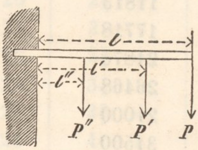
No.	Dimensionen des rechteckigen Querschnitts in preufs. Zollen	Belastung prismatischer Stäbe von rechteckigem Querschnitt (*A.*)	
		Schmiedeeisen	Gufseisen
13	2 und 1	20000	14000
14	$2\frac{1}{4}$ » $\frac{3}{4}$	16875	11813
15	. » $1\frac{1}{8}$	25312	17718
16	$2\frac{1}{2}$ » $1\frac{1}{4}$	31250	21875
17	$2\frac{3}{4}$ » $1\frac{3}{8}$	37812	26468
18	3 » 1	30000	21000
19	. » $1\frac{1}{2}$	45000	31500
20	$3\frac{1}{4}$ » $1\frac{5}{8}$	52812	36968
21	$3\frac{1}{2}$ » $1\frac{3}{4}$	61248	42874
22	$3\frac{3}{4}$ » $1\frac{1}{4}$	46875	32812
23	. » $1\frac{7}{8}$	70312	49218
24	4 » 2	80000	56000
25	$4\frac{1}{2}$ » $1\frac{1}{2}$	67499	47249
26	. » $2\frac{1}{4}$	101248	70874
27	5 » $2\frac{1}{2}$	125000	87500
28	$5\frac{1}{2}$ » $2\frac{3}{4}$	151248	105874
29	6 » 2	120000	84000
30	. » 3	180000	126000

Anmerkung. Die in den beiden vorigen Tabellen mit Schmiedeeisen bezeichneten Kolumnen geben zugleich die Flächeninhalte der Querschnitte, wenn man von den Werthen der Tabellen vier Decimalstellen abstreicht.

Berechnung stangenförm. Körper auf Biegen — Biegungsmoment.

§ 90. Die Berechnung stangenförmiger Körper auf ihre relative Festigkeit ist bedeutend komplizirter, als die Bestimmung ihrer Widerstandsfähigkeit gegen das Zerreifsen. Der Widerstand, welchen die Körper dem Biegen und Brechen entgegensetzen, ist nämlich aufser von der Gröfse des Querschnittes und von dem Material des Körpers noch abhängig von der Form des Querschnitts, von der Art der Unterstützung des Körpers, von der Entfernung der, auf Bruch wirkenden Drucke von den Stützpunkten, und endlich von der Beschaffenheit dieser Drucke.

Denken wir uns einen Balken, welcher, an einem Endpunkte unwandelbar befestigt, mit den Drucken p, p', p'' belastet ist, so haben diese Drucke das Bestreben, den Balken abwärts zu biegen, denselben also um eine bestimmte Axe, welche normal zu der Ebene ist, in welcher die Drucke wirksam sind, zu drehen. Diese Axe muſs nothwendig in dem Querschnitt des Balkens liegen, welcher die äuſserste Befestigungsstelle repräsentirt, denn der befestigte Theil des Balkens wird an der Drehung nicht mehr Theil nehmen. Nennen wir die normalen Abstände der Richtungslinien jener Drucke von der äuſsersten Befestigungsstelle l, l', l'' etc., so sind die statischen Momente der Drucke pl, $p'l$, $p''l''$... Die Summe der gesammten Momente, welche auf Drehung wirken, ist also $pl + p'l' + p''l''$.... Wir können dafür bekanntlich ein einziges Moment substituiren, welches mit dem Druck P in der Entfernung L wirksam ist, indem wir setzen:



$$PL = pl + p'l' + p''l'' \ldots\ldots$$

woraus folgt

$$P = \frac{pl + p'l' + p''l'' + \ldots}{L} = \frac{pl}{L} + \frac{p'l'}{L} + \frac{p''l''}{L}$$

$$L = \frac{pl + p'l' + p''l'' + \ldots}{P}$$

Es läſst sich daher sowohl die Summe der Momente, als auch jedes einzelne Moment immer durch ein anderes ersetzen, wenn entweder der Hebelsarm dieses andern L oder der Druck desselben P gegeben ist.

Denkt man sich ein Moment pl durch ein anderes PL ersetzt, dessen Hebelsarm L gegeben ist, und berechnet man den Druck P, welcher diesem andern Hebelsarm L entspricht, nach der Formel

$$P = \frac{pl}{L},$$

so sagt man, daſs der Druck p von dem Abstande l auf den Abstand L reducirt worden sei, und man hat die Regel zu merken:

> um einen Druck p in dem Abstande l von der Drehaxe auf einen andern Abstand L zu reduciren, multiplicire man den Druck p mit seinem Abstande l, und dividire durch den neuen Abstand L.

Dieses bekannte statische Gesetz ist hier in Erinnerung gebracht, weil es sehr häufig in Anwendung kommt, und weil dadurch erklärt werden sollte, weshalb wir künftig immer nur von einem Druck P sprechen werden, der im Abstande L auf Biegung des Balkens wirkt. Wir verstehen unter P die Summe aller, auf den Abstand L reducirten Drucke, welche auf Biegung des Balkens wirken.

Noch ist zu bemerken, dafs, wenn unter diesen Drucken sich solche Belastungen befinden, welche nicht in einem Punkte an den Balken angreifen, sondern über eine gewisse Länge vertheilt sind, man eine solche vertheilte Last in ihrem Schwerpunkt vereinigt denkt, und den normalen Abstand der, durch den Schwerpunkt gelegten Vertikalen, von der Drehaxe für den Hebelsarm dieser Last annimmt.

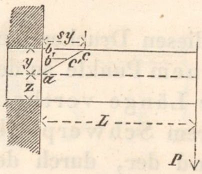
Wirkt der Druck P in dem Abstande L auf Biegung des Balkens, und erleidet dieser dabei eine Drehung um eine, in dem Befestigungs-Querschnitt liegende Axe a, so werden sämmtliche Querschnitts-Elemente, welche sich über a befinden, ausgereckt, sämmtliche unterhalb a liegenden Elemente werden zusammengedrückt; die in der Axe a liegenden Querschnitts-Elemente werden aber weder ausgereckt, noch zusammengedrückt, sie bleiben vielmehr neutral, und man nennt die Axe a daher auch die neutrale Axe.

Innerhalb der Elastizitätsgrenze nimmt man den Widerstand gegen das Ausrecken und Zusammendrücken gleich grofs an, und dann mufs, wie leicht ersichtlich ist, die neutrale Axe durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehen.

Wenn die Widerstände gegen Ausdehnung und Zusammendrücken nicht gleich grofs sind, so geht die neutrale Axe nicht durch den Schwerpunkt, sondern liegt derjenigen Begrenzung des Balkens näher, auf welcher die Elemente beziehungsweise eine grössere Widerstandsfähigkeit haben.

Je gröfser der Abstand irgend eines Elementes von der neutralen Axe ist, desto gröfser ist die Ausreckung oder Zusammendrückung, welche es erleidet, desto gröfser, also auch nach § 88. S. 190 die Spannung, welche es auszuhalten hat, und zwar nehmen diese Spannungen im direkten Verhältnifs mit der Entfernung von der Drehaxe zu.

Nennt man die Spannung, welche ein Element in dem Abstande von einem Zoll (einer Längeneinheit) von der Drehaxe erleidet s, so ist die Spannung irgend eines andern Elements in dem Abstande von q Zollen qs. Wenn nun der Abstand ab des entferntesten Elements von der neutralen Axe in irgend einem Längenschnitt des Balkens mit y bezeichnet wird, so ist die Spannung dieses Elements sy. Da nun die Spannung in der neutralen Axe a gleich Null ist, von a aber nach b hin gleichmäfsig wächst, so folgt daraus, dafs, wenn man $bc = sy$ macht, die Linie ca zieht, und dadurch das Dreieck abc bildet, die Spannung jedes, zwischen a und b liegenden Elements, z. B. b', durch die Länge einer zu bc parallelen, durch ab und ac begrenzten Linie $b'c'$ repräsentirt wird, überhaupt aber der Flächeninhalt des Dreiecks $abc = \frac{1}{2}sy^2$ die Summe aller Spannungen, der über a liegenden Elemente darstellt. Die Resultirende aus allen diesen Spannungen kann man sich im Schwerpunkt des Dreiecks angreifend, also an einem Hebelsarme $\frac{2}{3}y$ wirkend denken*). Das Moment, welches vermöge der Biegung des Balkens auf Ausrecken der über a liegenden Elemente wirkt, drückt sich daher aus durch:

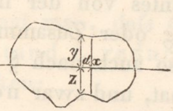


$$\tfrac{1}{2}sy^2 \cdot \tfrac{2}{3}y = \tfrac{1}{3}sy^3.$$

Nennt man den Abstand der untersten Faserschicht von der neutralen Axe z, so läfst sich in derselben Weise zeigen, dafs das, auf Zusammendrücken wirkende Moment sich ausdrückt durch $\frac{1}{3}sz^3$. Hieraus folgt, dafs das, in jedem Längenschnitt des Körpers durch die Biegung erzeugte Moment, welches auf Formveränderung der Fasern wirkt, sich ausdrückt durch:

$$\tfrac{1}{3}s(y^3 + z^3).$$

Um nun das gesammte Moment, welches vermöge der Biegung auf Formveränderung des Körpers wirkt, zu finden, müfsten wir für jeden einzelnen Längenschnitt des Körpers den obigen Ausdruck berechnen, und die Summe nehmen. Ist also A der Querschnitt des Körpers in der Befestigungsebene, so mufs derselbe in unendlich viele Breiten-Elemente von unendlich geringer Dicke, etwa dx, zerlegt werden; für jedes würde sich ein Moment $\frac{1}{3}s(y^3 + z^3)dx$ ergeben, und die Summe aller Momente würde sich ausdrücken durch $\Sigma[\frac{1}{3}s(y^3 + z^3)dx]$. Diese Summe der Momente aller Spannungen, welche die einzelnen Querschnitts-Elemente



*) Polytechnisches Centralblatt 1851. S. 281.

vermöge der Biegung erleiden, nennt man das Biegungsmoment des Körpers. Offenbar ist in jedem Augenblick, so lange die Biegung noch nicht die Grenze der vollkommenen Elastizität überschreitet, das Biegungsmoment gleich dem Moment des auf Biegung wirkenden Druckes. Man hat also

$$PL = \tfrac{1}{3} s \Sigma[(y^3 + z^3)dx].$$

Der Ausdruck $\frac{1}{3}\Sigma[(y^3 + z^3)dx]$ ist lediglich von der geometrischen Form des Querschnitts abhängig; man nennt ihn daher auch wohl das Biegungsmoment des Querschnittes.

Sind y und z als Funktionen von x gegeben, etwa $y = f_x$ und $z = \varphi_x$, so bestimmt sich das Biegungsmoment durch Integriren. Bezeichnen wir mit B das Biegungsmoment des Querschnitts, so hat man in diesem Falle:

$$B^{*)} = \tfrac{1}{3}\left\{\int y^3 . dx + \int z^3 dx\right\} = \tfrac{1}{3}\left[\int\left(f_x\right)^3 dx + \int\left(\varphi_x\right)^3 dx\right].$$

In andern Fällen kann man sich zur Berechnung des Biegungsmomentes für irgend einen beliebigen Querschnitt der Simpsonschen Regel bedienen, indem man nämlich den Querschnitt in eine möglichst grofse, aber gerade Anzahl Elemente zerlegt (etwa in n), deren Begrenzungen normal zur neutralen Axe, und deren Entfernungen auf der neutralen Axe gleich grofs sind, und für jedes dieser Elemente den Werth $(y^3 + z^3)$ berechnet. Bezeichnet man diese Werthe der Reihe nach mit $m_0, m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$, wobei m_0 und m_n die Werthe sind, welche dem Anfangs- und End-

---

*) Zerlegt man den Querschnitt in Elemente, welche mit der neutralen Axe parallel sind, so ergiebt sich das Biegungsmoment für den obern Theil des Querschnitts

$$B' = \int y^2 . x dy.$$

Nach der vorgetragenen Darstellung fand sich

$$B' = \tfrac{1}{3}\int y^3 dx.$$

Werden die Integrale zwischen denselben Grenzen 0 und b genommen, welche überhaupt für bestimmte Integrale zulässig sind, so folgt, dafs innerhalb dieser Grenzen, und wenn man $y = f_x$ setzt, sein müsse:

$$\int_b^0 y^2 x dy = \tfrac{1}{3}\int_0^b y^3 dx$$

$$\int_b^0 x\,(f_x)^2 . df_x = -\tfrac{1}{3}\int_b^0 (f_x)^3 dx.$$

Ein Gesetz, auf welches hier aufmerksam gemacht wird, weil sich daran vielleicht mancherlei fruchtbare Folgerungen knüpfen lassen. Dasselbe ist auch analytisch nachzuweisen.

punkt der neutralen Axe entsprechen, und nennt man die Länge der neutralen Axe b, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{3}\cdot\frac{b}{3n}\left[m_0+4(m_1+m_3+\ldots+m_{(n-1)})+2(m_2+m_4+\ldots m_{(n-2)})+m_n\right]$$

Diese Rechnungen werden wesentlich erleichtert, wenn man es mit regelmäſsigen oder doch mit symmetrischen Querschnitts-formen zu thun hat. Theilt die neutrale Axe den Querschnitt in zwei kongruente Theile, so ist $y = z$, und es ergiebt sich:

$$B = \tfrac{2}{3} s \Sigma(y^3\,dx)$$

und wenn man noch $y + z = 2y = h$ setzt

$$B = \tfrac{1}{12} s \Sigma(h^3 . dx).$$

Man sieht hieraus, daſs das Biegungs-Moment im Allgemeinen wächst im einfachen Verhältniſs zur Breite und mit dem Kubus der Höhe des Querschnittes.

Zuweilen hat man das Biegungs-Moment eines Querschnittes in Bezug auf eine andere, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe zu bestimmen. Bezeichnet man dasselbe mit B', ferner das Biegungs-Moment für eine Axe, welche durch den Schwerpunkt geht, und mit der gegebenen parallel ist, mit B, den Abstand beider Axen mit e, und den Flächeninhalt des Querschnitts mit F, so ergiebt eine einfache Rechnung:

$$B' = B + Fe^2.$$

Widerstands-Moment.

§ 91. Nach dem vorigen Paragraphen findet zwischen dem, auf Biegung eines, an einem Ende befestigten Balkens wirkenden Druck und den Spannungen der einzelnen Querschnitts-Elemente die Gleichung Statt:

$$PL = sB,$$

worin B das Biegungs-Moment, s die Spannung einer Faser im Abstande gleich Eins von der neutralen Axe bedeutet.

Nennen wir den Abstand des entferntesten Elementes von der neutralen Axe y', so ist die Spannung desselben (die gröſste, welche überhaupt in dem Querschnitt stattfindet,) sy'. Nach § 88 soll die gröſste Belastung, welche in irgend einem Theile eines Körpers stattfindet, nur die Hälfte, höchstens drei Viertel, derjenigen betragen, bei welcher die Grenze der vollkommenen Elastizität er-