so ergiebt sich die Länge, bei welcher der Werth der Durchbiegung $\frac{1}{1000}L$ beträgt, wenn der Körper nur bis zur Hälfte der Elastizitätsgrenze in Anspruch genommen wird,

für Schmiedeeisen . . . . $L = 18{,}6h$,
„ Gufseisen . . . . $L = 14{,}4h$,
„ Holz . . . . $L = 7{,}2h$,

Man wird also bei einem Balken, der an beiden Enden frei aufliegt, die Formeln des vorigen Paragraphen nur dann anwenden, wenn die Länge gröfser ist, als das 18,6 resp. 14,4 und 7,2fache seiner Höhen-Dimension, und auch in diesem Falle nur dann, wenn es auf besondere Steifheit des Balkens ankommt.

Die Rechnung läfst sich leicht auch für die übrigen Fälle der Unterstützung durchführen, und ergiebt, dafs man die obigen Zahlenwerthe zu nehmen habe:

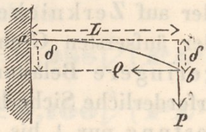
$\frac{1}{4}$mal, wenn der Balken an einem Ende befestigt, am andern belastet ist,

$1\frac{1}{2}$mal, wenn der Balken an einem Ende unwandelbar befestigt, am andern frei unterstützt ist,

2mal, wenn der Balken an beiden Enden unwandelbar befestigt ist.

Berechnung stangenförmiger Körper, welche auf Zerknicken in Anspruch genommen werden.

§ 96. Denken wir uns einen Balken, welcher an einem Ende unwandelbar befestigt, am andern Ende aber belastet ist, und es erzeuge diese Belastung eine gewisse Durchbiegung δ, so wird der Körper um die neutrale Axe in dem befestigten Querschnitt eine Drehung erleiden. Es sei in der nebenstehenden Figur ab die Form, welche die neutrale Faserschicht bei dieser Drehung angenommen hat. Die Spannungen in den einzelnen Querschnitts-Elementen halten dem auf Biegung wirkenden Druck das Gleichgewicht. Offenbar können wir den Druck P ersetzt denken durch einen andern Druck Q, dessen Richtung normal zu der Richtung von P ist; es entsteht dann ein Winkelhebel, dessen Drehpunkt in a liegt, an dessen einem Hebelsarm L der Druck P, an dem andern δ, der Druck Q wirkt. Soll nun Q dieselbe Wirkung hervorbringen, wie P, so mufs sein:



$$PL = Q\delta.$$

Nun ist aber nach § 94 die Durchbiegung, welche P erzeugt,

$$\delta = \tfrac{1}{3}\frac{PL^3}{BE},$$

folglich:

$$PL = Q \, . \, \tfrac{1}{3}\frac{PL^3}{BE},$$

$$Q = \frac{3BE}{L^2}.$$

Man sieht, dafs der Werth Q nicht abhängig von dem Werthe der Durchbiegung δ ist, dafs er also für jede Durchbiegung derselbe bleibt, so lange B, E und L konstant bleiben, eine Eigenthümlichkeit, welche sich dadurch erklären läfst, dafs mit der Zunahme der Durchbiegung der Hebelsarm von Q, nämlich δ wächst, während der Hebelsarm von P für sehr kleine Senkungen konstant bleibt, es mufs also, wenn beide Drucke im Gleichgewicht bleiben sollen, P in demselben Verhältnifs wie δ wachsen, was auch die Formel ergiebt*).

Aus der obigen Herleitung kann man schliefsen, dafs der Werth Q überhaupt derjenige sei, welcher der rückwirkenden Festigkeit eines Balkens entspricht, der an einem Ende befestigt und nach der Richtung seiner Länge belastet ist. Eine geringere Belastung, als Q, vermag keiner Durchbiegung das Gleichgewicht zu halten; eine gröfsere Belastung, als Q, bringt zwar nicht nothwendiger Weise eine Durchbiegung hervor, denn dafür läfst sich mathematisch kein Grund finden, sobald aber die geringste Durchbiegung oder eine Abweichung der Schwerpunkts-Axe von der Richtung des Drucks entstanden ist, wird eine solche Belastung das Uebergewicht über die Widerstandsfähigkeit des Balkens erlangen, und den Balken zerknicken. Man darf nun die Belastung eines Balkens, der auf Zerknicken in Anspruch genommen wird, niemals bis zu der äufsersten Grenze treiben; man darf vielmehr stets nur eine geringere Belastung als Q zulassen. Im Allgemeinen wird die erforderliche Sicherheit gewährt, wenn man für die zulässige Belastung nur $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}Q$ einführt.

Bezeichnen wir, der Uebereinstimmung wegen, die zulässige Belastung auch hier mit P, so hat man mit hinreichender Sicherheit:

*) Weisbach giebt in seinem »Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik; 2te Aufl. Braunschweig 1850« Th. I. § 213 eine umständlichere Herleitung, in welcher $Q = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{BE}{L^2} = \frac{2{,}47BE}{L^2}$, also ein wenig kleiner gefunden wird.

$$P = \frac{1}{3} Q = \frac{BE}{L^2},$$

und wenn wir L wieder in Fufsen nehmen,

$$P = \frac{1}{144} E \cdot \frac{B}{L^2},$$

$$B = 144 \frac{PL^2}{E}.$$

Zu bemerken ist noch, dafs die Ausbiegung immer nach der Richtung erfolgen wird, in welcher der geringste Widerstand Statt findet, dafs also bei dem rechteckigen Querschnitt immer unter h die kleinste Dimension zu verstehen ist.

Setzt man für E die mehrfach genannten Werthe, so hat man für eine Stange, welche, an einem Ende unwandelbar befestigt, in der Richtung ihrer Länge auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen wird, folgende Formeln, in welchen die Belastungen in Pfunden, die Längen in Fufsen, die Querschnitts-Dimensionen in Zollen genommen sind:

für Schmiedeeisen . . . $B = \frac{1}{200000} PL^2$,
„ Gufseisen . . . . . . $B = \frac{1}{120000} PL^2$,
„ Holz . . . . $B = \frac{1}{12000} PL^2$,

und zwar:

für den **kreisförmigen***) Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 9800 \frac{d^4}{L^2}$, $d = 0{,}100 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Gufseisen . . $P = 6000 \frac{d^4}{L^2}$, $d = 0{,}114 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . . $P = 600 \frac{d^4}{L^2}$, $d = 0{,}200 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

für den **quadratischen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 16700 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}088 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Gufseisen . . $P = 10000 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}100 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 1000 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}178 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

*) Die Koeffizienten von d für den kreisförmigen Quersehnitt sind für Schmiedeeisen, Gufseisen und Holz ziemlich genau $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{5}$, und die Koeffizienten von h für den quadratischen Querschnitt $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{6}$, was leicht zu behalten ist. Auch kann man sich merken, dafs die Koeffizienten für die Berechnung auf eine Durchbiegung, die $\frac{1}{1000}$ der Länge beträgt (§ 94) $4\frac{1}{2}$mal so grofs sind, als diejenigen für rückwirkende Festigkeit.

für den **rechteckigen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 16700 \frac{bh^3}{L^2}$, $h = 0{,}039 \sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)}$,

„ Guſseisen . . $P = 10000 \frac{bh^3}{L^2}$, $h = 0{,}047 \sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)}$,

„ Holz . . . . . $P = 1000 \frac{bh^3}{L^2}$, $h = 0{,}100 \sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)}$;

wenn in dem rechteckigen Querschnitt die kleinste Dimension $\frac{1}{2}$ der gröſseren ist, also wenn $b = 2h$:

für Schmiedeeisen $P = 33300 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}074 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Guſseisen . . $P = 20000 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}084 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . . $P = 2000 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}148 \sqrt[4]{(PL^2)}$;

wenn dagegen in dem rechteckigen Querschnitt die kleinste Dimension $\frac{1}{3}$ der gröſseren ist, also wenn $b = 3h$:

für Schmiedeeisen $P = 50000 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}067 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Guſseisen . . $P = 30000 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}076 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . . $P = 3000 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}135 \sqrt[4]{(PL^2)}$.

Nimmt man L in Mètres, die Querschnitts-Dimensionen in Centimètres, P in Kilogrammes, so gehen die obigen Formeln über in folgende:

für den kreisförmigen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 9{,}60 \frac{d^4}{L^2}$, $d = 0{,}57 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Guſseisen . . $P = 5{,}88 \frac{d^4}{L^2}$, $d = 0{,}64 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 0{,}59 \frac{d^4}{L^2}$, $d = 1{,}14 \sqrt[4]{(PL^2)}$;

für den quadratischen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 16{,}36 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}50 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Guſseisen . . $P = 9{,}80 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}57 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 0{,}98 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 1{,}00 \sqrt[4]{(PL^4)}$;

für den rechteckigen Querschnitt:

$$\text{für Schmiedeeisen } P = 16{,}36\,\frac{bh^3}{L^2},\quad h = 0{,}39\sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)},$$

$$\text{„ Gufseisen . . } P = 9{,}80\,\frac{bh^3}{L^2},\quad h = 0{,}47\sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)},$$

$$\text{„ Holz . . . . } P = 0{,}89\,\frac{bh^3}{L^2},\quad h = 1{,}00\sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)};$$

wenn in dem rechteckigen Querschnitt die kleinste Dimension $\frac{1}{2}$ der gröfseren ist, also wenn $b = 2h$:

$$\text{für Schmiedeeisen } P = 32{,}72\,\frac{h^4}{L^2},\quad h = 0{,}42\sqrt[4]{(PL^2)},$$

$$\text{„ Gufseisen . . } P = 19{,}60\,\frac{h^4}{L^2},\quad h = 0{,}48\sqrt[4]{(PL^2)},$$

$$\text{„ Holz . . . . } P = 1{,}96\,\frac{h^4}{L^2},\quad h = 0{,}85\sqrt[4]{(PL^2)};$$

und wenn in dem rechteckigen Querschnitt die kleinste Dimension $\frac{1}{3}$ der gröfseren ist, also wenn $b = 3h$:

$$\text{für Schmiedeeisen } P = 49{,}08\,\frac{h^4}{L^2},\quad h = 0{,}38\sqrt[4]{(PL^2)},$$

$$\text{„ Gufseisen . . } P = 29{,}40\,\frac{h^4}{L^2},\quad h = 0{,}43\sqrt[4]{(PL^2)},$$

$$\text{„ Holz . . . . } P = 2{,}94\,\frac{h^4}{L^2},\quad h = 0{,}76\sqrt[4]{(PL^2)}.$$

In ganz ähnlicher Weise läfst sich die Rechnung für eine Stange durchführen, welche an beiden Enden frei aufsteht. Die gröfste Durchbiegung würde hier in der Mitte Statt finden. In diesem Falle ist das auf Biegung wirkende statische Moment nach § 93 No. 8 nur $\frac{1}{4}PL$, dagegen ist die Durchbiegung δ nach Formel 3 des § 94 nur $\frac{1}{48}\frac{PL^3}{BE}$. Es folgt daher aus der Gleichsetzung von

$$\tfrac{1}{4}PL = Q\delta = Q\cdot\tfrac{1}{48}\,\frac{BL^3}{BE}$$

$$Q = \frac{12BE}{L^2}.$$

Es ist also die Widerstandsfähigkeit gegen Zerknicken einer Stange, welche an beiden Enden frei aufsteht, viermal so grofs, als wenn dieselbe an einem Ende unwandelbar befestigt ist.

Hiernach kann man die oben berechneten Formeln für den Fall brauchen, wenn die Stange an beiden Enden frei aufsteht, man hat nur die Werthe von P mit 4 zu multipliziren, und die Werthe von d und h mit $\sqrt[4]{4}$ zu dividiren, oder mit 0,7 zu multipliziren.

Berechnung stangenförmiger Körper auf den Widerstand gegen das Zerdrücken.

§ 97. Wir haben im vorigen Paragraphen die Belastung Q berechnet, welche ein stangenförmiger Körper zu tragen vermag, ohne dadurch gebogen und demnächst zerknickt zu werden. Es kann jedoch vorkommen, dafs der Körper zerstört wird, bevor noch die Belastung diesen Werth erreicht. Da sich nämlich für einen an einem Ende befestigten Körper ergab:

$$Q = \frac{3BE}{L^2},$$

so kann, wenn L sehr klein ist, der Werth Q so grofs gefunden werden, dafs er die Festigkeit des Materials übersteigt; in diesem Falle werden die einzelnen Theilchen des Körpers sich verschieben, und der Körper wird zerdrückt, zerquetscht werden. Natürlich darf bei Konstruktionen die Belastung niemals einen solchen Werth erreichen, es darf vielmehr die Belastung nie so grofs genommen werden, dafs ein Zusammendrücken bis zur Grenze der vollkommenen Elastizität erfolgt. Nehmen wir dieselben Grenzen für die Sicherheit, welche wir früher eingeführt haben, und erinnern wir uns, dafs der Widerstand gegen das Zusammendrücken gleich dem Widerstande gegen das Ausrecken genommen werden kann, so lange die Grenze der vollkommenen Elastizität noch nicht überschritten ist (§ 88), so kann der Körper mit genügender Sicherheit gegen das Zusammendrücken eine Belastung:

$$P = kF = \tfrac{1}{2}KF = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} EF$$

tragen, wenn F den Flächeninhalt des Querschnitts, $\frac{1}{x} L$ die Verkürzung an der Elastizitätsgrenze bezeichnet. Die Belastung, welche der Körper mit genügender Sicherheit gegen das Zerknicken tragen kann, ist nach § 96 $= \frac{1}{3} Q$ zu nehmen, sie drückt sich also aus durch

$$P' = \frac{BE}{L^2}.$$

Man wird hiernach zu untersuchen haben, welche von beiden Belastungen die geringere ist, und nach dieser die Dimensionen des Körpers berechnen.