und wenn in dem rechteckigen Querschnitt $b = \frac{1}{3} h$ ist, so hat man:

für Schmiedeeisen $P = 0{,}37 \frac{h^3}{L}$, $h = 1{,}39 \sqrt[3]{(PL)}$,

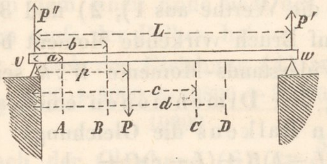
„ Gufseisen . . $P = 0{,}29 \frac{h^3}{L}$, $h = 1{,}51 \sqrt[3]{(PL)}$,

„ Holz . . . . $P = 0{,}037 \frac{h^3}{L}$, $h = 3{,}00 \sqrt[3]{(PL)}$.

Belastungsfähigkeit stangenförmiger Körper, welche au zwei Punkten unterstützt sind.

§ 93. Wenn ein Balken an seinen beiden Endpunkten unterstützt ist, so pflegt man drei Fälle zu unterscheiden, die sich zwar alle auf den Fall zurückführen lassen, welcher in den vorigen Paragraphen abgehandelt ist, welche jedoch manches Eigenthümliche darbieten, und daher hier eine kurze Erörterung nöthig machen. Diese Fälle sind:

1) der Balken liegt an beiden Endpunkten frei auf,
2) der Balken ist an einem Endpunkte unwandelbar befestigt, am andern aber liegt er frei auf,
3) der Balken ist an beiden Endpunkten unwandelbar befestigt.



Denken wir einen Balken vw von der Länge L, welcher an beidan Endpunkten v und w frei aufliegt, und durch die Drucke A, B, C, D in den Abständen a, b, c, d von dem Endpunkte v belastet ist, so lassen sich diese Drucke nach § 90. S. 198 leicht auf die beiden Stützpunkte reduciren. Der Druck in dem Punkte w ist:

$$1)\ P' = \frac{aA + bB + cC + \ldots.}{L}$$

Der Druck im Punkte v ist:

$$2)\ P'' = \frac{(L-a)A + (L-b)B + (L-c)C + \ldots}{L}$$

Der mittlere Druck oder die Resultirende aus sämmtlichen Drucken ist:

$$3)\ P = P' + P'' = A + B + C + D + \ldots.$$

Den Angriffspunkt dieses mittlern Drucks finden wir, nach einem bekannten statischen Gesetz, wenn wir die Länge L im umgekehrten Verhältnifs der Drucke theilen. Es ist also die Entfernung des Angriffspunkts des resultirenden Druckes vom Punkte v:

$$4)\ p = \frac{L}{P} \cdot P' = \frac{aA + bB + cC + \ldots}{A + B + C + \ldots}$$

Der Bruch wird in dem Angriffspunkt von P erfolgen, und es läfst sich dieser Fall auf den vorigen zurückführen, wenn wir uns den Balken im Bruchpunkt festgehalten, und in einem der Stützpunkte durch die Reaktionen, welche die Drucke P' und P'' herbeiführen, und welche ihnen gleich und entgegengesetzt sind, belastet denken.

Wird der Bruch durch die Reaktion in dem Stützpunkt v herbeigeführt, so ist das auf Bruch wirkende statische Moment,

$$5)\ P'' \cdot p = \frac{L \cdot P'' \cdot P'}{P}.$$

Denken wir den Bruch durch die Reaktion im Punkt w hervorgebracht, so ist das Moment derselben:

$$P' \cdot (L - p) = P'\left(L - L\frac{P'}{P}\right) = \frac{LP'}{P}(P - P');$$

da aber nach 3) $P - P' = P''$ ist, so folgt, dafs beide Momente gleich grofs sind, und dafs es folglich ganz gleich ist, ob man den Bruch durch die Reaktion von P' oder durch die von P'' herbeigeführt denkt.

Setzen wir in die Gleichung 5) die Werthe aus 1), 2) und 3), und berücksichtigen wir, dafs das auf Bruch wirkende Moment bei gehöriger Sicherheit gleich dem Widerstands-Momente $W \cdot k$ sein mufs, so hat man zur Berechnung der Dimensionen eines, an beiden Enden frei aufliegenden Balkens die Gleichung:

$$6)\ \frac{[aA + bB + cC + \ldots]\,[(L-a)A + (L-b)B + (L-c)C + \ldots]}{L \cdot (A + B + C + \ldots)} = kW,$$

worin k aus der Tabelle XI in § 88. S. 192 und W aus der Tabelle XIV in § 91. S. 204 zu entnehmen sind.

Hieraus folgt die leicht zu merkende Regel:

> Das auf Bruch wirkende, statische Moment für einen an beiden Enden frei aufliegenden Balken wird gefunden, wenn man die Summe der statischen Momente aller einzelnen Drucke in Beziehung auf den einen Stützpunkt, mit der Summe der statischen Momente dieser Drucke in Beziehung auf den andern Stützpunkt multiplizirt, und das Produkt dividirt durch die Länge des Bal-

kens multiplizirt mit der Summe sämmtlicher Drucke.

In den Formeln des vorigen Paragraphen ist daher für PL überall der oben berechnete Werth zu setzen.

Bezeichnet P die Summe sämmtlicher Drucke, und p den Abstand des mittlern Druckes von einem Endpunkte, so hat man für das statische Moment:

$$7)\ \frac{P(L-p)p}{L} = kW.$$

Für den Fall, dafs der resultirende Druck durch die Mitte des Balkens geht, ist $p = \frac{1}{2}L$; der Ausdruck (7) für das statische Moment geht dann über in $\frac{1}{4}PL$, und man hat:

$$8)\ P = \frac{4W.k}{L}.$$

Ein an beiden Enden frei aufliegender und in der Mitte belasteter Balken trägt also viermal so viel, als ein Balken von denselben Dimensionen, der an einem Ende befestigt, und am andern Ende belastet ist.

Es sei z. B. ein gufseiserner Balken von rechteckigem Querschnitt, dessen Höhe das Dreifache von der Breite beträgt, an beiden Enden frei aufliegend, 12 Fufs lang, und in den Abständen von 2, 3, 6 und 8 Fufs von dem einen Ende mit den Drucken 1200, 3000, 1800 und 4000 Pfund belastet, in welchem Abstande von dem einen Ende liegt der Bruchpunkt, und welche Dimensionen mufs der Balken haben.

Nach der Gleichung (4) ist der Abstand des Bruchpunkts $= \frac{2400 + 9000 + 10800 + 32000}{10000} = 5{,}42$ Fufs. Das statische Moment nach der Gleichung (6) $= \frac{54200\,.\,65800}{12\,.\,10000} = 29171$. Dies für PL in die entsprechende Formel des § 92 eingesetzt, giebt

$$h = 0{,}32\sqrt[3]{(29171)} = 9{,}8 \text{ Zoll.}$$

Nehmen wir dafür 10 Zoll, so ist das Gewicht des Balkens $= 1333$ Pfd., welches im Schwerpunkt vereinigt gedacht wird. Wir haben nun die Rechnung von Neuem mit Berücksichtigung dieses Gewichts durchzuführen. Es ergiebt sich dann der Abstand des Bruchpunkts:

$$= \frac{2400 + 9000 + 10800 + 32000 + 8000}{11333} = 5{,}49 \text{ Fufs,}$$

$$\text{das statische Moment} = \frac{62200 + 73800}{12\,.\,11333} = 33753,$$

$$h = 0{,}32\sqrt[3]{33753} = 10{,}34.$$

Es müfste nun das Gewicht eines Balkens von dieser Höhe, und der Breite $\frac{1}{3}h$ berechnet, und mit diesem Gewicht die Rechnung abermals durchgeführt werden, bis die Aenderung des Werthes von h klein genug wird, um sie zu vernachlässigen. Im vorliegenden Falle läfst sich schon abschätzen, dafs ein Balken von $10\frac{1}{2}$ Zoll Höhe hinreichend stark ist.

Der zweite Fall, dafs nämlich ein Balken an einem Ende unwandelbar befestigt ist, am andern aber frei aufliegt, macht für die Betrachtung des Einflusses, welchen die einzelnen Drucke auf die Bruchpunkte ausüben, eine ziemlich weitläufige Auseinandersetzung nöthig, welche hier unterbleiben mufs. Man hat sich nur zu merken, dafs in diesem Falle zwei Bruchpunkte stattfinden, der eine an der Befestigungsstelle, der andere im Angriffspunkt des mittlern Druckes. Für die Praxis verfährt man hinreichend genau, wenn man das auf Bruch wirkende Moment, wie im vorhergehenden Falle berechnet, und davon näherungsweise $\frac{2}{3}$ nimmt. Es ergiebt sich sodann:

$$9)\ \tfrac{2}{3}\frac{[aA+bB+cC+..][(L-a)A+(L-b)B+...]}{L(A+B+C+....)}=kW.$$

Für den Fall, dafs der Balken an beiden Enden unwandelbar befestigt ist, hat man drei Bruchpunkte, nämlich an beiden Enden, und im Angriffspunkt des resultirenden Druckes einen; es folgt dann in ähnlicher Weise:

$$10)\ \tfrac{1}{2}\frac{[aA+bB+cC+...][(L-a)A+(L-b)B+....]}{L(A+B+C+...)}=kW.$$

Wenn der resultirende Druck durch die Mitte des Balkens geht, erhält man für einen, an einem Ende unwandelbar befestigten, am andern Ende frei aufliegenden Balken:

$$11)\ P=6\frac{kW}{L},$$

und für einen an beiden Enden unwandelbar befestigten Balken:

$$12)\ P=8\frac{kW}{L}.$$

Der erstgenannte Balken trägt also sechsmal, der andere achtmal so viel, als ein Balken von derselben Länge, der an einem Ende unwandelbar befestigt, am andern durch den Druck P belastet ist.

Liegt ein Balken an beiden Enden und an einem dritten Punkte seiner Länge frei auf, so ist jeder zwischen zwei Stützpunkten befindliche Theil für sich als ein Balken zu betrachten, der an einem Ende unwandelbar befestigt, am andern aber frei aufliegend ist.

Berechnung stangenförmiger Körper, wenn der Werth der zulässigen Durchbiegung gegeben ist.

§ 94. Wenn eine angemessene Belastung auf einen befestigten, oder unterstützten Körper einwirkt, so erzeugt dieselbe eine Durchbiegung. So lange diese Durchbiegung in den einzelnen Elementen des Körperquerschnitts noch nicht eine Spannung hervorbringt, welche die Grenze der vollkommenen Elastizität erreicht, so entsteht dadurch keine bleibende Formveränderung, und wir haben gesehen (§ 88. S. 189), dafs den Ansprüchen der Sicherheit, in Bezug auf die Festigkeit der Körper genügt wird, wenn die Spannung nur die Hälfte bis zwei Drittel der Elastizitätsgrenze erreicht. — Allein auch in diesem Falle findet eine bestimmte Biegung statt, und der Werth derselben läfst sich nach statischen Gesetzen, deren Herleitung hier zu weit führen würde, berechnen. Es ist nun denkbar, dafs in gewissen Fällen der Werth dieser Biegung so grofs werden kann, dafs, obwohl der Körper den Ansprüchen der Festigkeit mit vollkommener Sicherheit genügt, doch andere Bedingungen z. B. die Genauigkeit und Sicherheit der Bewegung der Maschine, dadurch verletzt werden. In solchen Fällen mufs man den zulässigen Werth der Durchbiegung von vorne herein annehmen, und die Dimensionen des Körpers so wählen, dafs derselbe höchstens diese angenommene Durchbiegung erleidet.

Wenn ein stangenförmiger Körper an einem Ende unwandelbar befestigt, am andern belastet ist, so findet die gröfste Senkung an dem belasteten Ende statt. Bezeichnet man den Werth der Senkung mit δ, so ist derselbe

$$1)\quad \delta = \tfrac{1}{3}\frac{PL^3}{B.E},$$

wenn P die Belastung, L die Länge, B das Biegungs-Moment, E der Elastizitäts-Modulus ist.

Wenn dagegen der Körper an beiden Enden frei aufliegt, so findet die gröfste Senkung nur dann im Angriffspunkt des resultirenden Druckes statt, wenn dessen Richtung durch die Mitte der Länge des freiliegenden Theiles des Balkens geht. Wenn dagegen der Angriffspunkt des resultirenden Druckes nicht in der Mitte der Länge des Balkens liegt, so liegt die gröfste Senkung zwischen dem Angriffspunkt und der Mitte des Balkens. Da jedoch die genaue Rechnung für diesen Fall ziemlich umständlich ist, so wollen wir die gröfste Durchbiegung näherungsweise in den Angriffspunkt des resultirenden Drucks versetzen,