

Knežević Zorana, BSc

# Gerber-Shiu Funktionen und deren Berechnung

## MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieurin

Masterstudium Finanz und Versicherungsmathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Priv.-Doz. Dipl.-Ing. Dr.techn.  
Thonhauser, Stefan Michael

Institut für Statistik

Graz, Dezember 2017

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit setzt sich mit einer Fragestellung aus der Risikothorie auseinander. Im Rahmen der mathematischen Modellierung werden die Schlüsselgrößen, wie der Ruinzeitpunkt, der Überschuss vor Ruin und das Defizit bei Ruin analysiert. In dieser Arbeit wird der Fokus auf das klassische Risikomodell, das auch als Cramér-Lundberg Modell in der Literatur bekannt ist, gelegt. Die Analyse dieser Schlüsselgrößen basiert auf der sogenannten Gerber-Shiu Funktion, welche eine Verallgemeinerung der Ruinwahrscheinlichkeit darstellt. Hierbei wird eine erwartete diskontierte Strafzahlung, in Abhängigkeit von Überschuss vor Ruin und Defizit zu Ruin, betrachtet. Die Diskontierung kann auch als Laplace-Transformation des Ruinzeitpunktes interpretiert werden. Mit Hilfe der allgemeinen Theorie lassen sich explizite Resultate für spezielle Schadenshöhen Verteilungen und Straffunktionen herleiten. Als Ergänzung, aber auch in allgemeineren Situationen anwendbar, werden in dieser Arbeit auch numerische Lösungswege erarbeitet. Abschließend werden numerische und explizite Lösungen gegenübergestellt und das Konvergenzverhalten diskutiert.

## Abstract

This thesis, deals with a question from the risk theory. In mathematical modeling, the keywords such as the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin are analyzed. In this thesis, the focus is on the classical risk model, also known as the Cramér Lundberg model in the literature. The analysis of these keywords is based on the Gerber-Shiu function, which is a generalization of the probability of ruin. We consider expected discounted penalty, in dependence on surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. The discounting can also be interpreted as a Laplace transformation of the time of ruin. With the help of general theory, explicit results can be derived for specific damage distributions and penalty functions. As an adjunct, but also applicable in more general situations, numerical paths are also developed in this thesis. Finally, numerical and explicit solutions are compared and convergence behavior is discussed.

## **EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG**

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift

## **STATUTORY DECLARATION**

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/ resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

---

place, date

---

signature

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Masterarbeit unterstützt und motiviert haben.

Zuerst gebührt mein Dank Herr Priv.-Doz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Thonhauser, Stefan Michael, der meine Masterarbeit betreut und begutachtet hat. Für die hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken.

Ich bedanke mich bei meinen Studienkollegen für ihre Informationsbereitschaft und Zusammenarbeit.

Ein besonderer Dank gebührt meinem Mann Marko Knežević für den starken emotionalen Rückhalt über die Dauer meines gesamten Studiums. Besonderen Dank schenke ich meiner Tochter Dorotea Knežević, die mir viel Lebensfreude, Kraft und Motivation gab, um mein Studium fertig zu meistern.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Eltern Jovanka Keserović und Zoran Keserović bedanken, die mir mein Studium durch ihre Unterstützung ermöglicht haben und stets für mich da waren.

Zorana Knežević

Graz, am 20. November 2017

# Abkürzungsverzeichnis

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum
$\mathbb{R}$	Menge der Reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen Reellen Zahlen
$I(A)$	Indikatorfunktion der Menge $A$
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Borel $\sigma$ -Algebra auf $\mathbb{R}$
$\mathbb{E}$	Erwartungswert
$\mathbb{E}(X \mathcal{G})$	Bedingte Erwartung
$F_X$	Verteilungsfunktion
$F_X^{-1}(y)$	generalisierte Inversefunktion
$f_X(t)$	Dichte Funktion
$f_1$	Der Mittelwert der individuellen Schadenhöhen, $f_1 = \mathbb{E}(X_1)$
$M_X$	Momentenerzeugende Funktion $[e^{uX}]$
$H(t)$	Erneuerungsfunktion
$\{N(t)\}$	Zählprozess, zusammengesetzter Poisson-Prozess
$\{U(t)\}_{t \geq 0}$	Überschussprozess, $U(t) = u + ct - S(t)$
$u$	Anfangskapital
$c$	Höhe der Prämie
$S(t)$	Schadensprozess, Gesamtschadenhöhe, $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$
$T$	Ruinzeitpunkt
$U(T-)$	Überschuss gleich vor Ruin

---

$ U(T) $	<b>Defizit zum Ruinzeitpunkt</b>
$h$	<b>Schrittweite</b>
$\lambda$	<b>Poisson Parameter</b>
$w(x, y)$	<b>Straffunktion</b>
$\psi(u), \psi(u; t)$	<b>Ruinwahrscheinlichkeit</b>
$\phi(u)$	<b>Gerber-Shiu Funktion</b>

# Einleitung

Versicherungssysteme wurden entwickelt, um Einzelpersonen und Unternehmen vor hohen finanziellen Verlusten als Folge von unkontrollierten und zufälligen Ereignissen zu schützen. Die Versicherung kann durch eigenes Kapital, bzw. mittels einer finanziellen Reserve die Risiken übernehmen. Damit spielt das Kapital eine zentrale Rolle in der Risikothorie. Die Fähigkeit zur Rückzahlung von Schadensbeträgen wird durch die Höhe der Reserve bestimmt. Mit einem deterministischen Modell konnte der Versicherer seine künftigen Leistungen (d.h. Verluste) schätzen und damit die Höhe seiner Prämien bestimmen. Erstmals wurden deterministische Modelle im Bereich der Lebensversicherung angewendet. Im letzten Jahrhundert entwickelte sich die Nicht-Lebensversicherung, in deren Mathematik stochastische Modelle eine zentrale Rolle spielen, siehe [6]. Ruinthorie verwendet stochastische Modelle, um die Entwicklung des Überschusses in einem Versicherungsportfolio im Laufe der Zeit zu beschreiben. In der klassischen Risikothorie sind die folgende zwei Fragen von Bedeutung:

- (a) Ruinzeitpunkt
- (b) Defizit beim Ruinzeitpunkt, siehe [9]

Die Zählprozesse spielen eine sehr große Rolle in Risikothorie. Wir wollen einige davon in Kapitel 1 definieren. Die Zählprozesse benötigt man, um die Anzahl der Schäden in der Zeit zu entwickeln. Dazu gehören **Poisson-Prozesse** und **Erneuerungsprozesse**. Weiters definieren wir auch **Markov Prozesse** und **Lévy-Prozesse**. Eine Sonderklasse von Prozessen, die uns von großer Bedeutung in der Risikothorie sind, sind **zusammengesetzte Poisson-Prozesse**. Die zusammengesetzten Prozesse sind besonders wichtig für die Berechnung des Gesamtschadens eines Portfolios von individuellen Risiken.

In Kapitel 2 wird der Risikobegriff genauer definiert. Es wird auch der klassische Risikoprozess eingeführt, bei dem die zentrale und stochastische Komponente ein zusammengesetzter Poisson-Prozess sind. Dazu wird der Begriff des Überschusses erklärt, der eine entscheidende Rolle vor Ruinauftritt spielt.

Zentrales Thema des Kapitels 3 ist die Wahrscheinlichkeit des Ruins. Seine Analyse im Risikoprozess wird Ruinthorie genannt, siehe [6]. Die in dieser Arbeit definierten Ruinwahrscheinlichkeiten sind die Wahrscheinlichkeiten für den technischen Ruin eines Versicherungsbestandes. Sie sind nicht zu verwechseln mit der Wahrscheinlichkeit, daß ein Ver-

---

sicherungsunternehmen ruiniert wird. Mit Ruinwahrscheinlichkeiten läßt sich das Risiko eines Versicherungsportfolios oder eines Versicherungsbestandes bewerten, und man kann unterschiedliche Risiken vergleichen im Sinne welches Risiko ist gefährlicher, siehe [19]. Die Darstellung der Ruinwahrscheinlichkeit mit Hilfe der Erneuerungsgleichung als spezielle Integralgleichung wird an dieser Stelle präsentiert. Mit den klassischen Methoden der Erneuerungstheorie läßt sich die bekannte asymptotische **Cramér-Lundberg-Approximation** zur Ruinwahrscheinlichkeit herleiten, siehe [6]. Um die Cramér-Lundberg-Ungleichung zu konstruieren benötigt man den **Anpassungskoeffizient**, der auch eine große Rolle in der Ruinthorie spielt.

In der klassischen Ruinthorie sind oft folgende zwei Fragen zu betrachten: Defizit zum Ruinzeitpunkt und Ruinzeitpunkt. Diese zwei Fragen waren immer getrennt behandelt. Gerber und Shiu (1998) führten eine erwartete diskontierte Straffunktion, genannt Gerber-Shiu Funktion. In dem Artikel studierten sie die gemeinsame Verteilung von drei Zufallsvariablen: den Ruinzeitpunkt, den Überschuss gleich vor Ruin und das Defizit zum Ruinzeitpunkt, die tatsächlich eingebettet waren in der Gerber-Shiu-Funktion. Sie betrachteten die Zeit im Bezug auf Laplace-Transformation, die als Diskontierung interpretiert werden kann. Sie fanden die Gerber-Shiu-Funktion als Funktion des ursprünglichen Überschusses, die mit einer natürlichen probabilistischen Interpretation kompatibel war. Gerber-Shiu-Funktion ist nützlich bei der Behandlung des klassischen Problems in der Risikothorie. Zum Beispiel, wenn der Rabatt gleich Null und die Straffunktion konstant gleich eins ist, bekommt die Gerber-Shiu-Funktion eine Ruinwahrscheinlichkeit. Da die Straffunktion jede nichtnegative Funktion sein kann, Gerber-Shiu-Funktion ist bequem, um auf die reale Situation angewendet werden zu können, wie z.B. Option Preisgestaltung. Zusammengefasst, Gerber-Shiu-Funktion verallgemeinert ein besseres Verständnis der Ruinthorie. Im Kapitel 4. wird die Gerber-Shiu-Funktion für das klassische Risikomodell hergeleitet und es werden einige nützliche Ergebnisse diskutiert. Alle Ergebnisse und Beweise in diesem Kapitel finden Sie in der Literatur [9] und [8].

Im Kapitel 5 berechnen wir explizite Lösungen der Gerber-Shiu Funktion für unterschiedliche Straffunktionen. Im Fall, wenn die Straffunktion konstant eins ist, haben wir eine Ruinwahrscheinlichkeit. Wir betrachten auch den Fall wenn die Straffunktion von Defizit abhängt. Um explizite Ergebnisse zu bekommen benutzen wir die Technik der Laplace-Transformation für Gerber-Shiu Funktion. Wir benutzen MATLAB um unsere Ergebnisse zu veranschaulichen.

Mathematische Modellierung von realen Lebensproblemen führt zu funktionalen Gleichungen, z.B. teilweise Differentialgleichungen, Integral und Integro-Differential Gleichungen, stochastische Gleichungen und andere. Viele Mathematische Formulierungen von physikalischen Phänomenen enthalten Integro-Differentialgleichungen. Diese Gleichungen entstehen in der Fluidodynamik, biologischen Modellen und Chemikalien Kinetik. Integro-Differentialgleichungen sind meist schwierig analytisch zu lösen, sodaß es erforderlich ist, eine effiziente Näherungslösung zu erhalten. Mehrere numerische Methoden zur Approxi-

---

mation der Fredholm oder Volterra Integro-Differentialgleichungen sind bekannt, siehe [16]. In dieser Arbeit im Kapitel 6 stellen wir die Verwendung von Finite-Differenzen-Methode dar, um Integro-Differentialgleichungen (4.4) zu lösen. Wir leiten die Finite-Differenzen Methode her und mit Hilfe von MATLAB stellen wir die Ergebnisse graphisch dar.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wollen wir über Konvergenzverhalten sprechen. Wir wollen die Konvergenzordnung von verallgemeinerte Volterra Integro-Differentialgleichung bestimmen. Dazu beschreiben wir zwei Methoden. Eine ist Spline-Kollokationsmethode und die andere ist Implizite Runge-Kutta-Nyström Methode. Wir haben dann diese theoretische Aspekte auf unsere Integro-Differentialgleichung übersetzt und haben in Tabellen und Graphiken die Fehler für verschiedene Werte von  $p$  dargestellt und die Konvergenzordnung bestimmt.

In Anhang zum Schluss befinden sich einige stochastische Grundlagen, die wir für Entwicklung dieser Arbeit benötigen und auch die Grundlagen der Erneuerungstheorie.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Poisson-Prozesse und zusammengesetzte Poisson-Prozesse</b>	<b>1</b>
1.1	Poisson-Prozess . . . . .	1
1.2	Markov Eigenschaft . . . . .	3
1.3	Der zusammengesetzter Poisson-Prozes . . . . .	4
1.4	Light und Heavy-tailed-Verteilungen . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Einführung in die Risikotheorie</b>	<b>10</b>
2.1	Der Risikobegriff . . . . .	10
2.2	Kollektives und Individuelles Risikomodell . . . . .	11
2.3	Das klassische Risikomodell . . . . .	11
2.4	Eine wichtige Technik der Integraltransformation . . . . .	13
2.4.1	Laplace-Transformation . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Ruintheorie</b>	<b>15</b>
3.1	Ruinwahrscheinlichkeit . . . . .	15
3.2	Einige Funktionalgleichungen für $\psi(u)$ . . . . .	16
3.3	Der Anpassungskoeffizient . . . . .	17
3.4	Cramér-Lundberg Ungleichung . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Gerber-Shiu Risikotheorie</b>	<b>21</b>
4.1	Erwartete diskontierte Straffunktion . . . . .	21
4.2	Eine funktional Gleichung für die Gerber-Shiu Funktion . . . . .	24
4.2.1	Integro-Differentialgleichung . . . . .	24
4.2.2	Lundberg's Fundamentalgleichung und eine Integralgleichung . . . . .	25
4.3	Einige nützliche Ergebnisse . . . . .	27
4.3.1	Die Erneuerungsgleichung . . . . .	27
4.3.2	Laplace-Transformation für Gerber-Shiu Funktion . . . . .	28
4.3.3	Degeneration der Gerber-Shiu-Funktion . . . . .	30
4.4	Martingale . . . . .	31
4.5	Anwendung eines Maßwechsels . . . . .	34
4.5.1	Cramér-Lundberg Aproximation (Asymptotik ohne Maßwechsel) . . . . .	34
4.5.2	Maßwechsel im Cramér-Lundberg Modell . . . . .	35
4.5.3	Spezieller exponentieller Maßwechsel Modell . . . . .	38

4.5.4	Cramér-Lundberg Approximation . . . . .	40
4.5.5	Asymptotisches Verhalten für allgemeine stetige Straffunktionen . .	41
<b>5</b>	<b>Explizite Lösungen der Gerber Shiu Funktion</b>	<b>45</b>
5.1	Der erste Überschuss unter dem Anfangsniveau . . . . .	45
5.2	Explizite Lösung der Integro-Differential-Gleichung . . . . .	46
5.2.1	Illustrative Beispiele . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Numerische Approximation von Gerber-Shiu Funktion</b>	<b>56</b>
6.1	Finite Differenzen Methode für Integro-Differentialgleichung . . . . .	56
6.2	Numerische Approximation der Integro-Differentialgleichung für die Gamma-Verteilungsfunktion . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Konvergenzverhalten</b>	<b>70</b>
7.1	Die numerische Behandlung von Anfangswertproblemen für verallgemeinerte Volterra Integro-Differentialgleichungen . . . . .	70
7.1.1	Spline-Kollokationsmethoden . . . . .	71
7.1.2	Implizite Runge-Kutta-Nyström-Typ Methode . . . . .	77
7.2	Fehlerabschätzung . . . . .	79
<b>A</b>		<b>87</b>
A.1	Grundlagen der Stochastik . . . . .	87
A.2	Faltung . . . . .	90
<b>B</b>		<b>92</b>
B.1	Erneuerungstheorie . . . . .	92

# Kapitel 1

## Poisson-Prozesse und zusammengesetzte Poisson-Prozesse

### 1.1 Poisson-Prozess

Der Poisson Prozess ist ein wichtiger stochastischer Prozess. Er ermittelt die Häufigkeit bestimmter Zufallsereignissen in einem bestimmten Zeitintervall, wobei  $N(t)$  die Anzahl von Ereignissen im Zeitintervall  $[0, t]$  ist.

**Definition 1.1.1 (Zählprozess)** [6]

Ein stochastischer Prozess  $N = \{N(t)\}_{t \geq 0}$  mit Zeitraum  $T = \mathbb{N}_0$  heißt ein Zählprozess, wenn er die Werten in  $\mathbb{N}$  hat und folgende Eigenschaft erfüllt

$$N(s) \leq N(t) \text{ f.s., für alle } 0 \leq s \leq t < \infty.$$

**Definition 1.1.2 (Poissonprozess)** [15]

Ein stochastischer Zählprozess  $\{N(t) : t \geq 0\}$  über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  heißt Poissonprozess, wenn die folgende Bedingungen gelten:

1.  $N(0) = 0$  ;
2. Der Prozess hat unabhängige Zuwächse: für alle  $t_i, i = 0, \dots, n$  und  $n \geq 0$ , so dass  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , die Zuwächse  $N(t_i) - N(t_{i-1}), 1 \leq i \leq n$  unabhängig sind;
3. Es existiert eine nicht monoton fallende rechtsstetige Funktion  $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\mu(0) = 0$ , so dass die Zuwächse  $N(t) - N(s) \sim Poi(\mu(t) - \mu(s)), (0 \leq s < t < \infty)$  Poisson verteilt sind.  $\mu$  nennt man der Mittelwert Funktion von  $N$ ;
4. Mit Wahrscheinlichkeit 1 sind die Pfade  $\{N(t, \omega)\}_{t \geq 0}$  vom Prozess  $N(t)$  rechtsstetig für  $t \geq 0$  und haben linkseitigen Grenzwert für  $t > 0$ . Man sagt, dass  $N(t)$  càdlàg Pfade hat.

## KAPITEL 1. POISSON-PROZESSE UND ZUSAMMENGESETZTE POISSON-PROZESSE

---

Der Spezialfall des Poisson-Prozesses entspricht dem Fall, daß  $\mu$  eine lineare Mittelwertfunktion ist:

$$\mu(t) = \lambda t, \quad t \geq 0$$

für  $\lambda > 0$ . Der Parameter  $\lambda$  ist Intensität oder Rate des homogenen Poisson-Prozesses. Der Parameter  $\lambda$  entspricht dabei der "mittleren Anzahl" von zufälligen Ereignissen im Intervall  $[0, 1]$ . Falls  $\lambda = 1$ ,  $N(t)$  ist dann ein standard homogener Poisson-Prozess.

Allgemeiner,  $N(t)$  hat eine Intensitäts Funktion oder Preis Funktion  $\lambda$  wenn,  $\mu$  absolut stetig ist. D.h. für alle  $s < t$  der Zuwachs  $\mu(t) - \mu(s)$  hat die folgende Darstellung:

$$\mu(s, t) = \mu(t) - \mu(s) = \int_s^t \lambda(y) dy, \quad s < t,$$

für eine nicht negative meßbare Funktion  $\lambda$ . Eine Konsequenz davon ist, daß  $\mu$  eine stetige Funktion ist, siehe [15].

### **Bemerkung:** [15]

Ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$  hat folgende Eigenschaften:

1. càdlàg Pfade;
2. beginnt bei 0;
3. hat unabhängige und stationäre Zuwächse;
4.  $N(t)$  ist  $Poi(\lambda t)$  verteilt für alle  $t > 0$ .

Eine sonder Klasse vom Poisson-Prozesse sind sogenannte Erneuerungsprozesse, die große Anwendung in der Risikotheorie haben.

### **Definition 1.1.3 (Erneuerungsprozess)** [6]

Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen,  $T_n = \sum_{i=0}^n X_i$ , wobei  $X_0 = 0$  und  $N(t) = \max\{n \geq 0 \mid T_n \leq t\}$ ,  $\forall t \geq 0$ . Dann heißt jeder der drei stochastischen Prozesse  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  und der Zählprozess  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  *Erneuerungsprozess*.

### **Definition 1.1.4 (Lévy-Prozess)** [13, Vgl. Definition 1.1 S. 2]

Ein *Lévy-Prozess* ist ein stochastischer Prozess  $\{X(t), t \geq 0\}$  mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathcal{P}$  wenn gilt:

1. Die Pfade von  $X$  sind  $\mathcal{P}$ - fast sicher rechtsstetig mit linksseitigen Grenzwert.
2.  $\mathcal{P}(X_0 = 0) = 1$
3.  $X(t) - X(s)$  hat die gleiche Verteilung wie  $X(t - s)$  für  $0 \leq s \leq t$  (*stationäre Zuwächse*).

4. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq s_n \leq t_n < \infty$  die Zuwächse  $X(t_i) - X(s_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  sind unabhängig (*unabhängige Zuwächse*).

Wichtige Beispiele für Lévy-Prozesse sind die Brownsche Bewegung, der Poisson-Prozess und der zusammengesetzte Poisson-Prozess.

## 1.2 Markov Eigenschaft

**Definition 1.2.1 (Markov Prozess)** [10]

Sei  $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$  ein stochastischer Prozess mit Werten in  $S \subseteq \mathbb{R}$ . Dann heißt  $X(t)$  ein Markov Prozess, wenn für alle  $s, t \geq 0$  und  $B \in \mathcal{B}(S)$  gilt:

$$\mathcal{P}(X(t) \in B \mid \mathcal{F}_s^X) = \mathcal{P}(X(t) \in B \mid X(s)) \quad \mathcal{P} - f.s.$$

wobei  $\mathcal{F}_s^X = \sigma\{X(u) \mid 0 \leq u \leq s\}$  und  $\mathcal{B}(S)$  Borel algebra von  $S$  ist.

Das heißt, um zukünftige Ereignisse vorherzusagen, braucht man nur das Wissen über den aktuellen Zustand, nicht über die Vergangenheit. Wichtige Beispiele für Markov Prozess sind der Poisson-Prozess, klassischer Risikoprozess, Brownsche Bewegung, Lévy Prozess, zusammengesetzter Poisson-Prozess.

**Definition 1.2.2** [10] Markov Prozess heißt homogen, wenn

$$\mathcal{P}(X(t) \in B \mid X(s) = x) = \mathcal{P}(X(t-s) \in B \mid X(0) = x) \quad \mathcal{P} - f.s$$

**Folgerung 1.2.1 (Markov Eigenschaft für die Poisson-Prozesse)** [15]

Poisson-Prozesse bilden eine besondere Klasse von Markov-Prozesse am Intervall  $[0, \infty)$  mit Zustandsraum  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ . Dies ist eine einfache Folgerung von unabhängigen Zuwächse. Es gilt für alle  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  und für die nicht negative natürliche Zahlen  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 2$  folgende Markov Eigenschaft

$$\mathcal{P}(N(t_n) = k_n \mid N(t_1) = k_1, \dots, N(t_{n-1}) = k_{n-1}) = \mathcal{P}(N(t_n) = k_n \mid N(t_{n-1}) = k_{n-1}).$$

Wir definieren weiter die Übergangswahrscheinlichkeit der Markov-Prozess  $X_t$ :

$$p_{k,k+h}(s, t) = \mathcal{P}(X(t) = k + h \mid X(s) = k) = \mathcal{P}(X(t) - X(s) = h),$$

$$0 \leq s < t, \quad h, k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind eng mit den Intensitäten verbunden, die werden als die folgende Grenzwerten gegeben:

$$\lambda_{k,k+h}(t) = \lim_{s \downarrow 0} \frac{p_{k,k+h}(t, t+s)}{s}.$$

Aus der Theorie der stochastischen Prozesse wissen wir, daß die Intensitäten und die initial Verteilung eines Markov-Prozesses, die Verteilung dieses Markov-Prozesses bestimmen. [15]

**Proposition 1.2.1** (Zusammenhang zwischen den Intensitäten von dem Poisson und -Markov-Prozess) [15]

Betrachtet wird ein Poisson-Prozess  $N = \{N(t)\}_{t \geq 0}$  mit stetige Intensitäts Funktion  $\lambda$  auf  $[0, \infty)$ . Dann gilt für alle  $k \geq 0$ ,

$$\lambda_{k,k+h}(t) = \begin{cases} \lambda(t) & \text{falls } h = 1, \\ 0 & \text{falls } h > 0 \end{cases} .$$

### 1.3 Der zusammengesetzter Poisson-Prozes

Zunächst wollen wir definieren, was man unter einem Schadensverlauf im Sinne einer stetigen Bertachtungsperiode versteht.

**Definition 1.3.1** (Schadensverlauf) [19]

Ein Shadensverlauf ist eine Folge von Zufallsvariablen  $(T_n, X_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  mit

$$T_0 = 0, \quad T_n < T_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \mathcal{P} - f.s.$$

und

$$X_0 = 0, \quad X_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \mathcal{P} - f.s.$$

Diese Definition hat die folgende Interpretation: Es wird zuerst ein vorgegebenes Risiko zum Zeitpunkt  $T_0 = 0$  betrachtet.  $T_n$  ist der Zeitpunkt des  $n$ -ten Schadenfalles und  $X_n$  ist die Schadenhöhe dieses Schadenfalles für  $n = 1, 2, \dots$  [19]

Zu einem Schadensverlauf wird der zugehörige Zählprozess  $N(t)$ ,  $t \geq 0$ , definiert durch

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

$N(t)$  ist konstant in Zeitintervall  $[T_n, T_{n+1})$ .

$$N(t) = n, \quad t \in [T_n, T_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t \leq 0.$$

Wir bezeichnen mit  $S(t)$  den zugehörigen Schadensprozess, der folgendermaßen gegeben ist.

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0.$$

Für  $N(t) = 0$  setzen wir  $S(t) = 0$ .

KAPITEL 1. POISSON-PROZESSE UND ZUSAMMENGESetzte  
 POISSON-PROZESSE

---

Der Prozess  $N(t)$  bezeichnet die Anzahl der Schäden, die in dem festgelegten Zeitintervall  $[0, t]$  eingetreten sind und  $S(t)$  ist die Gesamtschadenhöhe bis zum Zeitpunkt  $t$ .

Schließlich definieren wir noch die Wartezeiten  $W_n$  zwischen dem  $n - 1$ -ten und  $n$ -ten Schaden durch

$$W_n = T_n - T_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wir haben noch folgende Voraussetzungen:

- (i)  $X_1, X_2, \dots$  sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit Verteilung  $F_X$ ;
- (ii)  $X_1, X_2, \dots$  und  $T_1, T_2, \dots$  sind stochastisch unabhängig.

Dann erhalten wir, daß  $X_1, X_2, \dots$  und  $N(t)$  stochastisch unabhängig sind und die Verteilung des Schadens bis zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  ergibt sich wie folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S(t) \in A) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}(S(t) \in A, N(t) = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_i \in A) \mathcal{P}(N_t = i) = \sum_{i=0}^{\infty} p_t(i) F^{*i}(A), \end{aligned}$$

wobei

$$p_t(i) = \mathcal{P}(N(t) = i), \quad i = 0, 1, \dots, \quad t \geq 0.$$

Eine wichtige Klasse von Schadenprozessen  $S(t)$ ,  $t \geq 0$  ist die Klasse zusammengesetzten Poisson-Prozesse auch Poissonsche Summen Prozesse genannt. Diese Klasse von Prozessen erhält man durch die Annahme, dass die Wartezeiten  $W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  unabhängig identisch verteilt sind nach einer Exponentialverteilung mit Mittelwert  $1/\lambda > 0$ .

**Satz 1.3.1 (Verteilung der Wartezeiten)** [6]

Sei  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda > 0$  und mit den Wartezeiten  $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann sind  $W_1, W_2, \dots$  unabhängig und Exponential ( $\lambda$ )-verteilte Zufallsvariablen.

**Beweis:** Es seien  $t, t_1 > 0$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(W_1 > t) &= \mathcal{P}(W_t = 0) = e^{-\lambda t} \text{ und} \\ \mathcal{P}(W_2 > t \mid W_1 = t_1) &= \mathcal{P}(N(t_1 + t) - N(t_1) = 0 \mid N(t_1) = 1) \\ &= \mathcal{P}(N(t_1 + t) - N(t_1) = 0) = \mathcal{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Somit ist  $W_2$  unabhängig von  $W_1$  und gleichverteilt. Allgemein gilt für ein  $n \geq 0$  und  $t, w_1, w_2, \dots, w_n > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(W_{n+1} > t \mid W_1 = w_1, \dots, W_n = w_n) &= \mathcal{P}(N(t_n + t) - N(t_n) = 0 \mid N(t_n) = n) \\ &= \mathcal{P}(N(t_n + t) - N(t_n) = 0) \\ &= \mathcal{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

## KAPITEL 1. POISSON-PROZESSE UND ZUSAMMENGESetzte POISSON-PROZESSE

---

wobei  $t_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ .

**Definition 1.3.2 (zusammengesetzter Poisson-Prozess)** [6]

Ein zusammengesetzte Poisson-Prozess  $S$  ist dann definiert durch

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

wobei  $X_i, i = 1, \dots, N(t)$  i.i.d verteilte Zufallsvariablen sind, die auch unabhängig von  $N_t = \{N(t) \mid t \geq 0\}$  sind.

Ein zusammengesetzte Poisson-Prozess besitzt unabhängige und stationäre Zuwächse.

**Bemerkung:** [6]

In dem Wahrscheinlichkeitssinne kann ein Prozess mit stationären und unabhängigen Zuwächsen in jedem Zeitpunkt als "Erneuerung" betrachtet werden. Da die Exponentialverteilung die "Gedächtnislosigkeit" Eigenschaft besitzt, dann gilt die "Erneuerung" für die zusammengesetzten Poisson-Prozesse.

Der entsprechende zusammengesetzte Poisson-Prozess hängt von beiden Parametern, der Intensität  $\lambda > 0$  und Schadenhöhenverteilung  $F_X$  ab. Es gilt für  $t \geq 0$  und  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad (1.1)$$

wobei der Zählprozess  $N_t, t \geq 0$  ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda > 0$  ist.  $N(t)$  ist homogen, da  $\lambda$  von  $t$  unabhängig ist.

**Beweis:**

Wegen

$$N(t) = k \iff W_1 + \dots + W_k \leq t \text{ und } W_1 + \dots + W_{k+1} > t$$

gilt

$$\mathcal{P}(N(t) = k) = \mathcal{P}(W_1 + \dots + W_k \leq t) - \mathcal{P}(W_1 + \dots + W_{k+1} \leq t).$$

Die Verteilung von  $W_1 + \dots + W_n$  hat die Dichte

$$x \longrightarrow \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

und damit wird

$$\mathcal{P}(N(t) = k) = \int_0^t \left( \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{\lambda^{k+1} x^k}{k!} \right) e^{-\lambda x} dx = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

**Korollar 1.3.1** [17] Sei  $\{S(t)\}$  ein zusammengesetzten Poisson-Prozess mit Charakteristik  $(\lambda, F_X)$ . Dann gilt

(a) Der Prozess  $\{S(t)\}$  hat stationäre und unabhängige Zuwächse,

(b) die momenten erzeugende Funktion von  $S(t)$  ist gegeben durch

$$M_{S(t)}(s) = e^{\lambda t(M_X(s)-1)}, \quad (1.2)$$

und der Mittelwert und Varianz

$$\mathbb{E}[S(t)] = \lambda t f_1 \quad \text{Var}(S(t)) = \lambda t f_2. \quad (1.3)$$

## 1.4 Light und Heavy-tailed-Verteilungen

Die Forderung an die Versicherungsgesellschaft kann durch diskrete und stetige Zufallsvariablen beschrieben werden. Im Fall von stetig verteilten ist das Grundprinzip ein adäquates Modell zu finden für die Anspruchsbetrag. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden in zwei Familien getrennt: *light tailed* und *heavy-tailed*-Verteilungen. Die Exponentialverteilung ist eins davon, siehe [4].

**Definition 1.4.1** [4] Die Verteilung  $F_X$  heißt *light-tailed*, wenn für  $\lambda > 0$  gilt

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty.$$

Für light-tailed-Verteilungen gibt es Konstanten  $a > 0$  und  $\lambda > 0$ , sodaß  $\bar{F}_X(x) \leq a e^{-\lambda x}$  gilt und für  $s > 0$  gilt auch  $M_X(s) < \infty$ .

Weiters werden untersucht die Klassen von Verteilungen von nicht negativen Zufallsvariablen, sodaß  $\hat{m}(s) = \infty$  für alle  $s > 0$ . Wir nennen sie *heavy-tailed-Verteilungen*. Bekannte Beispiele von heavy-tailed-Verteilungen sind lognormal, Pareto und Weibull-Verteilungen, siehe [17].

**Definition 1.4.2** [4] Wenn für alle  $\lambda > 0$ ,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{e^{-\lambda x}} > 0.$$

die Verteilung  $F_X$  hat *heavy-tailed*-Verteilung.

Für heavy-tailed-Verteilungen gibt es Konstanten  $a > 0$  und  $\lambda > 0$ , so dass  $\bar{F}_X(x) > a e^{-\lambda x}$  gilt und für  $s > 0$  gilt auch  $M_X(s) = \infty$ , siehe [4].

**Definition 1.4.3** [17] Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable. Definiere  $r_n = P(X \geq n) = p_n + p_{n+1} + \dots$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sodaß  $r_n > 0$ ,

$$m_n = P(X = n \mid X \geq n) = \frac{p_n}{r_n}.$$

## KAPITEL 1. POISSON-PROZESSE UND ZUSAMMENGESETZTE POISSON-PROZESSE

---

Die Quotient  $m_n$  heißt Hazard-Rate von  $\{p_k\}$  in  $n$ -ten Periode. Die Funktion  $m_n$  kann als bedingte Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, sodaß ein Individuum in  $n - 1$  Jahren überlebt und in  $n$ -ten Jahr stirbt.

**Definition 1.4.4** [4] Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit stetige Dichte Funktion  $f$  und stetigen Verteilungsfunktion  $F_X$ . Sei weiters  $M_X(x) = \int_0^x \frac{f_X(s)}{F_X(s)} ds$ . Weil es  $m_n = -\frac{d}{dx} \bar{F}_X(x) / \bar{F}_X(x)$  gilt, folgt daraus, daß  $M_X(x) = -\log \bar{F}_X(x)$  gilt. Daraus folgt die folgende Konsequenz

$$\bar{F}_X(x) = \exp\left(-\int_0^x m_X(s) ds\right) = \exp(-M_X(x)).$$

Die Funktion

$$M_X(x) = \int_0^x m(s) ds$$

heißt *Hazard-Funktion*.

Sei  $\alpha_F = \sup_{x \rightarrow \infty} M_X(x)/x$ , wobei  $M_X(x) = -\log \bar{F}_X(x)$  Hazard-Funktion von  $F_X$  ist. Diese Terminologie wird durch die folgende Tatsache motiviert: wenn  $F_X$  stetige Dichte hat, dann ist  $M_X(x)$  differenzierbar und es gilt  $dM_X(X)/dx = m_X(x)$ , wobei  $m_X(x)$  Hazard-Rate-Funktion ist. Wir betrachten die Verteilungen auf  $\mathbb{R}^+$  mit  $F_X(0-) = 0$ , siehe [17]

**Satz 1.4.1** [17] Wenn  $\alpha_F = 0$ , dann ist  $F_X$  *heavy-tailed*.

**Beweis:** Sei  $\alpha_F = 0$ , dann ist auch  $\sup_{x \rightarrow \infty} M_X(x)/x = 0$ . Wähle  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $x' > 0$ , sodaß  $M_X(x) \leq \varepsilon x$  für alle  $x \geq x'$ . Daher wird für einige  $c > 0$ ,  $\bar{F}_X(x) \geq ce^{-\varepsilon x}$  und für alle  $x \geq 0$  gelten

$$\int_0^\infty e^{sx} \bar{F}_X(x) dx \quad \forall s \geq \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, diese Gleichung gilt für alle  $s > 0$ , was bedeutet, daß  $F_X$  *heavy-tailed* ist.  $\square$

**Bemerkung.** Für *heavy-tailed*-Verteilung  $F_X$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \bar{F}_X(x) = \infty$$

für alle  $s > 0$ .

Die nützlichsten *light-tailed* und *heavy-tailed*-Verteilungen sind in folgenden Tabellen gegeben:

KAPITEL 1. POISSON-PROZESSE UND ZUSAMMENGESETZTE  
POISSON-PROZESSE

---

*Light-tailed-Verteilungen* (siehe [4])

Name	Parameter	Dichte
Exponential	$\lambda > 0$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
Gamma	$\alpha > 0, \beta > 0$	$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\alpha} e^{-\beta x}$
Weibull	$\beta > 0, \tau \geq 0$	$f_X(x) = \beta \tau x^{\tau-1} e^{-\beta x^\tau}$
Hyperexponential	$\lambda_i > 0, \sum_{i=1}^n p_i$	$f_X(x) = \sum_{i=1}^n p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}$

*Heavy-tailed-Verteilungen* (siehe [4])

Name	Parameter	Dichte
Weibull	$\beta > 0, 0 < \tau < 1$	$f_X(x) = \beta \tau x^{\tau-1} e^{-\beta x^\tau}$
Lognormal	$\mu > 0, \sigma > 0$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
Loggamma	$\alpha > 0, \beta > 0$	$f_X(x) = \beta^\alpha \frac{(\ln x)^{\alpha-1}}{x^{\beta+1} \Gamma(\alpha)}$
Pareto	$\alpha > 0, \lambda > 0$	$f_X(x) = \frac{\alpha}{\lambda+x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$
Burr	$\alpha > 0, \lambda > 0, \tau > 0$	$f_X(x) = \frac{\alpha \tau \lambda^\alpha x^{\tau-1}}{(\lambda+x^\tau)^{\alpha+1}}$

# Kapitel 2

## Einführung in die Risikotheorie

### 2.1 Der Risikobegriff

Es existieren verschiedene Risikobegriffe. Für uns ist das Risiko aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht von Interesse. Ein Risiko derart ist das Ergebnis eines Zufallsexperiments, bzw. eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Als mögliche Ergebnisse sind hier Geldbeträge (nicht-negative reelle Zahlen). Das Ergebnis eines Zufallsexperimentes ist vor Ausführung unbekannt d.h. wir wissen nicht welches Ergebnis eintritt. Aus diesem Grund ist der Betrachtungszeitpunkt von entscheidender Bedeutung. Es gibt auch unterschiedliche Risikoarten. Bei der zufälligen Ausprägung von Anzahl und Höhe des eingetretenen Schadens trotz Vorliegen vollständiger Information sprechen wir von einem *Zufallsrisiko*. Andererseits bezeichnen wir die systematische Abweichung in Anzahl und Höhe des Schadens wegen unvollständiger Information über die wahre Schadenverteilung als *Irrtumsrisiko*. Gesucht ist daher eine vernünftige Handlungsmethode, um das aus Zufalls- und Irrtumsrisiko resultierende Gesamtrisiko zu verringern. Das Irrtumsrisiko läßt sich durch die Anwendung statistischer Verfahren verkleinern und daher ist es leichter zu beeinflussen als das Zufallsrisiko. Deswegen ist in der Versicherungspraxis folgende Devise bekannt:

” Ersetze, wo immer möglich, das *Zufallsrisiko* durch das *Irrtumsrisiko* ” ( siehe [11])

Das Zufallsrisiko wird durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben. Wir können damit beschließen, daß die Schäden in einem Versicherungsvertrag gleich wie Ergebnisse in einem Zufallsexperiment entstehen. Die klassische Beispiele für das Zufallsexperiment sind Münzwurf und Roulettespiel.

Stochastische Modelle sind besonders wichtig im Zusammenhang mit der Modellierung des Risikos als Zufallsexperiment. Diese Modelle beschreiben die Situationen, in denen wir nicht im Voraus vorstellen können, was in der Zukunft passiert. Im weiteren Teil dieser Diplomarbeit beschäftigen wir uns mit Zufallsrisiko. Es gibt auch noch andere Risikoarten wie z.B. Änderungsrisiko, Großschadenrisiko und Kumulrisiko.

Es ist weiter die Frage welche Rolle spielt das Risiko in Versicherungsunternehmen? Die

Ungewißheit der Schäden bezüglich Eintrittszeitpunkt, Anzahl und ihre Höhe ist die Existenzgrundlage der Versicherung. Durch mathematische Modellbildung wird das Risiko besonders Betrachtet und besser kontrollierbar gemacht. Daher spielt die Mathematik bei der Versicherungsschutz eine wichtige Rolle (siehe [11]).

## 2.2 Kollektives und Individuelles Risikomodell

In der Risikothorie zu unterscheiden sind zwei Risikomodelle: das *individuelle* Risikomodell und das *kollektive* Risikomodell.

- **Individuelles Modell:** Das individuelle Modell versucht, den Jahresgesamtschaden von Einzelrisiken zu modellieren und dann durch Faltung zu einem Modell für den Jahresgesamtschaden von Risikogruppen zu kommen. Das Individuelle Modell kann sinnvoll nur in weitgehend homogenen Risikogruppen angewendet werden, da die Verteilung von Einzelrisiken in der Schadenversicherung praktisch unbekannt ist. Dieses Modell ist insbesondere dann relevant, wenn man die Erwartungswerte der Gesamtschäden mehrerer Risikogruppen gleichzeitig modellieren möchte (siehe [14]).

- **Kollektives Modell:** Das kollektive Modell modelliert den Gesamtschaden einer Risikogruppe ausgehend von einem Modell für die Schadenzahl und einem Modell für die Schadenhöhe pro Schadenfall, wobei nicht auf die Einzelrisikoebene zurückgegriffen werden muss. Damit lässt sich Gesamtschadenverteilung mehr realistisch modellieren. Dadurch kann man die Fragen wie z.B. nach der Wahrscheinlichkeit von beliebig hohen Jahresverlusten beantworten. Das kollektive Modell behandelt also unmittelbar eine praxisrelevante Fragestellung, während das individuelle Modell nur mittelbar als Teilmodell anderer Modelle Verwendung findet (siehe [14]).

Das individuelle Modell wird in der Regel in einer Form dargestellt, die für die Lebensversicherungsmathematik geeignet ist (wo es auch entstanden ist), die aber in der Schadenversicherung meist keinen rechten Sinn macht, weil die erforderlichen Daten fehlen (siehe [14]). Daher wird in der Folge nur das kollektive Modell betrachtet und analysiert.

## 2.3 Das klassische Risikomodell

Es gibt viele Gründe, den Risikoprozess zu studieren. Dieser Prozess kann eine Beschreibung geben über die Risikohöhe des Portfolios. Ein Maß für die Gefährlichkeit des Risikos ist die Ruinwahrscheinlichkeit. Die Kenntnisse über den Risiko Prozess können uns helfen die folgenden Fragen zu beantworten:

- Wie groß den Sicherheitszuschlag brauchen wir, um die Prämie zu kalkulieren?
- Welches Maß an Reserven brauchen wir?

- Welches Maß an Dividenden können wir bezahlen?
- Welche Art von Selbstbehalte sollten wir haben?
- Wie sollen wir rückversichern?

Wir haben gerade im Kapitel 1 gesehen, daß das zusammengesetzte Poisson-Prozess wertvolle Eigenschaften hat und damit auch eine große Anwendung in der Risikotheorie. Es kann beispielsweise als Grenzwert von individuellen Modellen hergeleitet werden, was auch der Grund war, daß ein Risikomodell in stetiger Zeit postuliert wird. In dem Fall, besitzt der Gesamtschadenprozess in jedem Zeitintervall eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung. Weiters muss auch das Prämieeinkommen modelliert werden. Da die Prämienzahlungen über das ganze Jahr aufgeteilt sind, wird es angenommen, daß das Prämieeinkommen stetig über die Zeit erfolgt und für jedes Zeitintervall proportional zur Intervalllänge ist. Das führt zum Modell, das durch folgende Dynamik gegeben ist:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Hierbei ist  $U(t)$  der Überschuss oder freie Reserve eines Versicherungsportfolios zur Zeit  $t$ ,  $u$  das Anfangskapital zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $c$  die Höhe der Prämie. Die Anzahl der Schäden in  $(0, t]$  ist ein Poisson-Prozess  $N(t)$  mit Parameter  $\lambda$ . Die Einzelschaden  $X_i$  sind eine Folge unabhängiger und identisch verteilter positiver Zufallsvariablen und unabhängig von  $N(t)$ . Dieses Modell wird Cramér-Lundberg Modell oder Klassisches Risikomodell genannt (siehe [1]).

Im weiteren wollen wir der Überschuss  $U(t)$  etwas präziser definieren. In dem klassischen Risiko-Prozess wird die Höhe des Überschusses eines Versicherers zu einem festgelegten Zeitpunkt  $t > 0$  durch drei Faktoren festgelegt:

1. Die Höhe des Startvermögens
2. Die Höhe der Prämieeinnahmen bis zum Zeitpunkt  $t$
3. Die Höhe der Schadenszahlungen bis zum Zeitpunkt  $t$

**Definition 2.3.1 (Überschuss)** [9]

Der Überschuss zum Zeitpunkt  $t$  wird mit  $U(t)$  bezeichnet und ist folgendermaßen definiert:

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

wobei  $u$  die Höhe des Startvermögens,  $c$  die Höhe der Prämie pro Zeiteinheit und  $S(t)$  Gesamtschadenhöhe bis zum Zeitpunkt  $t$ .

Von Bedeutung sind auch die folgende Annahmen:

1. Die Verteilungsfunktion von  $X_1$  ist  $F_X$  mit  $F_X(0) = 0$ .
2.  $X_i > 0$  für alle  $i$ .
3.  $X$  ist stetig verteilt mit Dichte  $f_X$ .
4.  $f_k$  ist der  $k$ -ten Moment von  $X_i$ , mit  $f_1 = \mathbb{E}[X_1] < \infty$ .
5.  $M_X$  ist die momentenerzeugende Funktion von  $X_1$ . Falls diese für  $v > 0$  existiert, dann gibt es ein  $0 < \gamma \leq \infty$ , sodaß (für alle  $v < \gamma$  und  $\lim_{v \rightarrow \gamma^-} M_X(v) = \infty$ ),  $M_X(v) < \infty$ .

**Bemerkungen:** [1]

- In der Praxis tritt Ruin so gut wie nie auf. Wenn ein Versicherungsunternehmen merkt, daß ihr Überschuss stark abnimmt, wird es die Prämien erhöhen. Andererseits ist ein Versicherungsunternehmen aber aufs verschiedenen Portfolios aufgebaut. Ruin in einem Portfolio bedeutet deshalb noch nicht, daß das Unternehmen bankrott ist. D.h, Ruin ist also nur ein technischer Teminus.

- Der Begriff des Überschusses ist in der Praxis auch nur ein technischer Ausdruck. Wenn die Geschäfte gut gehen, werden die Aktionäre höhere Dividenden ausschütten lassen. Um auch dies zu modellieren, müssten wir eine Prämienrate wählen, die von der Höhe der freien Reserve abhängt. In diesem Fall ist es aber sehr schwierig, brauchbare Ergebnisse zu verarbeiten.

## 2.4 Eine wichtige Technik der Integraltransformation

### 2.4.1 Laplace-Transformation

**Definition 2.4.1.1 (Laplace-Transformation)** [4, 13]

Sei  $\{X(t)\}$  ein stochastischer Prozess. Für alle  $\theta \geq 0$  und  $t \geq 0$  die Funktion

$$LT_{X_t}(\theta) = \mathbb{E}(e^{-\theta X_t}) = \int_0^{\infty} e^{-\theta x} dF_{X_t}(x), \quad (2.1)$$

falls sie existiert, heißt *Laplace-Transformation* (LT) des Prozesses  $\{X(t)\}$ .

Laplace-Transformation ist für komplexe Werte von  $\theta$  mit positiven Realteil definiert. Für uns ist hinreichend, daß  $\theta \in \mathbb{R}$  ist [4].

**Bemmerkung.** [4]

LT (2.1) von Zufallsvariablen heißt auch *Laplace-Stiltjes-Transformation (LST)* von der Verteilungsfunktion  $F_{X_t}(x)$  und ist auch LT von der Dichtefunktion  $f_{X_t}(x)$ , falls sie existiert .

**Lemma 2.4.1.1** [ [13, Vgl. Lemma 2.1 S. 9]

Für alle  $\theta \geq 0$  und  $t \geq 0$  gilt

$$\mathbb{E}(e^{\theta X(t)}) = \exp\{\varphi(\theta)t\},$$

wobei  $\varphi$  Laplace-Exponent ist und folgende Gleichung genügt

$$\varphi(\theta) = c\theta - \lambda \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\theta x}) F_X(dx).$$

**Beweis:**

Da  $X(t)$  ein Lévy Prozess ist, genügt es zu zeigen, daß für  $\theta, t \geq 0$

$$\mathbb{E}(e^{-\theta \sum_{i=1}^{N(t)} X_i}) = \exp\left\{ -\lambda t \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\theta x}) F_X(dx) \right\}$$

gilt.

Aufgrund der Tatsache, dass  $N(t)$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist mit dem Parameter  $\lambda t$  und  $N(t)$  von  $\{X_i : i \geq 0\}$  unabhängig ist, es gilt weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\theta \sum_{i=1}^{N(t)} X_i}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{-\theta \sum_{i=1}^n X_i}) e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{E}(e^{-\theta X_1})]^n e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \exp\left\{ -\lambda t (1 - \mathbb{E}(e^{-\theta X_1})) \right\} \\ &= \exp\left\{ -\lambda t \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\theta x}) F_X(dx) \right\} \end{aligned}$$

für alle  $\theta, t \geq 0$ .  $\square$

# Kapitel 3

## Ruintheorie

### 3.1 Ruinwahrscheinlichkeit

Die Hauptrolle der mathematischen Modellierung im Versicherungsbestand ist Risikokontrolle. Diese läßt sich durch folgende vier Schritte erzielen, siehe [11]:

- Modellbildung
- Modellidentifikation (Festlegung von verschiedenen Größen wie z.B. Verteilungsfunktionen)
- Berechnung von kritischen Wahrscheinlichkeiten (wie z.B. Ruinwahrscheinlichkeit und dazugehörige Größen bzw. Risikomaßen)
- Beeinflussung dieser Resultate durch Risk-Management-Maßnahmen, siehe [11].

**Definition 3.1.1 (Ruinzeit)** [9]

Sei  $t \in (0, \infty]$ . Die Ruinzeit  $T$  ist folgendermaßen definiert:

$$T = \inf\{t \mid U(t) < 0\}, \quad 0 < T \leq \infty.$$

Falls  $T = \infty$  tritt kein Ruin auf.

**Definition 3.1.2 (Ruinwahrscheinlichkeit)** [9]

Es sei  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  der Überschussprozess. Dann kann man definieren:

a) Die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit:

$$\psi(u, \tau) = P(U(t) < 0 \mid t < \tau), \quad 0 < \tau < \infty, \quad U(0) = u \geq 0. \quad (3.1)$$

b) Die Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit:

$$\psi(u) = \psi(u, \infty), \quad u \geq 0$$

### 3.2 Einige Funktionalgleichungen für $\psi(u)$

Wir wollen hier einige Gleichungen für die Ruinwahrscheinlichkeit ableiten, indem wir die Funktion des initialen Überschusses betrachten. Explizite Ausdrücke für  $\psi(u)$  erhalten wir, unter Annahme, daß  $F_X$  die Exponential oder eine Mischung von Exponential Verteilungen besitzt.

Wenn man die Zeit  $t$  und die Menge  $x$  des ersten Momentes betrachtet, und wenn  $c > \lambda f_1$ , mit  $f_1 = \mathbb{E}[X_1]$  aus der **Definition 2.3.1** gilt, dann wird die Gesamtwahrscheinlichkeit durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\psi(u) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \psi(u + ct - x) dF_X(x) dt,$$

unter Annahme, daß

$$\psi(u) = 1, \text{ für } u < 0 \text{ und } \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0.$$

Durch die Änderung der Variablen  $s = u + ct$ ,  $ds = c dt$ , bekommen wir die folgende Gleichung

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^{\infty} e^{-(\lambda/c)(s-u)} \int_0^{\infty} \psi(s - x) dF_X(x) ds.$$

Nimmt man die erste Ableitung, erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \psi'(u) &= \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \psi(u - x) dF_X(x) \\ &= \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u - x) dF_X(x) - \frac{\lambda}{c} [1 - F_X(u)] \quad (*), \end{aligned}$$

die für  $u > 0$  gilt. Bei  $u = 0$  hat die Funktion  $\psi$  eine Unstetigkeit. Wenn man die letzte Gleichung von 0 bis  $t$  über  $u$  integriert, erhält man eine neue Gleichung. Um die neue Gleichung in Endform zu bringen, ändert man die Reihenfolge der Integration und integriert man dann jeden Teil.

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^u \psi(u - x) dF_X(x) du &= \int_0^t \int_x^t \psi(u - x) du dF_X(x) \\ &= \psi(0) \int_0^t F_X(x) dx + \int_0^t \int_x^t \psi'(u - x) du dF_X(x) dx \\ &= \int_0^t \psi(t - x) F_X(x) dx \quad (**). \end{aligned}$$

Außerdem, es gilt auch

$$\psi(0) = \frac{\lambda f_1}{c} = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} [1 - F_X(u)] du \quad (***)$$

Durch die Integration von (\*) in Grenzen von 0 bis  $t$  und unter Benutzung von (\*\*) und (\*\*\*), bekommt man die folgende Gleichung

$$\psi(t) = \frac{\lambda}{c} \int_0^t \psi(t-x)[1 - F_X(x)] dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} [1 - F_X(u)] du, \quad (3.2)$$

die für  $t \geq 0$  gilt. Diese Gleichung heißt *defekte Erneuerung Gleichung* (defective renewal equation), die später noch diskutiert wird, siehe [7].

### 3.3 Der Anpassungskoeffizient

Eine zentrale Größe im Risikoprozess ist der Anpassungskoeffizient, alternativ auch als Lundberg-Exponent bezeichnet, siehe [6].

**Definition 3.3.1 (Anpassungskoeffizient)** [11]

Sei  $\{U(t)\}_{t>0}$  der Überschussprozess mit  $\mathbb{E}(U(t)) < 0$ . Der *Anpassungskoeffizient*  $R$  ist die positive Lösung der Gleichung:

$$\mathbb{E}(e^{-rU(t)}) = 1.$$

Der Anpassungskoeffizient  $R$  ist ein Maß für das Risiko in dem Überschussprozess.  $R$  hängt von der Gesamtschadenhöhe und von der Höhe der Prämien ab.

Nach der Definition von Momentenerzeugende Funktion haben wir folgende Gleichung  $M_{U_t}(r) = 1$  für ein  $t > 0$ . Wenn diese Gleichung lösen erhalten wir [6]

$$\begin{aligned} M_{U_t}(r) &= M_{X_t-ct}(r) = e^{-rct} \exp\{\lambda t[M_X(r) - 1]\} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda[M_X(r) - 1] = rc \Leftrightarrow \\ M_X(r) &= 1 + rcf_1, \end{aligned}$$

wobei  $f_1 = \mathbb{E}[X_1]$ .

**Satz 3.3.1** [19] Der Anpassungskoeffizient ist die eindeutige positive Lösung, falls sie existiert, der Gleichung

$$\lambda M_X(r) - \lambda - cr = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\lambda + cR = \lambda M_X(R).$$

**Beweis:**

Die Funktion

$$g(r) = \lambda M_X(r) - \lambda - cr$$

wird betrachtet. Es sieht man, daß  $R$ , durch die Untersuchung dieser Funktion  $g(r)$ , durch obige Gleichung eindeutig definiert ist. Also wir betrachten  $g(r)$  mit  $g(0) = 0$  und wir nehmen an, daß  $F_X$  eine Dichte  $f_X$  besitzt.

Wir leiten  $g(r)$  nach  $r$  ab:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}g(r) &= \lambda \frac{d}{dr}M_X(r) - c = \lambda \frac{d}{dr} \int_0^{\infty} (e^{rx} f_X(x) dx) - c \\ &= \lambda \int_0^{\infty} \left( \frac{d}{dr} e^{rx} f_X(x) \right) dx - c = \lambda \int_0^{\infty} (x e^{rx} f_X(x)) dx - c, & r = 0 \\ &= \lambda \int_0^{\infty} x f_X(x) dx - c = \lambda \mathbb{E}(X_1) - c = \lambda f_1 - c < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow g$  ist fallend um  $r = 0$ .

Die zweite Ableitung ergibt:  $\frac{d^2}{dr^2}g(r) = \lambda \frac{d^2}{dr^2}M_X(r) = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{rx} f_X(x) dx > 0$

$\Rightarrow g$  besitzt ein Minimum.

Beh:  $\lim_{r \rightarrow \gamma^-} g(r) = \infty$

**Beweis:** Sei  $\gamma$  in **Definition 2.3.1** in Punkt 5 definiert. Wir betrachten die folgende Fälle

**1.Fall**  $\gamma < \infty$  klar.

**2.Fall**  $\gamma = \infty$

wegen  $X_i > 0$  für alle  $i$  existiert ein  $\epsilon > 0$  und  $p > 0$  mit  $\mathcal{P}(X_1 > \epsilon) = p > 0$ .

so dass

$$\begin{aligned} M_X(r) &= \int_0^{\infty} e^{rx} f_X(x) dx \geq \int_{\epsilon}^{\infty} e^{rx} f_X(x) dx \\ &\geq e^{r\epsilon} \int_{\epsilon}^{\infty} f_X(x) dx \geq e^{r\epsilon} p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) \geq \lim_{r \rightarrow \infty} (\lambda e^{r\epsilon} p - \lambda - cr) = \infty.$$

Es ist gezeigt, dass  $g(r)$  um Null fällt und ein Minimum besitzt.  $\square$

**Bemerkung:** [6]

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz des Anpassungskoeffizienten ist im letzten Satz bewiesen und zusammengefasst lautet: Nehmen wir  $M_X''(r) > 0$  an und damit ist  $M_X$  eine strikt konvexe Funktion. Die Steigung von  $M_X$  beim Nullpunkt ist  $M_X'(0) = f_1 < cf_1$ . Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von  $R$  ist die sogenannte Steilheit von  $M_X$ . D.h.

$$\exists \gamma \in (0, \infty), \text{ so dass } M_X(r) < \infty, \forall r < \gamma \text{ und } \lim_{r \rightarrow \gamma, r < \gamma} M_X(r) = \infty.$$

### 3.4 Cramér-Lundberg Ungleichung

Mit dem Anpassungskoeffizienten lässt sich die Ruinwahrscheinlichkeit  $\psi(u)$  exponentiell abschätzen. Ausgehend von der Cramér-Lundberg Ungleichung lässt sich eine obere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit angeben. Die Berechnung der oberen Schranke kann mit Hilfe von Schätzwerten der vergangenen Versicherungsjahre durchgeführt werden. Dabei wird immer angenommen, daß das Portfolio die Voraussetzungen der Cramér-Lundberg Ungleichung erfüllt. Hier wird Lundberg's Ungleichung für das klassischen Risiko-Prozess betrachtet.

**Satz 3.4.1 (Cramér-Lundberg Ungleichung)** [18]

Angenommen der Anpassungskoeffizient  $R > 0$  existiert. Dann gilt für  $u \geq 0$ :

$$\psi(u) < e^{-Ru}.$$

**Beweis** (durch Widerspruch): Angenommen, daß der Satz nicht gilt. Sei

$$u_0 = \inf\{u \geq 0 : \psi(u) \geq e^{-Ru}\}$$

Da  $\psi(u)$  stetig ist, erhalten wir

$$\psi(u_0) = e^{-Ru_0}.$$

Weil  $\psi(0) < 1$  gilt, folgt daraus, daß  $u_0 > 0$  ist. Wir verwenden die Gleichung (3.2) für  $u = u_0$  und erhalten

$$\begin{aligned}
 \psi(u_0) &= \frac{\lambda}{c} \int_{u_0}^{\infty} (1 - F_X(x)) dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^{u_0} \psi(u_0 - x)(1 - F_X(x)) dx \\
 &< \frac{\lambda}{c} \int_{u_0}^{\infty} (1 - F_X(x)) dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^{u_0} e^{-R(u_0-x)}(1 - F_X(x)) dx \\
 &\leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{u_0} e^{-R(u_0-x)}(1 - F_X(x)) dx = \frac{\lambda}{c} e^{-Ru_0} \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} e^{Rx} dF_X(y) dx \\
 &= \frac{\lambda}{c} e^{-Ru_0} \int_0^{\infty} \int_0^y e^{Rx} dx dF_X(y) = \frac{\lambda}{c} e^{-Ru_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{R} (e^{Ry} - 1) dF_X(y) \\
 &= \frac{\lambda}{Rc} e^{-Ru_0} (M_Y(R) - 1) = e^{-Ru_0},
 \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

# Kapitel 4

## Gerber-Shiu Risikotheorie

### 4.1 Erwartete diskontierte Straffunktion

Gerber und Shiu (1998) [9] führen das Konzept der diskontierten erwarteten Straffunktion als eine Möglichkeit, die Verteilung des Ruinzeitpunktes und des Überschusses bei und vor dem Ruin zu studieren. Für das klassische Risikomodell heißt die erwartete diskontierte Straffunktion **Gerber-Shiu** Funktion und ist folgendermaßen definiert:

$$\phi(u) = \mathbb{E}[w(U(T-), |U(T)|)e^{-\delta T} I(T < \infty) \mid U(0) = u], \quad u \geq 0 \quad (4.1)$$

wobei  $w(x, y)$  die nicht-negative Straffunktion mit Überschuss  $x$  vor Ruin und Defizit  $y$  zum Ruinzeitpunkt ist. Weiters ist  $\delta$  ein nicht-negativer Parameter, der entweder als Zinsintensität oder als Gewichtungsfaktor interpretiert werden kann,  $u$  Anfangskapital,  $I$  Indikator Funktion,  $U(T-)$  der Überschuss gleich vor Ruin und  $|U(T)|$  Defizit zum Ruinzeitpunkt, siehe [5] und [2]

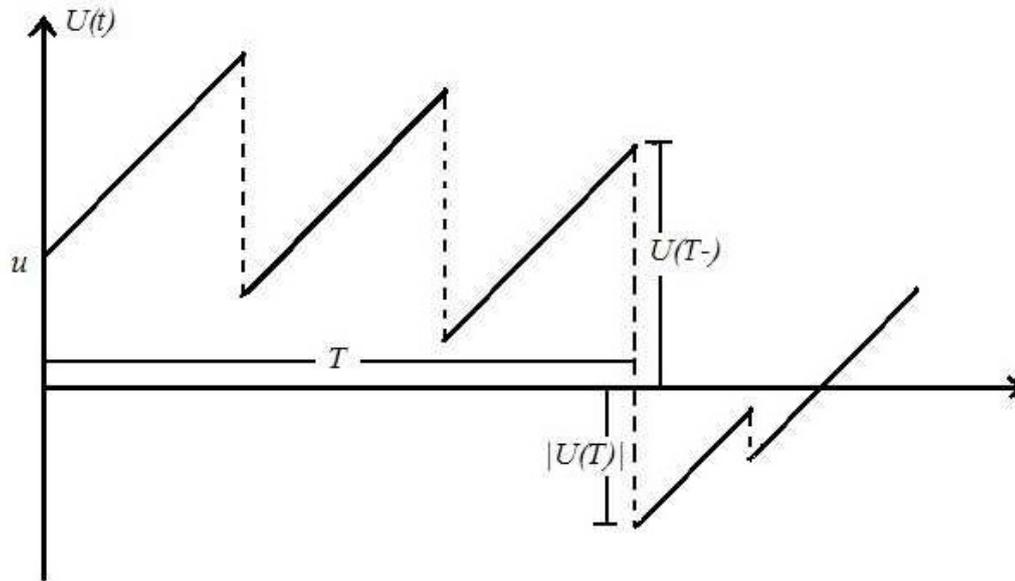


Abb. 1: Überschuss vor und zum Ruinzeitpunkt, (siehe [9])

Sei  $F_X(x)$  die Verteilungsfunktion von  $X$  mit  $F_X(0) = 0$  und wir nehmen an, daß sie auch differenzierbar ist und eine Dichte  $f_X(x)$  besitzt. Wir nehmen an, daß  $c > \lambda f_1$ , sodaß die Nettoprofitbedingung erfüllt ist, wobei  $\lambda$  der Poisson Parameter ist. Deswegen hat  $\{U(t)\}$  positiven Drift. In Übereinstimmung mit dem starken Gesetz der großen Zahlen, ist  $\mathcal{P} - f.s.$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \infty.$$

Unter diesen Annahmen ist  $\psi(u) < 1$ , für  $u \in [0, \infty)$ .

Jetzt betrachten wir zusammen folgende drei Zufallsvariablen:  $U(T-)$  der Überschuss gleich vor Ruin,  $|U(T)|$  Defizit zum Ruinzeitpunkt und  $T$  Ruinzeitpunkt (siehe **Abb.1**).

Sei  $f(x, y, t|u)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $U(T-)$ ,  $|U(T)|$  und  $T$ . Für gegebenes  $U(0) = u$  gilt:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y, t|u) dx dy dt = P[T < \infty | U(0) = u] = \psi(u) \quad (4.2)$$

Wir merken, daß für  $x > u + ct$ ,

$$f(x, y, t|u) = 0,$$

mit  $x = u + ct$  gilt auch

$$f(u + ct, y, t|u) = e^{-\lambda t} \lambda f_X(u + ct + y) dy dt$$

Es ist einfacher folgende Funktion zu analysieren. Für  $\delta > 0$ , definiere

$$f(x, y|u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(x, y, t|u) dt. \quad (4.3)$$

Hier kann  $\delta$  als Zinsintensität oder Gewichtungsfaktor interpretiert werden. Falls  $\delta = 0$  dann ist (4.3) die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von  $U(T-)$  und  $|U(T)|$  für gegebenes Startkapital  $U(0) = u$ . Im Fall  $\delta > 0$  haben wir

$$e^{-\delta T} = e^{-\delta T} I(T < \infty),$$

wobei  $I$  die Indikator Funktion ist, siehe bei [8] und [9].

Sei  $w(x, y)$  eine nicht-negative Funktion von  $x > 0$  und  $y > 0$ . Für  $u \geq 0$  hat die Gleichung (4.1) die folgende Form

$$\phi(u) = \mathbb{E}[w(U(T-), |U(T)|) e^{-\delta T} I(T < \infty) \mid U(0) = u]$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(x, y) e^{-\delta t} f(x, y, t|u) dt dx dy$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(x, y) f(x, y|u) dx dy.$$

Man beachte, daß das Symbol  $\phi(u)$  nicht die Abhängigkeit von  $\delta$  und  $w(x, y)$  aufweist. Die Analyse der Funktion  $f(x, y|u)$  ist in der Analyse der Funktion  $\phi(u)$  enthalten.

Wenn wir  $\delta$  als Zinsintensität und  $w$  als eine Art der Strafe beim Auftritt von Ruin interpretieren, dann ist  $\phi$  **erwartete diskontierte Straffunktion**. Wenn  $w$  als Leistungsbetrag der Versicherung oder Rückversicherung interpretiert wird, dann bezeichnet  $\phi(u)$  die einzel Prämie der Versicherung. Unser unmittelbares Ziel im nächsten Kapitel ist es, eine funktionale Gleichung für  $\phi(u)$  herzuleiten, siehe [9].

## 4.2 Eine funktional Gleichung für die Gerber-Shiu Funktion

### 4.2.1 Integro-Differentialgleichung

Wir beginnen mit den allgemeinen Überlegungen für Erneuerungsrisikomodelle. Für  $h > 0$  betrachten wir das Zeitintervall  $(0, h)$  und bedingt an Sprungzeitpunkt und Sprunghöhe  $X = x$ . Obwohl nicht immer notwendig, nehmen wir in der Regel an, daß die Verteilungsfunktion  $F_X$  eine Dichte  $f_X$  besitzt. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, daß es keinen Sprung bis zur Zeit  $h$  auftreten wird, mit  $e^{-\lambda h}$  und die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Sprung zwischen der Zeit  $t$  und der Zeit  $t + dt$  auftritt mit  $\lambda e^{-\lambda t} dt$ , und es muss noch beim Ruinauftritt folgende Annahme gelten siehe

$$x > u + ct,$$

[9] und [2].

**Satz 4.2.1.1** [9] Die Gerber-Shiu Funktion  $\phi(u)$  genügt folgender Integro-Differentialgleichung:

$$c\phi'(u) = (\delta + \lambda)\phi(u) - \lambda \int_0^u \phi(u - x) dF_X(x) - \lambda A(u), \quad (4.4)$$

für

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = 0,$$

wobei  $A(u) = \int_u^\infty w(u, x - u) dF_X(x) = \int_0^\infty w(u, y) f_X(u + y) dy$ .

**Beweis:**

Durch die Betrachtung der Zeit  $t$  und der Sprunghöhe  $x$  im Zeitintervall  $(0, h)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi(u) &= e^{-(\delta+\lambda)h} \phi(u + ch) + \int_0^h \lambda e^{-(\delta+\lambda)t} \int_0^{u+ct} \phi(u + ct - x) dF_X(x) dt \\ &\quad + \int_0^h \lambda e^{-(\delta+\lambda)t} \int_{u+ct}^\infty w(u + ct, x - u - ct) dF_X(x) dt. \end{aligned}$$

Durch differenzieren nach  $h$  und der Wahl  $h = 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= -(\delta + \lambda)\phi(u) + c\phi'(u) + \lambda \int_0^u \phi(u - x) dF(x) + \lambda \int_u^\infty w(u, x - u) dF_X(x) \\ &= -(\delta + \lambda)\phi(u) + c\phi'(u) + \lambda \int_0^u \phi(u - x) dF_X(x) + \lambda A(u), \quad \square \end{aligned} \quad (4.5)$$

### 4.2.2 Lundberg's Fundamentalgleichung und eine Integralgleichung

Zuerst bezeichnen wir mit  $\hat{f}$  die Laplace Transformation von  $f_X$ , für geeignete  $\xi$  gilt

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\xi x} f_X(x) dx.$$

Mit  $l(\xi) = \delta + \lambda - c\xi$ , betrachten wir die Gleichung

$$l(\xi) = \lambda \hat{f}(\xi) = \lambda \mathbb{E}[e^{-\xi X_1}] \tag{4.6}$$

mit

$$l(0) = \delta + \lambda \leq \lambda = \lambda \hat{f}(0).$$

Diese Gleichung heißt *Lundberg's Fundamentalgleichung* bei [9].

**Satz 4.2.2.1** [9] Die Gleichung (4.6) hat eine eindeutige nichtnegative Lösung  $\xi_1$  und eine eindeutige negative Lösung  $\xi_2$ , wenn  $\mathbb{E}[vX_1] < \infty$ , für ein  $v > 0$ .

**Beweis:**

Die Laplace Transformation  $\hat{f}$  von  $f$  ist sicherlich definiert für alle nichtnegative Zahlen  $\xi$  und ist eine monoton fallende konvexe Funktion, da folgendes gilt:

$$\hat{f}'(\xi) = - \int_0^{\infty} e^{-\xi x} x f_X(x) dx < 0$$

und

$$\hat{f}''(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\xi x} x^2 f_X(x) dx > 0.$$

Da  $l(0) = \delta + \lambda \geq \lambda = \lambda \hat{f}(0)$  und die Steigung von  $l(\xi)$  konstant und negativ ist, daher hat die Gleichung (4.6) eine eindeutige nichtnegative Lösung  $\xi_1$  und negative Lösung  $\xi_2$ , falls  $\lambda \hat{f}(\xi_2)$  für  $\xi_2 < 0$  existiert, (Siehe Abb.2).  $\square$

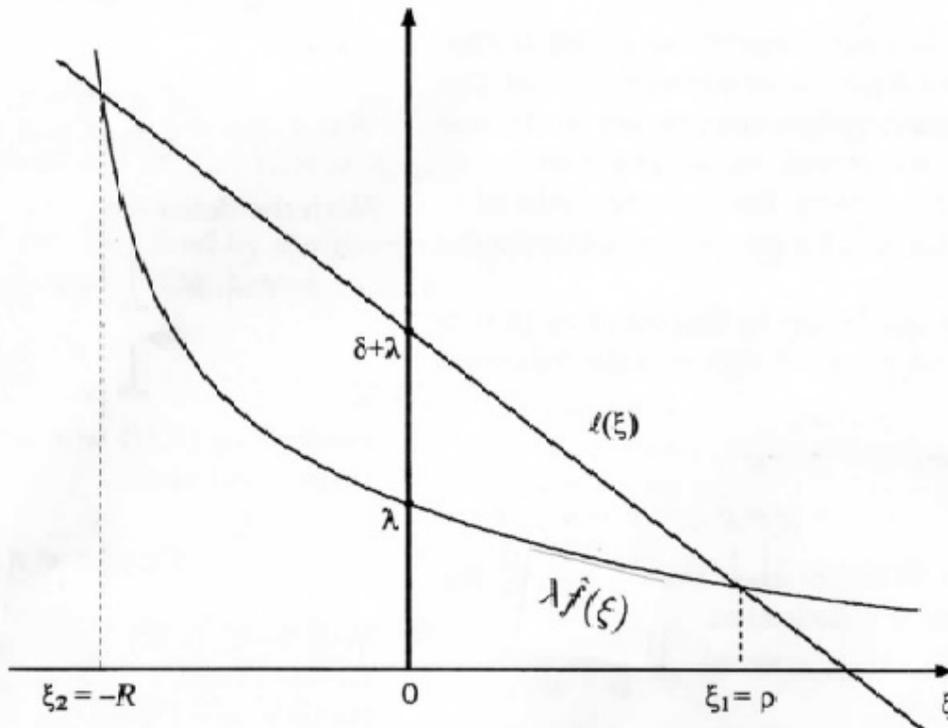


Abb. 2: Zwei Lösungen von Lundberg Fundamentalgleichung, (siehe [9])

Von Abb. 2 kann man sehen, daß  $\xi_1 = 0$ , wenn  $\delta = 0$  ist. Die negative Lösung  $\xi_2$  wird mit  $-R$  bezeichnet und spielt eine große Rolle bei der Konstruktion von exponentiellen Martingalen.

Um den Ausdruck  $\phi(u)$  zu finden, verwenden wir den folgenden Ansatz:

$$\phi_\rho(u) = e^{-\rho u} \phi(u), \quad \rho > 0,$$

wobei  $\rho$  die nichtnegative Lösung von (4.6), d.h.  $\rho = \xi_1 \geq 0$ .

**Satz 4.2.2.2** [9]  $\phi_\rho(z)$  genügt folgender Integralgleichung

$$\phi_\rho(z) = \frac{\lambda}{c} \left\{ \int_0^z \phi_\rho(x) \left[ \int_{z-x}^{\infty} e^{-\rho y} dF_X(y) \right] dx + \int_z^{\infty} e^{-\rho u} A(u) du \right\}, \quad z \geq 0. \quad (4.7)$$

Durch die Multiplikation der Gleichung (4.4) mit  $e^{-\rho u}$  und Anwendung des Produktregels und Reihenfolge Umordnung erhalten wir

$$c\phi'_\rho(u) = (\delta + \lambda - c\rho)\phi_\rho(u) - \lambda \int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x} dF_X(x) - \lambda e^{-\rho u} A(u) \quad (4.8)$$

Da  $\rho$  die Gleichung (4.6) erfüllt folgt aus (4.8)

$$\begin{aligned} c\phi'_\rho(u) &= \lambda \hat{f}(\rho)\phi_\rho(u) - \lambda \int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x} dF_X(x) - \lambda e^{\rho u} A(u) \\ &= \lambda \left[ \hat{f}(\rho)\phi_\rho(u) - \int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x} dF_X(x) - e^{-\rho u} A(u) \right]. \end{aligned}$$

Für ein  $z > 0$  integrieren wir die letzte Gleichung in Grenzen von  $u = 0$  zu  $u = z$ . Nach Division mit  $\lambda$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}c[\phi_\rho(z) - \phi_\rho(0)] &= \hat{f}(\rho) \int_0^z \phi_\rho(u) du - \int_0^z \left[ \int_0^u \phi_\rho(x)e^{-\rho(u-x)} f_X(u-x) dx \right] du - \int_0^z e^{-\rho u} A(u) du \\ &= \hat{f}(\rho) \int_0^z \phi_\rho(u) du - \int_0^z \left[ \int_x^z e^{-\rho(u-x)} f_X(u-x) du \right] \phi_\rho(x) dx - \int_0^z e^{-\rho u} A(u) du \\ &= \int_0^z \phi_\rho(x) \left[ \int_{z-x}^\infty e^{-\rho y} dF_X(y) \right] dx - \int_0^z e^{-\rho u} A(u) du. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Für  $z \rightarrow \infty$  verschwindet der erste Term auf der Rechte Seite von (4.9) und wir erhalten folgende Gleichung

$$\phi_\rho(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho u} A(u) du = \frac{\lambda \hat{A}(\rho)}{c}.$$

Durch die Substitution von dieser Gleichung in (4.9) und durch Vereinfachung haben wir (4.7) gezeigt.  $\square$

**Bemerkung:** [9] Falls wir die Gleichung (4.7) mit  $e^{\rho z}$  multiplizieren, bekommen wir eine einfachere Integralgleichung für  $\phi(z)$ :

$$\phi(z) = \frac{\lambda}{c} \left\{ \int_0^z \phi(x) \left[ \int_{z-x}^\infty e^{\rho(z-x-y)} dF_X(y) \right] dx + \int_z^\infty e^{\rho(z-u)} A(u) du \right\}. \tag{4.10}$$

## 4.3 Einige nützliche Ergebnisse

### 4.3.1 Die Erneuerungsgleichung

Es seien  $f_1$  und  $f_2$  zwei integrierbare Funktionen. Die Faltung von  $f_1$  und  $f_2$  ist folgendermaßen definiert

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(y) f_2(x-y) dy, \quad x \geq 0.$$

Setze

$$g(x) = \frac{\lambda}{c} \int_x^{\infty} e^{-\rho(y-x)} dF_X(y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\rho z} f_X(x+z) dz, \quad x \geq 0,$$

und

$$h(x) = \int_x^{\infty} e^{-\rho(u-x)} A(u) du = \int_x^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\rho(u-x)} w(u, y) f_X(u+y) dy du, \quad x \geq 0.$$

Unter Verwendung der Faltungsregel, kann die Gleichung (4.10) folgendermaßen geschrieben werden

$$\phi = \phi * g + h. \quad (4.11)$$

In der Literatur über Integralgleichungen, ist die Gleichung (4.10) als *Volterra Gleichung zweiter Art* klassifiziert. Da die Funktion  $g$  eine nichtnegative Funktion auf  $[0, \infty)$  ist,  $g$  kann in der Wahrscheinlichkeitstheorie als Dichte Funktion interpretiert werden. Gleichung (4.11) ist als *Erneuerungsgleichung* von  $\phi$  bekannt. Die Lösungen von (4.11) können als unendliche Reihen von Funktionen ausgedrückt werden, die als *Neumann Reihen* bekannt sind, d.h.

$$\phi = h + g * h + g * g * h + g * g * g * h + g * g * g * g * h + \dots, \quad (4.12)$$

siehe [9].

### 4.3.2 Laplace-Transformation für Gerber-Shiu Funktion

Wegen der Faltungsstruktur, ist eine andere natürliche Weise (4.11) handzuhaben die Technik der Laplace-Transformation. Durch die Anwendung der Laplace-Transformation auf beide Seiten von (4.11) erhalten wir

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(\xi) \hat{g}(\xi) + \hat{h}(\xi), \quad (4.13)$$

oder

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\hat{h}(\xi)}{1 - \hat{g}(\xi)}. \quad (4.14)$$

**Satz 4.3.2.1** [9] Die Laplace-Transformation  $\hat{\phi}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\xi u} \phi(u)$  von  $\phi(u)$  genügt folgender Gleichung:

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\lambda \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{-\xi u} - e^{-\rho u}) w(u, y) f_X(u+y) du dy}{\lambda [1 - \hat{f}(\xi)] + \delta - c\xi}. \quad (4.15)$$

**Beweis:** Zuerst betrachten wir  $\hat{g}(x)$  die Laplace-Transformation von  $g(x)$ ,

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\xi x} \left[ \int_x^{\infty} e^{-\rho(y-x)} dF_X(y) \right] dx \\ &= \frac{\lambda}{c(\rho - \xi)} \int_0^{\infty} [e^{(\rho-\xi)y} - 1] e^{-\rho y} dF_X(y) \\ &= \frac{\lambda}{c(\rho - \xi)} [\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\rho)].\end{aligned}$$

Da  $\rho$  Lundberg's Fundamentalgleichung (4.6) erfüllt, folgt daraus

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\lambda \hat{f}(\xi) + c\rho - \delta - \lambda}{c(\rho - \xi)},$$

oder

$$1 - \hat{g}(\xi) = \frac{\lambda[1 - \hat{f}(\xi)] + \delta - c\xi}{c(\rho - \xi)}. \quad (4.16)$$

Jetzt betrachten wir  $\hat{h}(\xi)$  die Laplace-Transformation von  $h(x)$ .

$$\begin{aligned}\hat{h}(\xi) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\xi x} \left[ \int_x^{\infty} e^{-\rho(u-x)} A(u) du \right] dx \\ &= \frac{\lambda}{c(\rho - \xi)} \int_0^{\infty} [e^{(\rho-\xi)u} - 1] e^{-\rho u} A(u) du \\ &= \frac{\lambda}{c(\rho - \xi)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{-\xi u} - e^{-\rho u}) w(u, y) f_X(u + y) du dy.\end{aligned} \quad (4.17)$$

Durch die Substitution (4.16) und (4.17) in (4.14) folgt das Resultat (4.15).

**Korollar 4.3.2.1** [9] Wenn die Straffunktion  $w(x, y) = 1$  ist, dann erfüllt die Laplace-Transformation  $\hat{\phi}(\xi)$  von  $\phi(x)$  folgende Gleichung

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\lambda\rho[1 - \hat{f}(\xi)] + \xi(\delta - c\rho)}{\xi\rho\{\lambda[1 - \hat{f}(\xi)] + \delta - c\xi\}}. \quad (4.18)$$

**Beweis:** Wenn  $w(x, y) = 1$ , erhalten wir von (4.17)

$$\begin{aligned}\hat{h}(\xi) &= \frac{\lambda}{c(\rho - \xi)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{-\xi u} - e^{-\rho u}) f_X(u + y) du dy \\ &= \frac{\lambda}{c(\rho - \xi)} \int_0^{\infty} (e^{-\xi u} - e^{-\rho u}) [1 - F_X(u)] du.\end{aligned} \quad (4.19)$$

Jetzt betrachten wir  $\hat{f}(\xi)$  die Laplace-Transformation von  $f_X(x)$ . Nach partieller Integration,  $\hat{f}(\xi)$  genügt

$$\hat{f}(\xi) = 1 - \xi \int_0^{\infty} e^{-\xi x} [1 - F_X(x)] dx. \quad (4.20)$$

Mit dieser Gleichung können wir Lundberg's Fundamentalgleichung folgendermaßen umschreiben

$$\delta = c\xi - \lambda[1 - \hat{f}(\xi)] = \xi \left\{ c - \lambda \int_0^{\infty} e^{-\xi x} [1 - F_X(x)] dx \right\}.$$

Da  $\rho$  die nicht negative Lösung von der letzten Gleichung ist, haben wir

$$\frac{\delta}{\rho} - c = -\lambda \int_0^{\infty} e^{-\rho x} [1 - F_X(x)] dx. \quad (4.21)$$

Durch die Anwendung von (4.20) und (4.21) in (4.19) bekommen wir

$$\hat{h}(\xi) = \frac{\lambda}{c(\rho - \xi)} \left\{ \frac{\lambda}{\xi} [1 - \hat{f}(\xi)] + \frac{\delta}{\rho} - c \right\}. \quad (4.22)$$

Durch die Substitution der Gleichungen (4.22) und (4.16) in (4.14), erhalten wir die Laplace-Transformation von  $\phi(u)$ , die wir in (4.18) definiert haben.  $\square$

### 4.3.3 Degeneration der Gerber-Shiu-Funktion

In der Herleitung von (4.18), nehmen wir an, daß  $\delta$  und daher auch  $\rho$  positive Zahlen sind. Wenn  $\delta = 0$  und  $w(x, y) = 1$ , degeneriert die Gerber-Shiu Funktion  $\phi(u)$  zur Ruinwahrscheinlichkeit  $\psi(u)$ .

Zuerst betrachten wir den Limes von  $\frac{\delta}{\rho}$  für  $\delta \rightarrow 0$ , wobei man beachten muß, daß  $\rho$  natürlich von  $\delta$  abhängt. Aus (4.21) bekommen wir einfach folgende Gleichung

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\rho} = c - \lambda \int_0^{\infty} e^{-\rho x} [1 - F_X(x)] dx = c - \lambda f_1. \quad (4.23)$$

Durch Einsetzen von (4.23) in (4.18), zeigen wir

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\phi}(\xi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\lambda \frac{\rho}{\delta} [1 - \hat{f}(\xi)] + \xi(1 - c \frac{\rho}{\delta})}{\xi \frac{\rho}{\delta} \{\lambda [1 - \hat{f}(\xi)] + \delta - c\xi\}} \\ &= \frac{\lambda \frac{1}{c - \lambda f_1} [1 - \hat{f}(\xi)] + \xi(1 - c \frac{1}{c - \lambda f_1})}{\xi \frac{1}{c - \lambda f_1} \{\lambda [1 - \hat{f}(\xi)] - c\xi\}} \\ &= \frac{\lambda [1 - f_1 \xi - \hat{f}(\xi)]}{\xi \{\lambda [1 - \hat{f}(\xi)] - c\xi\}}. \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{\lambda [1 - f_1 \xi - \hat{f}(\xi)]}{\xi \{\lambda [1 - \hat{f}(\xi)] - c\xi\}}.$$

siehe [9].

## 4.4 Martingale

Eine weitere Einsicht kann uns eine Verbindung mit Martingalen zeigen. Es sei  $\xi \in \mathbb{R}$ . Da  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  ein stochastischer Prozess mit stationären und unabhängigen Zuwächsen ist, ist es einfach zu sehen, daß der stochastische Prozess

$$M(t) = \{e^{-\delta t + \xi U(t)}\}_{t \geq 0} \tag{4.24}$$

ein Martingal ist, nur dann wenn  $\xi$  richtig gewählt wird, siehe [2] und [9]

**Lemma 4.4.1** [9]  $M(t)$  ist ein Martingal bzgl.  $\mathcal{F}^u$  für alle  $t \geq 0$ . Das gilt dann und nur dann wenn

$$\mathbb{E}[e^{-\delta t + \xi U(t)} | U(0) = u] = e^{\xi u}. \tag{4.25}$$

**Beweis.** Es gilt

$$\mathbb{E}[e^{-\delta t + \xi U(t)} | U(0) = u] = \exp(-\delta t + \xi u + \xi c t + \lambda t [\hat{f}(\xi) - 1]) = e^{\xi u}$$

mit

$$-\delta + \xi c + \lambda [\hat{f}(\xi) - 1] = 0,$$

dies entspricht wieder Lundberg's Fundamentalgleichung (4.6). Damit (4.23) ein Martingal ist, wähle die Koeffizienten von  $U(t)$  in (4.25), sodaß  $\xi$  entweder  $\xi_1 = \rho > 0$  oder  $\xi_2 = -R < 0$  ist. Mit solchem  $\xi$  gilt (4.25) für alle  $t, t \geq 0$ . Aber, wenn wir  $t$  durch eine Stoppzeit ersetzen, welche eine Zuafallsvariable ist, dann gibt es keine Garantie, daß (4.25) gelten wird. Glücklicherweise gilt es in zwei wichtigen Fällen, was wir jetzt sehen werden.

Wenn  $T$  die Ruinzeit ist, betrachten wir das Martingal (4.24) mit  $\xi_1 = \rho$  und  $\xi_2 = -R$  für  $0 \leq t < T$ . Es gilt

$$\delta t + RU(t) \geq 0,$$

und daher

$$0 < e^{-\delta t - RU(t)} \leq 1.$$

Mit beschränktem  $\{e^{-\delta t - RU(t)}\}_{0 \leq t < T}$  und durch die Anwendung des Optional Sampling Satzes bekommen wir

$$\mathbb{E}[e^{-\delta t - RU(t)} | U(0) = u] = e^{-Ru}. \quad (4.26)$$

**Bemerkung.** [9] Wenn  $\delta = 0$  und da  $\lim_{u \rightarrow \infty} U(t) = \infty$  gilt, folgt

$$\mathbb{E}[e^{-\delta t - RU(t)} I(T = \infty) | U(0) = u] = 0. \quad \square$$

**Folgerung 4.4.1** [9] Wir können (4.26) folgendermaßen umschreiben

$$e^{-Ru} = \mathbb{E}[e^{-\delta t - RU(t)} I(T < \infty) | U(0) = u], \quad \delta \geq 0, \quad u \geq 0. \quad (4.27)$$

**Lemma 4.4.2** [9] Sei  $T_x = \min\{t > 0 : U(t) = x | U(0) = u\}$  für  $x > u$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T_x} | U(0) = u] = e^{-\rho(x-u)}, \quad \delta > 0. \quad (4.28)$$

**Beweis.** Wir können Gleichheit verwenden, um die Stoppzeit  $T_x$  zu definieren weil der Prozess  $U(t)$  nach oben Sprungfrei ist. Dann ist für  $0 \leq t < T_x$ ,

$$e^{-\delta t + \rho U(t)} \leq e^{\rho x}.$$

Daher können wir der Optional Sampling Satz für das bei  $T_x$  gestoppten Martingal  $\{e^{-\delta t + \rho U(t)}\}$  anwenden und erhalten

$$e^{\rho u} = \mathbb{E}[e^{-\delta T_x + \rho U(T_x)} | U(0) = u] = \mathbb{E}[e^{-\delta T_x} | U(0) = u] e^{\rho x},$$

bzw.

$$e^{-\rho(x-u)} = \mathbb{E}[e^{-\delta T_x} | U(0) = u]. \quad \square$$

**Bemerkung:** [2] Definiere  $\psi(u) = \mathbb{E}[e^{-\delta T + \rho U(T)} | T < \infty]$ . Sei  $T_0 = \min\{t > T | U(t) = 0\}$  die Zeit der Wiederherstellung nach Ruin. Da (4.28) willkürlich gilt  $x, u \in \mathbb{R}$ , haben wir für  $x < y$

$$\mathbb{E}[e^{-\delta(T_y - T_x)} | T_x < T_y] = e^{-\rho(y-x)},$$

und damit auch

$$\mathbb{E}[e^{-\delta(T_0 - T)} | T < \infty] = e^{-\rho |U(T)|}.$$

Das führt zu

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T_0} | T < \infty] = \mathbb{E}[e^{-\delta(T_0 - T)} e^{-\delta T} | T < \infty] = \psi(u).$$

Das definierte  $\psi(u)$  kann beim Ruinauftritt als der erwartete diskontierte Wert einer Zahlung von 1 zum Zeitpunkt der Wiederherstellung interpretiert werden.

**Lemma 4.4.3** [2] Die diskontierte Dichte des Überschusses vor dem Ruin genügt

$$f(x|u) = f(x|0) \frac{e^{\rho u} I(x > u) + e^{\rho x} \psi(u-x) I(x \leq u) - \psi(u)}{1 - \psi(0)}, \quad x > 0.$$

Für  $x = u$ , hat  $f(x|u)$  eine Diskontierung der Größe  $f(x|0)e^{\rho u} = \frac{\lambda}{c} \bar{F}_X(u)$ .

**Beweis.** Wir benutzen die Laplace Transformation. Da  $\psi(u)$  die Gerber Shiu Funktion mit  $w(x, y) = e^{-\rho y}$  ist, (und entsprechend  $\hat{A}(-s) = \frac{\hat{F}(-\rho) - \hat{F}(-s)}{s - \rho} = c\hat{g}(-s)/\lambda$ ), dann folgt aus  $\frac{\lambda \hat{A}(-\rho)}{c} = \phi(0)$ ,

$$\hat{\psi}(-s) = \frac{\psi(0) - \hat{g}(-s)}{(s - \rho)(1 - \hat{g}(-s))}, \quad (4.29)$$

wobei  $\hat{g}(-s) = \frac{\lambda}{c} \hat{A}(-s)$ . Durch Konditionierung, ob der Ruin zum ersten Mal auftritt oder nicht, wenn der Überschuss unter den Anfangswert fällt, kann man die Erneuerungsgleichung folgendermaßen schreiben

$$f(x, y|u) = \int_0^u f(x, y|u-z)g(z)dz + f(x-u, y+u|0)I(x > u), \quad (4.30)$$

mit

$$f(x-u, y+u|0) = \frac{\lambda}{c} e^{-\rho(x-u)} f_X(x+y) = f(x, y|0)e^{\rho u}.$$

Daher integrieren wir die Erneuerungsgleichung bzgl.  $y$  und erhalten

$$f(x|u) = \int_0^u f(x|u-z)g(z)dz + f(x|0)e^{\rho u}I(x > u).$$

Die Funktion  $\pi(u)$ , definiert durch  $f(x|u) = f(x|0)\pi(u)$ , erfüllt die folgende Erneuerungsgleichung

$$\pi(u) = \int_0^u \pi(u-z)g(z)dz + e^{\rho u}I(x > u),$$

sodaß die Laplace Transformation gegeben ist

$$\hat{\pi}(-s) = \frac{1}{1 - \hat{g}(-s)} \frac{e^{(\rho-s)u} - 1}{\rho - s}.$$

Die Aussage des Satzes ist, daß dieser Ausdruck auch Laplace Transformation (bzgl.  $u$ ) von folgenden Funktion

$$\pi_2(u) = \frac{e^{\rho u} I(x > u) + e^{\rho x} \psi(u-x) I(x \leq u) - \psi(u)}{1 - \psi(0)}$$

ist.

Durch einfache Berechnung bekommen wir

$$\hat{\pi}_2(-s) = \frac{\frac{e^{(\rho-s)x}-1}{\rho-s} + e^{(\rho-s)x}\hat{\psi}(-s) - \hat{\psi}(-s)}{1 - \psi(0)} = \frac{(e^{(\rho-s)x} - 1)(\frac{1}{\rho-s} + \hat{\psi}(-s))}{1 - \psi(0)}$$

Das Einsetzen von (4.29) in die letzte Gleichung ergibt

$$\hat{\pi}_2(-s) = \frac{e^{(\rho-s)x} - 1}{\rho - s} \frac{1}{1 - \hat{g}(-s)},$$

die in der Tat zusammenfällt mit  $\hat{\pi}(-s)$ .  $\square$

**Bemerkung.** [2] Für  $\rho = 0$  und  $\delta = 0$ , ist  $\psi(u)$  die Ruinwahrscheinlichkeit. Wir erhalten jetzt die (defektive) nicht diskontierte Dichte des Überschusses vor dem Ruin

$$f_0(x|u) = f_0(x|0) \frac{I(x > u) + \psi(u-x)I(x \leq u) - \psi(u)}{1 - \psi(0)}, \quad x > 0.$$

## 4.5 Anwendung eines Maßwechsels

### 4.5.1 Cramér-Lundberg Aproximation (Asymptotik ohne Maßwechsel)

In diesem Kapitel interessieren wir uns für das asymptotische Verhalten von  $\psi(u)e^{Ru}$ . Die Frage ist, ob  $\psi(u)e^{Ru}$  zu einer Grenze konvergiert oder zwischen zwei Schranken für  $u \rightarrow \infty$  schwankt. Wir werden sehen, daß der Grenzwert von  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u)e^{Ru}$  existiert. Um dies zu zeigen, benötigen wir Proposition B.1 .

**Satz 4.5.1.1** [17] Nehmen wir an, daß der Anpassungskoeffizient  $R > 0$  existiert. Wenn  $\hat{f}(-R) < \infty$  ist, dann gilt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u)e^{Ru} = \frac{c - \lambda f_1}{\lambda \hat{f}(-R) - c}. \quad (4.31)$$

Falls  $\hat{f}(-R) = \infty$ , dann ist  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u)e^{Ru} = 0$ .

**Beweis.** Wir haben im Kapitel 4.2 gezeigt, daß die Ruinwahrscheinlichkeit  $\psi(u)$  folgende Funktional Gleichung genügt

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty (1 - F_X(x)) dx + \int_0^u \psi(u-x)(1 - F_X(x)) dx \right). \quad (4.32)$$

Multipliziere diese Gleichung mit  $e^{Ru}$  und erhalten

$$\psi(u)e^{Ru} = \frac{\lambda}{c} \left( e^{Ru} \int_u^\infty (1 - F_X(x)) dx + \int_0^u \psi(u-x)e^{R(u-x)}(1 - F_X(x))e^{Rx} dx \right). \quad (4.33)$$

Es folgt aus der Definition von  $R$ , daß

$$\int_0^\infty \lambda c^{-1} (1 - F_X(x)) e^{Rx} dx = 1,$$

Und daher ist (4.33) eine Erneuerungsgleichung. Der Mittelwert der Integrationsverteilung  $dF_X(x) = \lambda c^{-1} (1 - F_X(x)) e^{Rx} dx$  ist

$$\int_0^\infty x \lambda c^{-1} (1 - F_X(x)) e^{Rx} dx = \lambda \hat{f}(-R) - c/c_R,$$

wenn  $\hat{f}(-R) < \infty$ , und sonst  $\infty$ . Es ist zu sehen, daß die Funktion

$$z(u) = \frac{\lambda}{c} e^{Ru} \int_u^\infty (1 - F_X(x)) dx$$

kann in gleicher Weise wie in **Proposition B.1** berücksichtigt werden. Also die Behauptung folgt aus der **Proposition B.1**, da

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{c} e^{Ru} \int_u^\infty (1 - F_X(x)) dx du = \frac{c - \lambda f_1}{cR}. \quad \square$$

Das asymptotische Ergebnis, das in **Satz 4.5.1.1** für die Ruinenwahrscheinlichkeit  $\psi(u)$  erhalten wurde, führt zu der **Cramér-Lundberg Approximation**:

$$\psi_{app}(u) = \frac{c - \lambda f_1}{\lambda \hat{f}(-R) - c} e^{-Ru}. \quad (4.34)$$

## 4.5.2 Maßwechsel im Cramér-Lundberg Modell

Betrachten wir einen beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  und eine beliebige Filtration  $\{\mathcal{F}_t\}$  auf diesem Raum. Setze  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ . Sei  $\{M(t)\}$  ein positiver  $\mathcal{F}_t$ -Martingal. O.B.d.A gehen wir davon aus, daß  $\mathbb{E}(M(0)) = 1$  gilt. Sei  $t \geq 1$  fest. Wir können ein neues Wahrscheinlichkeitmaß  $\tilde{\mathcal{P}}_t$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_t$  folgendermaßen definieren

$$\tilde{\mathcal{P}}_t(A) = \mathbb{E}[M(t); A], \quad A \in \mathcal{F}_t, \quad (4.35)$$

siehe [17]

**Lemma 4.5.2.1** [17]

(a) Wenn  $t, h \geq 0$ , dann ist  $\tilde{\mathcal{P}}_t = \tilde{\mathcal{P}}_{t+h}$  auf  $\mathcal{F}_t$ . Insbesondere für  $A \in \mathcal{F}_t$

$$\mathbb{E}[M(t); A] = \mathbb{E}[M(t+h); A].$$

(b) Angenommen, es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{\mathcal{P}}$  auf  $\mathcal{F}_\infty$ , sodaß  $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_t$  auf  $\mathcal{F}_t$ , für alle  $t \geq 0$ . Sei  $T$  eine Stopzeit und  $A \subset \{T < \infty\}$ , mit  $A \in \mathcal{F}_T$ . Dann gilt

$$\tilde{\mathcal{P}}(A) = \mathbb{E}[M(T); A].$$

**Beweis.** (a) Durch die bedingte Erwartung auf  $\mathcal{F}_t$  haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M(t+h); A] &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[M(t+h); A] | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M(t+h) | \mathcal{F}_t); A] \\ &= \mathbb{E}[M(t); A]. \end{aligned}$$

(b) Wir erinnern uns an  $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . So wird durch (a)

$$\tilde{\mathcal{P}}(A \cap \{T \leq t\}) = \mathbb{E}[M(t); A \cap \{T \leq t\}].$$

festgelegt.

Daher, nach Eigenschaft  $\mathbb{E}[M(T) | \mathcal{F}_t] = M(T \wedge t)$  schließen wir, daß

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}(A \cap \{T \leq t\}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[M(t); A \cap \{T \leq t\}] | \mathcal{F}_T) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(M(t) | \mathcal{F}_T); A \cap \{T \leq t\}] = \mathbb{E}[M(T \wedge t); A \cap \{T \leq t\}] \\ &= \mathbb{E}[M(T); A \cap \{T \leq t\}]. \end{aligned}$$

So folgt die Behauptung aus dem monotonen Konvergenzsatz.  $\square$

**Bemerkung:** Wir werden später die bedingte Erwartungswert  $\tilde{\mathbb{E}}_t(Y | \mathcal{G})$  unter  $\tilde{\mathcal{P}}_t$  brauchen, wobei  $Y$   $\mathcal{F}_t$ -meßbar ist,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_t$  und  $T$  ist entweder deterministisch oder eine Stopzeit beschränkt mit  $t$ . Wenn  $T$  nicht beschränkt ist, betrachten wir die bedingte Erwartung  $\tilde{\mathbb{E}}(Y | \mathcal{G})$  unter  $\tilde{\mathcal{P}}$ , wobei wir annehmen, daß das Maß  $\tilde{\mathcal{P}}$  auf  $\mathcal{F}_\infty$  existiert. Für eine einfachere Notation schreiben wir  $\tilde{\mathbb{E}}$  anstatt  $\tilde{\mathbb{E}}_\infty$  und  $\tilde{\mathbb{P}}$  anstatt  $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ .

**Satz 4.5.2.1** [17] Sei  $t \leq \infty$ . Betrachte eine Zufallsvariable  $M_T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die folgendermaßen definiert ist

$$M_T(\omega) = \begin{cases} M(T(\omega), \omega) & \text{falls } T(\omega) < \infty, \\ M & \text{falls } T(\omega) = \infty, \end{cases}$$

wobei  $M$  eine bestimmte Zufallsvariable ist und  $\omega \in \Omega$ . Sei weiters  $Y$  eine  $\mathcal{F}_T$ -meßbare Zufallsvariable, so daß  $Y$  unter  $\tilde{\mathcal{P}}_t$  integrierbar ist. Wenn  $T \leq t$ , dann gilt

$$\tilde{\mathbb{E}}_t(Y | \mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}(M_T Y | \mathcal{G})}{\mathbb{E}(M_T | \mathcal{G})}. \quad (4.36)$$

Insbesondere für  $t, h \geq 0$  gilt

$$\tilde{\mathbb{E}}_{t+h}(Y | \mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}(M(t+h)Y | \mathcal{F}_t)}{M(t)}. \quad (4.37)$$

**Beweis.** Sei  $Z$  beschränkte  $\mathcal{G}$ -meßbare Zufallsvariable. Nach **Lemma 4.5.2.1 (b)** erfolgt

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}_t(YZ) &= \mathbb{E}(M_T Y Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_T Y Z) | \mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}((M_T Y | \mathcal{G}) Z)) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}(M_T Y | \mathcal{G})}{\mathbb{E}(M_T | \mathcal{G})} \mathbb{E}(M_T | \mathcal{G}) Z\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}(M_T Y | \mathcal{G})}{\mathbb{E}(M_T | \mathcal{G})} M_T Z | \mathcal{G}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}(M_T Y | \mathcal{G})}{\mathbb{E}(M_T | \mathcal{G})} M_T Z\right) \\ &= \tilde{\mathbb{E}}_t\left(\frac{\mathbb{E}(M_T Y | \mathcal{G})}{\mathbb{E}(M_T | \mathcal{G})} Z\right),\end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache verwendet haben, daß  $\mathbb{E}[(M_T Y | \mathcal{G}) Z] / \mathbb{E}(M_T | \mathcal{G})$   $\mathcal{G}$ -meßbar ist.  $\square$

Für  $t \leq \infty$ ,  $\{M(v)^{-1}, 0 \leq v < t\}$  ist ein Martingal unter  $\tilde{\mathcal{P}}_t$ . Tatsächlich impliziert (42)

$$\tilde{\mathbb{E}}_t[M(v+h)^{-1} | \mathcal{F}_v] = \frac{\mathbb{E}[M(v+h)M(v+h)^{-1} | \mathcal{F}_v]}{M(v)} = M(v)^{-1}$$

für alle  $t \geq v+h \geq v$ . Außerdem, folgt nach **Lemma 4.5.2.1 (b)**

$$\tilde{\mathbb{E}}_t[M(0)^{-1}] = \mathbb{E}[M(0)^{-1}M(0)] = 1.$$

Das Martingal  $\{M(v)^{-1}, 0 \leq v < t\}$ , kann für einen Maßwechsel  $\tilde{\mathcal{P}}_t$  zu  $\mathcal{P}_t$  verwendet werden. Es folgt dann leicht, auf  $\mathcal{F}_t$ ,

$$\widetilde{\left(\tilde{\mathcal{P}}_t\right)}_t = \mathcal{P}_t, \quad t \leq \infty. \quad (4.38)$$

Sei nun  $\{S(t)\}$  ein stochastischer Prozess, z.B. es kann auch der Überschussprozess sein, und nehmen wir an, daß  $\tilde{\mathcal{P}}$  existiert. Wir interpretieren dann  $\{S(t)\}$  als allgemeinen Überschussprozess. Angenommen, es existiert ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger Prozess  $\{V(t)\}$ , für welche  $\{M(t)\}$ , gegeben durch  $M(t) = \exp\{s[S(t) - g(V(t))]\}$ , ein Martingal ist, für einige  $s \in \mathbb{R}$  und für eine meßbare Funktion  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $d \geq 1$ . O.B.d.A. gehen wir davon aus, daß  $g$  so gewählt wird, daß  $\mathbb{E}(M(0)) = 1$  ist. Weiterhin sei davon ausgegangen, daß der Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem die Prozesse  $\{S(t)\}$  und  $\{V(t)\}$  so definiert sind, daß die erste Eintrittszeit  $T(u) = \inf\{t \geq 0, S(t) > u\}$  eine Stopzeit ist, und  $S_{T(u)}, V_{T(u)}$  sind definierte Zufallsvariablen. Betrachten wir jetzt die Ruinwahrscheinlichkeit  $\psi(u; x) = \mathcal{P}(T(u) \leq x)$  und  $\psi(u) = \mathcal{P}(T(u) < \infty)$ . Durch den Maßwechsel  $\tilde{\mathcal{P}}$ , mit (4.38), und **Lemma 4.5.2.1**

(b) angewandt auf  $\tilde{\mathcal{P}}$  und durch Maßwechsel  $\widetilde{\left(\tilde{\mathcal{P}}\right)} = \mathcal{P}$  ergibt sich

$$\psi(u; x) = \tilde{\mathbb{E}}[e^{-sS(T(u))+su+g(V(T(u)))}; T(u) \leq x] e^{-su}. \quad (4.39)$$

Insbesondere gilt auch

$$\psi(u) = \tilde{\mathbb{E}}[e^{-sS(T(u))+su+g(V(T(u)))}; T(u) \leq \infty] e^{-su}. \quad (4.40)$$

Die letzte Formel ist besonders nützlich, wenn  $s$  so gewählt wird, sodaß der Ruin fast sicher unter dem Maß  $\tilde{\mathcal{P}}$  auftritt. In Diesem Fall ist

$$\psi(u) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{-sS(T(u))+su+g(V(T(u)))})e^{-su}. \quad (4.41)$$

Wenn  $s > 0$ , dann ist eine Obergrenze für die Ruinenwahrscheinlichkeit  $\psi(u)$  gegeben durch

$$\psi(u) < \tilde{\mathbb{E}}(e^{g(V(T(u)))})e^{-su}.$$

Allerdings, wird in den meisten Fällen das schwierigste Problem sein, eine Schätzung für  $\tilde{\mathbb{E}}(e^{g(V(T(u)))})$  zu finden.

### 4.5.3 Spezieller exponentieller Maßwechsel Modell

In diesem Abschnitt betrachten wir den kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , des Überschussprozesses  $\{U(t)\}$  in dem zusammengesetzten Poisson-Prozess, wobei  $\Omega$  (Borel) Teilmenge von  $D(\mathbb{R}_+)$ , bestehend aus allen möglichen Pfaden von  $\{U(t)\}$  ist und  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ . Sei  $\{\mathcal{F}_t\}$  die (unvollständige) Geschichte von  $\{U(t)\}$ . Wir bezeichnen mit  $W_n, Y_n$  die Wartezeiten und Sprunghöhen.  $\{W_n\}$  sind im zusammengesetzten Poisson Model eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit gemeinsamer exponential Verteilung  $Exp(\lambda)$  unabhängig von  $\{Y_n\}$ . Es ist ziemlich offensichtlich, daß für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  eine  $\mathcal{F}_t$ -Stoppzeit ist.

Sei  $s \in \mathbb{R}$  fix, sodaß  $\hat{f}(-s) < \infty$ . Für das Martingal  $\{M(t)\}$  gegeben durch

$$M(t) = \exp(-s(U(t) - u) - (\lambda(\hat{f}(-s) - 1) - ct)),$$

betrachten wir eine Familie von Wahrscheinlichkeitmaße  $\{\mathcal{P}_t^{(s)}, t \geq 0\}$  definiert wie in (4.35), bzw.

$$\mathcal{P}_t^{(s)}(A) = \mathbb{E}[M(t); A], \quad A \in \mathcal{F}_t,$$

vergleich mit [17].

**Lemma 4.5.3.1** [17] Für alle  $t \geq 0$  und  $A \in \mathcal{F}_t$ ,

$$\mathcal{P}^{(s)}(A) = \mathbb{E}[e^{-s(U(t)-u)-\theta(s)t}; A], \quad \theta(s) = \lambda(\hat{f}(-s) - 1) - c.$$

und

$$\mathcal{P}(A) = \mathbb{E}^{(s)}[e^{s(U(t)-u)+\theta(s)t}; A].$$

Außerdem, wenn  $T$  eine  $\{\mathcal{F}_t\}$ -Stoppzeit ist und  $A \subset \{T < \infty\}$ , sodaß  $A \in \mathcal{F}_t$  dann ist

$$\mathcal{P}^{(s)}(A) = \mathbb{E}[e^{-s(U(T)-u)-\theta(s)T}; A]$$

und

$$\mathcal{P}(A) = \mathbb{E}^{(s)}[e^{s(U(T)-u)+\theta(s)T}; A],$$

Die Maßwechsel Technik in **Lemma 4.5.3.1** ist ein mächtiges Werkzeug bei der Untersuchung von Ruinwahrscheinlichkeiten. Im vorliegenden Kapitel illustrieren wir das für das zusammengesetzte Poisson-Modell. Wir zeigen zuerst, daß unter dem Maß  $\mathcal{P}^{(s)}$  der Prozess  $\{U(t)\}$  ein Überschussprozess im zusammengesetzten Poisson-Modell bleibt. Aus Bequemlichkeit bezeichnen wir die ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsmaß mit  $\mathcal{P}^{(0)} = \mathcal{P}$ .

**Satz 4.5.3.1** [17] Sei  $s \in \mathbb{R}$ , sodaß  $\hat{f}(-s) < \infty$ . Betrachte die Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}^{(s)})$ . Dann sind die folgenden Aussagen wahr:

(a) Unter dem Maß  $\mathcal{P}^{(s)}$  ist der Prozess  $\{U(t)\}$  ein Überschussprozess im zusammengesetzten Poisson-Modell mit Prämie  $c$ , Intensität  $\lambda^{(s)} = \lambda \hat{f}(-s)$  und Schadehohenverteilung  $F_X^{(s)}(x) = \int_0^x e^{sy} dF_X(y) / \hat{f}(-s)$ . D.h.

$$\mathbb{E}^{(s)}(U(1)) - u = -\theta^{(1)}(s). \quad (4.42)$$

(b) Wenn  $s' \in \mathbb{R}$  ist, sodaß  $\hat{f}(-s') < \infty$  und  $s \neq s'$ , dann sind  $\mathcal{P}^{(s)}$  und  $\mathcal{P}^{(s')}$  singulär auf  $\mathcal{F}$ .

**Beweis.** (a) Da die Menge von Trajektorien des Überschusses unter den Maßen  $\mathcal{P}^{(0)}$  und  $\mathcal{P}^{(s)}$  gleich ist, ist klar, daß die Prämie  $c$  unter den Maßen liegt. Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest und seien  $B_i, B'_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Beachte, daß  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n W_i$  eine  $\{\mathcal{F}_t\}$ -Stoppzeit ist, die unter  $\mathcal{P}^{(0)}$  endlich ist. Also von **Lemma 4.5.3.1** bekommen wir

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}^{(s)} \left( \bigcap_{i=1}^n \{W_i \in B_i, Y_i \in B'_i\} \right) \\ &= \mathbb{E}^{(0)} \left[ \exp \left( s \sum_{i=1}^n Y_i \right) \exp \left( -\lambda(\hat{f}(-s) - 1) \sum_{i=1}^n W_i \right); \bigcap_{i=1}^n \{W_i \in B_i, Y_i \in B'_i\} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n (\mathbb{E}^{(0)}[e^{sY_i}; Y_i \in B'_i] \mathbb{E}^{(0)}[e^{-\lambda(\hat{f}(-s)-1)W_i}; W_i \in B_i]) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( \int_{B'_i} e^{sy} dF_X(y) / \hat{f}(-s) \int_{B_i} \lambda \hat{f}(-s) e^{-\lambda \hat{f}(-s)v} dv \right), \end{aligned}$$

und damit folgt der erste Teil der Behauptung. Der Ausdruck  $\mathbb{E}^{(0)}(U(1)) - u = c - (\lambda \hat{f}(-s))(f_1 / \hat{f}(-s)) = -\theta^{(1)}(s)$  wird erhalten aus (1.3), weil  $\mathbb{E}^{(0)}(Y_i) = \int_0^\infty e^{sy} dF_X(y) / \hat{f}(-s) = f_1(s) / \hat{f}(-s)$ . Um (b) zu beweisen, beachten wir (4.42) und aus dem Gesetz der großen Zahlen für additive Prozesse folgt daß

$$\mathcal{P}^{(s)} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}(U(t) - u) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}(U(t-) - u) = -\theta^{(1)}(s) \right) = 1,$$

wobei  $\{U(t-)\}$  die links-stetige Version von  $\{U(t)\}$  ist. Wähle die singuläre Maßen  $\mathcal{P}^{(s)}$  und  $\mathcal{P}^{(s')}$ , sodaß  $\theta^{(1)}(s) = \theta^{(1)}(s')$ . Wenn  $s = s'$ , da  $\theta(s)$  streng konvex ist, d.h.  $\theta^{(1)}(s)$  ist

streng wachsend für alle  $s > 0$ , dann ist  $\theta(s)$  beschränkt.  $\square$

Mit **Lemma 4.5.3.1** kann man nun zeigen, daß die Ruinwahrscheinlichkeiten  $\psi(u)$  und  $\psi(u; x)$  unter dem neuen Maß ausgedrückt werden können.

**Satz 4.5.3.2** [17] Für alle  $s \in \mathbb{R}$ , so daß  $\hat{f}(-s) < \infty$  gilt, haben wir

$$\psi(u) = \mathbb{E}^{(s)}[e^{sU(T)+\theta(s)T}; T < \infty]e^{-su} \quad (4.43)$$

und

$$\psi(u; x) = \mathbb{E}^{(s)}[e^{sU(T)+\theta(s)T}; T < x]e^{-su}. \quad (4.44)$$

#### 4.5.4 Cramér-Lundberg Approximation

In diesem Kapitel zeigen wir, wie man die Cramér-Lundberg Approximation  $\psi_{app}(u)$  gegeben in (4.34) zu  $\psi(u)$  erweitern kann. Nehmen wir an, daß der Anpassungskoeffizient  $R > 0$  existiert und  $\hat{f}(-R) < \infty$ . Zuerst beachten wir, daß (4.43) für  $s \neq R$  nicht so nützlich ist, da die gemeinsame Verteilung von  $U(t)$  und  $T$  gebraucht wird. Durch die Auswahl von  $s = R$ , können wir  $\theta(s)$  loswerden, sodaß  $\theta(s) = 0$ . Da die Funktion  $\theta(s)$  konvex ist, haben wir  $\theta^{(1)}(R) > 0$ . Aus dem **Satz 4.5.3.1** wissen wir, daß  $\mathbb{E}^{(s)}(U(1)) - u = -\theta^{(1)}(s)$  gilt, und wähle  $\mathcal{P}^{(R)}(T < \infty)$ . Die Verwendung von (4.43) ergibt

$$\psi(u) = e^{-Ru} \mathbb{E}^{(R)} \exp(RU(T)). \quad (4.45)$$

Durch Vergleich von (4.31) und (4.45), müssen wir noch zeigen

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{(R)} \left( \exp(RU(T)) \right) = (c - \lambda f_1)(\lambda \hat{f}(-R) - c)^{-1}.$$

Sei  $Z(u) = \mathbb{E}^{(R)} \exp(RU(T))$ ,  $T- = \inf\{t \geq 0 : U(t) < u\}$  und  $F(y) = \mathcal{P}^{(R)}(u - U(T-) \leq y)$ . Beachte daß  $T- \stackrel{d}{=} T$  und daß  $F$  *ladder-height* Verteilung an der ersten absteigenden Ladder-Epoche  $T-$  von  $U(t)$  ist. D.h. es gilt

$$\begin{aligned} Z(u) &= \mathbb{E}^{(R)} \left( \mathbb{E}^{(R)}(e^{RU(T)} | T-, U(T)) \right) \\ &= \mathbb{E}^{(R)} \left( \mathbb{E}^{(R)}(e^{RU(T)} | T-, U(T)) I(U(T-) \geq 0) \right) \\ &\quad + \mathbb{E}^{(R)} \left( \mathbb{E}^{(R)}(e^{RU(T)} | T-, U(T)) I(U(T-) < 0) \right) \\ &= \int_0^u Z(u-y) dF(y) + \int_0^\infty e^{R(u-y)} dF(y). \end{aligned}$$

Somit erfüllt die Funktion  $Z(u)$  die Erneuerungsgleichung

$$Z(u) = z(u) + \int_0^u Z(u-y) dF(y),$$

wobei  $z(u) = \int_u^\infty e^{R(u-y)} dF(y) = e^{Ru} \int_u^\infty e^{-Ry} dF(y)$ . Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z(u) du &= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{R(u-y)} dF(y) du = \int_0^\infty \int_0^y e^{R(u-y)} du dF(y) \\ &= \frac{1}{R} (1 - \mathbb{E}^{(R)} e^{RU(T)}) \\ &= \frac{1}{R} (1 - \mathbb{E}^{(0)} [e^{-RU(T)} e^{RU(T)}; T < \infty]) \\ &= \frac{1}{R} (1 - \mathcal{P}^{(0)}(T < \infty)) = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\lambda f_1}{Rc}\right) = \frac{c - \lambda f_1}{Rc}, \end{aligned}$$

wo wir  $\psi(0) = \frac{\lambda f_1}{c}$  in der letzten verwendet haben. Nach **Proposition B.1** folgt, daß  $z(u)$  direkt Riemann integrierbar ist. Um den **Satz. B.2** anzuwenden brauchen wir noch den Erwartungswert von der Ladder height Verteilung  $F$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{(R)}(-U(T)) &= \mathbb{E}^{(0)}[-U(T)e^{-RU(T)}; T < \infty] \\ &= \int_0^\infty ye^{Ry} \frac{\lambda}{c} (1 - F_X(y)) dy = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^v ye^{Ry} dy dF_X(v) \\ &= \frac{\lambda}{R^2 c} (R\hat{f}^{(1)}(-R) - (\hat{f}(-R) - 1)) = \frac{\lambda \hat{f}^{(1)}(-R) - c}{Rc}, \end{aligned}$$

wo wir  $\psi(0, x, y) = \frac{\lambda}{c} \int_{x+y}^\infty (1 - F_X(v)) dv$  in der zweiten Gleichung benutzt haben und die Definition von  $R$  (mit  $\theta(s) = 0$ ) in der letzten Gleichung. So erhält man nach **Satz B.2** und (4.31), siehe [17].

### 4.5.5 Asymptotisches Verhalten für allgemeine stetige Straffunktionen

**Satz 4.5.5.1** [2] Die gemeinsame Verteilung von  $(S(T-), S(T))$  ist gegeben durch die folgenden vier äquivalenten Aussagen:

- (a)  $\mathcal{P}(S(T-) > x, S(T) > y, T < \infty) = \lambda \int_{x+y}^\infty (1 - F_X(x)) dx$ ;
- (b) die gemeinsame Verteilung von  $(S(T-), S(T))$   $T < \infty$  gegeben, ist gleich wie die Verteilung von  $(VW, (1 - V)W)$ , wobei  $V, W$  unabhängig sind,  $V$  ist gleichverteilt auf  $(0, 1)$  und  $W$  hat die Verteilung  $F_W$  gegeben durch  $dF_W/dF_X(x) = x/f_1$ ;
- (c) die Randverteilung von  $S(T-)$  ist  $F_0$ , und die bedingte Verteilung von  $S(T)$  mit  $S(T-) = y$  ist gegeben durch  $\overline{F_0^{(y)}}(z) = \overline{F_0^{(y)}}(y + z)/\overline{F_0^{(y)}}(y)$ ;
- (d) die Randverteilung von  $S(T-)$  ist  $F_0$ , und die bedingte Verteilung von  $S(T-)$  mit  $S(T-) = z$  ist  $F_0^{(z)}$ .

**Beweis.** Für ein festes  $T^* > 0$ , definiere  $S_t^* = S_{T^*} - S_{T^*-t-}$  und es seien

$$\begin{aligned} A(z, T^*) &= \{S_t < 0, 0 < t < T^*, S_{T^*-} = -z\}, \\ C(z, T^*) &= \{S_t > -z, 0 < t < T^*, S_{T^*-} = -z\}, \\ C^*(z, T^*) &= \{S_t^* > -z, 0 < t < T^*, S_{T^*-}^* = -z\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathcal{P}(T \in (T^*, T^* + dT^*), -S(T-) \in (z, z + dz)) = \mathcal{P}(A(z, T^*)) \lambda \bar{F}_X(z) dz dT^*. \quad (4.46)$$

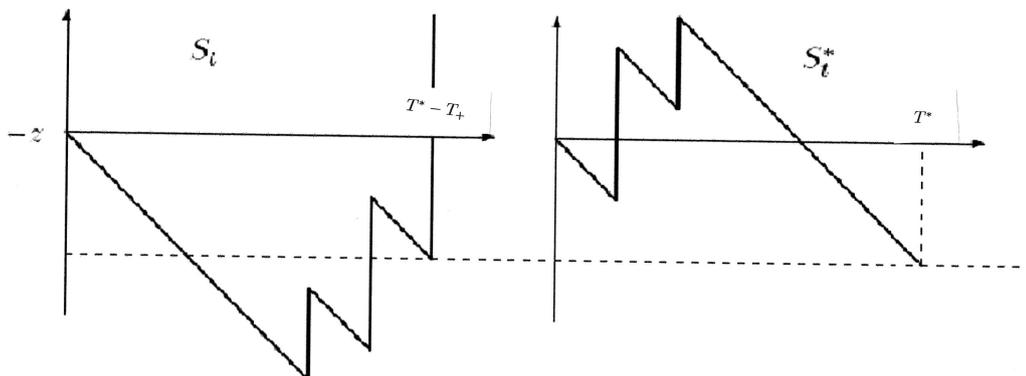


Abb. 3: (siehe [2])

Aber durch Stichprobenkontrolle (siehe Abb. 3),  $A(z, T^*) = C^*(z, T^*)$ , und da die  $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T^*}$ ,  $\{S_t^*\}_{0 \leq t \leq T^*}$  die gleiche Verteilung besitzen, haben wir also  $\mathcal{P}(A(z, T^*)) = \mathcal{P}(C(z, T^*))$ . Nach der Integration von (4.46) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S(T-) \in (z, z + dz), T < \infty) &= \lambda \bar{F}_X(z) dz \int_0^\infty \mathcal{P}(C(z, T^*)) dT^* \\ &= \lambda \bar{F}_X(z) dz \mathcal{P}(T_-(z) < \infty) = \lambda \bar{F}_X(z) dz. \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(S(T-) > x, S(T) > y, T < \infty) \\ &= \int_x^\infty \mathcal{P}(X > y + z | X > z) \mathcal{P}(S(T-) \in [z, z + dz], T < \infty) \\ &= \int_x^\infty \frac{\bar{F}_X(y + z)}{\bar{F}_X(z)} \lambda \bar{F}_X(z) dz = \lambda \int_x^\infty \bar{F}_X(y + z) dz = \lambda \int_{x+y}^\infty \bar{F}_X(z) dz, \end{aligned}$$

was die Behauptung des Satzes ist.  $\square$

**Bemerkung:** [2] Sei  $\hat{\psi}(s) = \int_0^\infty e^{-su} \psi(u) du$  die Laplace-Transformation der Ruinwahrscheinlichkeit. Offensichtlich ist die Laplace-Transformation von  $\psi(u)e^{Ru}$  gleich  $\hat{\psi}(s + R)$ . Da aus der Dämpfungseigenschaft von Laplace-Transformation, für jede Funktion  $f(u)$ , der Grenzwert  $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}(s)$  existiert, können wir auch die Konstante  $C$  in der Cramér-Lundberg-Approximation durch folgenden Ausdruck bestimmen

$$C = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{\psi}(s + R).$$

**Lemma 4.5.5.1** [2] Es sei  $w$  eine stetige Straffunktion. Wenn ein  $R > 0$  existiert, sodaß die zweite Lösung der Lundberg-Gleichung  $\xi_2 = -R$  ist, dann gilt folgendes

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) e^{Ru} = \tilde{C} = \frac{\lambda \int_0^\infty \int_z^\infty w(z, x - z) dF_X(x) (e^{Rz} - e^{-\rho z}) dz}{\lambda \hat{f}'(-R) - 1}.$$

**Beweis.**

Definiere  $\tilde{\phi}(u) = \phi(u) e^{Ru} = \mathbb{E}_R[e^{R|U(T-)|} w(U(T-), |U(T-)|)]$  und bezeichne mit  $H(x, y) = \mathcal{P}_R(U(T-) \leq x, |U(T-)| \leq y)$  die gemeinsame Verteilung vom Überschuss gleich vor Ruin und von der Defizit zum Ruinzeitpunkt unter der bekannte Maßnahme, daß der Risikoprozess beim  $u = 0$  startet. Unter dem neuen Maß folgt

$$\tilde{\phi}(u) = \int_0^u \tilde{\phi}(u - y) H(\infty, dy) + \int_{y=u}^\infty \int_{x=0}^\infty w(x + u, y - u) e^{-R(y-u)} H(dx, dy).$$

Das ist jetzt die richtige Erneuerungsgleichung für  $\tilde{\phi}(u)$  und nach **Proposition B.1**, müssen wir noch zeigen, daß der zweite Summand nach oben direkt Riemann integrierbar ist. Da  $w$  stetig ist, ist es genug zu zeigen, daß es eine direkt Riemann integrierbare Obergrenze gibt. Da  $R > 0$  und alle Momente der Verteilungsfunktion (und damit des Überschusses vor dem Ruin und dem Defizit beim Ruinzeitpunkt) existieren und im Hinblick auf  $\int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y) f_X(x + y) dx dy < \infty$  ist es dann genug zu zeigen, daß  $1 - H(\infty, y)$  Riemann integrierbar ist. Das folgt unmittelbar aus der Existenz von allen Momenten der Verteilungsfunktion  $F_X$ . Durch die Anwendung von **Proposition B.1** bleibt nur die Begrenzungskonstante  $\tilde{C}$  zu berechnen.

$$\tilde{C} = \frac{\int_0^\infty z(u) du}{f_1} = \frac{\int_{u=0}^\infty \int_{y=u}^\infty \int_{x=0}^\infty w(x + u, y - u) e^{-R(y-u)} H(dx, dy) du}{\int_0^\infty (1 - H(\infty, y)) dy}. \quad (4.47)$$

Der einfachste Weg, um den Wert von  $\tilde{C}$  zu identifizieren folgt nach der oben genannter Bemerkung und nach der Definition der Laplace-Transformation für Gerber-Shiu Funktionen haben wir  $\tilde{C} = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{\phi}(s+R)$ . Aber wir werden hier (4.47) direkt auswerten. Nach dem **Satz 4.5.5.1** gilt

$$\mathcal{P}(U(T-) \leq x, |U(T)| \leq y, T < \infty) = \lambda \int_{z=0}^x \int_{v=z}^{z+y} dF_X(v) dz. \quad (4.48)$$

Unter  $\mathcal{P}_R$  ist der Risikoprozess wieder ein zusammengesetzter Poisson Prozess mit Parameter  $\lambda_R = \lambda \hat{f}(-R)$  und  $f^{(R)} dx = \frac{e^{Rx}}{\hat{f}(-R)} f_X dx$ , sodaß die Sicherheitszuschlag negativ ist. Daher brauchen wir weitere exponentielle "Tilting" um den Faktor  $-(\rho + R)$ , um ein klassischer zusammengesetzter Poisson Prozess  $U_t^*$  mit positive Sicherheitszuschlag, Dichtefunktion  $f_X^*$  und Poisson Parameter  $\lambda^*$  zu erhalten. Dies führt zu

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \mathbb{E}[e^{(R+\rho)|U^*(T^-)|}; U^*(T^* -) \leq x, |U^*(T^*)| \leq y, T^* < \infty] \\ &= \lambda^* \int_{v=0}^y e^{(R+\rho)v} \int_{z=0}^x f_X^*(z+dv) dz \\ &= \lambda^* \int_0^x e^{-(R+\rho)z} \int_z^{z+y} e^{(R+\rho)v} f_X^* dv dz. \end{aligned}$$

Da  $\lambda^*$  und  $F_X^*$  mit  $\lambda$  und  $F_X$  durch exponentielle Tilting um  $-\rho$  verbunden sind, bekommen wir schließlich

$$H(x, y) = \lambda \int_0^x e^{-(R+\rho)z} \int_z^{z+y} e^{Rv} f_X dv dz.$$

Der Nenner von (4.47) ist dann durch Veränderung der Reihenfolge der Integration bestimmt,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - H(\infty, y)) dy &= \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{y+z}^\infty e^{Rv} f_X dv e^{-(R+\rho)z} dz dy \\ &= \frac{\lambda}{R+\rho} \left( \hat{f}'(R) - \frac{\hat{f}(-R) - \hat{f}(-\rho)}{R+\rho} \right) = \frac{\lambda \hat{f}'(-R) - 1}{R+\rho}. \end{aligned}$$

Ähnlich vereinfacht sich der Zähler von (4.47)

$$\lambda \int_{u=0}^\infty \int_{y=u}^\infty \int_{x=0}^\infty w(x+u, y-u) e^{-\rho x + Ru} F_X(x+dy) dx du$$

was schließlich zur Behauptung führt.  $\square$

# Kapitel 5

## Explizite Lösungen der Gerber Shiu Funktion

### 5.1 Der erste Überschuss unter dem Anfangsniveau

Im diesem Kapitel betrachten wir die Funktionen  $f(x|0)$  und  $f(x, y|0)$ , wobei

$$f(x|u) = \int_0^\infty f(x, y|u)dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} f(x, y, t|u)dt dy,$$

und  $f(x, y|0)$  in (4.3) definiert sind. Mit Anfangsüberschuss  $U(0) = u = 0$  können einige sehr explizite Ergebnisse betrachtet werden. Da  $\phi$  die Erneuerungsgleichung (4.11) erfüllt, es folgt

$$\phi(0) = h(0).$$

Durch einsetzen haben wir

$$\int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y) f(x, y|0) dx dy = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\rho x} w(x, y) f_X(x + y) dx dy.$$

Da diese Identität für eine beliebige Funktion  $w$  gilt, es folgt dann

$$f(x, y|0) = \frac{\lambda}{c} e^{-\rho x} f_X(x + y), \quad x > 0, y > 0.$$

Einige unmittelbare Konsequenzen können durch Integration über  $x, y$  oder beides erreicht werden:

1.

$$\int_0^\infty f(x, y|0) dx = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho x} f_X(x + y) dx = g(y);$$

2.

$$f(x|0) = \int_0^\infty f(x, y|0) dy = \frac{\lambda}{c} e^{-\rho x} \int_0^\infty f_X(x + y) dy = \frac{\lambda}{c} e^{-\rho x} [1 - F_X(x)];$$

3.

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = 0] = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y|0) dy dx = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho x} [1 - F_X(x)] dx.$$

Wenn  $\delta = 0$  ist, ist auch  $\rho = 0$  und es gilt

$$f(x, y|0) = f(y, x|0)$$

Für  $\delta > 0$  gilt die letzte Identität nicht mehr. Für  $\delta = 0$  reduziert sich die dritte Konsequenz auf die berühmte Formel

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - F_X(x)] dx = \frac{\lambda f_1}{c}. \quad (5.1)$$

Für  $\delta > 0$  können wir die letzte Konsequenz benutzen und da  $\rho$  die nichtnegative Lösung von  $\delta = c\xi - \lambda[1 - \hat{f}(\xi)] = \xi \left\{ c - \lambda \int_0^\infty e^{-\xi x} [1 - F_X(x)] dx \right\}$  ist, können wir sehen, daß es

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T | U(0)=0}] = \mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = 0] = 1 - \frac{\delta}{c\rho} \quad (5.2)$$

gilt. Die Formel (5.1) kann als Grenzfall von (5.2), wegen (4.23), betrachtet werden, siehe [9].

## 5.2 Explizite Lösung der Integro-Differential-Gleichung

In diesem Kapitel veranschaulichen wir einige Ergebnisse, die in früheren Abschnitten explizit abgeleitet wurden. Wir wollen Integro Differentialgleichung (4.4) für verschiedene Werte von  $w(x, y)$  graphisch darstellen.

Betrachten wir den Fall einer exponentiellen Verteilungsfunktion

$$f_X(x) = \beta e^{-\beta x}, \quad x \geq 0,$$

mit  $\beta > 0$  und  $c > \lambda/\beta$ . Die Zahl  $\rho$  ist  $\xi_1$  nichtnegative Lösung von Lundberg Fundamentalgleichung (4.6), für die gilt

$$\delta + \lambda - c\xi = \frac{\lambda\beta}{\beta + \xi},$$

bzw.

$$c\xi^2 + (c\beta - \delta - \lambda)\xi - \beta\delta = 0. \quad (5.3)$$

Daher ist

$$\rho = \xi_1 = \frac{\lambda + \delta - c\beta + \sqrt{(c\beta - \delta - \lambda)^2 + 4c\beta\delta}}{2c} > 0, \quad (5.4)$$

und damit auch

$$-R = \xi_2 = \frac{\lambda + \delta - c\beta - \sqrt{(c\beta - \delta - \lambda)^2 + 4c\beta\delta}}{2c} < 0, \quad (5.5)$$

wobei  $-R = \xi_2$  die negative Lösung der Lundberg Fundamentalgleichung ist. Sei  $\delta = 0$  dann ist  $\rho = \xi_1 = 0$ . Es gilt weiters

$$f(x, y|0) = \lambda\beta c^{-1} e^{-(\rho+\beta)x-\beta y} = \lambda c^{-1} e^{-(\rho+\beta)x} f_X(y);$$

$$g(y) = \frac{\lambda\beta}{c(\beta + \rho)} e^{-\beta y} = \frac{\lambda}{c(\beta + \rho)} f_X(y);$$

$f(x|0) = \lambda c^{-1} e^{-(\rho+\beta)x}$  und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = 0] &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y|0) dy dx = \frac{\lambda}{c(\beta + \rho)} \\ &= \frac{2\lambda}{c\beta + \delta + \lambda + \sqrt{(c\beta - \delta - \lambda)^2 + 4c\beta\delta}}. \end{aligned}$$

Eine Alternative zu der letzten Formel ist (5.2), die zugleich einfach und allgemein ist.

**Proposition 5.2.1** Sei  $\xi_2$  die negative Lösung von (5.3). Dann gilt

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u] = \mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = 0] e^{\xi_2 u}. \quad (5.6)$$

Durch die Anwendung von folgenden Gleichungen

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = 0] = \frac{\lambda}{c(\beta + \rho)}, \quad (5.7)$$

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u] = \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \psi(u, t) dt, \quad (5.8)$$

und (5.6) erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} \psi(u, t) dt = \frac{\lambda}{\delta c(\beta + \rho)} e^{\xi_2 u}. \quad (5.9)$$

wenn man (5.2) statt (5.7) anwendet, bekommen wir

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} \psi(u, t) dt = \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{c\rho}\right) e^{\xi_2 u}. \quad (5.10)$$

Schließlich merken wir, daß die Identität

$$f(x, y|u) = f(x|u) \frac{f_X(x+y)}{1 - F_X(x)}$$

vereinfacht werden kann

$$f(x, y|u) = f(x|u)f_X(y), \quad u \geq 0, x > 0, y > 0. \quad (5.11)$$

**Beweis von Proposition 5.2.1:** Wir betrachten den Fall einer Exponentialverteilung von  $f_X$ , d.h.  $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$ . Sei  $-R = \xi_2$  in (5.5) definiert. Durch die Anwendung von (5.11) in (4.27) erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{-Ru} &= \left[ \int_0^\infty e^{Ry} f_X(y) dy \right] \mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u] \\ &= \frac{\beta}{\beta - R} \mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u]. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u] = \frac{\beta - R}{\beta} e^{-Ru} \quad (5.12)$$

und damit folgt die Behauptung (5.6), siehe [9].  $\square$

Zu versöhnen (5.12) für  $u = 0$  mit (5.2), sollen wir, für  $\delta > 0$ , zeigen

$$\frac{R}{\beta} = \frac{\delta}{c\rho}. \quad (5.13)$$

Die Gleichung (5.13) gilt, weil das Produkt der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (5.3)  $-\beta\delta/c$  ist. Wir wollen weiter sehen, daß (5.12) mit (5.7) konsistent ist. Dann brauchen wir die Identität

$$\frac{\beta - R}{\beta} = \frac{\lambda}{c(\beta + \rho)}, \quad (5.14)$$

die wahr ist, wegen

$$c(\beta + \rho)(\beta - R) = c(-\beta)^2 + (c\beta - \delta - \lambda)(-\beta) - \beta\delta = \lambda\beta,$$

wobei  $\rho$  und  $-R$  die Wurzeln von (5.3) sind.

In dem besonderen Fall, in dem  $w(x, y) = w(y)$  unabhängig von  $x$  ist, können wir (5.11) und (5.12) anwenden um einen expliziten Ausdruck von  $\phi(u)$  zu erhalten:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \mathbb{E}[e^{-\delta T} w(|U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u] \\ &= \left[ \int_0^\infty w(y) f_X(y) dy \right] \mathbb{E}[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u] \\ &= \left[ \int_0^\infty w(y) e^{-\beta y} dy \right] (\beta - R) e^{-Ru} \\ &= \hat{w}(\beta) (\beta - R) e^{-Ru}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

und

$$\phi(u) = \phi(0)e^{-Ru}. \quad (5.16)$$

Außerdem, für  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\delta T} w(|U(T)|) \mid T < \infty \mid U(0) = u] &= \frac{\mathbb{E}[e^{-\delta T} w(|U(T)|) I(T < \infty) \mid U(0) = u]}{\mathbb{E}[I(T < \infty) \mid U(0) = u]} \\ &= \frac{\phi(u)}{\psi(u)} = \frac{\beta \hat{w}(\beta) [\beta - R(\delta)]}{\beta - R(0)} e^{-[R(\delta) - R(0)]u}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Wegen (5.14) können wir (5.16) im Bezug auf  $\rho(\delta)$  und  $\rho(0)$  umschreiben. Beachten wir, daß  $\rho(0) = 0$  ist und erhalten

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T} w(|U(T)|) \mid T < \infty, U(0) = u] = \beta \hat{w}(\beta) R'(0) \left[ \frac{1}{\beta - R(0)} + u \right], \quad (5.18)$$

die eine lineare Funktion in  $u$  ist. Der Anpassungskoeffizient  $R(0)$  ist gegeben durch

$$R(0) = \beta - \lambda c^{-1},$$

bzw.

$$\beta - R(0) = \lambda c^{-1}.$$

Aus (5.5) folgt

$$R'(0) = \frac{\lambda}{c(c\beta - \lambda)}.$$

Daher ist

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T} w(|U(T)|) \mid T < \infty, U(0) = u] = \frac{\lambda \beta \hat{w}(\beta)}{c(c\beta - \lambda)} \left[ \frac{c}{\lambda} + u \right]. \quad (5.19)$$

### 5.2.1 Illustrative Beispiele

Betrachten wir zuerst den Fall, wenn  $w(x, y) = 1$  ist. In diesem Fall ist Gerber-Shiu Funktion gleich der Ruinwahrscheinlichkeit, wobei  $\delta = 0$  ist und damit auch  $\rho = 0$ . Sei  $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$ . Wir wollen jetzt die explizite Lösung der Integro-Differentiagleichung (4.4) im Intervall  $[0, 5]$  graphisch darstellen. Wählen wir folgende Parametern aus:  $\lambda = 0.1$ ;  $c = 1$ ;  $\beta = 2$ .

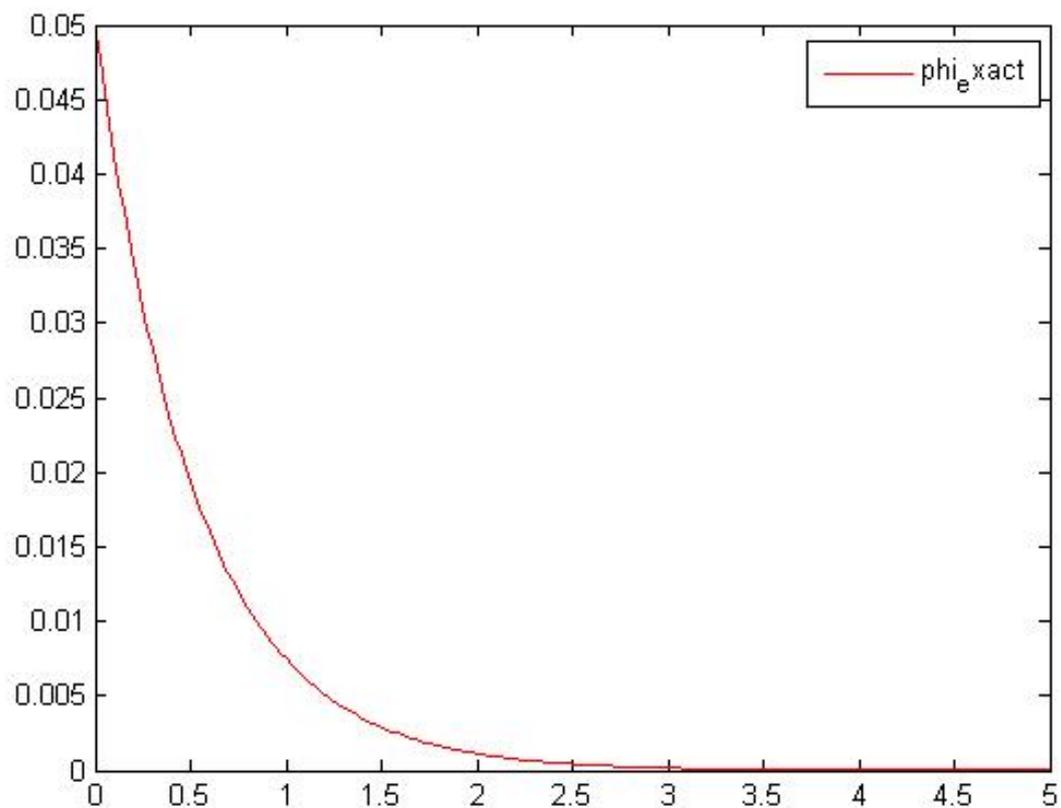


Abb. 1: Ruinwahrscheinlichkeit  $\phi(u) = \psi(u)$

Im nächsten Abbildung veranschaulichen wir eine Überlebenswahrscheinlichkeit  $1 - \psi(u)$ .

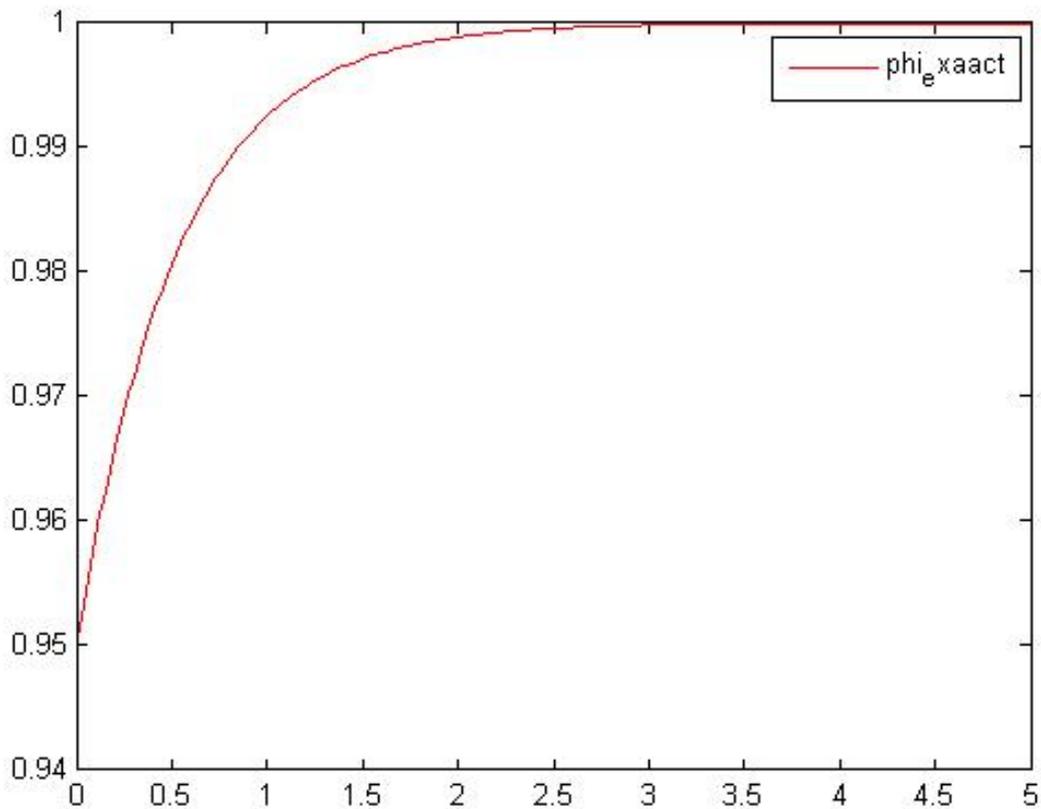


Abb. 2: Überlebenswahrscheinlichkeit  $\phi(u) = 1 - \psi(u)$

Als zweites Beispiel betrachten wir  $w(x, y) = w(y)$ , als Funktion die nur von Defizit abhängig ist. Sei zum Beispiel  $w(x, y) = e^{-\alpha y}$ ,  $\alpha > 0$ . Um explizite Lösung zu bekommen benutzen wir die Technik der Laplace-Transformation für Gerber-Shiu Funktion, die wir schon im Kapitel (4.3.2) hergeleitet haben. Um Gerber-Shiu Funktion  $\phi(u)$  zu berechnen werden wir jetzt die Gleichung (4.15) herleiten und dann mit Hilfe von Partialbruchzerlegung Rücktransformieren. Sei wieder  $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$  die Dichte einer Exponentialverteilung mit ihre Laplace-Transformierte, die folgendermaßen gegeben ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \beta \int_0^{\infty} e^{-\xi x} e^{-\beta x} dx = \beta \int_0^{\infty} e^{-(\xi+\beta)x} dx \\ &= \frac{\beta}{\xi + \beta}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \xi + \beta > 0. \end{aligned}$$

Zuerst betrachten wir den Nenner der Gleichung (4.15).

$$\begin{aligned}
 \lambda[1 - \hat{f}(\xi)] + \delta - c\xi &= \lambda - \frac{\lambda\beta}{\xi + \beta} + \delta - c\xi \\
 &= \frac{\lambda(\xi + \beta) - \lambda\beta + (\delta - c\xi)(\xi + \beta)}{\xi + \beta} \\
 &= \frac{-c\xi^2 + (\lambda + \delta - c\beta)\xi + \delta\beta}{\xi + \beta}, \quad \beta > -\xi,
 \end{aligned}$$

wobei

$$-c\xi^2 + (\lambda + \delta - c\beta)\xi + \delta\beta = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2),$$

mit

$$\xi_{1,2} = -\frac{c\beta - \lambda - \delta \pm \sqrt{(\lambda + \delta - c\beta)^2 + 4c\delta\beta}}{4c}. \quad (5.20)$$

Jetzt berechnen wir auch die Zähler der Gleichung (4.15).

$$\begin{aligned}
 \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-\xi u} - e^{-\rho u})w(x, y)f_X(u + y)dudy &= \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-\xi u} - e^{-\rho u})e^{-\alpha y}\beta e^{-\beta(u+\beta)}dudy \\
 &= \lambda\beta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\xi+\beta)u}e^{-(\alpha+\beta)y}dudy \\
 &\quad - \lambda\beta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\rho+\beta)u}e^{-(\alpha+\beta)y}dudy \\
 &= \frac{\lambda\beta}{\xi + \beta} \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)y}dy \\
 &\quad - \frac{\lambda\beta}{\rho + \beta} \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)y}dy \\
 &= \frac{\lambda\beta}{(\xi + \beta)(\alpha + \beta)} - \frac{\lambda\beta}{(\rho + \beta)(\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{\lambda\beta(\rho + \beta) - \lambda\beta(\xi + \beta)}{(\xi + \beta)(\rho + \beta)(\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{\lambda\beta(\rho - \xi)}{(\xi + \beta)(\rho + \beta)(\alpha + \beta)}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt lautet die Laplace-Transformation von  $\phi(u)$

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\lambda\beta(\rho - \xi)}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}. \quad (5.21)$$

Um  $\phi(u)$  zu bekommen müssen wir die Gleichung (5.21) mit Hilfe von Partialbruchzerlegung Rücktransformieren, d.h.

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{A_1}{\xi - \xi_1} + \frac{A_2}{\xi - \xi_2} \quad (5.22)$$

und damit auch

$$\phi(u) = A_1 e^{\xi_1 u} + A_2 e^{\xi_2 u}. \quad (5.23)$$

Wir bestimmen jetzt die Koeffizienten  $A_1$  und  $A_2$ , d.h.

$$\frac{\lambda\beta(\rho - \xi)}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)} = \frac{A_1}{\xi - \xi_1} + \frac{A_2}{\xi - \xi_2}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\lambda\beta\rho}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)} - \frac{\lambda\beta}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)}\xi = (A_1 + A_2)\xi - \xi_2 A_1 - \xi_1 A_1$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

**I**

$$A_1 + A_2 = -\frac{\lambda\beta}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)} = -\frac{\lambda\beta}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)} - A_2.$$

$$A_1 = -\frac{\lambda\beta}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)} - A_2. \quad (5.24)$$

**II**

$$-\xi_2 A_1 - \xi_1 A_2 = \frac{\lambda\beta\rho}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)}.$$

Durch einsetzen von  $A_1$  aus der Gleichung (5.24) in der Gleichung **II** können wir auch  $A_2$  ausdrücken. D.h

$$-\xi_2\left(-\frac{\lambda\beta}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)} - A_2\right) - \xi_1 A_2 = \frac{\lambda\beta\rho}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)}$$

$$(\xi_2 - \xi_1)A_2 = \frac{\lambda\beta\rho - \lambda\beta\xi_2}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)},$$

und damit ist

$$A_2 = \frac{\lambda\beta(\rho - \xi_2)}{(\alpha + \beta)(\rho + \beta)(\xi_2 - \xi_1)}. \quad (5.25)$$

Schließlich haben wir unsere explizite Lösung von Gerber-Shiu Funktion (5.23), wobei  $\xi_{1,2}$  in (5.20),  $A_1$  in (5.24) und ( $A_2$ ) in (5.25) definiert sind.

Wir schauen jetzt ein konkretes Beispiel für  $w(x, y) = e^y$ . In diesem Fall setzen wir  $\alpha = 1$ . Weitere Parameter haben wir folgendermaßen ausgewählt:  $\lambda = 0.1$ ;  $\delta = 0.05$ ;  $c = 1$ ;  $\beta = 2$ . In diesem Fall die positive Lösung der Lundberg Gleichung beträgt:  $\rho = 0.0526$ . Unsere explizite Gerber-Shiu Funktion ist

$$\phi(u) = 0.0325 * e^{-1.9026u},$$

wobei  $\xi_1 = -1.9026$ ;  $\xi_2 = 0.0526$ ;  $A_1 = 0.0325$ ;  $A_2 = 0$  sind. Graphisch schaut die Funktion  $\phi(u) = 0.0325 * e^{-1.9026u}$  folgendermaßen aus:

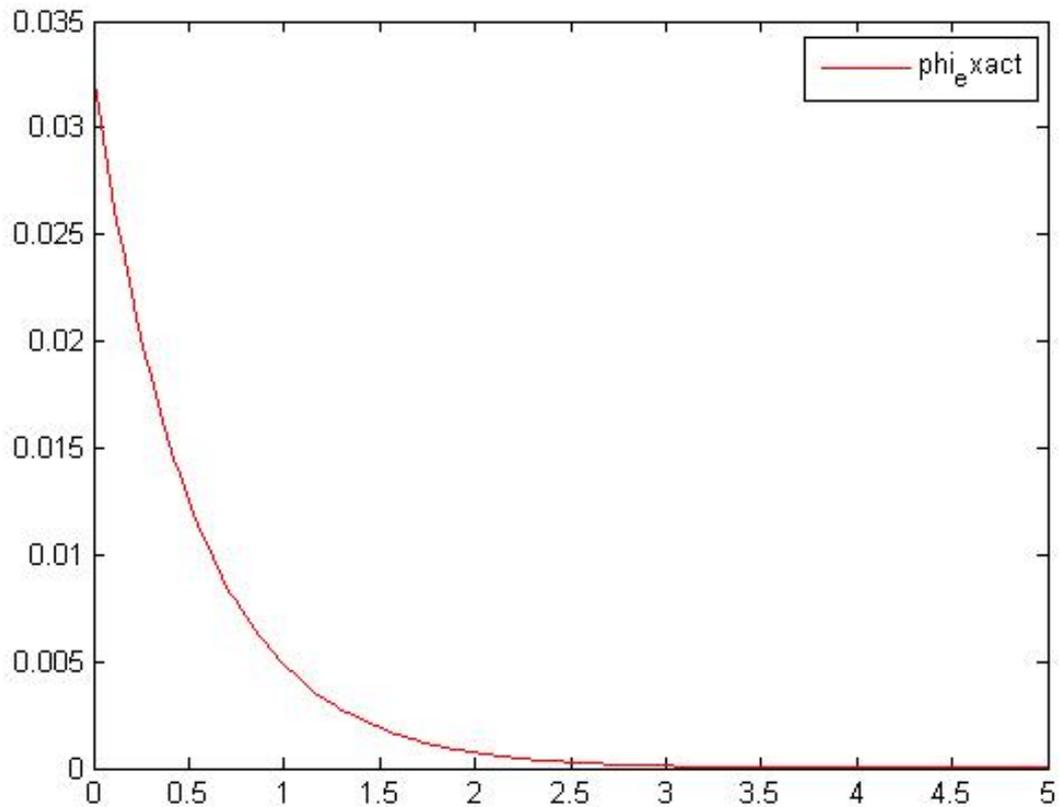


Abb. 3: Gerber-Shiu Funktion für  $w(x, y) = e^y$

Die nächste Graphik zeigt uns die Gerber-Schiu Funktion für eine spezielle Auswahl von  $\alpha = \rho$ , wobei  $\rho$  die positive Lösung von Loundberg Gleichung ist. In diesem Fall ist unsere Straffunktion  $w(x, y) = e^{\rho y}$  und die andere Parameter sind gleich wie im letzten Beispiel ausgewählt. Schließlich haben wir folgende explizite Gerber-Shiu Funktion

$$\phi(u) = 0.0081e^{-1.9026u},$$

wobei  $\rho = 0.0526$ ;  $\xi_1 = -1.9026$ ;  $\xi_2 = 0.0526$ ;  $A_1 = 0.0081$ ;  $A_2 = 0$ .

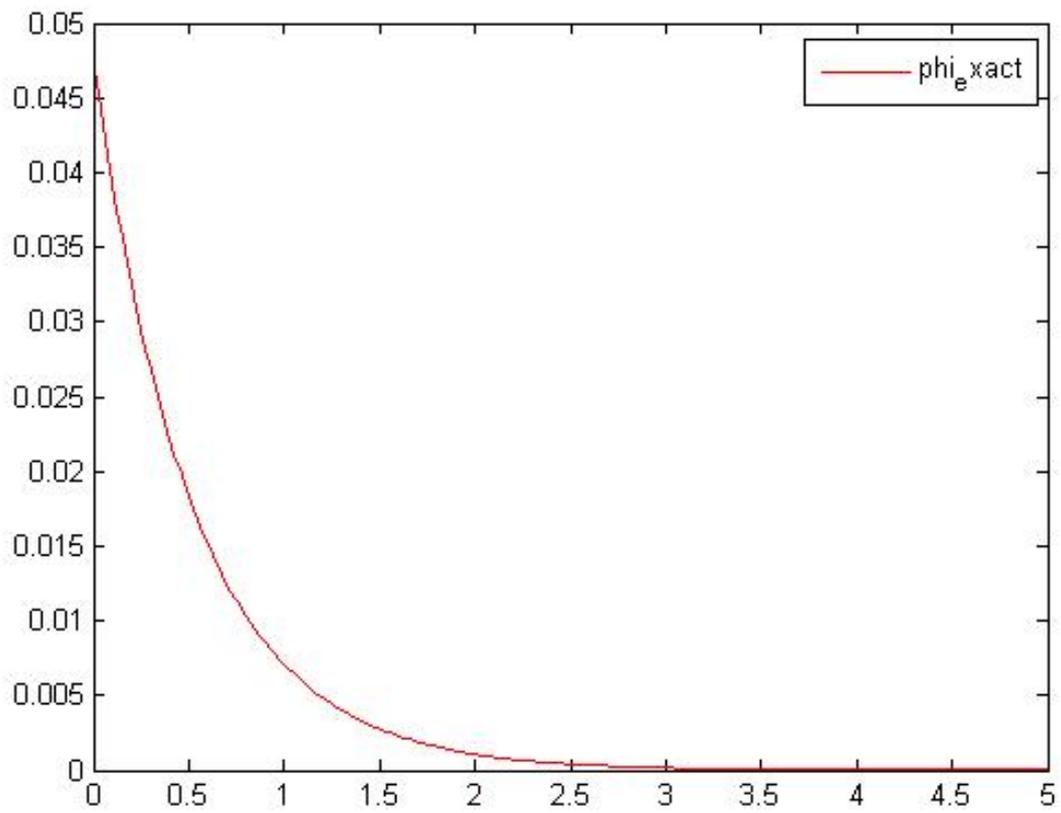


Abb. 4: Gerber-Shiu Funktion für  $w(x, y) = e^{\rho y}$

# Kapitel 6

## Numerische Approximation von Gerber-Shiu Funktion

### 6.1 Finite Differenzen Methode für Integro-Differentialgleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir Integro-Differential Gleichung (4.4)

$$c\phi'(u) = (\delta + \lambda)\phi(u) - \lambda \int_0^u \phi(u-x)dF_X(x) - \lambda A(u),$$

mit folgende Randbedingungen

$$\phi(u_0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho u} A(u) du,$$

und

$$\phi(u_N) = \phi(u_K) \sim \tilde{C}e^{-Ru},$$

und approximieren die Lösung durch numerische Integration und numerische Differentiation.

Wir unterteilen das Intervall der Integration  $(0, u)$  bzw.  $[0, N]$  in  $K$  gleich Lange Subintervalle mit

$$h = \frac{u_K}{K}, \quad K \geq 1,$$

wobei  $u_K = u_N$  der Endpunkt ist, den wir für  $u$  wählen. Wir setzen  $t_0 = 0$  und  $t_k = t_0 + kh$ . Wir werden entweder  $t$  oder  $u$  als die unabhängige Variable für die Lösung  $\phi(u)$  verwenden. D.h.  $u_0 = t_0 = 0$ ;  $u = u_N = t_N$ ;  $u_k = ih = t_k$ . Den approximativen Wert der Lösung  $\phi(u)$  in  $u_k$  oder in  $t_k$  bezeichnen wir mit  $\phi(t_k) = \phi(u_k)$ . Wir bezeichnen den Anfangswert von (4.4)

mit  $\phi(u_0) = \phi_0$  und den Endwert mit  $\phi(u_K) = \phi_K$  (siehe [16]). Wir wollen jetzt die Integro-Differentialgleichung (4.4) umschreiben, um Finite-Differenzen Methode anzuwenden. Die Gleichung (4.4) ist diskretisiert zu

$$c \frac{\phi(u_{k+1}) - \phi(u_k)}{h} - (\delta + \lambda)\phi(u_{k-1}) + \lambda \sum_{l=1}^k \phi(u_{k-l})(F_X(u_{l+1}) - F_X(u_l)) = -\lambda A(u_k), \quad (6.1)$$

wobei  $F_X$  die Verteilungsfunktion ist,  $1 \leq k \leq K$ , wobei  $K$  die Anzahl der Teilintervalle des Intervalls  $[0, N]$  ist und  $A(u) = \int_0^\infty w(u, y)f_X(u + y)dudy$ . Durch multiplizieren der Gleichung (6.1) mit  $h > 0$  und durch dividieren mit  $c \neq 0$  erhalten wir

$$\phi(u_{k+1}) - \phi(u_k) - \frac{h(\delta + \lambda)}{c}\phi(u_k) + \frac{\lambda h}{c} \sum_{l=1}^k \phi(u_{k-l})(F_X(u_{l+1}) - F_X(u_l)) = -\frac{\lambda h}{c}A(u_k). \quad (6.2)$$

Um (80) übersichtlicher zu schreiben, setzen wir  $a := \frac{h(\delta + \lambda)}{c}$  und  $b := \frac{\lambda h}{c}$ . Die Gleichung (6.2) ist nun äquivalent zu

$$\phi(u_{k+1}) - (1 + a)\phi(u_k) + b \sum_{l=1}^k \phi(u_{k-l})(F_X(u_{l+1}) - F_X(u_l)) = -bA(u_k). \quad (6.3)$$

Jetzt nutzen wir die Finiten-Differenzen Methode

$$k = 1 : \quad \phi(u_2) - (1 + a)\phi(u_1) = -b(A(u_1) + \phi_0(F_X(u_2) - F_X(u_1))),$$

$$k = 2 : \quad \begin{aligned} \phi(u_3) - (1 + a)\phi(u_2) + b(F_X(u_2) - F_X(u_1))\phi(u_1), \\ = -b(A(u_2) + \phi_0(F_X(u_3) - F_X(u_2))) \end{aligned}$$

$$k = 3 : \quad \begin{aligned} \phi(u_4) - (1 + a)\phi(u_3) + b(F_X(u_2) - F_X(u_1))\phi(u_2) \\ + b(F_X(u_3) - F_X(u_2))\phi(u_1) \\ = -b(A(u_3) + \phi_0(F_X(u_4) - F_X(u_3))), \end{aligned}$$

⋮

$$k = K - 2 : \quad \begin{aligned} \phi(u_{K-1}) - (1 + a)\phi(u_{K-2}) + b(F_X(u_2) - F_X(u_1))\phi(u_{K-3}) + \dots \\ + b(F_X(u_{K-2}) - F_X(u_{K-1}))\phi(u_1) = -b(A(u_{K-2}) + \phi_0(F_X(u_{K-1}) - F_X(u_{K-2}))), \end{aligned}$$

$$k = K - 1 : \quad \begin{aligned} \phi(u_K) - (1 + a)\phi(u_{K-1}) + b(F_X(u_2) - F_X(u_1))\phi(u_{K-2}) + \dots \\ + b(F_X(u_{K-1}) - F_X(u_{K-2}))\phi(u_1) = -b(A(u_{K-1}) + \phi_0(F_X(u_K) - F_X(u_{K-1}))), \end{aligned}$$

$$k = K : \quad \begin{aligned} \phi(u_{K+1}) - (1 + a)\phi(u_K) + b(F_X(u_2) - F_X(u_1))\phi(u_{K-1}) + \dots \\ + b(F_X(u_K) - F_X(u_{K-1}))\phi(u_1) = -b(A(u_K) + \phi_0(F_X(u_{K+1}) - F_X(u_K))). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Das System (6.4) besteht aus  $K$  Gleichungen und kann in die folgende Matrixform geschrieben werden  $M\phi = y$ , wobei

$$M = \begin{pmatrix} -(1+a) & 1 & 0 & \dots & 0 \dots & 0 \\ b(F_X(u_2) - F_X(u_1)) & -(1+a) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b(F_X(u_{K-2}) - F_X(u_{K-1})) & \dots & \dots & -(1+a) & 1 & 0 \\ b(F_X(u_{K-1}) - F_X(u_{K-2})) & \dots & \dots & \dots & -(1+a) & 1 \\ b(F_X(u_K) - F_X(u_{K-1})) & \dots & \dots & \dots & \dots & -(1+a) \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{K-1} \\ \phi_K \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -b(A(u_1) + \phi_0(F_X(u_2) - F_X(u_1))) \\ -b(A(u_2) + \phi_0(F_X(u_3) - F_X(u_2))) \\ \vdots \\ -b(A(u_{K-1}) + \phi_0(F_X(u_K) - F_X(u_{K-1}))) \\ -b(A(u_K) + \phi_0(F_X(u_{K+1}) - F_X(u_K))) \end{pmatrix},$$

wobei  $\phi_k = \phi(u_k)$  für  $k = 1, \dots, K$ .

Um die genauere Lösungen zu bekommen, sollen die Randwerte für die Gerber-Shiu Funktion  $\phi(u)$  betrachtet werden. Wir haben im Kapitel 4 die Randwerte bestimmt, die wir jetzt für das Finite-Differenzen Verfahren ausnutzen. Der Anfangswert für  $u = 0$  wird mit  $\phi_0$  bezeichnet und beträgt

$$\phi_0 = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho u} A(u) du. \quad (6.5)$$

Der Endwert für  $u = u_K$  ist

$$\phi_K \sim \tilde{C} e^{-Ru}, \quad (6.6)$$

wobei  $\tilde{C}$  in (4.47) definiert ist. Für den Fall einer Exponentialverteilungsfunktion haben wir folgende Ausdrücke. Zuerst für den Fall, wenn die Straffunktion  $w(x, y) = 1$  ist. Durch einsetzen von  $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$  und  $w(x, y) = 1$  in (4.47) erhalten wir

$$\tilde{C} = \frac{\frac{\lambda}{\beta-R} - \frac{\lambda}{\beta+\rho}}{-\frac{\lambda\beta}{(\beta+R)^2} - 1}. \quad (6.7)$$

Wenn die Straffunktion  $w$  nur von Defizit abhängt, d.h.  $w(x, y) = e^{-\alpha y}$ ,  $\alpha > 0$  erhalten wir die folgende Konstante

$$\tilde{C} = \frac{\frac{\beta\lambda}{\beta-\lambda} \left[ \frac{\lambda}{\beta-R} - \frac{\lambda}{\beta+\rho} \right]}{-\frac{\lambda\beta}{(\beta+R)^2} - 1}. \quad (6.8)$$

Durch die oben definierte Randbedingungen entsteht ein neues Gleichungssystem  $M\phi = y$ , mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \dots & 0 \\ b(F_X(u_2) - F_X(u_1)) & -(1+a) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b(F_X(u_{K-2}) - F_X(u_{K-1})) & \dots & \dots & -(1+a) & 1 & 0 \\ b(F_X(u_{K-1}) - F_X(u_{K-2})) & \dots & \dots & \dots & -(1+a) & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{K-1} \\ \phi_K \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho u} A(u) du \\ -b(A(u_2) + \phi_0(F_X(u_3) - F_X(u_2))) \\ \vdots \\ -b(A(u_{K-1}) + \phi_0(F_X(u_K) - F_X(u_{K-1}))) \\ \tilde{C}e^{-Ru} \end{pmatrix}.$$

Wir können jetzt unsere numerische Lösungen graphisch darstellen. Betrachten wir zuerst den Fall einer Ruinwahrscheinlichkeit, d.h. wenn  $w(u, y) = 1$ . Die weitere Parametern sind wie im exakten Fall ausgewählt.

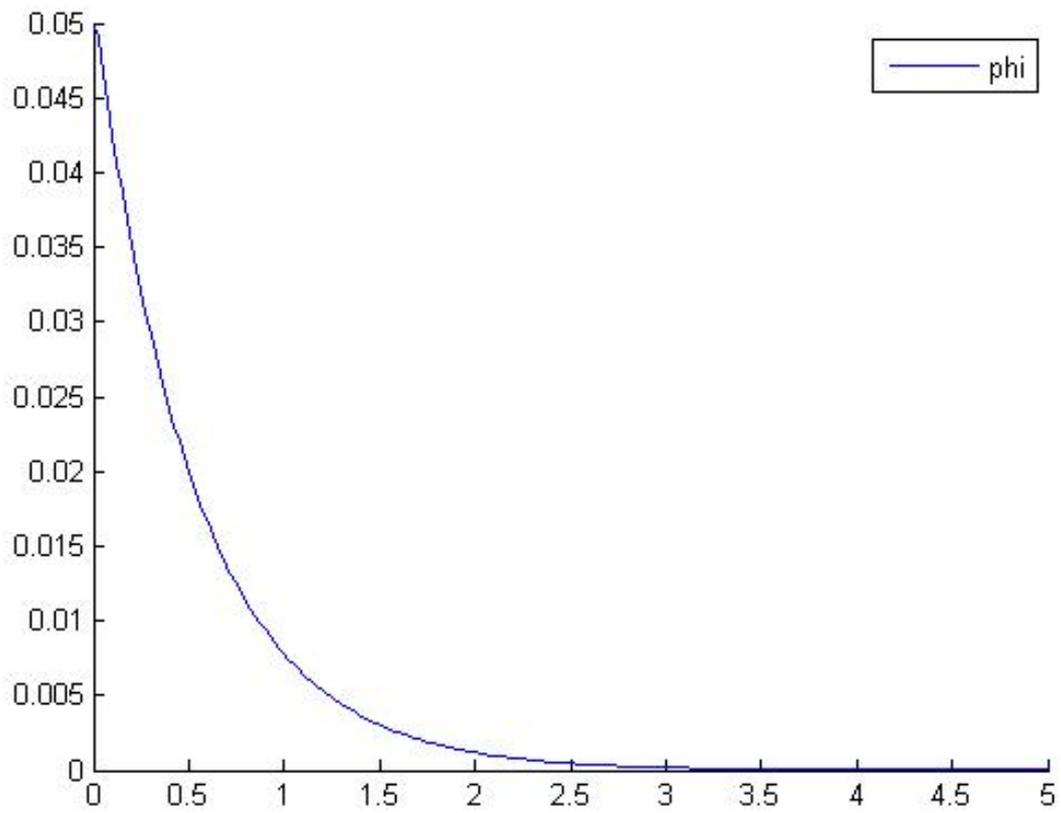


Abb. 1: Numerische Darstellung einer Ruinwahrscheinlichkeit  $\phi(u) = \psi(u)$

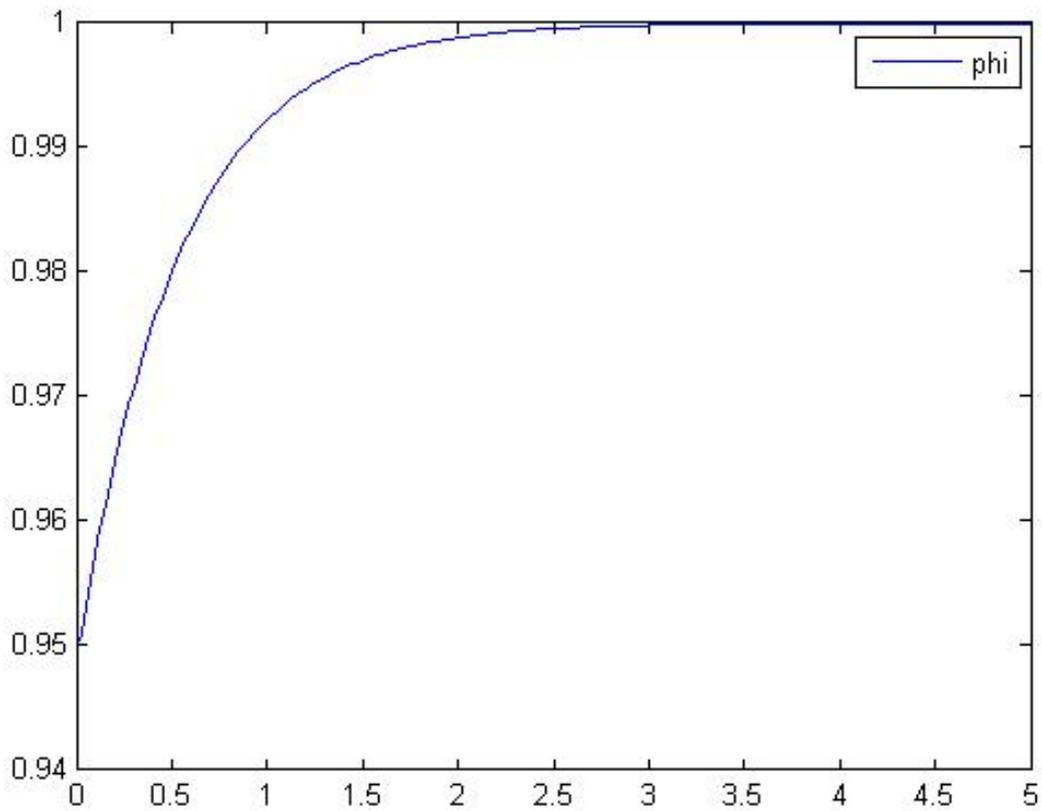


Abb. 2: Numerische Darstellung einer Überlebenswahrscheinlichkeit  $\phi(u) = 1 - \psi(u)$

In folgenden Graphiken wollen wir die expliziten Ergebnissen aus dem Kapitel 5.2.1 mit den numerischen für den Fall der Ruinwahrscheinlichkeit vergleichen.

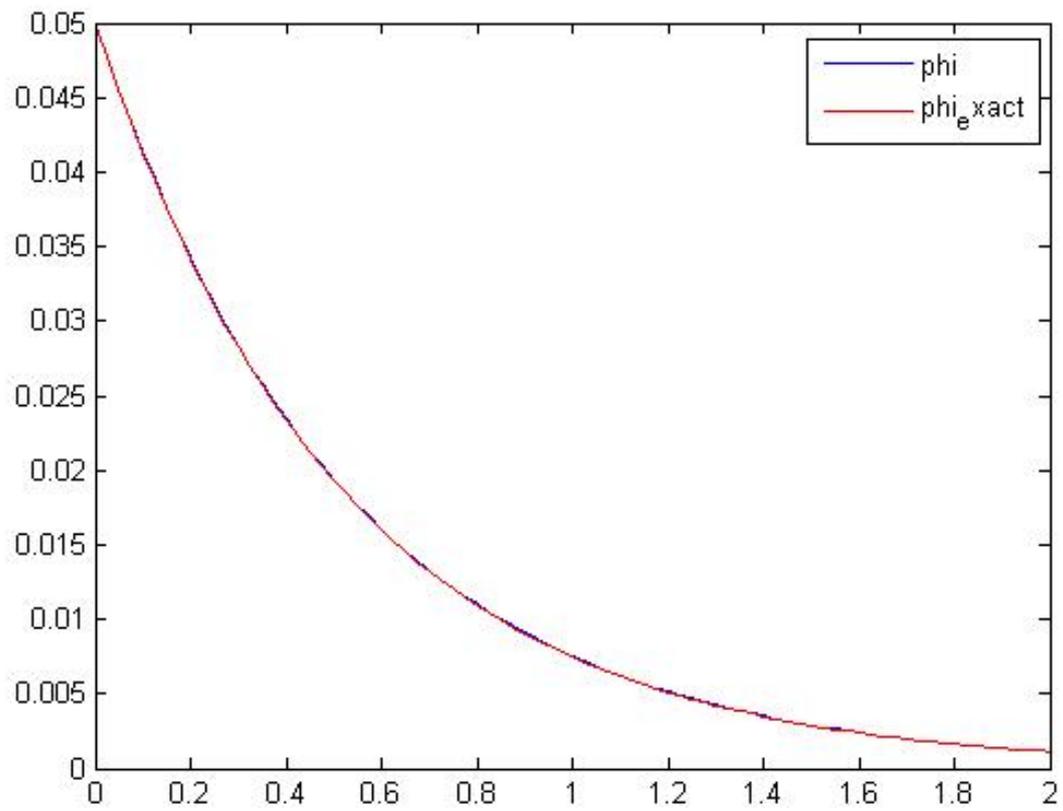


Abb. 3: Explizite vs. numerische Lösung für den Fall  $\phi(u) = \psi(u)$

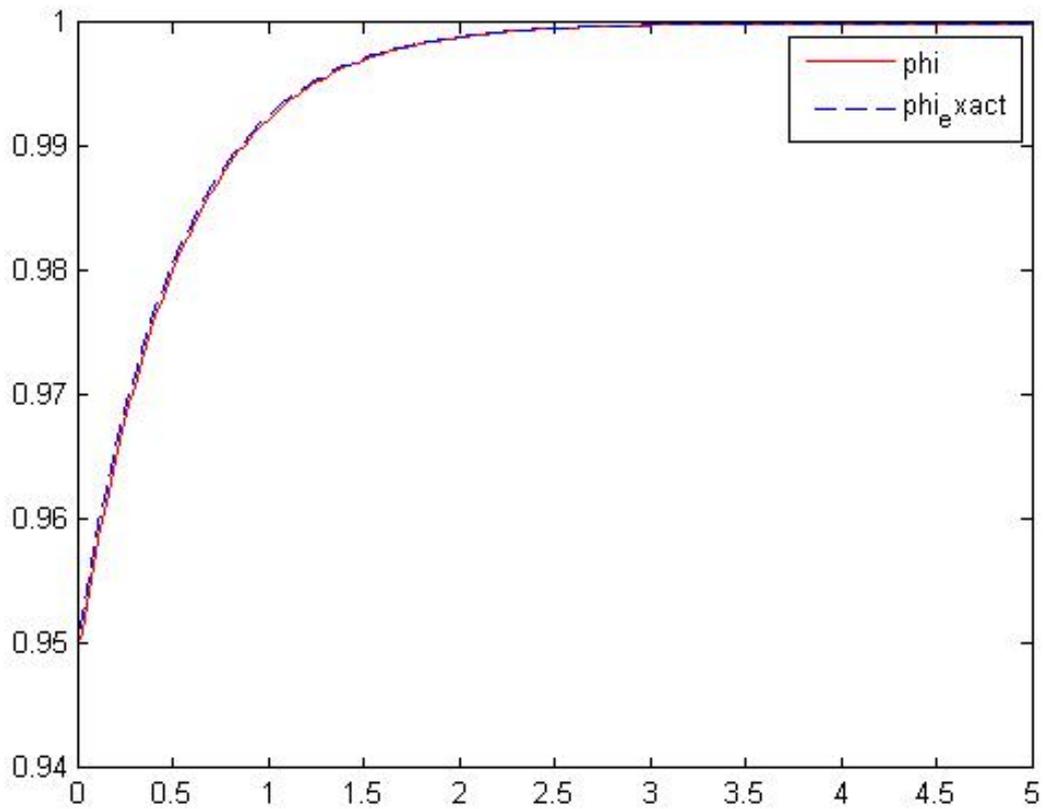


Abb. 4: Explizite vs. numerische Lösung für den Fall  $\phi(u) = 1 - \psi(u)$

Im zweiten Beispiel betrachten wir eine andere Straffunktion die nur von Defizit  $y$  abhängt. Also  $w(u, y) = e^{-\alpha y}$ ,  $\alpha > 0$ . Wir stellen das gleiche Beispiel wie im exakten Fall dar.

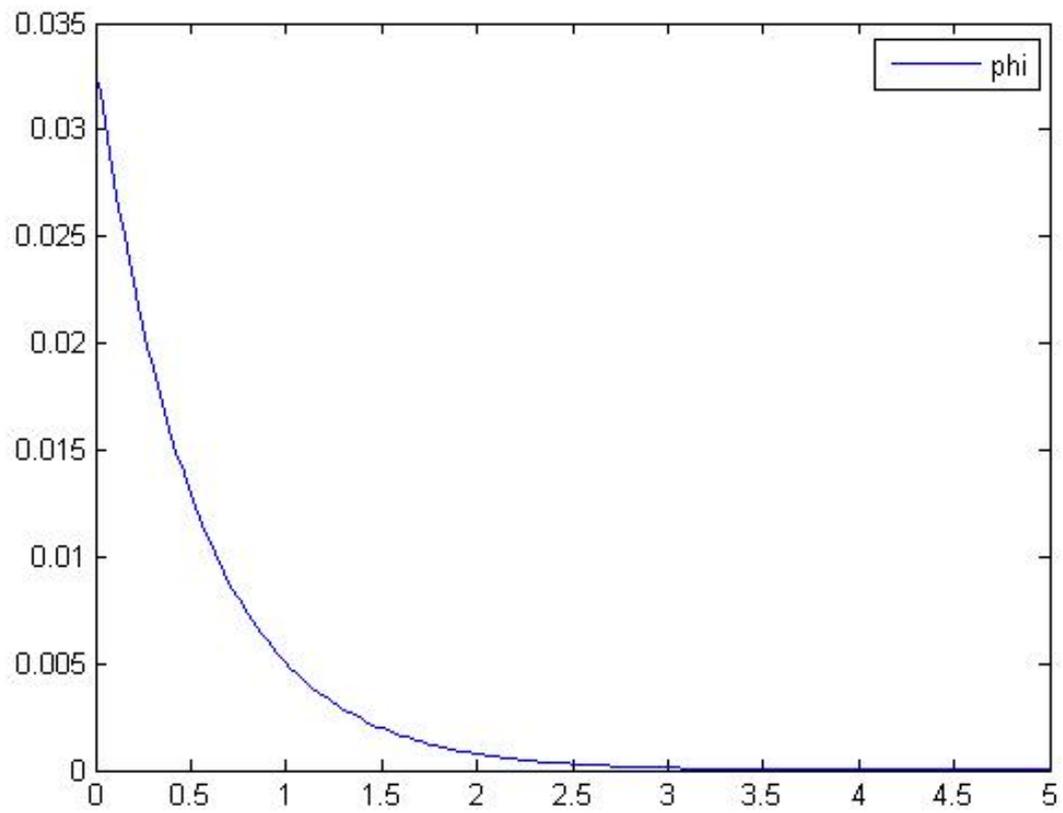


Abb. 5: Numerische Darstellung der Gerber-Shiu Funktion, bei  $w(u, y) = e^{-y}$

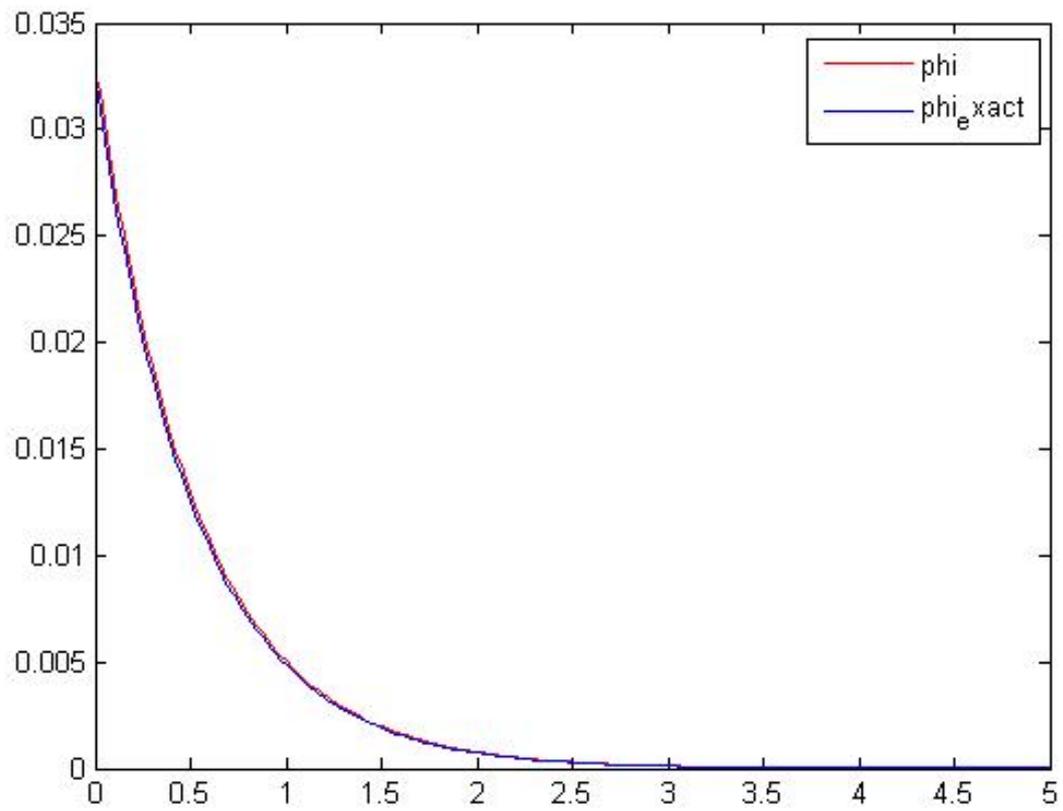


Abb. 6: Vergleich von Ergebnissen bei  $w(u, y) = e^{-y}$

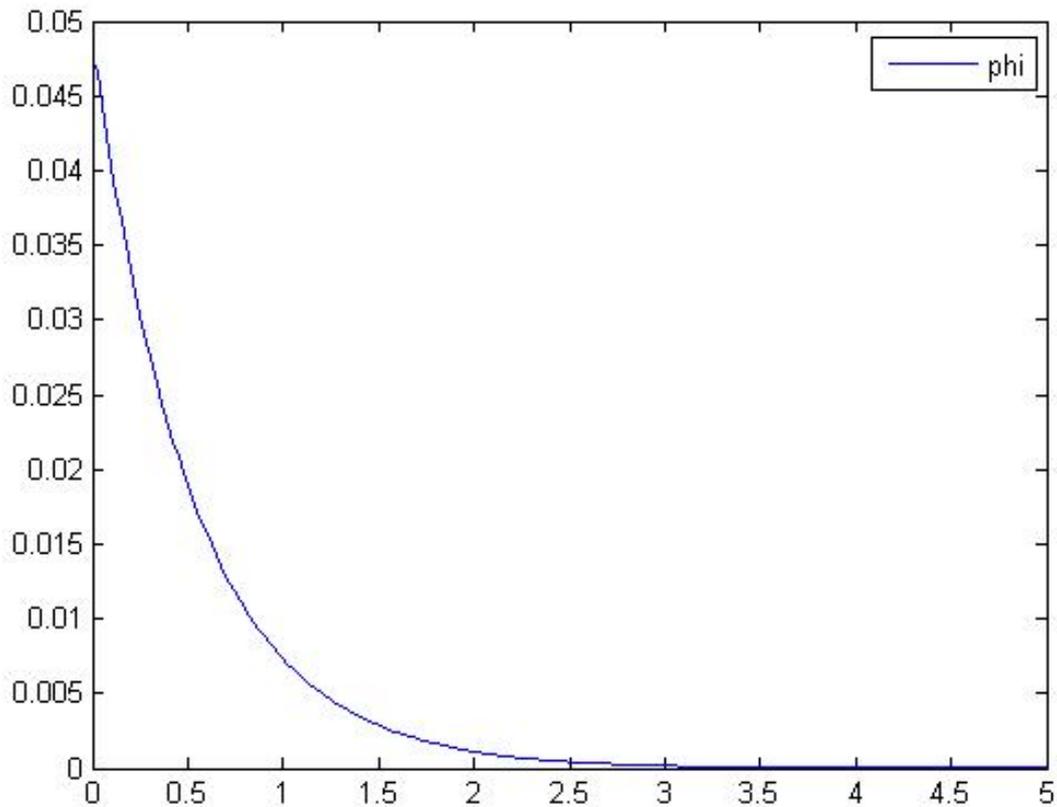


Abb. 7: Numerische Darstellung der Gerber-Shiu Funktion, bei  $w(u, y) = e^{-\rho y}$

## 6.2 Numerische Approximation der Integro-Differentialgleichung für die Gamma-Verteilungsfunktion

In diesem Abschnitt wollen wir die Integro-Differential Gleichung (4.4) für  $\Gamma$ -verteilte Schäden approximieren. Wir verwenden dazu die oben genannte Finite-Differenzen Methode. Sei  $f_X$  die Wahrscheinlichkeitsdichte einer  $\Gamma$ -Verteilung, dh.

$$f_X(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx},$$

wobei  $p > 0$  und  $b > 0$  reelle Parameter sind. Wir betrachten ein konkretes Beispiel für  $p = 2$  und  $b = 1$ , dann ist unsere Dichtefunktion  $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(2)} x e^{-x} = x e^{-x}$  und die dazugehörige Verteilungsfunktion  $F_X(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}$ . Wir nehmen an, daß unsere

Straffunktion  $w(x, y)$  nur vom Defizit abhängig ist und  $w(x, y) = y$  beträgt. Um die Finite-Differenzen Methode anwenden zu können, benötigen wir ein paar neue Werte für die  $\Gamma$ -Verteilungsfunktion. Wir müssen unter anderem die neue Randwerte  $\phi_0$  und  $\phi_N$  bestimmen. Zuerst berechnen wir den Anfangswert  $\phi_0$

$$\phi_0 = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho u} A(u) du.$$

Um  $\phi_0$  zu bekommen müssen wir zuerst  $A(u)$  und  $\rho$  bestimmen.

$$\begin{aligned} A(u) &= \int_0^\infty w(u, y) f_X(u + y) dy = \int_0^\infty y(u + y) e^{-(u+y)} dy \\ &= \int_0^\infty y e^{-y} u e^{-u} dy + \int_0^\infty y^2 e^{-y} e^{-u} dy \end{aligned}$$

Nach partieller Integration beider Integralen erhalten wir

$$A(u) = (2 + u) e^{-u}.$$

Durch einsetzen von  $A(u)$  in  $\phi_0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (2 + u) e^{-(1+\rho)u} du \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty 2e^{-(1+\rho)u} du + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty u e^{-(1+\rho)u} du \\ &= \dots = \frac{2\lambda}{c(1+\rho)} + \frac{\lambda}{c(1+\rho)^2} \\ &= \frac{\lambda(3+2\rho)}{c(1+\rho)^2}. \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir die Lösungen der Lundberg Gleichung (4.6) bestimmen. Wir wissen, daß es gilt

$$\delta + \lambda - c\xi = \lambda \hat{f}_X(x),$$

wobei

$$\hat{f}_X(x) = \int_0^\infty x e^{-(1+\xi)x} dx = \dots = \frac{1}{(1+\xi)^2}.$$

Durch Einsetzen und Umformen erhalten wir

$$(\delta + \lambda)(1 + 2\xi + \xi^2) - c\xi(1 + 2\xi + \xi^2) - \lambda = 0$$

$$\delta + \lambda + 2(\delta + \lambda)\xi + (\delta + \lambda)\xi^2 - c\xi - 2c\xi - c\xi^3 - \lambda$$

$$-c\xi^3 + (\delta + \lambda - 2c)\xi^2 + (2\delta + 2\lambda - c)\xi + \delta = 0$$

Für die folgende Werte für  $c = 1$ ;  $\lambda = 0.1$ ;  $\delta = 0.05$  erhalten wir folgende Lösungen  $\rho = 0.0612$  und  $-R = -0.6454$ .

Wir bestimmen jetzt den Randwert  $\phi_N = \tilde{C}e^{-Ru}$ . Um  $\phi_N$  zu erhalten sollen wir zuerst die Konstante  $\tilde{C}$  nach Formel (4.47) bestimmen. Der Nenner der Gleichung (4.47) beträgt

$$\tilde{C}_2 = -\lambda \hat{f}_X(R) - 1 = -\frac{2\lambda}{(1+R)^3} - 1.$$

Der Zähler der Gleichung (4.47) im Fall einer Gamma-Verteilung berechnen wir folgendermaßen aus

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 &= \lambda \int_0^\infty \int_z^\infty (x-z)xe^{-x}(e^{Rz} - e^{-\rho u})dx dz = \\ &= \lambda \int_0^\infty \int_z^\infty x^2 e^{-x}(e^{Rz} - e^{-\rho u})dx dz - \lambda \int_0^\infty \int_z^\infty xze^{-x}(e^{Rz} - e^{-\rho u})dx dz = \dots \\ &= \frac{\lambda}{(1-R)^2} - \frac{\lambda}{(1+\rho)^2} + \frac{2\lambda}{(1-R)} - \frac{2\lambda}{(1+\rho)}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\tilde{C} = \frac{\tilde{C}_1}{\tilde{C}_2}.$$

Für unseren Fall haben wir folgende Werte für  $\phi_0$ ,  $\tilde{C}$  und  $\phi_N$ . Also  $\phi_0 = 0.277264$ ;  $\tilde{C} = 0.0217$  und  $\phi_N = 0.0009$ . Wir können jetzt durch die Anwendung der Finite-Differenzen Methode die Lösung unsere Integro-Differential Gleichung (4.4) graphisch darstellen.

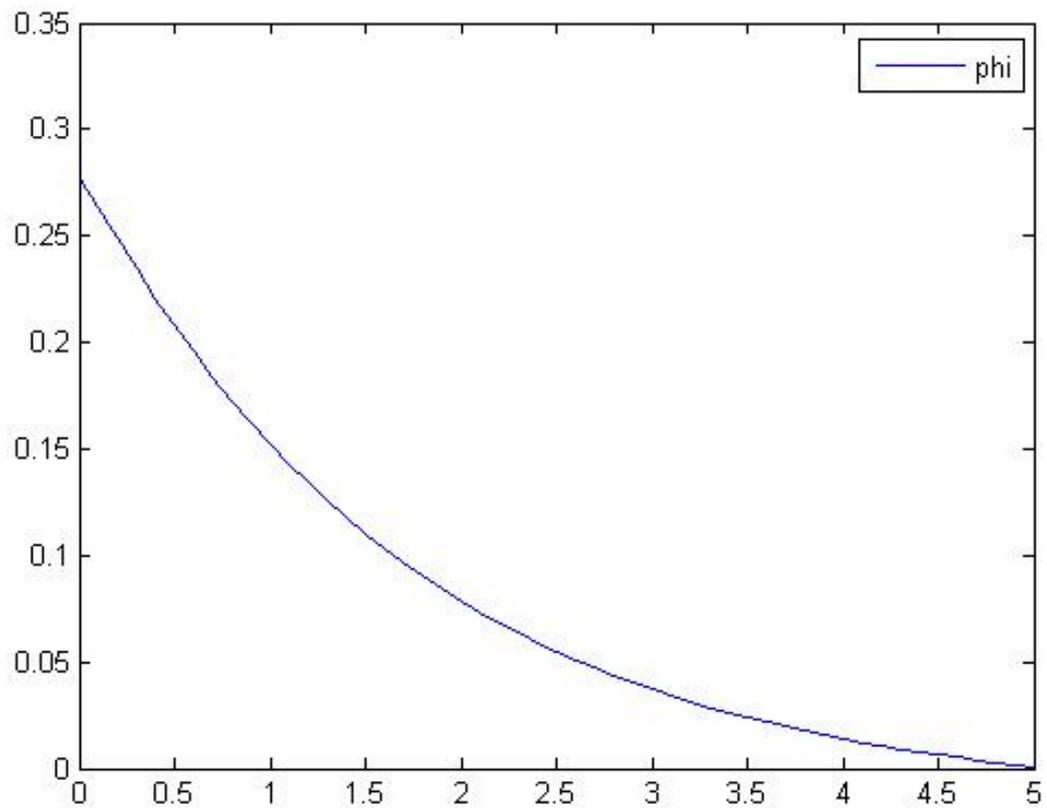


Abb. 8: Numerische Darstellung der Gerber-Shiu Funktion bei einer Gamma-Verteilung

# Kapitel 7

## Konvergenzverhalten

In diesem Abschnitt wollen wir für verschiedene Schrittweiten  $h = \frac{1}{n}$ , ( $n = 10, 20, \dots, 100$ ) der absoluten Fehler und auch die Konvergenzordnung eines numerischen Verfahrens zur Bestimmung der Gerber-Shiu Funktion bestimmen. Um den Konvergenzordnung zu bestimmen, brauchen wir einige allgemeine theoretische Hintergründe für verallgemeinerte Volterra Integro-Differentialgleichungen. Die Theorie für das Konvergenzverhalten für verallgemeinerte Volterra Integro-Differentialgleichung, die in folgenden zwei Abschnitten beschrieben wird, findet man in Brunner [3].

### 7.1 Die numerische Behandlung von Anfangswertproblemen für verallgemeinerte Volterra Integro-Differentialgleichungen

In diesem Teil des Kapitels wollen wir die numerische Lösung der Volterra Integro-Differentialgleichung  $r$ -ter Ordnung, deren Kernfunktion die  $r$ -te Ableitung der gesuchten Lösung enthält, mittels Spline-Funktionen behandeln. Betrachtet wird die folgende Volterra Integro-Differentialgleichung

$$y^{(r)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(r-1)}(t)) + \int_0^t k(t, s, y(s), \dots, y^{(r)}(s)) ds, \quad t \in [0, T], \quad (7.1)$$

mit Anfangsbedingung

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, \dots, r-1), \quad (7.2)$$

wobei  $y^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t)$  ist.

Hier wird angenommen, daß  $f(t, y, \dots, y^{(r-1)})$  und  $k(t, s, y, \dots, y^{(r)})$  folgendermaßen definiert sind

$$f(t, y, \dots, y^{(r-1)}) := \sum_{i=0}^{r-1} p_i(t) y^{(i)} + q(t), \quad (7.3)$$

und

$$k(t, s, y, \dots, y^{(r)}) := \sum_{i=0}^r K_i(t, s) y^{(i)}, \quad (7.4)$$

wobei  $r \in \mathbb{N}$ . Die Funktionen  $p_i$  und  $K_i$  werden als (zumindest) stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen angenommen. Weiters sei

$$I := [0, T] \text{ und } S := \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}.$$

**Bemerkung.** Im unseren Fall wird die Integro-Differential Gleichung (4.4)

$$\phi'(t) = \frac{\delta + \lambda}{c} \phi(t) - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(s) f_X(t-s) ds - \frac{\lambda}{c} A(t),$$

mit

$$\phi^{(0)}(0) = \phi_0,$$

betrachtet. Hier sieht man, daß  $r = 1$ ,  $f(t, \phi)$  und  $k(t, s, \phi, \phi')$  folgendermaßen definiert sind

$$f(t, \phi) := \frac{\delta + \lambda}{c} \phi(t) - \frac{\lambda}{c} A(t),$$

und

$$k(t, s, \phi, \phi') := \phi(s) f_X(t-s).$$

### 7.1.1 Spline-Kollokationsmethoden

Sei  $t_n := nh$  ( $n = 0, \dots, N$ ;  $t_N = T$ ) für  $h > 0$  die gleichmäßige Partition des Intervalls  $[0, T]$  mit folgenden  $N$  Teilintervallen  $\sigma_n := [t_n, t_{n+1}]$  ( $n = 0, \dots, N-1$ ). Setze

$$Z_N := \{t_n : n = 1, \dots, N-1\}, \quad \hat{Z}_N := Z_N \cup \{T\}.$$

Sei  $m \in \mathbb{N}$  gegeben. Setze  $d := r-1$ , wobei  $r$  die Ordnung der Integro-Differentialgleichung (7.1) bezeichnet. Die Lösung  $y$  des Anfangswertproblems (7.3), (7.4) wird durch ein Element  $u$  des Polynom-Spline-Raumes

$$S_{m+d}^{(d)}(Z_N) := \{u \in \mathcal{C}^d(I) : u =: u_n \in \pi_{m+d} \text{ auf } \sigma_n \text{ (} n = 0, \dots, N-1)\} \quad (7.5)$$

approximiert. Hier ist  $\pi_{m+d}$  der Raum der reellen Polynome mit dem Grad kleiner oder gleich  $m+d$ . Diese Approximation  $u$  wird durch Kollokation bestimmt. Sei  $\{c_j\}$  die gegebene Menge von  $m$  reellen Zahlen (später auch die Kollokations Parameter genannt), die  $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$  genügen. Definiere die Kollokationspunkte durch

$$X(N) := \bigcup_{n=0}^{N-1} X_n, \quad \text{mit } X_n := \{t_{n,j} := t_n + c_j h : j = 1, \dots, m\} \subset \sigma_n. \quad (7.6)$$

Die Kollokationslösung für (7.3), (7.4) ist gegeben durch das Element  $u \in S_{m+d}^{(d)}(Z_N)$ , das

$$u^{(r)}(t) = f(t, u(t), \dots, u^{(r-1)}(t)) + \int_0^t k(t, s, u(s), \dots, u^{(r)}(s)) ds, \quad (7.7)$$

für  $t \in X(N)$ , mit

$$u^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, \dots, d). \quad (7.8)$$

erfüllt. Die Kollokationsgleichung (7.7) stellt eine Rekursion für die Polynome  $u_0, \dots, u_{N-1}$  dar, die die Beschränkungen von  $u$  auf den Teilintervallen  $\sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}$  sind. Es kann in der folgenden Form geschrieben werden

$$\begin{aligned} u^{(r)}(t_{n,j}) &= f(t_{n,j}, u_n(t_{n,j}), \dots, u_n^{(r-1)}(t_{n,j})) + \\ &+ h \int_0^{c_j} k(t_{n,j}, t_n + vh, u_n(t_n + vh), \dots, u_n^{(r)}(t_n + vh)) dv + F_n(t_{n,j}; u), \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$j = 1, \dots, m \quad (n = 0, \dots, N-1),$$

wobei

$$F_n(t; u) := h \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 k(t, t_i + vh, u_i(t_i + vh), \dots, u_i^{(r)}(t_i + vh)) dv. \quad (7.10)$$

An jedem der inneren Knoten  $t_n \in Z_N$  haben wir  $r (= d + 1)$  Stetigkeitsbedingungen.

$$u_n^{(k)}(t_n) = u_{n-1}^{(k)}(t_n) \quad (k = 0, \dots, d). \quad (7.11)$$

Das obige zeigt, daß die Wahl von  $S_{m+d}^{(d)}(Z_N)$  als der annähernde Raum für (7.1), (7.2) der natürliche ist, da seine Dimension gegeben ist durch

$$\dim S_{m+d}^{(d)}(Z_N) = Nm + r.$$

Bei jedem der  $N$  Teilintervalle von  $I$  müssen wir ein System von  $m$  algebraischen Gleichungen lösen. Im ersten Teilintervall  $\sigma_1$  werden  $r$  Additionsgleichungen durch die Anfangsbedingung (7.8) bestimmt.

Man beachtet auch, daß wenn die Kollokationsparameter so gewählt werden  $c_1 = 0$  und  $c_m = 1$ , daß die resultierende approximierende Spline-Funktion  $u$  ein Element des glatten Raumes ist

$$S_{m+d}^{(d+1)}(Z_N) := S_{m+d}^{(d)}(Z_N) \cap \mathcal{C}^{d+1}(I).$$

Das folgende Ergebnis beschreibt die Konvergenzordnung von  $u$ . Wir benutzen die Notation für die gegebene stückweise stetige Funktion  $g$ ,

$$\|g\| := \sup\{|g(t)| : t \in [0, T]\}.$$

**Satz 7.1.1** [3] Angenommen, es seien die Funktionen  $p_v (v = 0, \dots, r-1)$  und  $K_v (v = 0, \dots, r)$  in (7.3), (7.4)  $m$ -Mal stetig differenzierbar auf ihren Definitionsbereichen  $I$  und  $S$ . Wenn

$u \in S_{m+d}^{(d)}(Z_N)$  (mit  $m \geq 1, d := r - 1$ ), die mit (7.8), (7.9) definierte Kollokationslösung ist. Dann gilt

$$\|y^{(k)} - u^{(k)}\| = \mathcal{O}(h^m), \quad k = 0, \dots, r, \quad (7.12)$$

für  $N \rightarrow \infty, Nh = T$ . Dieses Ergebnis ist gültig für alle Kollokationsparameter  $\{c_j\}$ .  $\square$

**Satz 7.1.2** [3] Angenommen, es seien die Funktionen  $p_v(v = 0, \dots, r-1)$  und  $K_v(v = 0, \dots, r)$  in (7.3), (7.4)  $m$ -Mal stetig differenzierbar auf ihren Definitionsbereichen  $I$  und  $S$ . Wenn  $u \in S_{m+d}^{(d)}(Z_N)$  (mit  $m \geq 1, d := r - 1$ ), die mit (7.8), (7.9) definierte Kollokationslösung mit den Nullstellen des verschobenen Legendre Polynoms  $P_m(2s-1)$  bezeichnet (d.h. die Gauss Punkte in  $(0, 1)$ ), als die Kollokationsparameter  $\{c_j\}$ . Dann genügt der daraus resultierende Fehler  $e := y - u$ ,

$$\max_{t_n \in Z_n} |e^{(k)}(t_n)| = \mathcal{O}(h^{2m}), \quad k = 0, \dots, r-1, \quad (7.13)$$

während

$$\max_{t_n \in Z_n} |e^{(r)}(t_n)| = \mathcal{O}(h^m). \quad (7.14)$$

Wenn  $e^{(r)}$  die gleiche Ordnung der diskreten Konvergenz an den Knoten als  $e, e', \dots, e^{(r-1)}$  besitzen soll, dann ist es notwendig  $c_m = 1$  zu haben. Die optimale Ordnung der Konvergenz ist dann  $2m - 1$ .

**Satz 7.1.3** [3] Angenommen, es seien die Funktionen  $p_v(v = 0, \dots, r-1)$  und  $K_v(v = 0, \dots, r)$  in (7.3), (7.4)  $m$ -Mal stetig differenzierbar auf ihren Definitionsbereichen  $I$  und  $S$ . Wenn  $u \in S_{m+d}^{(d)}(Z_N)$  (mit  $m \geq 1, d := r - 1$ ), die mit (7.8), (7.9) definierte Kollokationslösung unter Verwendung von Nullstellen von  $P_m(2s-1) - P_{m-1}(2s-1)$  bezeichnet (d.h. die Radau Punkte in  $(0, 1]$ ), als die Kollokationsparameter  $\{c_j\}$ . Dann genügt der daraus resultierende Fehler

$$\max_{t_n \in Z_n} |e^{(k)}(t_n)| = \mathcal{O}(h^{2m-1}) \quad k = 0, \dots, r-1, r. \quad (7.15)$$

Die Kollokationslösungen im **Satz 7.1.2** und **Satz 7.1.3** sind in Allgemein nur  $r - 1$  stetig differenzierbar auf  $I$ . Wenn man daran interessiert ist, polynomiale Spline-Approximationen des Grades  $m + d$  zu haben, die in  $\mathcal{C}^r(I)$  (d.h.  $u \in S_{m+d}^{(d+1)}(Z_N)$ ) sind, dann kann die Konvergenzordnung  $2m - 2$  nicht überschritten werden.

**Satz 7.1.4** [3] Angenommen, es seien die Funktionen  $p_v(v = 0, \dots, r-1)$  und  $K_v(v = 0, \dots, r)$  in (7.3), (7.4)  $m$ -Mal stetig differenzierbar auf ihren Definitionsbereichen  $I$  und  $S$ . Wenn  $u \in S_{m+d}^{(d)}(Z_N)$  (mit  $m \geq 1, d := r - 1$ ), die mit (7.8), (7.9) definierte Kollokationslösung unter Verwendung der Nullstellen von  $s(s-1)P'_m(2s-1)$  für die Kollokationsparametern bezeichnet (d.h. die Lobatto Punkte in  $[0, 1]$ ). Dann genügt der daraus resultierende Fehler

$$\max_{t_n \in Z_n} |e^{(k)}(t_n)| = \mathcal{O}(h^{2m-2}) \quad k = 0, \dots, r. \quad (7.16)$$

Der Beweis für diese diskreten Superkonvergenzresultate zeigt, daß die Ordnung  $p = 2m - 2$  auf  $\bar{Z}_N$  auch durch eine Kollokations-Approximation in  $S_{m+d}^{(d)}(Z_N)$ , die nicht in

## KAPITEL 7. KONVERGENZVERHALTEN

$C^r(I)$ , erreicht werden kann. Hier sind die Kollokationsparameter  $c_1, \dots, c_{m-1}$  die  $m - 1$  Gausspunkte in  $(0, 1)$  (d.h. die Nullen von  $P_{m-1}(2s - 1)$ ), und  $c_m = 1$ .

Eine Zusammenfassung der diskreten Konvergenzergebnisse für die praktisch relevantesten Fälle von (7.1) ist in folgender Tabelle gegeben aus [3]. Man beachte, daß (7.1) mit  $r = 0$  eine Volterra-Integralgleichung der zweiten Art entspricht, für die die Anfangsbedingung (7.2) leer ist

$r$	Collocation parameters $c_1, \dots, c_m$	Approximating spline space	$\max_{(n)}  e^{(k)}(t_n) $ $(k = 0, \dots, r - 1)$	$\max_{(n)}  e^{(r)}(t_n) $
0	Gauss points Radau II points Lobatto points $(m \geq 2)$	$S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ $S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ $S_{m-1}^{(0)}(Z_N)$		$O(N^{-m})$ $O(N^{-(2m-1)})$ $O(N^{-(2m-2)})$
1	Gauss points Radau II points Lobatto points $(m \geq 2)$	$S_m^{(0)}(Z_N)$ $S_m^{(0)}(Z_N)$ $S_m^{(1)}(Z_N)$	$O(N^{-2m})$ $O(N^{-(2m-1)})$ $O(N^{-(2m-2)})$	$O(N^{-m})$ $O(N^{-(2m-1)})$ $O(N^{-(2m-2)})$
2	Gauss points Radau II points Lobatto points $(m \geq 2)$	$S_{m+1}^{(1)}(Z_N)$ $S_{m+1}^{(1)}(Z_N)$ $S_{m+1}^{(2)}(Z_N)$	$O(N^{-2m})$ $O(N^{-(2m-1)})$ $O(N^{-(2m-2)})$	$O(N^{-m})$ $O(N^{-(2m-1)})$ $O(N^{-(2m-2)})$

Abb. 1: Konvergenzordnungen aus Brunner [3]

**Beweise:** Der Schlüssel zu den obigen diskreten Konvergenzresultaten (7.13), (7.15) und (7.16) liegt in der Tatsache, daß der Kollokationsfehler  $e = y - u$  und die Ableitungen  $e^{(1)}, \dots, e^{(r)}$  als Lösung eines Systems von  $r + 1$  Volterra-Integralgleichungen der zweiten Art betrachtet werden können und somit in Form der entsprechenden Resolvente ausgedrückt werden können und der Rest assoziiert ist mit der Kollokationsgleichung (7.7).

Um dies zu sehen, schreiben wir zuerst (7.7) in der Form

$$u^{(r)}(t) = f(t, u(t), \dots, u^{(r-1)}(t)) - \delta(t) + \int_0^t k(t, s, u(s), \dots, u^{(r)}(s)) ds, \quad t \in I, \quad (7.17)$$

wobei  $\delta(t)$  der Rest, welcher (mindestens) stetig ist auf jedem der Teilintervalle, und an den Kollokationspunkten  $X(N) := \delta(t) = 0$  für alle  $t \in X(N)$  verschwindet. So erhalten wir (7.1), (7.2), (7.3) und (7.4)

$$e^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{r-1} p_i(t) e^{(i)}(t) + \delta(t) + \int_0^t \sum_{i=0}^r K_i(t, s) e^{(i)}(s) ds, \quad r \in I, \quad (7.18)$$

mit der Anfangsbedingung,  $d = r - 1$ ,

$$e^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, \dots, d). \quad (7.19)$$

Setze  $z_k(t) := e^{(k)}(t)$  ( $k = 0, \dots, r$ ) und definiere vektorwertige Funktion  $z(t)$  durch

$$z(t) := (z_0(t), \dots, z_r(t))^T \in \mathbb{R}^{r+1}.$$

Unter der Verwendung der Anfangswertbedingung (7.19) können wir

$$z_k(t) = \int_0^t z_{k+1}(s) ds, \quad t \in I \quad (k = 0, \dots, r-1) \quad (7.20)$$

schreiben. Darüber hinaus ergibt sich aus (7.18)

$$z_r(t) = \sum_{i=0}^{r-1} p_i(t) \int_0^t z_{i+1}(s) ds + \delta(t) + \sum_{i=0}^r \int_0^t K_i(t, s) z_i(s) ds,$$

und daher

$$z_r(t) = \delta(t) + \int_0^t \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} p_i(t) z_{i+1}(s) + \sum_{i=0}^r K_i(t, s) z_i(s) \right\} ds, \quad t \in I. \quad (7.21)$$

Die obigen Gleichungen (7.20), (7.21) stellen ein System von  $r+1$  Volterra-Integralgleichungen der zweiten Art für die unbekannt Funktionen  $z_k(t)$ , ( $k = 0, \dots, r$ ) dar. Um diese Gleichungen in kompaktere Form zu bringen, definieren wir

$$D(t) := (0, 0, \dots, 0, \delta(t))^T \in \mathbb{R}^{r+1},$$

und

$$K(t, s) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 1 \\ K_0(t, s) & p_0(t) + K_1(t, s) & \dots & \dots & p_{r-1}(t) + K_r(t, s) \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichungen (7.20) und (7.21) bekommen die Form

$$z(t) = D(t) + \int_0^t K(t, s) z(s) ds, \quad t \in I. \quad (7.22)$$

Wenn also  $R(t, s)$  die Resolvente ist, die dem Kern  $K(t, s)$  von (7.22) entspricht, so kann ihre Lösung in der Form ausgedrückt werden

$$z(t) = D(t) + \int_0^t R(t, s) D(s) ds, \quad t \in I. \quad (7.23)$$

Für  $t = t_n \in \bar{Z}_N$  erhalten wir

$$z(t_n) = D(t_n) + h \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^t R(t_n, t_i + vh) D(t_i + vh) dv. \quad (7.24)$$

**Bemerkung:** Die Definition der Resolvente  $R(t, s)$  findet man im Kapitel 3.1 in [12].

Beachten wir, daß für jedes Teilintervall  $\sigma_i$  die Komponenten des Integranden  $R(t_n, t_i + vh)D(t_i + vh)$  glatte Funktionen von  $v$  sind. Wenn die Funktionen  $p_v$  und  $K_v$  in (7.3) und (7.4)  $\mu$  mal stetig differenzierbar in  $I$  und  $S$  sind, so haben die Integranden den gleichen Glättungsgrad. Dies folgt aus der Definition des Restes  $\delta(t)$  in (7.17) und der Tatsache, daß die Resolvente  $R(t, s)$  die Glätte von  $p_v$  und  $K_v$  erbt.

Nehmen wir nun an, daß die Integrale in (7.24) durch  $m$ -Punkte der Interpolations-Quadratur-Formeln approximiert werden, deren Abszissen mit den  $m$  Kollokationspunkten übereinstimmen  $t_{i,l} := l_i + c_l h$  ( $i = 1, \dots, m$ ) in  $\sigma_i$  und bezeichne die resultierende Quadratur-Fehler durch

$$E^{(n,i)} := (E_0^{(n,i)}, \dots, E_r^{(n,i)})^T \in \mathbb{R}^{r+1}.$$

Anderes gesagt haben wir

$$\int_0^t R(t_n, t_i + vh) D(t_i + vh) dv = \sum_{l=1}^m w_l R(t_n, t_{i,l}) D(t_{i,l}) + E^{(n,i)}, \quad (0 \leq i < n \leq N).$$

Aber  $D(t_{i,l})$  ist der Nullvektor, da die einzige nichttriviale Komponente durch  $\delta(t_{i,l})$  gegeben ist, die an allen Kollokationspunkten  $t_{i,l} \in X(N)$  verschwindet. So erhalten wir mit den oben genannten Ergebnissen

$$z(t_n) = D(t_n) + h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} E^{(n,i)}, \quad t_n \in \bar{Z}_N.$$

Nach der Definition von  $z(t)$ ,  $D(t)$  und  $E^{(n,i)}$ , ist das äquivalent zu

$$e^{(k)}(t_n) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} E_k^{(n,i)}, \quad t_n \in \bar{Z}_N, \quad (k = 0, \dots, r-1), \quad (7.25)$$

und

$$e^{(r)}(t_n) = \delta(t) + h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} E_r^{(n,i)}, \quad t_n \in \bar{Z}_N. \quad (7.26)$$

Betrachten wir zuerst den Fall, wobei  $c_m = 1$  und  $t_n \in X(N)$  ( $n = 1, \dots, N$ ). Da  $\delta(t_n) = 0$ , implizieren (7.25) und (7.26), daß die Ordnung von  $e^{(k)}(t_n)$  ( $k = 0, \dots, r$ ) durch die Quadraturfehler  $E_k^{(n,i)}$  gegeben ist. Unter der Einschränkung, daß  $c_m = 1$  ist, wird die höchste

Ordnung,  $p = 2m - 1$ , genau dann erreicht, wenn diese Quadraturformel die Radau-II-Formel ist. Dies stellt den **Satz 7.1.3** dar. Wenn  $\{c_j\}$   $m$ -Lobatto Punkte in  $[0, 1]$  (mit  $m \geq 2$ ) sind, dann wird die Ordnung  $p = 2m - 2$ . Da wir nun  $c_1 = 0$  und  $c_m = 1$  haben, ist die resultierende Kollokationsapproximation in  $S_{m+d}^{(m+1)}(Z_N)$ . Dies ergibt sich aus dem **Satz 7.1.4** [3].

Jedoch kann die gleiche Ordnung  $p = 2m - 2$  auch durch eine Approximation in  $S_{m+d}^{(d)}$  erreicht werden, die nicht in  $\mathcal{C}^{d+1}(I)$  ist. Angenommen, wir wählen für  $c_1, \dots, c_{m-1}$  die Nullstellen von  $P_{m-1}(2s-1)$  (d.h.  $m-1$  Gauss Punkte in  $(0, 1)$ ) und  $c_m = 1$ . Wenn die Integrale in (7.24) durch die  $m-1$ -Punkte der Gauss-Formel approximiert werden, dann sind die Quadraturfehler in (7.25) und (7.26) (wobei  $\delta(t_n) = 0$ ) der Ordnung  $2(m-1) = 2m-2$ . Daher ist  $e^{(k)}(t_n) = \mathcal{O}(h^{2m-2})$  für  $t_n \in \bar{Z}_N$  und  $k = 0, \dots, r$ .

Nach den obigen Beobachtungen sehen wir, daß die höchstmögliche Ordnung der diskreten Superkonvergenz  $p = 2m - 2$  erhalten wird, dann und nur dann die Kollokationsparameter die  $m$  Gauss Punkte in  $(0, 1)$  sind. Jedoch, da wir jetzt  $c_m < 0$  haben, wird diese Ordnung nur für  $u(t_n), u'(t_n), \dots, u^{(r-1)}(t_n)$  erreicht. Dies folgt aus der Anwendung der obigen Argumente auf (7.25), wo die  $E_k^{(n,i)}$  nun die Quadraturfehler der  $m$ -Punkte der Gauß-Formeln sind. In (7.26) haben wir in Allgemein  $\delta(t_n) \neq 0$ . Es kann gezeigt werden, daß  $\delta(t) = \mathcal{O}(h^m)$ , wenn  $t$  kein Kollokationspunkt ist und der Exponent  $m$  nicht durch eine größere ganze Zahl ersetzt werden kann. Dies führt zum Ergebnis des **Satzes 7.1.2** [3].

## 7.1.2 Implizite Runge-Kutta-Nyström-Typ Methode

Die in der Kollokationsgleichung (7.9) auftretenden Integrale für  $u \in S_{m+d}^{(d)}(Z_N)$  können im Allgemeinen nicht analytisch ausgewertet werden. Die praktische Umsetzung des in Abschnitt 7.1 beschriebenen Kollokationsverfahrens beinhaltet die Diskretisierung von (79) mittels geeigneter Quadraturmethoden.

Sei

$$L_j(v) := \prod_{l=1, l \neq j}^m (v - c_l) / (c_j - c_l), \quad (j = 1, \dots, m),$$

die Lagrange-Grundpolynome, die mit den Kollokationsparametern  $c_1, \dots, c_m$  verknüpft sind. Setze

$$Y_{n,j} := u_n^{(r)}(t_{n,j}), \quad y_n^{(k)} := u_n^{(k)}(t_n) \quad (k = 0, \dots, r-1),$$

wobei  $u \in S_{m+d}^{(d)}(Z_N)$  mit  $(d := r-1)$ . Da  $u_n^{(r)}$  ein Polynom von Grad  $m$  ist, können wir schreiben

$$u_n^{(r)}(t_n + vh) = \sum_{j=1}^m L_j(v) Y_{n,j}, \quad t_n + vh \in \sigma_n.$$

Sukzessive Integration führt zu

$$u_n^{(k)}(t_n + vh) = \sum_{\mu=0}^{r-k-1} \frac{(hv)^\mu}{\mu!} y_n^{(k+\mu)} + h^{r-k} \cdot \sum_{j=1}^m a_{k,j}(v) Y_{n,j}, \quad v \in [0, 1] \quad (7.27)$$

für  $(k = r - 1, \dots, 0)$ , mit

$$a_{k,j}(v) := \int_0^v \frac{(v-z)^{r-k-1}}{(r-k-1)!} L_j(z) dz.$$

Zusätzlich wird gesetzt

$$w_l := \int_0^1 L_l(v) dv \quad (= a_{r-1,l}(1)).$$

Es werden die Integrale in (7.9) über  $[0, c_j]$ ,  $j = 1, \dots, m$  durch  $m$ -Punkt-Interpolations-Quadraturformeln mit Abszissen, die in  $[t_n, t_n + c_j h]$ ,  $t_n + c_j c_l h$  ( $l = 1, \dots, m$ ) liegen approximiert, da die Formeln von interpolatorischen Typen mit ihren Gewichte  $c_j w_l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) gegeben sind. In (7.9) sind alle Integrale über  $[0, 1]$ . Hier benutzen wir  $m$ -Punkt-Interpolations-Quadraturformeln, deren Abszisse die Kollokationspunkte  $t_{i,l} := t_i + c_l h$  und deren Gewichte  $w_l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) sind.

Daher haben die diskretisierte Kollokationsgleichungen (7.9) und (7.10) die Form

$$\begin{aligned} Y_{n,j} &= f(t_{n,j}, u_n(t_{n,j}), \dots, u_n^{(r-1)}(t_{n,j})) + \\ &+ hc_j \cdot \sum_{l=1}^m w_l k(t_{n,j}, t_n + c_j c_l h u_n(t_n + c_j c_l h), \dots, u_n^{(r)}(t_n + c_j c_l h)) \\ &+ G(t_{n,j}; u), \quad j = 1, \dots, m \quad (n = 0, \dots, N - 1), \end{aligned} \quad (7.28)$$

mit

$$G(t_{n,j}; u) := h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l=1}^m w_l k(t_{n,j}, t_{i,l}, u_i(t_{i,l}), \dots, u_i^{(r-1)}(t_{i,l}), Y_{i,l}). \quad (7.29)$$

Betrachten wir für alle  $n = 0, \dots, N$  ein System von  $m$  algebraischen Gleichungen von  $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,m}$ . Wenn diese Werte berechnet wurden, werden die Approximationen von  $y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(r-1)}(t)$  bei  $t = t_{n+1}$  mit (7.27) gefunden. Setzen wir  $v = 1$  und verwenden die Notation  $y_{n+1}^{(k)} := u_n^{(k)}(t_{n+1})$ :

$$y_{n+1}^{(k)} = \sum_{\mu=0}^{r-k-1} \frac{h^\mu}{\mu!} y_n^{(k+\mu)} + h^{r-k} \sum_{j=1}^m a_{k,j}(1) Y_{n,j}, \quad (k = 0, \dots, r - 1). \quad (7.30)$$

Insbesondere haben wir

$$y_{n+1} := y_{n+1}^{(0)} = y_n + h y_n^{(1)} + \dots + \frac{h^{r-1}}{(r-1)!} y_n^{(r-1)} + h^r \sum_{j=1}^m b_j Y_{n,j},$$

wobei

$$b_j := a_{0,j}(1) = \int_0^1 \frac{(1-z)^{r-1}}{(r-1)!} L_j(z) dz.$$

Wenn der Kern  $k$  in (7.1) verschwindet, reduziert sich die diskretisierte Kollokationsmethode (7.28), (7.29), (7.30) auf eine Runge-Kutta-Nyström-Methode für das Anfangswertproblem

$$y^{(r)} = f(t, y, \dots, y^{(r-1)}), \quad y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad (k = 0, \dots, r-1).$$

Dementsprechend verweisen wir auf (7.28), (7.29), (7.30) als Volterra-Runge-Kutta-Nyström-Methode für die allgemeine Volterra Integro-Differentialgleichung (7.1). Diese Methode ist implizit und besitzt  $m$  Stufen, siehe [3].

## 7.2 Fehlerabschätzung

Zum Abschluss dieses Kapitels und dieser Arbeit wollen wir unsere Ergebnisse über die Fehlerabschätzung numerisch und graphisch darstellen. Wir betrachten unsere Integro-Differentialgleichung (4.4), die eine Volterra-Integro-Differentialgleichung der ersten Ordnung (d.h.  $r = 1$ ) entspricht. Wir betrachten den Fall einer Exponential-Verteilung, da wir für diesen Fall sowohl explizite als auch die numerische Ergebnisse erhalten haben. Zuerst stellen wir die Ergebnisse von den absoluten Fehlern für verschiedene Schrittweite  $h = \frac{1}{n}$ , ( $n = 10, 20, \dots, 100$ ) dar. Die absoluten Fehler  $F(n)$  haben wir folgendermaßen berechnet

$$F(n) = \max_{i \in \{0, \dots, n\}} |\hat{\phi}(u) - \phi(u)|, \quad u_i = ih, \quad (7.31)$$

wobei wir mit  $\hat{\phi}(u)$  die explizite Lösung und mit  $\phi(u)$  die numerische Lösung von unserer Integro-Differentialgleichung (4.4) bezeichnen. Die folgende Tabelle stellt die Ergebnisse von der absoluten Fehlern  $F(n)$  für das Beispiel mit einer Straffunktion  $w = e^{\alpha y}$  mit  $\alpha = 1$  und gleichen Parametern wie im Kapitel 6.1. dar.

*Absolute Fehler*

$h = \frac{1}{n}$	1/10	1/20	1/30	1/40	1/50
$F(n)$	$1.8442e - 007$	$3.8505e - 008$	$1.6138e - 008$	$8.8119e - 009$	$5.5371e - 009$
$h = \frac{1}{n}$	1/60	1/70	1/80	1/90	1/100
$F(n)$	$3.7967e - 009$	$2.7630e - 009$	$2.0996e - 009$	$1.6486e - 009$	$1.3284e - 009$

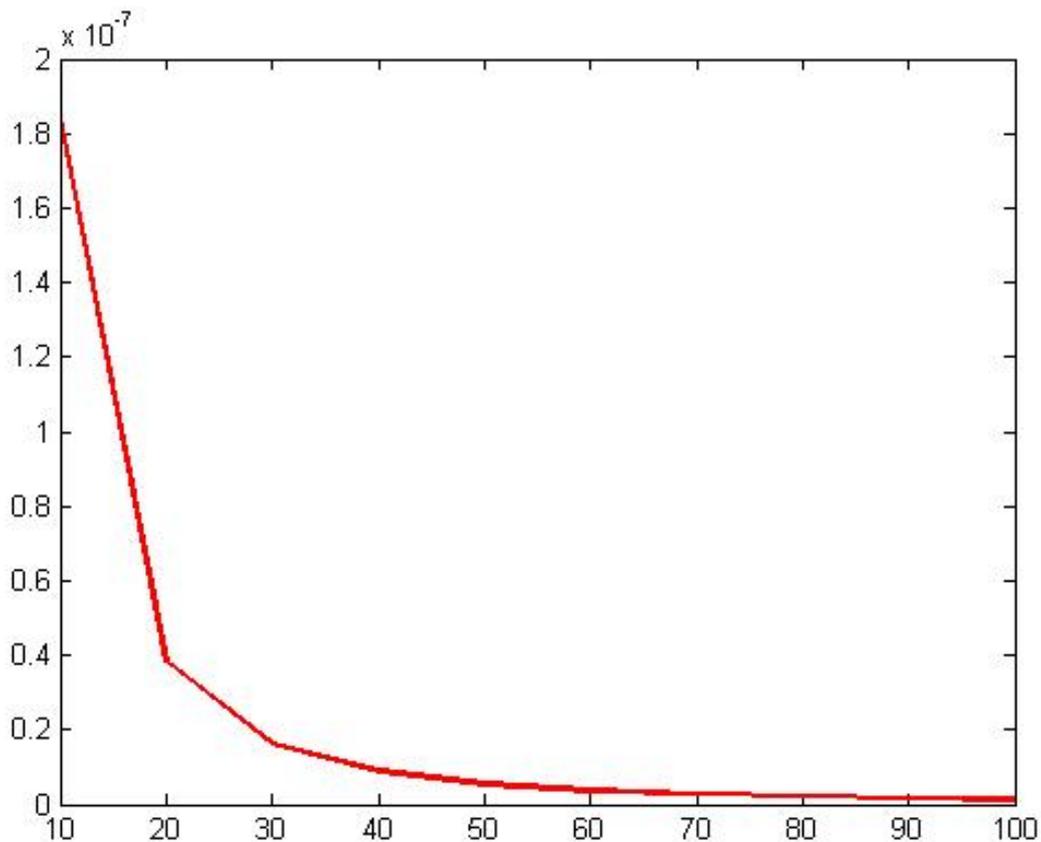


Abb. 2: Absolute Fehler

**Bemerkung:** Man muss nur beachten, daß man die explizite Randbedingungen im numerischen Verfahren verwenden soll, um die Inkorrektheit des Fehlers zu vermeiden. Es kann passieren, wenn man mit den numerischen Randbedingungen arbeitet, daß die absoluten Fehler steigen, was natürlich nicht relevant ist.

Jetzt wollen wir die Konvergenzordnung der Fehlern für das gleiche Beispiel ansehen. Diesen Fehler berechnen wir mit Hilfe der absoluten Fehler

$$F_p(n) = n^p F(n), \quad (7.32)$$

wobei  $p$  die vermutete Konvergenzordnung ist. Wir werden sehen, daß die Konvergenzordnung für unsern Beispiel zwischen  $p = 2$  und  $p = 3$  liegt. Aber, wir werden zum Vergleich die Ergebnisse für folgenden Werten  $p \in \{1, 2, 3, 4\}$  darstellen. Für die größere Werte von  $p$  ist es nicht mehr relevant die entsprechenden Werte betrachten, da die Fehler zu schnell wachsen. Zuerst schauen wir die Resultate für  $p = 1$  und  $n = 10, 20, \dots, 100$  an.

*Fehler für  $p = 1$*

$n$	10	20	30	40	50
$F_1(n)$	$1.8442e - 006$	$7.7010e - 007$	$4.8414e - 007$	$3.5247e - 007$	$2.7686e - 007$
$n$	60	70	80	90	100
$F_1(n)$	$2.2780e - 007$	$1.9341e - 007$	$1.6797e - 007$	$1.4838e - 007$	$1.3284e - 007$

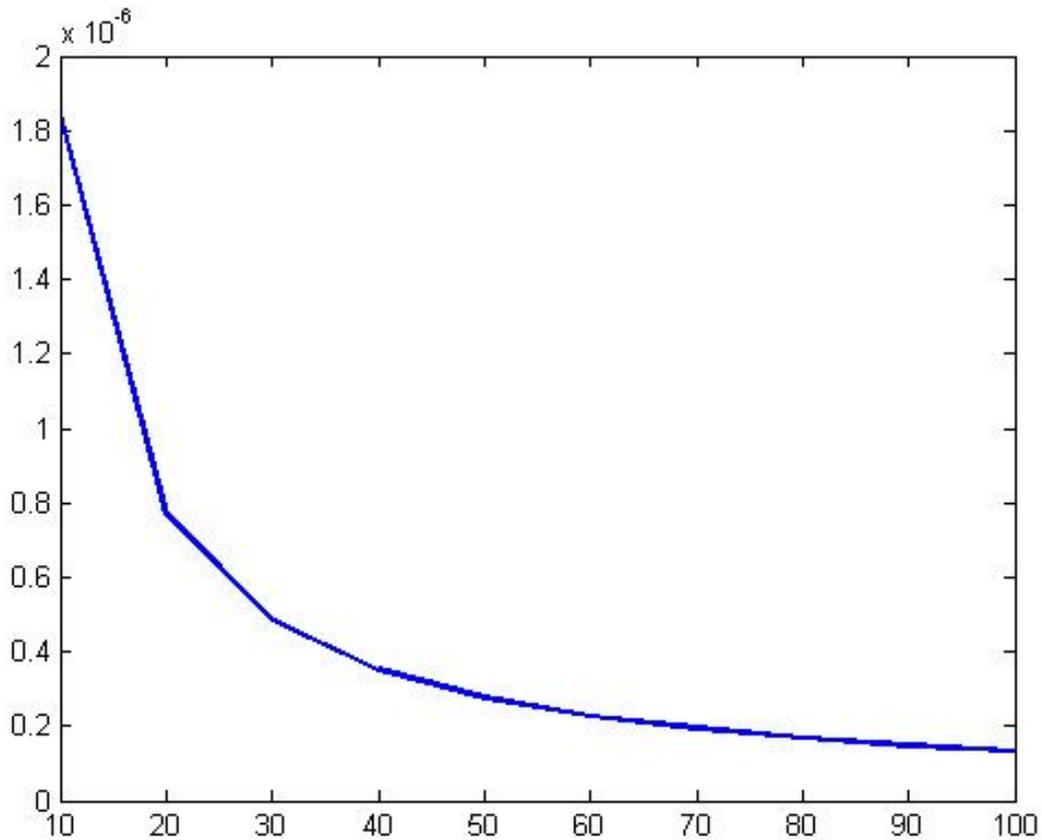


Abb. 3: Fehler für  $p = 1$

Um die Ergebnisse besser zu vergleichen, stellen wir die Fehler für  $p = 2$ ,  $p = 3$  und  $p = 4$  dar.

*Fehler für  $p = 2$*

$n$	10	20	30	40	50
$F_2(n)$	$1.8442e - 005$	$1.5402e - 005$	$1.4524e - 005$	$1.4099e - 005$	$1.3843e - 005$
$n$	60	70	80	90	100
$F_2(n)$	$1.3668e - 005$	$1.3539e - 005$	$1.3437e - 005$	$1.3354e - 005$	$1.3284e - 005$

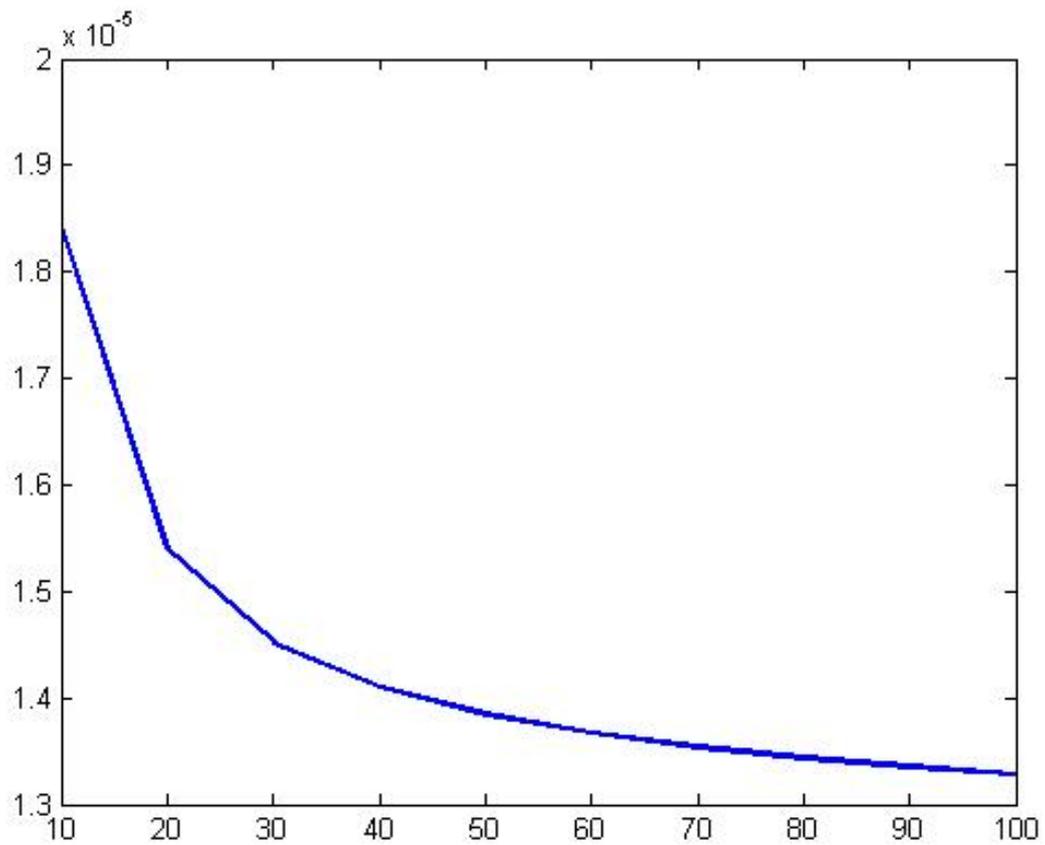


Abb. 4: Fehler für  $p = 2$

*Fehler für  $p = 3$*

$n$	10	20	30	40	50
$F_2(n)$	$1.8442e - 004$	$3.0804e - 004$	$4.3572e - 004$	$5.6396e - 004$	$6.9214e - 004$
$n$	60	70	80	90	100
$F_2(n)$	$8.2009e - 004$	$9.4771e - 004$	0.0011	0.0012	0.0013

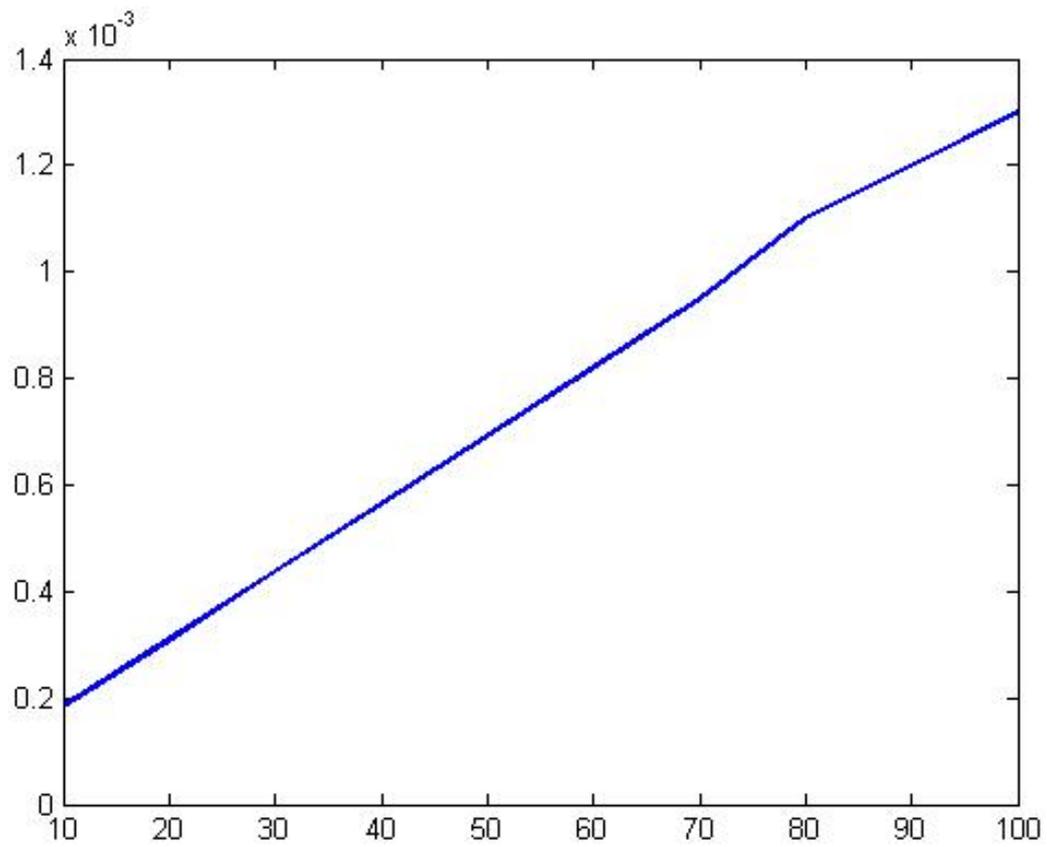
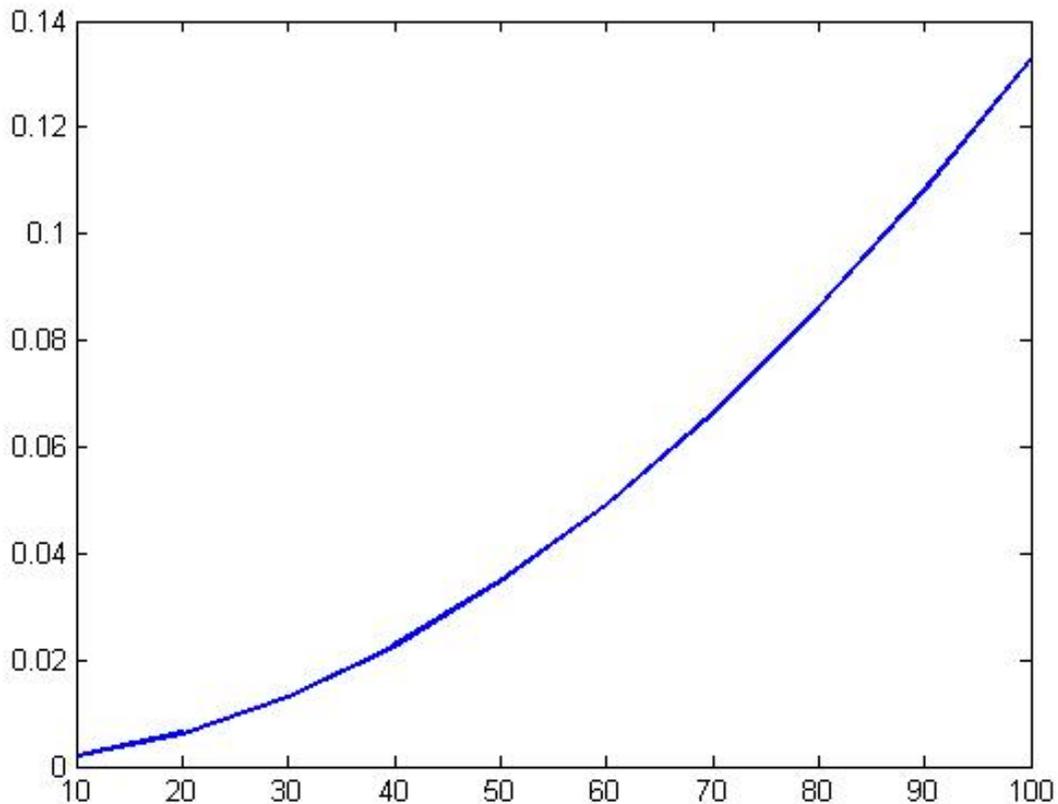


Abb. 5: Fehler für  $p = 3$

*Fehler für  $p = 4$*

$n$	10	20	30	40	50
$F_2(n)$	0.0018	0.0062	0.0131	0.0226	0.0346
$n$	60	70	80	90	100
$F_2(n)$	0.0492	0.0663	0.0860	0.1082	0.1328

Abb. 6: Fehler für  $p = 4$ 

Aus den obigen Tabellen und Abbildungen können wir schließen, daß die Konvergenzordnung für unseren Fall zwischen  $p = 2$  und  $p = 3$  ist. Beim  $p = 1$  und  $p = 2$  ist zu sehen, daß die Fehler (zu schnell) zu Null konvergieren und noch immer fallend sind. Beim  $p = 3$  sieht man, daß die Fehler langsam zu wachsen beginnen und beim  $p = 4$  sieht man, daß die Fehler noch schneller steigen. Genau zwischen  $p = 2$  und  $p = 3$  merkt man, daß die Fehler für unterschiedlichen  $n$  nah zu Null sind und die Abweichung zwischen zwei Fehlern ganz gering ist, was die Hauptbedingung

$$F_p(n) \cdot n^p \leq C$$

erfüllt, wobei  $C > 0$  eine Konstante ist. Um besser zu sehen, wegen Skalierung, stellen wir sowohl den Vergleich von Fehlern für  $p = 1$ ,  $p = 2$  und  $p = 3$  als auch von alle vier betrachteten Werten von  $p$  dar.

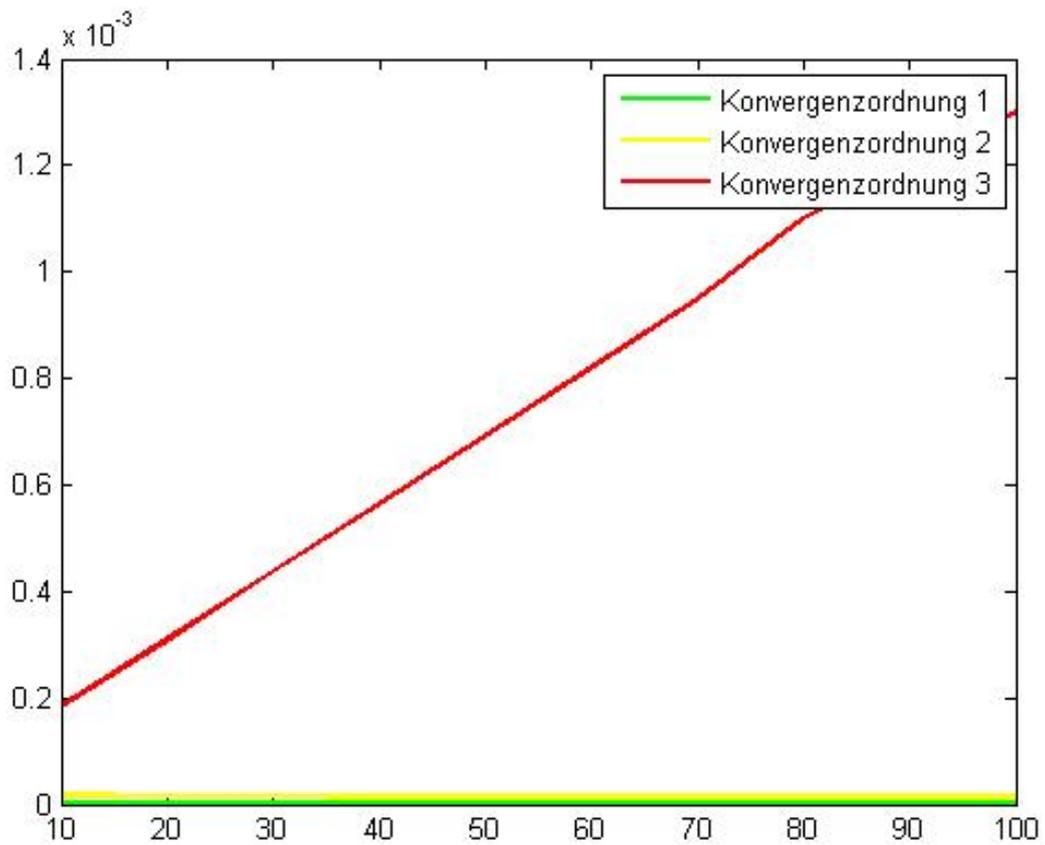


Abb. 7: Vergleich der Fehlern für  $p = 1$  und  $p = 2$

In nächster Abbildung sehen wir, daß die Fehler unserer Konvergenzordnung  $p = 3$  nah zu Null konvergieren und fast Konstant ist.

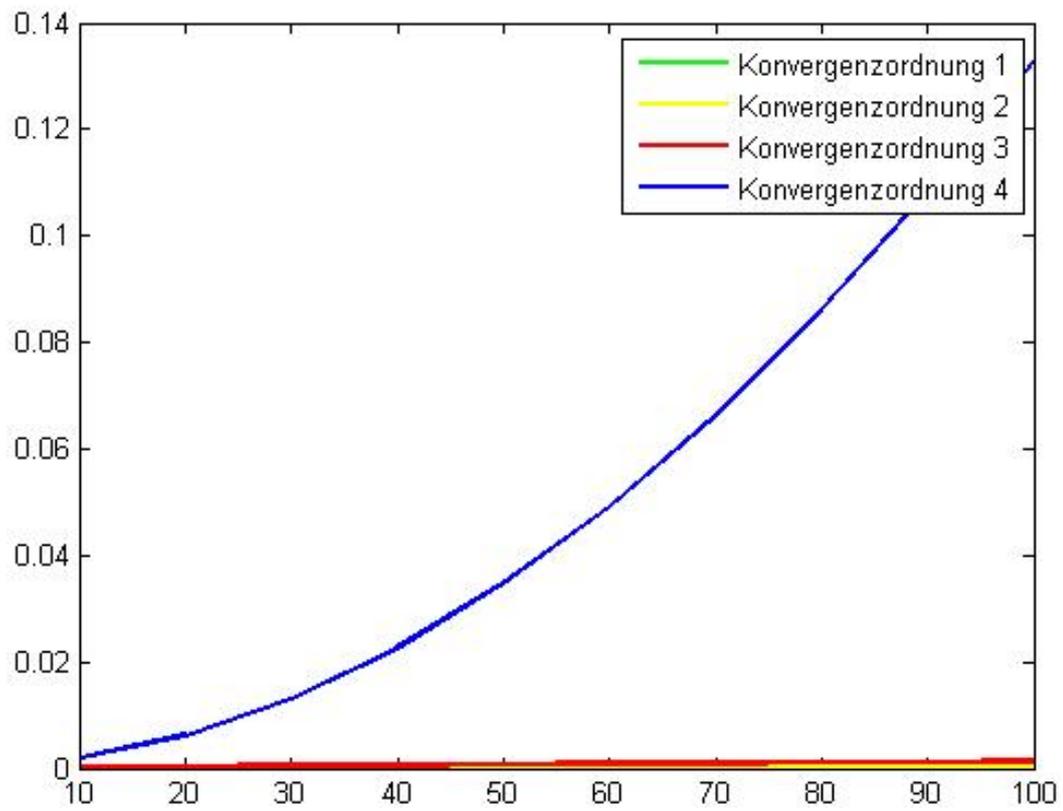


Abb. 8: Vergleich der Fehlern für  $p = 1$ ,  $p = 2$ ,  $p = 3$  und  $p = 4$

# Anhang A

## A.1 Grundlagen der Stochastik

[11, Vgl. S. 9] Wir bezeichnen mit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  den zugrundeliegenden *Wahrscheinlichkeitsraum*.

- Sei  $\Omega$  die Menge aller Elementarereignisse  $\omega$ , (im Versicherungssinne alle möglichen Zustände eines versicherten Gegenstandes).

- Sei  $\mathcal{A}$  ein Mengensystem der Ereignisse (Teilmengen von  $\Omega$ ).  $\mathcal{A}$  heißt eine  $\sigma$ -Algebra, wenn die folgende Axiome erfüllt sind:

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ , wobei  $\bar{A} := \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$
3.  $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

- Die Abbildung  $\mathcal{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{A}$ , wenn folgende Axiome gelten:

1.  $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
2.  $\forall A \in \mathcal{A}$  gilt  $\mathcal{P}(A) \geq 0$
3. Für Mengen  $A_i$  mit  $i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset, (i, j = 1, 2, \dots)$  gilt:

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i).$$

- **Zufallsvariable:** [11, Vgl. S. 10]

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

die Elementarereignissen eines Wahrscheinlichkeitsraumes in sinnvoller Weise die reelle Zahlen zuordnet. D.h. Mit Hilfe dieser Funktion können wir zu alle beschriebenen Ereignisse

Wahrscheinlichkeiten angeben. Eine Zufallsvariable ist eine  $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ -meßbare Funktion. Das bedeutet

$$\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}.$$

• **Verteilung:** [11, Vgl. S. 10]

Eine *Verteilung*  $P$  einer Zufallsvariable  $X$  ist das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}$  mit

$$P_X(A) = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

wobei  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, x)\} \mid x \in \mathbb{R})$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ist, welche von Intervallen der Form  $(-\infty, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  erzeugt wird.  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  nennt man Borelalgebra und die Elemente von  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  Borelmengen.

• **Träger:** [11, Vgl. S. 10]

Die kleinste abgeschlossene Menge  $A$  so daß

$$P_X(A) = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = 1$$

gilt, heißt der *Träger* einer Verteilung  $\mathcal{P}$ . Das bedeutet, daß die Verteilung von  $X$  auf  $A$  konzentriert ist oder  $X$  nimmt fast sicher (mit Wahrscheinlichkeit 1) Werte in  $A$  an.

• **Verteilungsfunktion:** [11, Vgl. S. 10]

Eine *Verteilungsfunktion* einer Zufallsvariablen  $X$  ist die Funktion

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Man schreibt auch  $F_X$  statt  $F$ , falls man die Abhängigkeit von  $X$  ausdrücken will, bzw.  $P_X$  statt  $P$ .

• **Wahrscheinlichkeitsdichte:** [11, Vgl. S. 11]

Eine *Wahrscheinlichkeitsdichte*  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine reelwertige, integrierbare Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

• **Stetige Zufallsvariable** [11, Vgl. S. 11]

$X$  ist eine *stetige Zufallsvariable* wenn die Verteilung  $P$  von  $X$  sich mit Hilfe einer Dichte  $f(x)$  beschreiben lässt. D.h.

$$P_X(A) = \int_A f_X(x) dx.$$

Für die Verteilungsfunktion gilt auch

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx.$$

• **Charakteristische Funktion** [19]

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_X(x) = P(X \leq x)$ . Die Funktion

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x)$$

heißt charakteristische Funktion von  $F_X$ .

• **Momentenerzeugende Funktion** [19]

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_X(x) = P(X \leq x)$ . Die Funktion

$$M_X(t) = M_{F_X}(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dF_X(x)$$

heißt momenterzeugende Funktion definiert für alle  $t \in \mathbb{R}$  für die  $M_X(t) < \infty$ .

• **Filtration** [6] Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $T \subset \mathbb{R}$  eine Indexmenge und  $t \in T$ . Dann heißt die Familie  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  von  $\sigma$ -Algebren eine Filtrierung oder Filtration auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , wenn sie aufsteigend geordnet ist.

D.h.  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  für alle  $s, t \in T$  mit  $s < t$ .

• **Stochastischer Prozess** [6, Vgl. S. 52, Def.3.2]

Ein reellwertiger stochastischer Prozess mit stetigem Zeitraum  $T$  ist eine meßbare Abbildung

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)).$$

• **Verteilung eines stochastischen Prozesses** [6, Vgl. S. 52, Def.3.3]

Die Verteilung von  $X$  ist folgendermaßen gegeben

$$P_X(B) = \mathcal{P}(X \in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$$

• **Unabhängige stochastische Prozesse** [6, Vgl. S. 52, Def.3.4]

Es seien  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$  stochastische Prozesse über  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Sie heißen unabhängig, wenn gilt

$$\mathcal{P}(X^{(1)} \in B_1, \dots, X^{(n)} \in B_n) = \mathcal{P}(X^{(1)} \in B_1) \cdot \dots \cdot \mathcal{P}(X^{(n)} \in B_n),$$

für alle  $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

• **Martingal** [10, Vgl. Definition 11, S.9]

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  und eine Filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Ein stochastischer Prozess  $M = \{M(t) : t \geq 0\}$  heißt ein Martingal wenn die folgende Eigenschaften gelten:

- (1)  $M(t)$  ist  $\mathcal{F}_t$ -meßbar,

(2)  $\mathbb{E}[M(t)] < \infty$ , für alle  $t \geq 0$ ,

(3)  $\mathbb{E}[M(t) | \mathcal{F}_s] = M(s)$ ,  $\mathcal{P}$ -f.s. für alle  $t \geq s$

• **Stoppzeit** [10, Vgl. Definition 13, S.9]

Eine Zufallsvariable  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  heißt eine Stoppzeit, wenn  $\{T \geq t\} \in \mathcal{F}_t$  gilt.

## A.2 Faltung

Die Faltung von Verteilungen kommt in der Versicherungspraxis in folgendem Zusammenhang vor: sei  $X_i$  eine stochastisch unabhängige Zufallsvariable mit Verteilung  $P_i = \mathcal{P}^{X_i}$ . In der Versicherungspraxis kann  $X_i$  als die Schadenssumme eines Geschäftsjahres aus dem  $i$ -ten Vertrag interpretiert werden. Gesucht ist die Verteilung von:

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Deren Momente sind leicht zu berechnen, aber die Gesamtschadenverteilung, bzw. die Verteilung von  $S$  ist nicht so einfach zu berechnen. Hierzu benötigt man die Faltungen, siehe [11]

**Definition A.2 (Faltung)** [11]

Es seien  $X$  und  $Y$  reellwertige, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Die Verteilung der Summe  $X + Y$  heißt die Faltung der Verteilungen  $X$  und  $Y$ . D.h

$$P^{X+Y} = P^X * P^Y.$$

**Lemma A.2** [4] Es seien  $X$  und  $Y$  reellwertige, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Es seien weiters  $F_X$  und  $F_Y$  ihre Verteilungsfunktionen und bei stetigen Verteilungen die entsprechenden Dichten  $f_X$  und  $f_Y$ . Mit  $F_X * F_Y$  bezeichnen wir die Verteilungsfunktion der Faltung  $P^X * P^Y$  und mit  $f_X * f_Y$  ihre Dichtefunktion. Dann gilt:

$$F_X * F_Y(x) = F_Y * F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y)f_Y(y)dy$$

$$f_X * f_Y(x) = f_Y * f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y)f_Y(y)dy, x \in \mathbb{R}$$

**Beweis:** Es sei

$$\begin{aligned}
 F_X * F_Y(x) &= P(X + Y \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X + Y \leq x \mid Y = y)P^Y(dy) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X + y \leq x)P^Y(dy) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x - y)P^Y(dy) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x - y)f_Y(y)dy.
 \end{aligned}$$

Durch Differentiation folgt

$$\begin{aligned}
 f_X * f_Y(x) &= \frac{d}{dx}F_X * F_Y(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x - y)f_Y(y)dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x - y)f_Y(y)dy \quad \square.
 \end{aligned}$$

Im multivariaten Fall, sei  $X_i$  eine stochastisch unabhängige Zufallsvariable und  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  die Verteilung von Summe. Setze  $S_1 = X_1$ ,  $S_i = S_{i-1} + X_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Die Laplace-Transformation von der Summe ist

$$LT_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n LT_{X_i}(t),$$

die Verteilungsfunktion ist folgendermaßen definiert

$$F_{S_n}(x) = F_{X_1}(x) * F_{X_2}(x) \dots * F_{X_n}(x),$$

und die Dichtefunktion

$$f_{S_n}(x) = f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x) \dots * f_{X_n}(x)$$

Im Fall, daß  $X_1, X_2, \dots, X_n$  identisch verteilt sind, mit Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  und Dichtefunktion  $f_X(x)$ , dann ist

$$F_{S_n}(x) = F_{X_n}^{*n}(x)$$

und

$$f_{S_n}(x) = f_{X_n}^{*n}(x)$$

wobei  $*n$  die  $n$ -te Faltung von  $X$  bezeichnet, siehe [4]

# Anhang B

## B.1 Erneuerungstheorie

Die Erneuerungsgleichung ist die Faltungsgleichung

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-v)dF(v), \quad (B.1)$$

wobei  $Z(x)$  eine unbekante Funktion von  $x \in [0, \infty)$  ist,  $z(x)$  ist eine bekannte Funktion und  $dF(v)$  ist eine bekannte Wahrscheinlichkeitsmaß. Äquivalent, in Faltungsnotation  $Z = z + F * Z$ . Unter schwachen Regelmäßigkeitsbedingungen hat (B.1) eine eindeutige Lösung  $Z = U * z$ . bzw.

$$Z(x) = \int_0^x z(v)dU(v). \quad (B.2)$$

Weiterhin ist das asymptotische Verhalten von  $Z(x)$  durch den Schlüsselerneuerungssatz gegeben (siehe [2]):

**Proposition B.1** [2] Ist  $F$  nicht-gitter und  $z(x)$  direkt Riemann integrierbar, dann gilt

$$Z(x) \longrightarrow \frac{\int_0^\infty z(v)dv}{f_1}. \quad (B.3)$$

**Proposition B.2** [2] Nehmen wir an, daß  $Z$  die Erneuerungsgleichung (B.1) löst, sodaß  $z$  einen Grenzwert  $Z(\infty)$  hat d.h.  $x \rightarrow \infty$  und daß  $F$  eine beschränkte Dichte hat. Dann gilt

$$\frac{Z(x)}{x} \longrightarrow \frac{z(\infty)}{f_1}, \quad x \rightarrow \infty \quad (B.4).$$

**Beweis.** Die Bedingung von  $F$  impliziert, daß  $dU(v)$  eine beschränkte Dichte  $u(x)$  mit dem Grenzwert  $1/f_1$  für  $v \rightarrow \infty$  hat. Daher durch dominierte Konvergenz,

$$\begin{aligned} \frac{Z(x)}{x} &= \frac{1}{x} \int_0^x z(x-v)u(v)dv = \int_0^1 z(x(1-t))u(xt)dt \\ &\longrightarrow \int_0^1 z(\infty)\frac{1}{f_1}dt = \frac{z(\infty)}{f_1}. \quad \square \end{aligned}$$

In der Risikothorie ist ein Hauptgrund, daß die Erneuerungstheorie relevant ist, die Erneuerungsgleichung durch die Ruinenwahrscheinlichkeit für den zusammengesetzten Poisson-Prozess zu erfüllen. Hier hat die relevante  $F$  keine Masse eins ( $F$  ist defekt). Aber, Asymptotische Eigenschaften lassen sich aus der Schlüsselerneuerungsgleichung durch eine exponentielle Transformation erhalten, wenn  $dF(v)$  nicht zu eins integriert ist. Zu diesem Zweck, multiplizieren wir (B.2) mit  $e^{\xi v}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und erhalten  $\tilde{Z} = \tilde{z} + \tilde{F} * \tilde{Z}$ , wobei  $\tilde{Z} = e^{\xi v} Z(v)$ ,  $\tilde{z} = e^{\xi v} z(v)$ ,  $d\tilde{F}(v) = e^{\xi v} dF(v)$ . Nehmen wir an, daß  $\xi$  so gewählt wird, daß  $\int_0^\infty e^{\xi x} dF(v) = 1$  gilt, d.h.  $\tilde{F}$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, der aufgrund  $\int_0^\infty dF(v) = 1$  verwendet werden kann, um  $\tilde{Z}$  und damit auch  $Z$  zu studieren. Beachten wir jedoch, daß die Existenz von  $\xi$  für heavy-tailed  $F$  schief gehen könnte, siehe [2].

**Satz B.1** [17] Angenommen sei  $F$  nicht glatt mit  $f_1 < \infty$ . Für alle  $y \geq 0$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (H_0(x) - H_0(x - y)) = f_1^{-1} y, \quad (B.5)$$

wobei  $H_0$  Erneuerungsfunktion ist.

Da  $Z(x) \approx H_0(x) - H_0(x - y)$ , die Gleichung kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Z(x) = f_1^{-1} \int_0^\infty z(v) dv. \quad (B.6)$$

Als nächstes untersuchen wir das asymptotische Verhalten der Lösung  $Z(x)$  von (B.1) für  $x \rightarrow \infty$ , wenn  $z(x)$  nichtnegativ ist und eine gewisse Integrierbarkeitseigenschaft erfüllt. Genauer, für alle  $h > 0$ , definiere obere Integralsumme  $\bar{z}(h) = h \sum_{n=1}^\infty \sup\{z(x) : (n-1)h \leq x \leq nh\}$  und untere Integralsumme  $\underline{z}(h) = h \sum_{n=1}^\infty \inf\{z(x) : (n-1)h \leq x \leq nh\}$ . Die Funktion  $z(x)$  wird *direkt Riemann integrierbar* genannt, wenn  $\bar{z}(h) < \infty$  für alle  $h > 0$  und wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\bar{z}(h) - \underline{z}(h)) = 0 \quad (B.7)$$

gilt. **Satz B.2** [17] Sei  $z(x)$  direkt Riemann integrierbar. Dann gilt für die Lösung  $Z(x) = \int_0^\infty z(x-v) dH_0(v)$  der Erneuerungsgleichung (B.1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Z(x) = \begin{cases} f_1^{-1} \int_0^\infty z(v) dv & \text{wenn } f_1 < \infty, \\ 0 & \text{wenn } f_1 = \infty. \end{cases} \quad (B.8)$$

**Beweis.** Nehmen wir  $h > 0$  beliebig aber fest, und approximieren wir  $z(x)$  von unten und von oben durch die Schrittfunktionen

$$z_*(x) = \sum_{n=1}^\infty \underline{m}_n \delta_x([(n-1)h, nh]), \quad z^*(x) = \sum_{n=1}^\infty \bar{m}_n \delta_x([(n-1)h, nh]),$$

wo wir die Abkürzungen benutzt haben  $\underline{m}_n = \inf\{z(x) : (n-1) \leq xh^{-1} \leq n\}$  und  $\overline{m}_n = \sup\{z(x) : (n-1) \leq xh^{-1} \leq n\}$ , für alle  $n \geq 1$ . Offensichtlich für alle  $x \geq 0$ ,  $z_*(x) \leq z(x) \leq z^*$ . Durch die Monotonie der Erneuerungsfunktion  $H_0(x)$ , und die Positivität von  $z(x)$  haben wir auch

$$\int_0^\infty z_*(x-v)dH_0(v) \leq \int_0^\infty z(x-v)dH_0(v) \leq \int_0^\infty z^*(x-v)dH_0(v).$$

Nehmen wir den Ausdruck auf der rechten Seite der oben genannten Ungleichungen. Dann nach additivität des Integralen folgt.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z^*(x-v)dH_0(v) &= \sum_{n=1}^\infty \overline{m}_n \int_0^x \delta_{x-v}([ (n-1)h, nh ]) dH_0(v) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \overline{m}_n (H_0(x - (n-1)h) - H_0(x - nh)), \end{aligned}$$

wobei wir für  $t < 0$ ,  $H_0(t) = 0$  setzen. Beachten wir, daß durch das Ergebnis des **Satzes B.1** die Differenzen  $(H_0(x - (n-1)h) - H_0(x - nh))$  gleichmäßig beschränkt sind, für alle  $x \geq 0$  und für  $n \in \mathbb{N}$ . Außerdem, für  $\sum_{n=1}^\infty \overline{m}_n < \infty$  gilt direkte Riemann Integration von  $z(x)$ . Daher durch eine Anwendung der dominierten Konvergenz und des **Satzes B.1** erhalten wir

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty z(x-v)dH_0(v) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty z^*(x-v)dH_0(v) = \frac{h}{f_1} \sum_{n=1}^\infty \overline{m}_n.$$

In ähnlicher Weise finden wir daß

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty z(x-v)dH_0(v) \geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty z_*(x-v)dH_0(v) = \frac{h}{f_1} \sum_{n=1}^\infty \underline{m}_n.$$

gilt. Wenn wir jetzt  $h \downarrow 0$  loslassen, dann folgt (B.8) nach Bedingung (B.7), weil

$$\lim_{h \downarrow 0} h \sum_{n=1}^\infty \underline{m}_n = \lim_{h \downarrow 0} h \sum_{n=1}^\infty \overline{m}_n = \int_0^\infty z(v)dv. \quad \square$$

# Literaturverzeichnis

- [1] Hansjörg Albrecher. *Finanz- und Versicherungsmathematik 1, Vorlesungsskript*. Technische Universität Graz, Februar 2006.
- [2] Søren Asmussen and Hansjörg Albrecher. *Ruin probabilities*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, second edition, 2010.
- [3] Hermann Brunner. The approximate solution of initial-value problems for general volterra integro-differential equations. *Computing*, 40(2):125–137, Jun 1988.
- [4] Leda D.Minkova. *Insurance Risk Theory, Vorlesungsskript*. Lecture Notes, 2010.
- [5] José Garrido and Manuel Morales. On the expected discounted penalty function for Lévy risk processes. *N. Am. Actuar. J.*, 10(4):196–218, 2006.
- [6] Riccardo Gatto. *Stochastische Modelle der aktuariellen Risikotheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2014.
- [7] Hans U. Gerber. *An introduction to mathematical risk theory*. University of Pennsylvania, Wharton School, S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, Philadelphia, Pa., 1979.
- [8] Hans U. Gerber and Elias S. W. Shiu. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance Math. Econom.*, 21(2):129–137, 1997.
- [9] Hans U. Gerber and Elias S. W. Shiu. On the time value of ruin. *N. Am. Actuar. J.*, 2(1):48–78, 1998.
- [10] Jan Grandell. *Aspects of risk theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [11] Christian Hipp. *Risikotheorie 1, Vorlesungsskript*. Karlsruhe, Juli 199.
- [12] Abdul J. Jerri. *Introduction to Integral Equations with Applications*. Clarkson University, 1999.
- [13] Andreas E. Kyprianou. *Gerber-Shiu risk theory*. European Actuarial Academy (EAA) Series. Springer, Cham, 2013.

- [14] Thomas Mack. *Schadenversicherungsmathematik*. Schriftenreihe angewandte Versicherungsmathematik. Verlag Versicherungswirtschaft, 1997.
- [15] Thomas Mikosch. *Non-life insurance mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [16] Behrouz Raftari. Numerical solutions of the linear volterra integro-differential equations: Homotopy perturbation method and finite difference method. 2013.
- [17] Tomasz Rolski, Hanspeter Schmidli, Volker Schmidt, and Jozef Teugels. *Stochastic processes for insurance and finance*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1999.
- [18] Hanspeter Schmidli. *Risk Theory, Vorlesungsskript*. University of Cologne.
- [19] Hipp Christian und Reinhard Michel. *Risikotheorie: Stochastische Modelle und Statistisch Methoden*. Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1990.