Berechnung stangenförmiger Körper, wenn der Werth der zulässigen Durchbiegung gegeben ist.

§ 94. Wenn eine angemessene Belastung auf einen befestigten, oder unterstützten Körper einwirkt, so erzeugt dieselbe eine Durchbiegung. So lange diese Durchbiegung in den einzelnen Elementen des Körperquerschnitts noch nicht eine Spannung hervorbringt, welche die Grenze der vollkommenen Elastizität erreicht, so entsteht dadurch keine bleibende Formveränderung, und wir haben gesehen (§ 88. S. 189), dafs den Ansprüchen der Sicherheit, in Bezug auf die Festigkeit der Körper genügt wird, wenn die Spannung nur die Hälfte bis zwei Drittel der Elastizitätsgrenze erreicht. — Allein auch in diesem Falle findet eine bestimmte Biegung statt, und der Werth derselben läfst sich nach statischen Gesetzen, deren Herleitung hier zu weit führen würde, berechnen. Es ist nun denkbar, dafs in gewissen Fällen der Werth dieser Biegung so grofs werden kann, dafs, obwohl der Körper den Ansprüchen der Festigkeit mit vollkommener Sicherheit genügt, doch andere Bedingungen z. B. die Genauigkeit und Sicherheit der Bewegung der Maschine, dadurch verletzt werden. In solchen Fällen mufs man den zulässigen Werth der Durchbiegung von vorne herein annehmen, und die Dimensionen des Körpers so wählen, dafs derselbe höchstens diese angenommene Durchbiegung erleidet.

Wenn ein stangenförmiger Körper an einem Ende unwandelbar befestigt, am andern belastet ist, so findet die gröfste Senkung an dem belasteten Ende statt. Bezeichnet man den Werth der Senkung mit δ, so ist derselbe

$$1)\ \delta = \tfrac{1}{3}\frac{PL^3}{B.E},$$

wenn P die Belastung, L die Länge, B das Biegungs-Moment, E der Elastizitäts-Modulus ist.

Wenn dagegen der Körper an beiden Enden frei aufliegt, so findet die gröfste Senkung nur dann im Angriffspunkt des resultirenden Druckes statt, wenn dessen Richtung durch die Mitte der Länge des freiliegenden Theiles des Balkens geht. Wenn dagegen der Angriffspunkt des resultirenden Druckes nicht in der Mitte der Länge des Balkens liegt, so liegt die gröfste Senkung zwischen dem Angriffspunkt und der Mitte des Balkens. Da jedoch die genaue Rechnung für diesen Fall ziemlich umständlich ist, so wollen wir die gröfste Durchbiegung näherungsweise in den Angriffspunkt des resultirenden Drucks versetzen, was in den meisten, in der Praxis vorkommenden Fällen hinreichend genau ist. Der Werth der Durchbiegung im Angriffspunkt des resultirenden Druckes ist, für einen, an beiden Enden frei aufliegenden Balken:

$$2)\ \delta = \tfrac{1}{3} P . \frac{(L-p)^2 . p^2}{L . B . E},$$

worin p den Abstand des resultirendeu Drucks P von dem einen Stützpunkt bezeichnet, die andern Buchstaben aber die bekannte Bedeutung haben.

Für $p = \frac{1}{2} L$ geht die Formel über in:

$$3)\ \delta = \tfrac{1}{48} \frac{P L^3}{B . E}$$

Gewöhnlich genügt es, wenn man die gröſste zulässige Durchbiegung gleich $\frac{1}{1000}$ der Länge des Balkens annimmt. Wenn auſserdem der Elastizitäts-Modulus nach Tabelle XI. S. 192

für Schmiedeeisen . . . $E = 29000000$,
„ Guſseisen . . . . $E = 17000000$,
„ Holz im Durchschnitt . $E = 1700000$,

und das Biegungs-Moment nach Tab. XIV. S. 204:

für den kreisförmigen Querschnitt $B = \frac{1}{64} \pi d^4$,
„ „ quadratischen „ $B = \frac{1}{12} h^4$,
„ „ rechteckigen „ $B = \frac{1}{12} b h^3$

genommen wird, und wenn man die Länge L, anstatt in Zollen, lieber in Fuſsen einführt, so ergiebt sich für einen, an einem Ende befestigten, am andern Ende belasteten Balken:

$$4)\ \tfrac{12}{1000} L = \tfrac{1}{3} \frac{P L^3 . (12)^3}{B . E},$$

$$5)\ B = \frac{48000}{E} . P . L^2 \quad P = \tfrac{1}{48000} . \frac{B E}{L^2},$$

oder in runden Zahlen:

für Schmiedeeisen . . . $B = \frac{1}{600} P L^2$,
„ Guſseisen . . . . . . $B = \frac{1}{350} P L^2$,
„ Holz . . . . $B = \frac{1}{35} P L^2$.

Hieraus ergeben sich zur Berechnung von Balken, welche an einem Ende unwandelbar befestigt, am andern belastet sind, folgende Formeln, in welchen die Längen-Dimensionen in Fuſsen, die Querschnitts-Dimensionen in Zollen, die Belastungen in Pfunden zu nehmen sind:

für den **kreisförmigen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 30\frac{d^4}{L^2}$, $d = 0{,}43\sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Gufseisen . . $P = 17\frac{d^4}{L^2}$, $d = 0{,}49\sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 1{,}7\frac{d^4}{L^2}$, $d = 0{,}88\sqrt[4]{(PL^2)}$;

für den **quadratischen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 50\frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}38\sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Gufseisen . . $P = 29\frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}43\sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 3\frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}76\sqrt[4]{(PL^2)}$;

für den **rechteckigen** Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 50\frac{bh^3}{L^2}$, $h = 0{,}27\sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)}$,

„ Gufseisen . . $P = 29\frac{bh^3}{L^2}$, $h = 0{,}33\sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)}$,

„ Holz . . . . $P = 3\frac{bh^3}{L^2}$, $h = 0{,}69\sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)}$;

wenn in dem rechteckigen Querschnitt $b = \frac{1}{2}h$ ist:

für Schmiedeeisen $P = 25\frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}45\sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Gufseisen . . $P = 15\frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}51\sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 1{,}5\frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}91\sqrt[4]{(PL^2)}$;

wenn dagegen in dem rechteckigen Querschnitt $b = \frac{1}{3}h$ ist:

für Schmiedeeisen $P = 17\frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}49\sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Gufseisen . . $P = 10\frac{h^4}{L^2}$, $h = 0{,}56\sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 1{,}0\frac{h^4}{L^2}$, $h = 1{,}0\sqrt[4]{(PL^2)}$.

Nimmt man L in Mètres, die Querschnitts-Dimensionen in Centimètres, P in Kilogrammes, so gehen die obigen Formeln über in folgende:

für den kreisförmigen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 9{,}0294 \frac{d^4}{L^2}$, $d = 2{,}42 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Gufseisen . . $P = 0{,}0167 \frac{d^4}{L^2}$, $d = 2{,}77 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 0{,}0017 \frac{d^4}{L^2}$, $d = 4{,}95 \sqrt[4]{(PL^2)}$;

für den quadratischen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 0{,}0490 \frac{h^4}{L^2}$, $d = 2{,}15 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Gufseisen . . $P = 0{,}0284 \frac{h^4}{L^2}$, $d = 2{,}43 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 0{,}0029 \frac{h^4}{L^2}$, $d = 4{,}29 \sqrt[4]{(PL^2)}$;

für den rechteckigen Querschnitt:

für Schmiedeeisen $P = 0{,}0490 \frac{bh^3}{L^2}$, $h = 2{,}73 \sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)}$

„ Gufseisen . . $P = 0{,}0284 \frac{bh^3}{L^2}$, $h = 3{,}29 \sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)}$

„ Holz . . . . $P = 0{,}0029 \frac{bh^3}{L^2}$, $h = 6{,}94 \sqrt[3]{\left(\frac{PL^2}{b}\right)}$

wenn in dem rechteckigen Querschnitt $b = \frac{1}{2} h$ ist:

für Schmiedeeisen $P = 0{,}0245 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 2{,}54 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Gufseisen . . $P = 0{,}0142 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 2{,}88 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 0{,}0015 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 5{,}10 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

wenn dagegen in dem rechteckigen Querschnitt $b = \frac{1}{3} h$ ist:

für Schmiedeeisen $P = 0{,}0163 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 2{,}77 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Gufseisen . . $P = 0{,}0095 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 2{,}16 \sqrt[4]{(PL^2)}$,

„ Holz . . . . $P = 0{,}0010 \frac{h^4}{L^2}$, $h = 5{,}65 \sqrt[4]{(PL^2)}$.

Will man, der Sicherheit wegen, anstatt des ganzen Elastizitäts-Modulus nur einen Theil desselben in Rechnung ziehen, etwa $\frac{1}{m} E$, so sind die Werthe von P in obigen Formeln überall mit $\frac{1}{m}$ zu multipliziren, die Werthe von d und h aber mit $\sqrt[4]{\frac{1}{m}}$ zu dividiren, oder mit $\sqrt[4]{m}$ zu multipliziren. Nimmt man z. B. nur die Hälfte des Elastizitäts-Modulus, so ergeben sich die Werthe für P nur halb so grofs, die Werthe für d und h aber $\sqrt[4]{2}=1{,}19$ mal so grofs.

Wenn ein Balken an beiden Enden frei unterstützt ist, so berechnen wir zunächst den resultirenden Druck P, und dessen Abstand von dem einen Unterstützungspunkt p nach § 93. S. 216. Es ergiebt sich sodann nach Formel 2) dieses Paragraphen die Durchbiegung des Balkens im Angriffspunkt des resultirenden Druckes. Nehmen wir wieder $\frac{1}{1000}$ der Länge als zulässige gröfste Durchbiegung, und führen wir die Rechnung nach Anleitung der Formel 4) dieses Paragraphen aus, so ergiebt sich

$$B = \frac{48000}{E} P \frac{(L-p)^2 \cdot p^2}{L^2}.$$

Wir können also die vorstehend entwickelten Formeln auch in dem Falle, dafs der Balken an beiden Enden frei aufliegt, anwenden, wenn wir überall anstatt L^2 den Werth $\frac{(L-p)^2 p^2}{L^2}$ einsetzen. (Vergl. Formel 5) dieses Paragraphen.) Ist der Angriffspunkt des resultirenden Druckes in der Mitte, so haben wir für L^2 überall $\frac{1}{16}L^2$ einzusetzen; es werden also die Werthe für die Belastungsfähigkeit P in obigen Formeln 16mal so grofs, die Querschnitts-Dimensionen halb so grofs.

Hat man Balken, welche an einem Ende befestigt, am andern unterstützt sind, so kann man näherungsweise anstatt P überall $\frac{2}{3}P$ einsetzen, und für Balken, welche an beiden Enden unwandelbar befestigt sind, darf man mit hinreichender Genauigkeit für P in obigen Formeln $\frac{1}{2}P$ setzen.

Gleichmäfsig vertheilte Belastungen bringt man auch hier, ohne grofsen Fehler als in ihrem Schwerpunkt vereinigt wirkend, in Rechnung.

Vergleichung der Resultate für die Berechnung nach der Elastizitätsgrenze, und für die Berechnung nach der zulässigen Durchbiegung.

§ 95. Wenn ein Balken, der an beiden Enden frei aufliegt, in dem Abstande p von dem einen Unterstützungspunkt die resultirende Belastung P zu tragen hat, so finden wir nach der Formel 2) des vorigen Paragraphen die dieser Belastung entsprechende Durchbiegung

$$\delta = \frac{1}{3} P \frac{(L-p)^2 p^2}{L \cdot B \cdot E}.$$