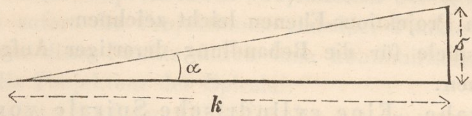
Punkt der Spirale durch Drehung, ohne fortzurücken, in demselben Zeitelemente durchlaufen würde, so nennt man den Winkel α,



welcher der Kathete s gegenüberliegt, den Neigungswinkel der Spirale für dieses Zeitelement; da nun

$$\text{tang. } \alpha = \frac{s}{k}$$

ist, so hat man den Satz: daſs die Tangente des Neigungswinkels in irgend einem Zeitelement gleich dem Steigungsverhältniſse in demselben Zeitelemente sei.

Am häufigsten kommen solche Spiralen vor, die in der Mantelfläche eines normalen Cylinders liegen (No. 3.), — deren Axen geradlinig sind (No. 1.) und mit den Axen der Spindeln zusammenfallen, — deren Erzeugungslinie eine gerade ist (No. 2.), welche mit der Axe stets denselben Winkel (No. 3.), vorzugsweise einen rechten Winkel bildet, — deren Steigungsverhältniſs endlich (also auch Neigungswinkel) konstant ist. (No. 4.).

Darstellung der Spiralen durch Zeichnung.

§ 30. Nach dem Vorigen wird es nicht schwer sein, eine Spirale zu zeichnen, wenn die Axe, die Erzeugungslinie, die Art des Durchschnitts und das Steigungsverhältniſs gegeben sind. Man hat nur nöthig, auf der Axe die in möglichst kleinen Zeiträumen zurückgelegten Wege durch Eintheilung zu bestimmen, aus diesen Theilpunkten mit der jedesmaligen Entfernung des Punktes, dessen Spirale man konstruiren will, Kreise zu beschreiben, auf diesen Kreisen die aus dem Steigungsverhältniſs und der Steigung zu findende Länge der Bogenstücke, welche für diese Zeitelemente durchlaufen worden, nach und nach abzutragen und durch die so bestimmten Punkte eine kontinuirliche Kurve zu legen. Die Radien jener Kreise ergeben sich, wenn man die Erzeugungslinie in den einzelnen Theilpunkten der Axe unter dem Winkel, welchen sie eben machen soll (wenn derselbe konstant ist, vereinfacht sich die Konstruktion), anlegt, so daſs auch der bestimmte Durchschnittspunkt der Erzeugungslinie in den Theilpunkt der Axe fällt. Soll die Spirale in der Mantelfläche eines bestimmten Körpers liegen, so bestimmt sich hierdurch derjenige Punkt der Erzeugungslinie, welcher Durchschnittspunkt sein mufs. Durch die bekannten Hilfsmittel der beschreibenden Geometrie lassen sich die Projektionen in den verschiedenen Projektions-Ebenen leicht zeichnen.

Als Beispiele für die Behandlung derartiger Aufgaben mögen folgende dienen:

Taf. 2. Fig. 1.

1. Aufgabe. Eine cylindrische Spirale von konstantem Steigungs-Verhältnifs in der ersten und zweiten Projektions-Ebene darzustellen, wenn der Spindeldurchmesser und die Steigung gegeben sind. Taf. 2. Fig. 1.

Da die Spirale in der Mantelfläche des gegebenen Cylinders liegen soll, so ist die erste Projektion ein Kreis. Denken wir den Umfang dieses Kreises in eine beliebige (möglichst grofse) Anzahl gleicher Theile getheilt, so werden die Theilpunkte die Projektionen verschiedener Punkte der Spirale darstellen, und, während die erzeugende Linie die einzelnen gleichen Bogenstücke durch Drehung durchläuft, mufs sie auch — wegen des konstanten Steigungs-Verhältnisses — gleiche Wegstücke auf der Axe fortschreitend zurücklegen. Theilen wir also auf der Axe die Steigung in eben so viel gleiche Theile, wie den Kreisumfang, und ziehen wir durch diese Theilpunkte Linien, welche zur Axe normal sind, so müssen die zweiten Projektionen jener Punkte der Reihe nach in diese Linien fallen, und man kann sie finden, wenn man aus der ersten Projektion die projicirenden Linien aufzieht. Verbindet man die Projektionen der einzelnen Punkte durch eine kontinuirliche Kurve, so ist diese die zweite Projektion der Spirale.

Taf. 2. Fig. 2.

2. Aufgabe. Auf der Mantelfläche eines geraden Kegels eine Spirale zu zeichnen, welche für jede Umdrehung um gleiche Stücke steigt. Der Kegel und die Steigung sind gegeben. Taf. 2. Fig. 2.

Die Spirale hat kein konstantes Steigungs-Verhältnifs, da zwar die Wegstücke, um welche sie fortschreitet, für jede Umdrehung konstant sind, aber nicht die durch Drehung durchlaufenen Wege, indem die Peripherien der Kreise von der Grundfläche nach der Spitze hin abnehmen. Es ist vielmehr das Verhältnifs zwischen der Steigung und dem durch Drehung durchlaufenen Winkel konstant. Man trage auf der Axe von der Spitze des Kegels abwärts die einzelnen Steigungen ab, und theile jede Steigung in möglichst viele gleiche Theile; lege durch die Theilpunkte Ebenen, welche mit der ersten Projektions-Ebene parallel sind; projicire die Kreise, in welchen diese Ebenen den Kegel schneiden; theile den Umfang eines dieser Kreise in der ersten Projektions-Ebene in ebenso viel gleiche Theile, wie die Steigung; ziehe die Radien, und die diesen Radien entsprechenden Projektionen der Kegelseiten, so ergeben sich sofort die Projektionen einzelner Punkte der Spirale. Verbindet man diese Punkte durch eine kontinuirliche Kurve, so erhält man die Projektion der Spirale.

3. Aufgabe. Auf der Oberfläche einer gegebenen Kugel eine Spirale mit konstantem Steigungs-Verhältnifs zu konstruiren, welche von einem Pol zum andern steigt, und im Ganzen zwei Umdrehungen macht. Taf. 2. Fig. 3. Taf. 2. Fig. 3.

Man theile in der zweiten Projektions-Ebene den Kugeldurchmesser, welcher der Axe der Spirale entspricht, in möglichst viele gleiche Theile (hier sind deren im Ganzen 16, also für eine Umdrehung der Spirale acht angenommen worden), lege durch die Theilpunkte Ebenen, normal zur Axe, und projicire die Kreise, in welchen diese Ebenen die Kugel schneiden, in die zweite Projektions-Ebene. Während der erzeugende Punkt durch Fortschreiten auf der Axe gleiche Wegstücke durchläuft, soll er auch — wegen des konstanten Steigungs-Verhältnisses — gleiche Bogenstücke durch Drehung zurücklegen; er befindet sich dabei nach und nach in den Kreisen $1a'$; $2a''$; $3a'''$ etc. Da diese Kreise aber verschiedene Halbmesser haben, so werden gleiche Bogenstücke derselben nicht gleichen Winkeln angehören, sondern die Winkel, welche den gleichen Bogenstücken entsprechen, werden sich umgekehrt verhalten wie die Radien der Kreise $1a'$, $2a''$, $3a'''$, ... Um also die Projektionen derjenigen acht Punkte der Spirale zu finden, welche in den acht Kreisen liegen, die wir für eine Umdrehung angenommen haben, müssen wir den Winkel von vier Rechten, welcher der ganzen Umdrehung entspricht, in acht Theile theilen, welche sich umgekehrt wie die Radien verhalten; die Halbmesser $y'o$, $y''o$, $y'''o$ ...., welche man von den so bestimmten Theilpunkten nach dem Mittelpunkt der sämmtlichen projicirten Kreise zieht, schneiden auf den Kreisen nach der Reihe gleiche Bogenstücke ab, und geben so in den Durchschnittspunkten p' p'' p'''...... die ersten Projektionen der gesuchten acht Punkte der Spirale; die Projektionen in den andern beiden Projektions-Ebenen ergeben sich leicht durch Aufziehen der projicirenden Linien. Es wird sich also hauptsächlich darum handeln, den Winkel von vier Rechten in der angegebenen Weise zu theilen. Dies ist durch geometrische Konstruktion nicht möglich, wohl aber durch ein praktisches Verfahren; hier ist folgende Konstruktion gewählt:

Es ist auf einer durch den Punkt o gelegten geraden Linie das Stück ox gleich der halben Peripherie des Kreises vom Halbmesser ox', das Stück oy gleich der halben Summe der Radien $1a'$, $2a''$, $3a'''$..... gemacht, die Linie xx', und parallel damit yy' gezogen; oy' ist der Radius eines Kreises, dessen Umfang gleich der Summe der Radien $1a'$, $2a''$, $3a'''$.... ist. Auf diesem Umfange ist der Bogen $y'\,y^{VIII}$ gleich der Länge des Radius $8a^{VIII}$, der Bogen $y^{VIII}\,y^{VII}$ gleich der Länge des Radius $7a^{VII}$, gemacht, und dadurch die oben gesuchte Eintheilng vollzogen etc.

Verbindet man die gefundenen Projektionen der einzelnen Punkte durch kontinuirliche Kurven, so sind diese die Projektionen der Spirale auf der einen Halbkugel. Für die andere Halbkugel werden die Projektionen ganz ähnlich gefunden. Die Winkeltheilung für die andere Halbkugel ist durch die punktirten Radien angedeutet*).

Anwendung der Spiralen auf die Theorie von Werkzeugmaschinen.

§ 31. Es ist hier die Bemerkung am Orte, dafs, wenn man sich die Steigung einer Spirallinie für eine ganze Umdrehung unendlich klein denkt, offenbar die einzelnen Theile der Spirale unendlich nahe zusammenfallen müssen; sie werden daher eine zusammenhängende Fläche darstellen. Da man andererseits in der Mantelfläche jedes beliebigen Körpers, welcher die Axe der Spirale umschliefst, eine Schraubenlinie konstruiren kann (§ 29. No. 3.), so kann man diese Schraubenlinie auch von unendlich kleiner Steigung denken. Es folgt hieraus, dafs sich die Oberfläche jedes Körpers, als erzeugt durch eine passende Spirallinie, denken läfst, dafs sie also dadurch gebildet werden kann, dafs ein Punkt einer passenden Erzeugungslinie sich mit dieser um eine passende Axe dreht, und dafs die Erzeugungslinie bei jeder Umdrehung

*) Obwohl hier vorzugsweise die cylindrische Spirale gebraucht wird, so ist doch zu empfehlen, den Schüler in der Konstruktion auch anderer Spiralen zu üben, damit ihm die oben dargestellten Bedingungen anschaulich und geläufig werden. Es wird nicht schwer werden, zahlreiche Beispiele zu finden. Als passende Beispiele mögen hier angeführt werden: Konstruktion einer Spiralfläche, deren Erzeugungslinie wellenförmig gekrümmt ist, wenn die Axe geradlinig ist; Konstruktion einer Spirallinie auf einem kreisförmigen oder elliptischen Ringe, dessen Querschnitt wieder kreisförmig oder elliptisch sein kann; Konstruktion einer Spirale auf einem Kegel, so dafs das Steigungs-Verhältnifs konstant ist, oder so, dafs die Steigungen für jede Umdrehung konstant sind; dieselbe Konstruktion auf einer paraboloidischen Spindel oder auf einer Kugeloberfläche. Konstruktion einer Spiralfläche, deren Erzeugungslinie gerade ist, deren Axe aber eine gegebene Spirale, etwa eine der vorhin konstruirten ist etc.