ren, oder mit $\sqrt[4]{m}$ zu multipliziren. Nimmt man z. B. nur die Hälfte des Elastizitäts-Modulus, so ergeben sich die Werthe für P nur halb so grofs, die Werthe für d und h aber $\sqrt[4]{2} = 1{,}19$ mal so grofs.

Wenn ein Balken an beiden Enden frei unterstützt ist, so berechnen wir zunächst den resultirenden Druck P, und dessen Abstand von dem einen Unterstützungspunkt p nach § 93. S. 216. Es ergiebt sich sodann nach Formel 2) dieses Paragraphen die Durchbiegung des Balkens im Angriffspunkt des resultirenden Druckes. Nehmen wir wieder $\frac{1}{1000}$ der Länge als zulässige gröfste Durchbiegung, und führen wir die Rechnung nach Anleitung der Formel 4) dieses Paragraphen aus, so ergiebt sich

$$B = \frac{48000}{E} P \frac{(L-p)^2 \cdot p^2}{L^2}.$$

Wir können also die vorstehend entwickelten Formeln auch in dem Falle, dafs der Balken an beiden Enden frei aufliegt, anwenden, wenn wir überall anstatt L^2 den Werth $\frac{(L-p)^2 p^2}{L^2}$ einsetzen. (Vergl. Formel 5) dieses Paragraphen.) Ist der Angriffspunkt des resultirenden Druckes in der Mitte, so haben wir für L^2 überall $\frac{1}{16} L^2$ einzusetzen; es werden also die Werthe für die Belastungsfähigkeit P in obigen Formeln 16mal so grofs, die Querschnitts-Dimensionen halb so grofs.

Hat man Balken, welche an einem Ende befestigt, am andern unterstützt sind, so kann man näherungsweise anstatt P überall $\frac{2}{3} P$ einsetzen, und für Balken, welche an beiden Enden unwandelbar befestigt sind, darf man mit hinreichender Genauigkeit für P in obigen Formeln $\frac{1}{2} P$ setzen.

Gleichmäfsig vertheilte Belastungen bringt man auch hier, ohne grofsen Fehler als in ihrem Schwerpunkt vereinigt wirkend, in Rechnung.

Vergleichung der Resultate für die Berechnung nach der Elastizitätsgrenze, und für die Berechnung nach der zulässigen Durchbiegung.

§ 95. Wenn ein Balken, der an beiden Enden frei aufliegt, in dem Abstande p von dem einen Unterstützungspunkt die resultirende Belastung P zu tragen hat, so finden wir nach der Formel 2) des vorigen Paragraphen die dieser Belastung entsprechende Durchbiegung

$$\delta = \tfrac{1}{3} P \frac{(L-p)^2 p^2}{L \cdot B \cdot E}.$$

Wenn wir denselben Balken nach der Methode des § 93 berechnen, d. h. wenn wir untersuchen, wie grofs die Belastung ist, welche ihn bis zur Hälfte seiner vollkommenen Elastizität in Anspruch nimmt, so ergiebt sich durch die Formel 7) des § 93:

$$P = \frac{k \,.\, W \,.\, L}{(L-p)p}.$$

Diese Belastung erzeugt eine gewisse Durchbiegung, deren Werth gefunden wird, wenn wir in die obige Formel für δ den eben bestimmten Werth von P einsetzen. Berücksichtigen wir hierbei, dafs nach § 91 $W = \frac{B}{y'}$ ist, so ergiebt sich:

$$\delta = \tfrac{1}{3} \frac{k}{E} \,.\, \frac{(L-p)p}{y'}.$$

Es war aber $k = \frac{1}{2} K$, wenn K die Belastung bezeichnet, welche der Elastizitätsgrenze entspricht; es war ferner $K = \frac{1}{x} E$ (§ 88. S. 191), wenn $\frac{1}{x} L$ die Verlängerung an der Elastizitätsgrenze ist; hieraus folgt:

$$\delta = \tfrac{1}{3} \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{1}{x} \,.\, \frac{(L-p)p}{y'},$$

wobei noch sämmtliche Dimensionen in denselben Maafseinheiten genommen sind.

Soll nun der gröfste Werth der Durchbiegung δ höchstens $\frac{1}{1000}$ der Länge betragen, so folgt, dafs $\frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{x} \,.\, \frac{(L-p)p}{y'}$ kleiner oder höchstens gleich $\frac{1}{1000} L$ sein müsse, oder dafs

$$\frac{1}{6\,x} \,.\, \frac{(L-p)p}{y'L} \overline{<} \frac{1}{1000}$$

zu nehmen sei. Der gröfste Werth für den Ausdruck links wird erhalten, wenn $(L-p)p$ den gröfsten Werth hat, also für $p = \frac{1}{2} L$. Nimmt man nun noch an, dafs die neutrale Axe in der Mitte der Höhe liege, so dafs $y' = \frac{1}{2} h$ zu setzen ist, so folgt nach einer leichten Umformung, dafs die Belastung, welche der Hälfte der Elastizitätsgrenze entspricht, erst dann eine Durchbiegung erzeugt, die $\frac{1}{1000}$ der Länge beträgt, wenn

$$L = 0{,}012\,xh \text{ ist,}$$

und dafs die Durchbiegung kleiner als $\frac{1}{1000}$ der Länge ist, so lange L kleiner als $0{,}012\,xh$ ist. Nimmt man nach der Tabelle XI. S. 192 durchschnittlich

für Schmiedeeisen . . . . $x = 1500$,

„ Gufseisen . . . . . . $x = 1200$,

„ Holz . . . . $x = 600$,

so ergiebt sich die Länge, bei welcher der Werth der Durchbiegung $\frac{1}{1000}L$ beträgt, wenn der Körper nur bis zur Hälfte der Elastizitätsgrenze in Anspruch genommen wird,

für Schmiedeeisen . . . . . $L = 18{,}6h$,
„ Gufseisen . . . . $L = 14{,}4h$,
„ Holz . . . . $L = 7{,}2h$,

Man wird also bei einem Balken, der an beiden Enden frei aufliegt, die Formeln des vorigen Paragraphen nur dann anwenden, wenn die Länge gröfser ist, als das 18,6 resp. 14,4 und 7,2fache seiner Höhen-Dimension, und auch in diesem Falle nur dann, wenn es auf besondere Steifheit des Balkens ankommt.

Die Rechnung läfst sich leicht auch für die übrigen Fälle der Unterstützung durchführen, und ergiebt, dafs man die obigen Zahlenwerthe zu nehmen habe:

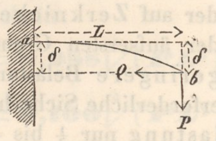
$\frac{1}{4}$mal, wenn der Balken an einem Ende befestigt, am andern belastet ist,

$1\frac{1}{2}$mal, wenn der Balken an einem Ende unwandelbar befestigt, am andern frei unterstützt ist,

2mal, wenn der Balken an beiden Enden unwandelbar befestigt ist.

Berechnung stangenförmiger Körper, welche auf Zerknicken in Anspruch genommen werden.

§ 96. Denken wir uns einen Balken, welcher an einem Ende unwandelbar befestigt, am andern Ende aber belastet ist, und es erzeuge diese Belastung eine gewisse Durchbiegung δ, so wird der Körper um die neutrale Axe in dem befestigten Querschnitt eine Drehung erleiden. Es sei in der nebenstehenden Figur ab die Form, welche die neutrale Faserschicht bei dieser Drehung angenommen hat. Die Spannungen in den einzelnen Querschnitts-Elementen halten dem auf Biegung wirkenden Druck das Gleichgewicht. Offenbar können wir den Druck P ersetzt denken durch einen andern Druck Q, dessen Richtung normal zu der Richtung von P ist; es entsteht dann ein Winkelhebel, dessen Drehpunkt in a liegt, an dessen einem Hebelsarm L der Druck P, an dem andern δ, der Druck Q wirkt. Soll nun Q dieselbe Wirkung hervorbringen, wie P, so mufs sein:



$$PL = Q\delta.$$