, so haben wir

$$3)\quad \varphi = \frac{2L\,.\,s'}{E\,.\,y'},$$

$$4)\quad s' = \frac{\varphi E\,.\,y'}{2L}.$$

Nehmen wir den Winkel φ anstatt in Bogenmaafs in Graden, und es habe φ einen Werth von α^0, so ist $\varphi = \frac{\pi\alpha}{180}$, folglich

$$5)\quad \alpha = \frac{360}{\pi}\,.\,\frac{L}{E}\,.\,\frac{s'}{y'} = 114{,}59\,\frac{L}{E}\,.\,\frac{s'}{y'}.$$

Bei den Berechnungen des vorigen Paragraphen haben wir überall angenommen, dafs die gröfste Belastung, welche die äusserste Faserschicht erleiden dürfe selbst für den Fall, dafs das auf Torsion wirkende Moment das vier-, sechs- oder achtfache des gewöhnlichen erreiche, doch nur höchstens die Hälfte der Belastung an der Elastizitätsgrenze betragen dürfe. Setzen wir daher für s' den dort angenommenen Werth $\frac{1}{2}\frac{E}{x}$ (S. 236), so haben wir für den gröfsten Werth von α

$$6)\quad \alpha = \frac{57{,}29}{x}\,.\,\frac{L}{y'},$$

oder wenn wir für y' die auf S. 236 angegebenen Werthe setzen:

$$7)\left\{\begin{array}{lll} \text{für den kreisförmigen Querschnitt} & \alpha = \frac{114{,}59}{x}\,.\,\frac{L}{d}, \\ \text{„ „ quadratischen „} & \alpha = \frac{80{,}2}{x}\,.\,\frac{L}{h}. \end{array}\right.$$

Nehmen wir durchschnittlich, wie auf S. 224:

für Schmiedeeisen . . . . $x = 1500$,
„ Gufseisen . . . . $x = 1200$,
„ Holz . . . . $x = 600$,

so ergiebt sich der Torsions-Winkel α in Graden für den Augenblick, wo die gröfste vorausgesetzte Belastung wirklich eintritt, wo also die Spannung in der äufsersten Faserschicht die Hälfte der Elastizitätsgrenze erreicht, durch folgende Formeln, in denen L und d oder h in einerlei Maafs-Einheiten zu nehmen sind:

für den **kreisförmigen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $\alpha = \mathbf{0{,}0764}\,\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{d}}$,

„ Gufseisen . . $\alpha = \mathbf{0{,}0955}\,\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{d}}$,

„ Holz . . . . $\alpha = \mathbf{0{,}191}\,\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{d}}$;

für den **quadratischen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $\alpha = \mathbf{0{,}0535}\,\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{h}}$,

„ Gufseisen . . $\alpha = \mathbf{0{,}0669}\,\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{h}}$,

„ Holz . . . . $\alpha = \mathbf{0{,}134}\,\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{h}}$.

Man kann auch leicht den Torsionswinkel für den normalen Werth von PR bestimmen. Aus den Formeln auf S. 236 für PR ist nämlich ersichtlich, dafs bei gegebenem Querschnitt die Belastung s' der äufsersten Faser sich verhält wie PR; jenachdem nun der normale Werth für $PR = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{8}$ des gröfsten Werths angenommen wurde (S. 237), wird auch s' $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{8}$ derjenigen Spannung sein, welche bei der gröfsten Belastung Statt findet, und da nach Formel 5) der Werth von α unter sonst gleichen Verhältnissen dem Werth von s' proportional ist, so wird der Verdrehungswinkel für den gewöhnlichen Werth von PR, beziehlich $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{8}$ desjenigen Werthes sein, welcher bei der gröfsten Belastung Statt findet.

Beispiel. Eine schmiedeeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitt werde auf eine Länge von 8 Fufs auf Torsion in Anspruch genommen. Die auf Torsion wirkende Belastung betrage 1000 Pfund und wirke an einem Hebelsarm von $1\frac{1}{2}$ Fufs. Die gröfste eintretende Belastung kann auf das Sechsfache der gewöhnlichen veranschlagt werden. Welchen Durchmesser bekommt die Welle? welches ist der gröfste Verdrehungswinkel? welches der Verdrehungswinkel bei normalem Werth von PR?

Nach S. 239 hat man $d = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(PR)} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(1500)} = \frac{1}{3}.11{,}5 = 3{,}8''$.

Der gröfste Verdrehungswinkel ist:

$$\alpha = 0{,}0764\,.\,\frac{L}{d} = 0{,}0764\,.\,\frac{12\,.\,8}{3{,}8} = 1{,}93^\circ,$$

der gewöhnliche Verdrehungswinkel:

$$\tfrac{1}{6}\alpha = 0{,}32^\circ.$$

Zuweilen ist man bei der Berechnung stangenförmiger Körper veranlafst, das Maximum des Torsionswinkels entweder des gröfsten, oder des normalen als gegeben anzusehen. Man kann für diesen Fall die Dimensionen des Körpers sowohl aus den zuletzt aufgestellten Formeln, als auch nach den Formeln des vorigen Paragraphen berechnen, und hat dann den gröfsten gefundenen Werth definitiv anzunehmen.

Will man allgemein den Torsionswinkel eines stabförmigen Körpers bestimmen, wenn das auf Torsion wirkende Moment gegeben ist, und ohne dafs man die Spannung der äufsersten Faserschicht kennt, so hat man den Werth von s aus der Gleichung 2) in die Gleichungen auf S. 235 einzusetzen. Man erhält sodann

für den kreisförmigen Querschnitt: $PR = \frac{\pi}{64} \cdot \varphi \frac{E}{L} d^4$,

" " quadratischen " $PR = \frac{1}{12} \varphi \cdot \frac{E}{L} h^4$,

oder, da $\varphi = \frac{\pi \alpha}{180}$ ist, wenn α die Grade des in Bogenmaafs gemessenen Winkels φ bezeichnet

für den kreisförmigen Querschnitt: $PR = \alpha \cdot \frac{E}{1166} \cdot \frac{d^4}{L}$,

" " quadratischen " $PR = \alpha \cdot \frac{E}{687} \cdot \frac{h^4}{L}$.

Nimmt man für E die Werthe aus der Tabelle XI. S. 190, wie sie auch auf S. 220 zusammengestellt sind, so hat man in runden Zahlen, wenn P in Pfunden, alle Dimensionen in Zollen genommen sind:

	für den **kreisförmigen** Querschnitt:	f. d. **quadratischen** Querschnitt:
f. Schmiedeeisen	$PR = \frac{25000\,\alpha d^4}{L}$,	$PR = \frac{42000\,\alpha h^4}{L}$,
f. Gufseisen . .	$PR = \frac{15000\,\alpha d^4}{L}$,	$PR = \frac{25000\,\alpha h^4}{L}$,
f. Holz	$PR = \frac{1500\,\alpha d^4}{L}$,	$PR = \frac{2500\,\alpha h^4}{L}$.

Nimmt man P in Kilogrammes, alle Dimensionen in Centimètres, so gehen die Formeln über in:

	für den kreisförmigen Querschnitt:	für den quadratischen Querschnitt:
für Schmiedeeisen	$PR = \frac{1700\,\alpha d^4}{L}$,	$PR = \frac{3000\,\alpha h^4}{L}$,
„ Gufseisen . .	$PR = \frac{1000\,\alpha d^4}{L}$,	$PR = \frac{1700\,\alpha h^4}{L}$,
„ Holz	$PR = \frac{100\,\alpha d^4}{L}$;	$PR = \frac{170\,\alpha h^4}{L}$.

Die hier aufgestellten Formeln sind nach den allgemeinen Gesetzen für die Festigkeit hergeleitet und berechnet worden. Es ist wahrscheinlich, dafs der Elastizitäts-Modulus, welcher bei der Torsion in Rechnung zu bringen ist, etwas kleiner sei, als der für einfaches Ausrecken und Zusammendrücken geltende, da hier die Faser gleichzeitig nach der einen Richtung ausgereckt, nach der andern zusammengedrückt wird, und dafs sich der Werth des Elastizitäts-Modulus mit dem Verdrehungswinkel selbst ändere. An zuverlässigen Versuchen und Beobachtungen fehlt es bis jetzt; die bekannt gewordenen Versuche scheinen jene Ansicht zu bestätigen*).

---

*) Nach Angaben von Morin (Hilfsbuch des praktischen Mechanikers, deutsch von Holtzmann) hat man zu setzen anstatt der von uns berechneten Werthe der Zahlen-Koeffizienten, wenn P in Kilogrammes, die Dimensionen in Centimètres genommen werden:

	für den kreisförm. Querschnitt:	für den quadrat. Querschnitt:
für Schmiedeeisen	anstatt 1700 nur 1200,	anstatt 3000 nur 2000,
» Gufseisen . .	» 1000 » 690,	» 1700 » 1200,
» Holz	» 100 » 15,	» 170 » 25,

dies würde geben, wenn P in preufs. Pfunden, die Dimensionen in Zollen genommen werden:

	für den kreisf. Querschnitt:	für den quadr. Querschnitt:
für Schmiedeeisen	anstatt 25000 nur 18000,	anstatt 42000 nur 29000,
» Gufseisen . .	» 15000 » 10000,	» 25000 » 18000,
» Holz	» 1500 » 200,	» 2500 » 360,

Nach Versuchen von Benj. Bevan, welche in »Salzenberg Vorträge über Maschinenbau« S. 43 mitgetheilt sind, würde man dagegen folgende Werthe setzen müssen, wenn man P in Pfunden, die Dimensionen in Zollen nimmt (die a. angef. Orte mitgetheilten Werthe sind hiernach umgerechnet worden):

	für den kreisf. Querschnitt:	für den quadr. Querschnitt:
für Schmiedeeisen	anstatt 25000 nur 19000,	anstatt 42000 nur 32000,
» Gufseisen . .	» 15000 » 10000,	» 25000 » 17000,
» Holz	» 1500 » 200,	» 2500 » 300,

Es ist wahrscheinlich, dafs bei diesen Werthen schon ein Sicherheits-Koeffizient berechnet worden ist, während bei den oben von uns berechneten Werthen derselbe noch fehlt (vergl. den Text). Am auffallendsten ist die Differenz für Holz. Es scheinen übrigens die Morinschen Angaben und die nach Bevan ein und derselben Quelle anzugehören. In Weisbach Ingenieur-

So lange bis zuverlässige Versuche vorliegen, wird man jedoch mit obigen Formeln hinreichend genau rechnen. Will man jedoch eine gröfsere Sicherheit haben, so braucht man nur, wie schon auf S. 222 geschehen, den Elastizitäts-Modulus geringer zu nehmen, folglich die Zahlenwerthe in obigen Formeln zu verkleinern. Man wird genügende Sicherheit erhalten, wenn man dieselben mit $\frac{3}{4}$ bis $\frac{2}{3}$ multiplizirt.

Beispiel. Welchen Durchmesser mufs eine schmiedeeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitt bekommen, wenn der Verdrehungswinkel bei einem Druck von 1000 Pfund, der an einem Hebelsarm von 18 Zoll wirkt, auf eine Länge von 8 Fufs nur 0,32 Grad betragen soll?

Man hat: $PR = \frac{25000\,\alpha d^4}{L}$; $1000 . 18 = \frac{25000 \,.\, 0,32}{12 \,.\, 8} . d^4$,

$$d^4 = 216, \quad d = 3,83.$$

was übrigens eine hinreichend genaue Uebereinstimmung mit dem Beispiel auf S. 243 giebt, da die Differenz von 0,03 Zoll durch die Ungenauigkeit zu erklären ist, welche die Abrundung der Koeffizienten auf die Rechnung ausüben mufs.

2) Befestigung von metallenen Stangen, die auf Abreifsen in Anspruch genommen werden.

Stangenschlösser.

§ 100. Die Konstruktionen zur Befestigung eiserner Stangen aneinander sind wesentlich bedingt durch die Beschaffenheit des Druckes, welcher auf eine Trennung der Befestigungsstelle einwirkt, durch die Bestimmung, welche die Stangen zu erfüllen haben, und endlich durch die Gestalt der Stangen selbst.

Wenn der Druck vorzugsweise nach der Richtung der Stangen wirksam ist, also entweder auf Abreifsen oder auf Zerknicken wirkt, wie dies z. B. bei den Gestängen von Pumpwerken, und bei mancherlei Stangen, welche zu Bau-Konstruktionen dienen, vorkommt, und wenn man es mit massiven Stangen zu thun hat, so wendet man gewöhnlich entweder ein sogenanntes Stangenschlofs oder eine Hülse (fr. *douille* — engl. *box*) an.

---

und Maschinen-Mechanik Th. I. § 211 finden sich ebenfalls Werthe für die in Rede stehenden Koeffizienten angegeben, welche aber theilweise unrichtig sind. Dieselben stimmen für den kreisförmigen Querschnitt mit den Angaben von Morin genau überein, sind aber für den quadratischen Querschnitt 16 mal gröfser als die Morinschen Angaben. Der Grund liegt in einem Rechenfehler. Derselbe Fehler findet sich in Weisbachs Ingenieur.