punkt der neutralen Axe entsprechen, und nennt man die Länge der neutralen Axe b, so ergiebt sich

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{b}{3n}\left[m_0 + 4(m_1 + m_3 + \ldots + m_{(n-1)}) + 2(m_2 + m_4 + \ldots m_{(n-2)}) + m_n\right]$$

Diese Rechnungen werden wesentlich erleichtert, wenn man es mit regelmäfsigen oder doch mit symmetrischen Querschnitts-formen zu thun hat. Theilt die neutrale Axe den Querschnitt in zwei kongruente Theile, so ist $y = z$, und es ergiebt sich:

$$B = \tfrac{2}{3} s \Sigma(y^3 \, dx)$$

und wenn man noch $y + z = 2y = h$ setzt

$$B = \tfrac{1}{12} s \Sigma(h^3 . dx).$$

Man sieht hieraus, dafs das Biegungs-Moment im Allgemeinen wächst im einfachen Verhältnifs zur Breite und mit dem Kubus der Höhe des Querschnittes.

Zuweilen hat man das Biegungs-Moment eines Querschnittes in Bezug auf eine andere, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe zu bestimmen. Bezeichnet man dasselbe mit B', ferner das Biegungs-Moment für eine Axe, welche durch den Schwerpunkt geht, und mit der gegebenen parallel ist, mit B, den Abstand beider Axen mit e, und den Flächeninhalt des Querschnitts mit F, so ergiebt eine einfache Rechnung:

$$B' = B + Fe^2.$$

Widerstands-Moment.

§ 91. Nach dem vorigen Paragraphen findet zwischen dem, auf Biegung eines, an einem Ende befestigten Balkens wirkenden Druck und den Spannungen der einzelnen Querschnitts-Elemente die Gleichung Statt:

$$PL = sB,$$

worin B das Biegungs-Moment, s die Spannung einer Faser im Abstande gleich Eins von der neutralen Axe bedeutet.

Nennen wir den Abstand des entferntesten Elementes von der neutralen Axe y', so ist die Spannung desselben (die gröfste, welche überhaupt in dem Querschnitt stattfindet,) sy'. Nach § 88 soll die gröfste Belastung, welche in irgend einem Theile eines Körpers stattfindet, nur die Hälfte, höchstens drei Viertel, derjenigen betragen, bei welcher die Grenze der vollkommenen Elastizität erreicht wird. Wir haben diese zulässige Belastung im § 88 mit k bezeichnet; es wird also sein:

$$sy' = k,$$

$$s = \frac{k}{y'}.$$

Setzen wir diesen Werth in den Ausdruck für das Biegungs-Moment ein, so ergiebt sich

$$PL = k\frac{B}{y'}.$$

Den Werth $\frac{B}{y'}$, welcher wieder allein von der Querschnittsform abhängig ist, nennt man das Widerstands-Moment, auch wohl das Bruch-Moment des Querschnittes; wir wollen ihn mit W bezeichnen, und haben:

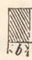
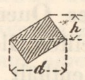
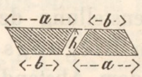
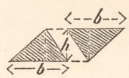
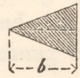
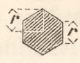
$$PL = kW.$$

Da nun der Ausdruck W die Dimensionen des Querschnitts enthält, so lassen sich dieselben aus der eben aufgestellten Gleichung berechnen, wenn PL gegeben ist. Die Werthe k enthält die Tabelle XI in § 88.

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der am häufigsten vorkommenden Querschnitte mit ihrem Biegungs-Moment (B), Widerstands-Moment (W) und dem Abstande der entferntesten Faserschicht von der neutralen Axe (y').

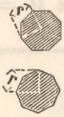
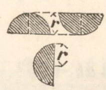
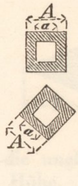
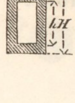
XIV. Ta

über die Biegungs- und Widerstands-Momente

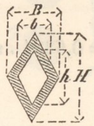
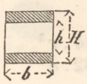
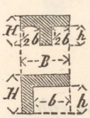
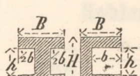
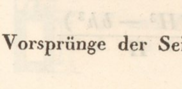
No.	Form des Querschnitts	Biegungs-Moment B.
1	 Quadrat	$\frac{1}{12} h^4$
2	 Quadrat	$\frac{1}{12} h^4$
3	 Rechteck.	$\frac{1}{12} bh^3$
4	 Rechteck.	$\frac{1}{6} dh^3$
5	 Paralleltrapez	$\frac{1}{36} h^3 \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b}$
6	 Dreieck, ungleichseitig. *b* eine Seite, *h* zugehörige Höhe.	$\frac{1}{36} bh^3$
7	 Dreieck, gleichschenklig. *h* die ungleiche Seite, *b* zugehörige Höhe.	$\frac{1}{48} bh^3$
8	 Sechseck, regulair.	$\frac{5}{16} \sqrt{3}\, r^4 = 0{,}5413\, r^4$
9	 Sechseck, regulair. *r* Seite, und Radius des umschriebenen Kreises.	$\frac{5}{16} \sqrt{3}\, r^4 = 0{,}5413\, r^4$

belle
der üblichsten Querschnittsformen:

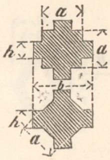
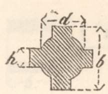
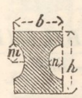
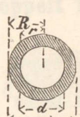
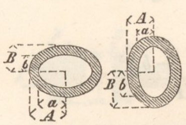
Stellung des Querschnitts, wenn der Druck vertikal gedacht wird	Entfernung des Schwerpunkts von d. äufsersten Faser y'	Widerstands-Moment $W = \frac{B}{y'}$
Eine Seite horizontal . .	. . $\frac{1}{2}h$ . .	$\frac{1}{6}h^3$
Eine Diagonale horizontal	. . $\frac{1}{2}h\sqrt{2}$ . .	$\frac{1}{12}h^3\sqrt{2} = 0{,}118h^3$
Die Seite b horizontal, die andere h vertikal	. $\frac{1}{2}h$ . .	$\frac{1}{6}bh^2$
Eine Diagonale d horizontal h die normale Entfernung der obern Ecke von d	. h . .	$\frac{1}{6}dh^2$
Die parallelen Seiten a und b horizontal; beliebig welche oben und welche unten	$\frac{2a+b}{a+b}\frac{1}{3}h$	$\frac{1}{12}h^2\frac{a^2+4ab+b^2}{2a+b}$
Die Seite b horizontal; beliebig ob oben oder unten	. $\frac{2}{3}h$.	$\frac{1}{24}bh^2$
Die Seite h vertikal, die Höhe b horizontal	. $\frac{1}{2}h$ . .	$\frac{1}{24}bh^2$
Eine Seite horizontal	. $\frac{1}{2}r\sqrt{3}$.	$\frac{5}{8}r^3$
Eine Seite vertikal	. . r . .	$\frac{5}{16}\sqrt{3}r^3 = 0{,}5413r^3$.

No.	Form des Querschnitts.	Biegungs-Moment B.
10	 **Achteck, regulair.**	$\frac{1+2\sqrt{2}}{6} . r^4 = 0{,}6381\, r^4$ . . . .
11	. . . . r Radius des umschriebenen Kreises.	. . . .
12	**Polygon,** beliebiges regulaires F Flächeninhalt, a Radius des eingeschriebenen Kreises.	Näherungsformel $\frac{1}{4} a^2 F$ . . . . . .
13	 **Kreis** Halbmesser $= r$ . . .	$\frac{1}{4}\pi r^4 = 0{,}7854 . r^4$ $\frac{1}{64}\pi d^4 = 0{,}0491 . d^4$
14		$\pi r^4\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = 0{,}110 . r^4$
15	**Halbkreis.** Halbmesser $= r$.	$\frac{1}{8}\pi r^4 = 0{,}3927 . r^4$ . .
16	 **Ellipse** . . . . a und b die Hälften der beiden Achsen.	$\frac{1}{4}\pi ab^3 = 0{,}7854 . ab^3$
	Hohles Quadrat.	
17	 . . . . A die äußere, a die innere Seite	. . . . $\frac{1}{12}(A^4 - a^4)$
18	. . . .	. . . .
	Hohles Rechteck.	
19	 B und H die äußern, b und h die innern Seiten.	$\frac{1}{12}(BH^3 - bh^3)$ . . .

Stellung des Querschnitts, wenn der Druck vertikal gedacht wird	Entfernung des Schwerpunkts von d. äufsersten Faser y'	Widerstands-Moment $W = \frac{B}{y'}$
Eine Seite horizontal	$\frac{1}{2} r \sqrt{(2+\sqrt{2})}$	$\frac{1+2\sqrt{2}}{3\sqrt{(2+\sqrt{2})}} \cdot r^3 = 0{,}6916 \cdot r^3$
Eine Diagonale horizontal	. . r . .	$\frac{1+2\sqrt{2}}{6} r^3 = 0{,}6381 \cdot r^3$
Beliebig	. . a . .	$\frac{1}{4} a F$
Beliebig	. . r . . . $\frac{1}{2} d$.	$\frac{1}{4} \pi r^3 = 0{,}7854 \cdot r^3$ $\frac{1}{32} \pi d^3 = 0{,}0982 \cdot d^3$
Durchmesser horizontal; beliebig, ob oben oder unten	$r\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) = 0{,}5756 \cdot r$	$\frac{1}{24} r^3 \frac{(9\pi^2 - 64)}{(3\pi - 4)} = 0{,}191 \cdot r^3$
Durchmesser vertikal	. . r . .	$\frac{1}{8} \pi r^3 = 0{,}3927 \cdot r^3$
Die Axe a horizontal, die Axe b vertikal; beliebig, ob a oder b die gröfsere	. b . . .	$\frac{1}{4} \pi a b^2 = 0{,}7854 \cdot a b^2$
Eine Seite horizontal	. . $\frac{1}{2} A$ . .	$\frac{1}{6} \frac{A^4 - a^4}{A}$
Eine Diagonale horizontal	$\frac{1}{2} A \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{12} \sqrt{2} \frac{A^4 - a^4}{A}$
Die Seite B horizontal, die Seite H vertikal	. . $\frac{1}{2} H$ . .	$\frac{1}{6} \frac{(BH^3 - bh^3)}{H}$

No.	Form des Querschnitts	Biegungs-Moment B.
	Hohler Rhombus.	
20	 . . . . B und H die äufsere und b und h die innere Diagonale	$\frac{1}{48}(BH^3 - bh^3)$ . . . .
	Rechteckiger Querschnitt ohne Mittelwand.	
21	 b die Breite, H und h die Höhen . . .	$\frac{1}{12}b(H^3 - h^3)$ . . .
	T-förmiger Querschnitt.	
22	 B die Breite des Balkens, b die Summe der Vorsprünge desselben über den Ständer H die ganze Höhe, h die Höhe des Ständers	$\frac{1}{12}\frac{(BH^2-bh^2)^2-4BHbh(H-h)^2}{(BH-bh)}$
	Doppelt T-förmiger Querschnitt.	
23	 B die äufsere Breite, b die Summe beider Vorsprünge, H die ganze Höhe, h die Höhe des Mittelstückes . . .	$\frac{1}{12}(BH^3 - bh^3)$ . . .
	Kreuzförmiger Querschnitt.	
24	 H die ganze Höhe, h die Höhe der Seitenrippen, B die Breite des Mittelstückes b die Summe der Vorsprünge der Seitenrippen . .	$\frac{1}{12}(BH^3 + bh^3)$ . .

Stellung des Querschnitts, wenn der Druck vertikal gedacht wird	Entfernung des Schwerpunkts von d. äufsersten Faser y'	Widerstands-Moment $W = \frac{B}{y'}$
Die Diagonale B horizontal Die Diagonale H vertikal	. . $\frac{1}{2}H$ . .	$\frac{1}{24}\frac{(BH^3 - bh^3)}{H}$
Die Mittelwand fehlt, die beiden Theile des Querschnitts können sich aber einander nicht nähern	. . $\frac{1}{2}H$ . .	$\frac{1}{6}\frac{b(H^3 - h^3)}{H}$
Der Balken des T ist horizontal	$\frac{1}{2}\frac{BH^2 - bh^2}{BH - bh}$	$\frac{1}{6}\frac{(BH^2 - bh^2)^2 - 4BH\,bh(H-h)^2}{BH^2 - bh^2}$
Die Mittelrippe ist vertikal	. . $\frac{1}{2}H$ . .	$\frac{1}{6}\frac{BH^3 - bh^3}{H}$
Die Mittelrippe ist vertikal	. . $\frac{1}{2}H$ . .	$\frac{1}{6}\frac{BH^3 + bh^3}{H}$

No.	Form des Querschnitts	Biegungs-Moment B.
25	**Quadratischer Querschnitt mit Federn.**  a Seite des Quadrats, h Stärke der Federn, b Entfernung der äussersten Enden je 2 gegenüber liegender Federn.	$\frac{1}{12}[a^4+(b^3-a^3)h+(b-a)h^3]$
26	**Kreisförmiger Querschnitt mit Federn.**  d Durchmesser des Kreises, h Stärke der Federn, b Entfernung der äussersten Enden je 2 gegenüber liegender Federn.	$\frac{1}{12}[\frac{3}{16}\pi d^4+(b^3-d^3)h+(b-d)h^3]$
27	**Balken mit ellipt. Aushöhlungen.**  b die Breite, h die Höhe, m und n die halben Axen der elliptischen Aushöhlungen.	. . $\frac{1}{12}(bh^3-3\pi nm^3)$ . .
28	**Ringförmiger Kreis-Querschnitt.**  Hohler Cylinder. D äufserer, d innerer Durchmesser R äufserer, r innerer Halbmesser	. . $\frac{1}{64}\pi(D^4-d^4)$ . . . . $\frac{1}{4}\pi(R^4-r^4)$ . . .
29	**Ringförmiger ellipt. Querschnitt.**  Hohle Ellipse A und B die halben Axen der äufsern, a u. b d. halben Axen d. innern Ellipsen	. . $\frac{1}{4}\pi(AB^3-ab^3)$ . .

Stellung des Querschnitts, wenn der Druck vertikal gedacht wird	Entfernung des Schwerpunkts von d. äufsersten Faser y'	Widerstands-Moment $W = \frac{B}{y'}$
Je zwei gegenüber liegende Federn vertikal, die andern horizontal	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{6}\frac{a^4+(b^3-a^3)h+(b-a)h^3}{b}$
wie vorstehend	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{6}\frac{0{,}589d^4+(b^3-d^3)h+(b-d)h^3}{b}$
Die grofsen Axen der Aushöhlungen vertikal	$\frac{1}{2}h$	$\frac{1}{6}\frac{bh^3-3\pi nm^3}{h}$
Beliebig	$\frac{1}{2}D$	$\frac{1}{32}\pi\frac{D^4-d^4}{D}$
	R	$\frac{1}{4}\pi\frac{R^4-r^4}{R}$
Die Axe A horizontal, die Axe B vertikal; beliebig ob a oder b die gröfsere	B	$\frac{1}{4}\pi\frac{AB^3-ab^3}{B}$

Belastungsfähigkeit stangenförmiger Körper, welche an einem Ende unwandelbar befestigt sind. — Formeln.

§ 92. Nach der vorigen Tabelle hat man für den kreisförmigen Querschnitt

$$PL = \tfrac{1}{32}\pi d^3 \,.\, k.$$

Es ist dabei vorausgesetzt, dafs alle Dimensionen in Zollen genommen werden. Nun ist der Flächeninhalt des kreisförmigen Querschnitts $F = \frac{1}{4}\pi d^2$; man hat also

$$PL = \tfrac{1}{8} F \,.\, k \,.\, d,$$

und daraus

$$P = \tfrac{1}{8} Fk \,.\, \frac{d}{L}\,;$$

es ist aber nach § 89 Fk diejenige Belastung, welche der Körper mit Sicherheit tragen kann, wenn er auf Zerreifsen in Anspruch genommen wird, und welche wir mit A bezeichnet haben; man hat also für den kreisförmigen Querschnitt

$$= \tfrac{1}{8} A \,.\, \frac{d}{L}\,.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich für den quadratischen und für den rechteckigen Querschnitt

$$P = \tfrac{1}{6} A \frac{h}{L}\,.$$

Die Werthe von A enthalten die Tabellen XII und XIII.

Hieraus folgt die leicht zu merkende Regel:

Man findet die Belastung (P), welche ein Balken, der an einem Ende unwandelbar befestigt ist, in einem gegebenen Abstande (L) von der Befestigungsstelle mit Sicherheit tragen kann, wenn man das Verhältnifs zwischen seiner Höhe (d oder h) und dem Abstande der Belastung multiplizirt, beim kreisförmigen Querschnitt mit $\frac{1}{8}$, beim quadratischen und rechteckigen Querschnitt mit $\frac{1}{6}$ derjenigen Last, welche er mit Sicherheit tragen könnte, wenn er auf Zerreifsen in Anspruch genommen würde.

Es sei z. B. ein schmiedeeiserner Balken von 6 Zoll Höhe und 2 Zoll Breite an einem Ende befestigt, wie grofs ist die Last, welche er in dem Abstande von 5 Fufs von der Befestigungsstelle, einschliefslich des, auf diesen Abstand zu reducirenden eignen Gewichts, mit Sicherheit tragen kann?

Nach Tabelle XIII ist $A = 120000$ Pfund, man hat also

$$P = \tfrac{6}{60} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot 120000 = 2000 \text{ Pfund.}$$