auf Zerdrücken 17,08 . 7000 = 119560 Pfund, und es müssen daher die Dimensionen, welche durch die Sicherheit gegen das Zerknicken bedingt waren, gelten.

Eine massive Säule würde nach der Formel des § 96 (S. 227)

$$d = 0{,}114\sqrt[4]{(PL^2)}$$

zu berechnen sein, und man würde finden

$$d = 6{,}9 \text{ Zoll}.$$

Der Querschnitt dieser Säule würde 37,39 □Zoll, also mehr als das Doppelte der hohlen Säule betragen, es würde die massive Säule daher auch doppelt so viel Material erfordern, als die hohle Säule.

Berechnung stangenförmiger Körper auf Verdrehen*).

§ 98. Wenn ein Körper durch einen Druck, welcher in einer Ebene wirkt, die normal zur Länge des Körpers ist, auf Verdrehung in Anspruch genommen wird, so wird er diesem Bestreben Folge leisten, wenn ihn nicht ein Widerstand daran hindert. Denken wir uns entweder einen solchen Widerstand, der den Körper festhält, oder einen Druck, welcher ihn nach entgegengesetzter Richtung zu drehen strebt, so werden die Theile des Körpers, welche zwischen den Angriffspunkten beider Drucke liegen, auf Torsion in Anspruch genommen.

Wird nun ein Körper auf Torsion in Anspruch genommen, so ist das Bestreben vorhanden, denselben um eine Axe zu drehen.

Bezeichnet man den Druck, welcher auf Torsion wirkt, mit P, den Hebelsarm desselben, oder den Abstand von der Drehaxe mit R, so ist PR das statische Moment, welches auf Drehung um die Axe wirkt. Kann der Körper in irgend einem zur Drehaxe normalen Querschnitt der Drehung nicht genügenden Widerstand leisten, so trennen sich die Fasern in diesem Querschnitte, und der Körper wird abgewürgt. Sind die Querschnitte des Körpers alle gleich grofs, so läfst sich von vorne herein nicht bestimmen, in welchem Querschnitt das Abwürgen erfolgen werde; sind dagegen die Querschnitte verschieden grofs, so erfolgt

---

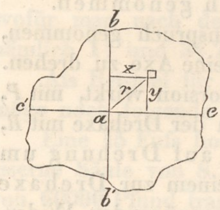
*) Bei dem Erscheinen dieses Werkes in Lieferungen wurde es für zweckmäfsiger erkannt, die Berechnung der Körper auf ihre Festigkeit im Zusammenhange vorzutragen, daher auch die Torsionsfestigkeit nicht, wie ursprünglich beabsichtigt wurde, bei Gelegenheit der Wellen abzuhandeln, wodurch sie in den II. Theil gekommen wäre, sondern hier folgen zu lassen. Hierdurch erledigt sich die Bemerkung auf S. 194 Zeile 17 von unten.

das Abwürgen in der Regel im kleinsten Querschnitt. Es mufs aber der Körper in jedem Querschnitt, dem Moment der Drehung, durch seine Festigkeit genügenden Widerstand leisten, und es werden alle Elemente des Körpers eine Spannung nach der Richtung, in welcher die Drehung erfolgt, aushalten müssen. Diese Spannung wächst mit dem Abstande von der Drehaxe.

Ist r der Abstand irgend eines Elements von der Drehaxe,
s die Spannung für die Flächeneinheit in dem Abstande einer Längen-Einheit von der neutralen Axe, also sr die Spannung in dem Abstande r, und endlich
df der Flächeninhalt dieses Elements,

so hat man die Spannung desselben $= sr.df$, folglich die Summe sämmtlicher Spannungen $= \int sr.df$. Wenn die Theilchen des Körpers unter sich im Gleichgewicht sein sollen, so mufs die Summe sämmtlicher Spannungen gleich Null sein. Da nun für den Schwerpunkt des Querschnitts die Bedingung $\int r.df = 0$ erfüllt wird, so folgt, dafs die zu dem Querschnitt normale Drehaxe durch den Schwerpunkt desselben gehe.

Das Moment, mit welchem irgend ein Element des Querschnitts in dem Abstande r der Drehung widersteht, drückt sich aus durch $sr^2 df$. Denkt man in der Ebene des Querschnittes zwei Koordinaten-Axen, welche sich im Schwerpunkt des Querschnitts normal schneiden, und nennt man die normalen Entfernungen irgend eines Elementes von diesen Axen x und y, so hat man, wenn r den Abstand des Elementes von der Drehaxe, also vom Durchschnittspunkt der Koordinatenaxen bezeichnet, zunächst für die Figur abc:



$$r^2 = x^2 + y^2,$$

folglich für das Element des Torsions-Moments:

$$sr^2\,df = s[x^2\,df + y^2\,df].$$

Nun ist aber das Flächen-Element $df = dx.dy$, und da das gesammte, der Torsion widerstehende Moment gleich der Summe dieser sämmtlichen Elemente ist, so hat man:

$$\Sigma sr^2\,df = s\Sigma[x^2\,dx\,dy + y^2\,dy\,dx]$$

d. h. man findet das Moment der Torsion für die Figur abc, wenn man in dem Ausdruck rechts für x und y nach und nach alle Werthe setzt, welche der Fläche überhaupt entsprechen, die Produkte bildet, dann sämmtliche Produkte addirt. Diese Operation läuft auf ein doppeltes Integriren hinaus, indem man einmal x und dann y als urveränderlich ansieht, und man hat hiernach:

$$\Sigma s r^2 df = s\left[\int dy \int x^2 dx + \int dx \int y^2 dy\right]$$
$$= \tfrac{1}{3} s \left[\int x^3 dy + \int y^3 dx\right].$$

Es ist aber nach S. 201 $\frac{1}{3}\int x^3 dy$ das Biegungs-Moment des Querschnittes abc in Bezug auf die Axe ab und $\frac{1}{3}\int y^3 dx$ das Biegungsmoment desselben Querschnittes in Bezug auf die Axe ac. Bestimmt man in gleicher Weise das Torsions-Moment für die übrigen Quadranten, so giebt die Summe derselben das Torsions-Moment des ganzen Querschnitts $bcb'c'$ und es folgt aus der obigen Darstellung folgender Satz:

> Man findet das Moment, mit welchem der Querschnitt der **Torsion** widersteht, wenn man die **Biegungs**-Momente (S. 201) in Bezug auf zwei in der Ebene des Querschnitts liegende, und sich im Schwerpunkt desselben rechtwinklig schneidende Axen addirt.

Wir wollen das so gefundene Torsions-Moment **polares Biegungs-Moment** nennen.

Vermöge der Tabelle XIV S. 204 ist man leicht im Stande, die Momente der Torsion zu berechnen. (Für regelmäfsige Querschnitte hat man nur das Biegungs-Moment zu verdoppeln.) Es findet sich z. B.

für das Quadrat: $PR = \frac{1}{6} s h^4$,
„ „ Rechteck $PR = \frac{1}{12} s(bh^3 + hb^3)$,
$= \frac{1}{12} sbh(h^2 + b^2)$,
„ den Kreis . $PR = \frac{1}{32}\pi s d^4 = \frac{1}{2}\pi s r^4$,
„ „ Ring . . $PR = \frac{1}{32}\pi s(D^4 - d^4)$

u. s. w., wobei die Bezeichnungen der Tabelle XIV S. 204 beibehalten sind.

Nennt man wieder, wie in § 91, die Entfernung der äufsersten Faserschicht von der neutralen Axe y', und die Spannung der äufsersten Faserschicht s', so ist:

$$s' = sy'$$
$$s = \frac{s'}{y'}.$$

Setzt man diesen Werth in die obigen Ausdrücke ein, so hat man für das Quadrat $y' = \frac{1}{2} h \sqrt{2}$; $PR = \frac{1}{3\sqrt{2}} s' h^3$,

„ „ Rechteck $y' = \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 + h^2)}$; $PR = \frac{1}{6} \frac{s' bh}{\sqrt{(b^2 + h^2)}} [h^2 + b^2]$

„ den Kreis . . $y' = r = \frac{1}{2} d$; $PR = \frac{1}{16} \pi s' d^3 = \frac{1}{2} \pi s' r^3$,

„ „ Ring . . $y' = \frac{1}{2} D$; $PR = \frac{1}{16} \pi s' \frac{D^4 - d^4}{D}$.

Die Spannung in der äufsersten Faserschicht darf nun niemals die Elastizitätsgrenze erreichen, wir werden vielmehr für s' höchstens diejenigen Belastungen nehmen dürfen, welche der Hälfte der Elastizitätsgrenze entsprechen, und welche wir in § 88. S. 191 $= \frac{1}{2} \frac{E}{x}$ berechnet, und mit k bezeichnet haben. Es ergeben sich also für die Dimensionen der Körper hinreichend grofse Werthe, wenn man in den zuletzt genannten Formeln die oft gebrauchten Werthe setzt:

für Schmiedeeisen . . . . $s' = k = 10000$,

„ Gufseisen . . . . $s' = k = 7000$,

„ Holz im Durchschnitt . . $s' = k = 1000$.

Nimmt man noch R in Fufsen, so hat man für die **Torsion bis zur Hälfte der Elastizitätsgrenze***)

*) Bisher hatte man für die Berechnung der stabförmigen Körper auf Torsion eine ganz andere Theorie, als die oben vorgetragene. Man berechnete nämlich den Widerstand des Körpers allein nach der Spannung, welche die Fasern in ihrer Längenrichtung auszuhalten haben (s. den sogleich folgenden § 99). Diese Spannung ist aber bei den geringen Verdrehungen, welche überhaupt zulässig sind, gegen die Spannung nach der Richtung der Drehung, welche wir eingeführt haben, so klein, dafs die auf jene Weise berechneten Resultate viel zu kleine Koeffizienten geben, und dann durch direkte Versuche korrigirte Werthe bekommen müssen (s. Weisbach, Ingenieur- und Maschinen-Mechanik Th. I. § 211, und Salzenberg, Vorträge über Maschinenbau S. 44). Die Koeffizienten, welche unsere Theorie liefert, und welche durch Einsetzung der allgemeinen Tragfähigkeits-Werthe hergeleitet sind, stimmen dagegen mit jenen Erfahrungswerthen recht gut überein. So findet Salzenberg a. a. O. S. 45: nach Versuchen von Rennie und Dunlop für gufseiserne und schmiedeeiserne Wellen

von kreisförmigem Querschnitt $PR = 147 d^3$; $d = 0{,}29 \sqrt[3]{(PR)}$,

» quadratischem » $PR = 173 h^3$; $h = 0{,}18 \sqrt[3]{(PR)}$,

Weifsbach (Ingenieur- und Maschinen-Mechanik Th. III. § 3) für gufseiserne Wellen von kreisförm. Querschnitt $PR = 131 d^3$; $d = 0{,}197 \sqrt[3]{(PR)}$, für schmiedeeiserne Wellen soll d um 4 Prozent schwächer sein, also $d = 0{,}157 \sqrt[3]{(PR)}$, und für Holzwellen soll d doppelt so stark sein, als bei gufseisernen Wellen, also $d = 0{,}394 \sqrt[3]{(PR)}$. In jedem Falle geben unsere Werthe nicht zu geringe Dimensionen. Die Salzenbergschen Werthe sind gerade das Mittel zwischen unsern Werthen, und das von Weisbach angegebene Verhältnifs zwischen Gufseisen, Schmiedeeisen und Holz findet auch in unsern Formeln Statt.

für den **kreisförmigen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $\boldsymbol{PR = 164 d^3}$, $\boldsymbol{d = 0{,}18\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Gufseisen . . $\boldsymbol{PR = 114 d^3}$, $\boldsymbol{d = 0{,}21\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Holz . . . . . $\boldsymbol{PR = 16 d^3}$, $\boldsymbol{d = 0{,}40\sqrt[3]{(PR)}}$;

für den **quadratischen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $\boldsymbol{PR = 196 h^3}$, $\boldsymbol{h = 0{,}17\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Gufseisen . . $\boldsymbol{PR = 137 h^3}$, $\boldsymbol{h = 0{,}19\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Holz . . . . . $\boldsymbol{PR = 20 h^3}$, $\boldsymbol{h = 0{,}37\sqrt[3]{(PR)}}$.

Nimmt man R in Mètres, d und h in Centimètres, P in Kilogrammes, so hat man:

für den kreisförmigen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 1{,}32 d^3$, $d = 0{,}91\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 0{,}92 d^3$, $d = 1{,}03\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . $PR = 0{,}14 d^3$, $d = 1{,}94\sqrt[3]{(PR)}$;

für den quadratischen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 1{,}57 h^3$, $h = 0{,}86\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 1{,}10 h^3$, $h = 0{,}97\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . . $PR = 0{,}16 h^3$, $h = 1{,}84\sqrt[3]{(PR)}$.

Diese Formeln sind aber nur für **ruhig wirkende** Belastungen zu benutzen, deren gröfstes auf Torsion wirkendes Moment PR ist. Sie gelten also vorzugsweise für stabile Konstruktionen.

Bei **Wellen** und **Zapfen**, welche auf Torsion in Anspruch genommen werden, kann dagegen das auf Verdrehung wirkende Moment zuweilen beträchtlich anwachsen und durch Stöfse vermehrt werden. Man pflegt daher der Sicherheit wegen für diese Art von Maschinentheilen gleich von vorne herein den vier-, sechs-, auch wohl den achtfachen Werth für PR einzuführen; d. h. man setzt in den obigen Formeln anstatt PR den Werth $4PR$, $6PR$, $8PR$.

Für Wellen, Zapfen etc., welche durch Menschen oder durch Thiere bewegt werden, z. B. für Winden und andere Hebemaschinen, und überhaupt für sehr langsam arbeitende Maschinen, bei denen keine sehr heftigen Stöfse zu befürchten sind, setzt man für den ungünstigsten Fall anstatt PR den **vierfachen** Werth; dann gehen die obigen Formeln in folgende über, worin P in Pfunden, R in Fufsen, d und h in Zollen zu nehmen sind:

für den **kreisförmigen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 41d^3$, $d = 0{,}29\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 29d^3$, $d = 0{,}33\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . . $PR = 4d^3$, $d = 0{,}63\sqrt[3]{(PR)}$;

für den **quadratischen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 49h^3$, $h = 0{,}27\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 34h^3$, $h = 0{,}31\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . . $PR = 5h^3$, $h = 0{,}58\sqrt[3]{(PR)}$.

Nimmt man P in Kilogrammes, R in Mètres, d und h in Centimètres, so hat man:

für den kreisförmigen Querschnitt*):

für Schmiedeeisen $PR = 0{,}33d^3$, $d = 1{,}45\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 0{,}23d^3$, $d = 1{,}63\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . . $PR = 0{,}35d^3$, $d = 3{,}06\sqrt[3]{(PR)}$;

für den quadratischen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 0{,}39h^3$, $h = 1{,}37\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 0{,}28h^3$, $h = 1{,}53\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . . $PR = 0{,}04h^3$, $h = 2{,}92\sqrt[3]{(PR)}$.

Für Wellen und Zapfen von Maschinen, welche durch Elementarkräfte bewegt werden, bei denen eine plötzliche starke Zunahme des Druckes zu erwarten ist, oder wo man Stöfse befürchten kann, z. B. bei Transmissions-Wellen, bei Wellen, an denen Aus- und Einrückungen während des Ganges vorkommen etc., rechnet man, der Sicherheit wegen, anstatt PR den **sechs**fachen Werth. Für diesen Fall hat man, für P in Pfunden, R in Fufsen, d und h in Zollen:

---

*) Redtenbacher giebt in seinen Resultaten für den Maschinenbau No. 66 für Wellen von Maschinen, welche durch Menschenhände bewegt werden, gleichviel ob aus Schmiedeeisen oder aus Gufseisen $d = 0{,}335\sqrt[3]{(PR)}$, worin P in Kilogr., d und R in Centim. zu nehmen sind. Nimmt man R in Mètres, so geht die Formel über in $d = 1{,}56\sqrt[3]{(PR)}$, und ist ziemlich genau das Mittel aus unsern Angaben für Schmiedeeisen und Gufseisen.

für den **kreisförmigen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $\boldsymbol{PR = 27d^3}$, $\boldsymbol{d = 0{,}33\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Gufseisen . . $\boldsymbol{PR = 19d^3}$, $\boldsymbol{d = 0{,}37\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Holz . . . . . $\boldsymbol{PR = 2{,}7d^3}$, $\boldsymbol{d = 0{,}72\sqrt[3]{(PR)}}$;

für den **quadratischen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $\boldsymbol{PR = 33h^3}$, $\boldsymbol{h = 0{,}31\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Gufseisen . . $\boldsymbol{PR = 23h^3}$, $\boldsymbol{h = 0{,}35\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Holz . . . . . $\boldsymbol{PR = 3{,}3h^3}$ $\boldsymbol{h = 0{,}67\sqrt[3]{(PR)}}$.

Nimmt man P in Kilogrammes, R in Mètres, d und h in Centimètres, so gehen diese Formeln über in folgende:

für den kreisförmigen Querschnitt*):

für Schmiedeeisen $PR = 0{,}220d^3$, $d = 1{,}66\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 0{,}153d^3$, $d = 1{,}87\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . . $PR = 0{,}023d^3$, $d = 3{,}52\sqrt[3]{(PR)}$;

für den quadratischen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 0{,}262h^3$, $h = 1{,}56\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 0{,}182h^3$, $h = 2{,}30\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . . $PR = 0{,}027h^3$, $h = 3{,}33\sqrt[3]{(PR)}$.

Hat man bedeutende Schwungmassen und sehr grofse Geschwindigkeiten, so dafs zu erwarten steht, die Wellen und Zapfen werden bedeutenden Stöfsen ausgesetzt sein, und das auf Torsion wirkende Moment könne beträchtlich zunehmen, so kann man für PR, der Sicherheit wegen, den **achtfachen** Werth einsetzen. Sodann hat man, wenn P in Pfunden, R in Fufsen, d und h in Zollen genommen werden:

für den **kreisförmigen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $\boldsymbol{PR = 21d^3}$, $\boldsymbol{d = 0{,}36\sqrt[3]{(PR)}}$**),

„ Gufseisen . . $\boldsymbol{PR = 15d^3}$, $\boldsymbol{d = 0{,}41\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Holz . . . . . $\boldsymbol{PR = 2d^3}$, $\boldsymbol{d = 0{,}79\sqrt[3]{(PR)}}$;

---

*) Redtenbacher giebt in seinen Resultaten für den Maschinenbau in No. 66 für Wellen von Maschinen, die nicht durch Menschenhände bewegt werden, gleichviel ob aus Schmiedeeisen oder aus Gufseisen, $d = 0{,}385\sqrt[3]{(PR)}$, worin d und R in Centimètres zu nehmen sind. Nimmt man R in Mètres, so geht die Formel über in: $d = 1{,}79\sqrt[3]{(PR)}$, welches wieder ziemlich genau das Mittel aus unsern Angaben für Gufseisen und Schmiedeeisen ist.

) Als Mittel aus diesem Werthe und dem oben angeführten Werthe für den **quadratischen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $\boldsymbol{PR = 29h^3}$, $\boldsymbol{h = 0{,}33\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Gufseisen . . $\boldsymbol{PR = 17h^3}$, $\boldsymbol{h = 0{,}39\sqrt[3]{(PR)}}$,

„ Holz . . . . . $\boldsymbol{PR = 2{,}5h^3}$, $\boldsymbol{h = 0{,}74\sqrt[3]{(PR)}}$.

Nimmt man P in Kilogrammes, R in Mètres, d und h in Centimètres, so hat man für diesen Fall:

für den kreisförmigen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 0{,}165d^3$, $d = 1{,}83\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 0{,}115d^3$, $d = 2{,}06\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . $PR = 0{,}017d^3$, $d = 3{,}89\sqrt[3]{(PR)}$;

für den quadratischen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $PR = 0{,}196h^3$, $h = 1{,}72\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Gufseisen . . $PR = 0{,}138h^3$, $h = 1{,}93\sqrt[3]{(PR)}$,

„ Holz . . . . . $PR = 0{,}020h^3$, $h = 3{,}69\sqrt[3]{(PR)}$.

Bestimmung des Verdrehungswinkels.

§ 99. Obwohl nun die vorstehend angeführten Formeln Werthe liefern, welche eine Belastung des Körpers bis nur zur Hälfte der Elastizitätsgrenze repräsentiren, und welche folglich genügende Sicherheit gegen eine bleibende Formveränderung gewähren, so kommen doch im Maschinenbau sehr häufig Fälle vor, in denen man aufser auf die Festigkeit des Körpers, auch noch auf den Verdrehungswinkel Rücksicht zu nehmen hat.

Durch das auf Verdrehung des Körpers wirkende Moment PR wird nämlich, wenn in dem Abstande L sich ein Widerstand befindet, welcher den Körper festhält, die Faser ab, welche in der ursprünglichen Lage mit der Axe parallel war, spiralförmig gewunden, dadurch ausgereckt und in die Lage $a'b$ gebracht. Der Winkel aca', welchen die Radien nach den beiden Lagen der Endpunkte der Faser einschliefsen, heifst der Verdrehungswinkel (Torsionswinkel); wir bezeichnen denselben in Bogenmaafs

---

$d = 0{,}333\sqrt[3]{(PR)}$ kann man nehmen $d = 0{,}35\sqrt[3]{(PR)}$ und dieser Ausdruck ist auf S. 90 bei Berechnung der Schrauben gebraucht worden, weil beim Anziehen der Schrauben durch starkes Rucken am Schraubenschlüssel sehr beträchtliche Stöfse entstehen.