



Dipl.-Ing. Peter Joachim Heinrich, BSc

Effiziente Erfassung viskoelastischer Eigenschaften bei der Spannungsermittlung von gezwängten Betonbauteilen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der technischen Wissenschaften

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Viet Tue Nguyen

Institut für Betonbau

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Dissertation identisch.

Datum

Unterschrift

Effiziente Erfassung viskoelastischer Eigenschaften bei der Spannungsermittlung von gezwängten Betonbauteilen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

von

Dipl.-Ing. Peter Joachim HEINRICH, BSc
Evangelimanngasse 21/12, 8010 Graz
peter.heinrich@tugraz.at

Betreuer:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Viet Tue NGUYEN

Kurzfassung

Die Kenntnis der realistischen Spannungsverteilung in erhärtenden Betonbauteilen ist unerlässlich um die Rissgefahr zutreffend beurteilen und ggf. Gegenmaßnahmen im Zuge des Bemessungsprozesses anordnen zu können. Für eine realistische Erfassung der Spannungsentwicklung ist es notwendig, die belastungs- und/oder zeitabhängigen Eigenschaften des Betons hinreichend genau zu erfassen bzw. diese in entsprechenden Berechnungsprogrammen als für das Ergebnis relevante Größen zur Verfügung zu stellen.

Hierzu existiert bereits eine große Zahl an theoretischen Modellansätzen, mit denen beispielsweise die Temperatur- und Festigkeitsentwicklung des eingesetzten Betons gut vorausgesagt werden kann, wie sich durch umfangreiche Versuchsprogramme bestätigen lässt. Neben diesen betonspezifischen Eigenschaften spielt allerdings auch sein viskoelastisches Verhalten, das als *Kriechen* bzw. *Relaxation* bekannt ist, eine zentrale Größe zur Ermittlung der resultierenden Spannungsverteilung. Gegenwärtig existiert auch hierzu eine Vielzahl an Ansätzen und Materialmodellen zur Erfassung der Viskoelastizität, wobei deren Bandbreite auf Mikrostrukturebene beginnt und bis zur phänomenologischen Erfassung der viskoelastischen Eigenschaften reicht. Grundsätzlich kann mit allen vorhandenen Modellen das viskoelastische Verhalten in seiner „Reinform“ gut beschrieben werden, was durch eine Kalibrierung der Modelle an Versuchsbetone gelingt und in vielen durchgeführten Versuchen bestätigt werden kann.

Versuche im Rahmen eines europaweiten Benchmarkprogrammes [Jędrzejewska et al., 2018] haben jedoch gezeigt, dass es allerdings nur unzureichend gelingt, die Spannungsentwicklung in *realen* Strukturen vorauszusagen, in denen oft eine Kombination aus Kriech- und Relaxationsphänomenen auftritt. Die Gründe hierzu sind vielfältig: Einerseits ist das Phänomen des Kriechens bzw. der Relaxation noch nicht restlos geklärt und zum anderen sind die Ursachen in den Modellformulierungen zu suchen. Letztere nehmen i. d. R. keinen Bezug auf den aktuell im betrachteten Materialpunkt herrschenden Globalspannungszustand und basieren üblicherweise auf gängigen theoretischen Superpositionsprinzipien. [Schlicke, 2014] schlägt daher eine Vorgehensweise vor, die in einer zeitdiskreten Betrachtung gegenüber dem im Materialpunkt herrschenden Globalspannungszustand explizit zwischen be- und entlastenden Spannungsincrementen unterscheidet, wodurch eine erhebliche Verbesserung der Genauigkeit der Spannungsvoraussage ermöglicht wird.

Zudem ist die Erfassung der viskoelastischen Betoneigenschaften in numerischen Simulationen vor allem im Fall von massigen Bauteilen mit großen Abmessungen häufig mit einem erheblichen Rechen- und damit Zeitaufwand verbunden, was ihre Berücksichtigung in der Praxis oft in den Hintergrund rücken lässt und – wenn überhaupt – eher (grobe) Näherungsverfahren herangezogen werden. Dies kann allerdings zu unwirtschaftlichen oder u. U. unsicheren Bemessungsergebnissen führen; zudem stehen in der Planungsphase oftmals keine detaillierten Informationen hinsichtlich des eingesetzten Betons zur Verfügung, die jedoch meist Voraussetzung für die Kalibrierung existierender Modelle sind.

Vor diesem Hintergrund wird in der vorliegenden Arbeit ein Modell entwickelt, welches einerseits die erwähnten Schwächen im Hinblick auf die Rechenzeit aufhebt und das Materialverhalten unter Berücksichtigung des globalen Spannungszustandes im betrachteten Materialpunkt

realistisch erfasst und vergleichsweise unkompliziert in bestehende numerische Simulationsumgebungen integriert werden kann. Da das Modell auf Grundlage der aktuellen Normengeneration entwickelt wird und hier im Speziellen [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] aufgreift, können die Berechnungsergebnisse bereits in der Planungsphase von großer Bedeutung sein, vor allem wenn keine detaillierten Informationen hinsichtlich der Betonzusammensetzung oder aus eigens durchgeführten Versuchen vorhanden sind. Dies erlaubt bereits während der Planung einerseits das Bauteil im Hinblick auf die Wirtschaftlichkeit und/oder Nachhaltigkeit zu optimieren, bzw. zeigt andererseits, ob evtl. Maßnahmen bspw. zur Sicherstellung der Standsicherheit des Bauteils angeordnet werden müssen.

Schlagwörter: erhärtender Beton, Zwang, Viskoelastizität, Kriechen, Relaxation

Abstract

An adequate assessment of the cracking risk in hardening concrete members calls for a realistic determined stress distribution. Without a good approximation of the concrete's load and/or time dependent properties as relevant parameters in structural simulations, a realistic determination of the stress development is only insufficiently possible.

To the present there exist a high number of theoretical models that can predict for instance the concrete's temperature development and its stiffness development respectively well. This could have been proved in the past by many comprehensive experiments. Besides, the concrete's viscoelastic properties which are in general known as *creep* and *relaxation* respectively highly affect the resulting stress distribution.

At the moment there are many approaches and material models available for an adequate consideration of the viscoelastic properties. There's a high bandwidth in the scale of these models: some of them are based on micro-scale-level whereby others take the viscoelastic effects phenomenologically into account. In general, all of the existing models can describe the viscoelastic behaviour in its „pure“ occurrence very well. This is possible because each model can be calibrated to specific concretes and the quality of the results could have been proved in many experiments.

However, a recent Europe-wide benchmark program [Jędrzejewska et al., 2018] showed that it is only insufficiently possible to capture the viscoelastic effects and therefor the stress development in structures under *real* conditions. In real structures there often occurs a combination of creep and relaxation and both effects influence each other and this makes the consideration of the viscoelastic effects more difficult. The reasons highly vary: on one hand the creep and the relaxation phenomenon respectively is not totally solved yet from the physical point of view. On the other hand the reasons can be seen in the theoretical model formulations itself: These models usually do not take into account the actual global stress state in the considered material point. They base mainly on current (theoretical) principles of superposition. Thus, [Schlicke, 2014] proposes a time discrete method that explicitly distinguishes between loading and unloading stress increments regarding the global stress state in the considered material point. This leads to much better results of the prediction of the stress development.

In general – and especially if one focuses on mass concrete members with large dimensions – the consideration of the viscoelastic concrete properties in numerical simulations requires a lot of calculation time. Therefor in practical cases the viscoelastic effects are – if at all – captured by using (rough) approximations. This could probably lead to an uneconomic design and in the worst case to a doubtful structural design and can result in safety concerns. Furthermore, detailed concrete properties are hardly known in the phase of planning and as mentioned before, they are usually needed for the calibration of existing viscoelastic material models.

For that reason the present work presents a model that is efficient in terms of calculation time. It also considers the viscoelastic material behaviour taking into account the actual global

stress state. It furthermore can be implemented straightforwardly to existing numerical simulation frameworks. The model bases on actual design codes, namely [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011], and therefor the calculation results can be of high importance during the planning phase if no detailed information concerning the concrete properties or from specific experiments is available. Therefor it is possible to optimize the concrete member during its design in terms of its economic efficiency and/or sustainability. On the other hand countermeasures can be taken in time if the structural safety is doubted.

Keywords: hardening concrete, restraint, viscoelasticity, creep, relaxation

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Problemstellung	2
1.2	Zielsetzung und Herangehensweise	3
1.3	Aufbau und Gliederung der Arbeit	4
2	Viskoelastisches Verhalten von Beton	5
2.1	Allgemeines	5
2.2	Kriechen und Relaxation	6
2.2.1	Definition	6
2.3	Theorie der linearen Viskoelastizität	9
2.4	Physikalische Ursachen des Kriechens – Kriechtheorien	11
2.4.1	Seepage Theorie nach Davis et al.	12
2.4.2	Microprestress-Solidification Theory nach Bažant et al.	13
2.4.3	Kriechen als Folge von Mikrorissen nach Rossi et al.	13
2.5	Experimentelle Beobachtungen	14
2.5.1	Kriechversuche	14
2.5.2	Relaxationsversuche	17
2.6	Zusammenfassung	19
3	Rechnerische Abbildung des viskoelastischen Verhaltens	21
3.1	Allgemeines	21
3.2	Prinzipielle Herangehensweisen	21
3.2.1	Vereinfachtes Verfahren	21
3.2.2	Integrale Betrachtung	22
3.2.3	Differentielle Betrachtung	23
3.3	Phänomenologische Rheologie	24
3.3.1	Lineare Grundelemente	24
3.3.2	Aus Grundelementen zusammengesetzte Modelle: Grundkörper	26
3.3.3	Verallgemeinerte Modelle	29
3.4	Zeitschrittbierte Lösungsverfahren von Differentialgleichungen	29
3.4.1	Lösung mittels Laplace-Transformation	30
3.4.2	Anfangswertprobleme	30
3.4.3	Lineare inhomogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	30
3.4.4	Lineare inhomogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten	32
3.5	Zusammenfassung	33
4	Überblick über existierende Ansätze	34
4.1	Allgemeines	34
4.2	Kriechfunktionen	34
4.2.1	Eurocode 2	35

4.2.2	Modelcode 2010	37
4.2.3	Bažant (B4)	39
4.2.4	Gutsch et al.	42
4.3	Materialmodelle für Kriechgeschichten	43
4.3.1	Tacke	43
4.3.2	De Schutter et al.	43
4.3.3	Hermerschmidt	45
4.3.4	Schlicke	46
4.4	Beurteilung der Materialmodelle	47
4.5	Zusammenfassung	49
5	Entwicklung eines eigenen Modells	50
5.1	Allgemeines	50
5.2	Generelle Modellbeschreibung	50
5.2.1	Modelldefinition	50
5.2.2	Stoffgleichung eines alternden Kelvin-Modells	51
5.2.3	Lösungsalgorithmus	52
5.3	Bestimmung der Modellparameter	55
5.3.1	Diskretisierung des Retardationsspektrums	56
5.3.2	Optimierungsmethoden	62
5.4	Berechnung von zwangbeanspruchten Systemen	63
5.5	Wirkungsweise des Modells	65
5.5.1	Approximierte Kriechkurve	65
5.5.2	Beispiele zur Verdeutlichung der Arbeitsweise des Modells	66
5.5.3	Rückrelaxation	72
5.6	Modifikation des Modells	73
5.6.1	Eigenschaften einer Kelvin-Einheit	73
5.6.2	Bezug zur Globalspannung	74
5.6.3	Anwendung in der KV-Reihe	75
5.6.4	Bezug zu Superpositionsprinzip	77
5.6.5	Wirkungsweise bei Relaxationsproblemen	78
5.7	Zusammenfassung	81
6	Verifikation des Modells	82
6.1	Allgemeines	82
6.2	Zwangrahmenversuch	82
6.2.1	Versuchsdaten und -aufbau	82
6.2.2	Statisches System	83
6.2.3	Temperaturgeschichte und Festigkeitsentwicklung	83
6.2.4	Reifekonzept	84
6.2.5	Mechanische Eigenschaften	84
6.2.6	Schwinden	84
6.2.7	Druck- und Zugkriechen	85
6.2.8	Nachrechnung des Versuchs mit dem neuen Modell	86
6.3	Vergleich mit anderen Entlastungsansätzen	89
6.4	Zusammenfassung	90
7	Implementierung in ein FE-System	91
7.1	Allgemeines	91
7.2	Grundlagen der Methode der Finiten Elemente	91

7.3	Berücksichtigung der Viskoelastizität	94
7.4	Implementierung in eine kommerzielle FE-Umgebung	95
7.5	Veranschaulichung der Wirkungsweise des Modells	95
7.5.1	Stufenbeanspruchung	95
7.5.2	Kontinuierliche Beanspruchung	96
7.6	Verifikation der Implementierung anhand des Zwangrahmenversuchs	99
7.7	Zusammenfassung	101
8	Anwendungsbeispiele	102
8.1	Bodenplatte	102
8.1.1	Eingangsgrößen	102
8.1.2	FE-System	103
8.1.3	Berechnungsergebnisse	104
8.1.4	Interpretation	107
8.2	Massives Brückenfundament	108
8.2.1	Eingangsgrößen	109
8.2.2	FE-Modell	110
8.2.3	Berechnungsergebnisse	111
8.2.4	Interpretation	114
8.3	Zusammenfassung	116
9	Zusammenfassung und Ausblick	117
	Literatur	124

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Die Kenntnis der realistischen Spannungsentwicklung in erhärtenden Betonbauteilen ist unabdingbar, um die Rissgefahr zutreffend beurteilen und ggf. entsprechende Maßnahmen im Zuge der Bemessung anordnen zu können. Für eine realistische Ermittlung der Spannungsentwicklung ist es erforderlich, sämtliche zeit- und/oder belastungsabhängige Eigenschaften des Betons hinreichend genau zu erfassen bzw. diese in entsprechenden Berechnungsprogrammen (z. B. Finite-Elemente (FE) Umgebungen usw.) als für das Ergebnis relevante Größen zur Verfügung zu stellen. Hierin können insbesondere die Temperatur- als auch Festigkeitsentwicklung von Betonen verschiedenster Art und Zusammensetzung durch unterschiedliche Modelle und Ansätze bereits gut erfasst werden. Dies konnte auch im Rahmen eines Benchmarkprogramms der COST¹-Action TU1404 bestätigt werden, an der sich mehrere Forschungsteams aus verschiedenen europäischen Forschungseinrichtungen beteiligten. Die Ergebnisse hierzu können in [Jędrzejewska et al., 2018] nachgesehen werden.

Neben der realistischen Simulation von Temperatur- und Festigkeitsentwicklung war ein Ziel dieses Benchmarks die zutreffende Erfassung der entstehenden Spannung in einem gezwängten Betonbauteil. Hierzu sollte ein Zwangrahmen-Versuch simuliert werden, um die Güte der eingesetzten Berechnungsmodelle durch den Vergleich der Berechnungsergebnisse mit umfassenden an diesem Rahmen durchgeführten Temperatur- und Spannungsmessungen zu zeigen. Sowohl die Temperatur- als auch Festigkeitsentwicklung konnte von allen teilnehmenden Teams gut erfasst werden. Die Spannungsergebnisse sind in Abb. 1.1 dargestellt. Darin zeigt die durch-

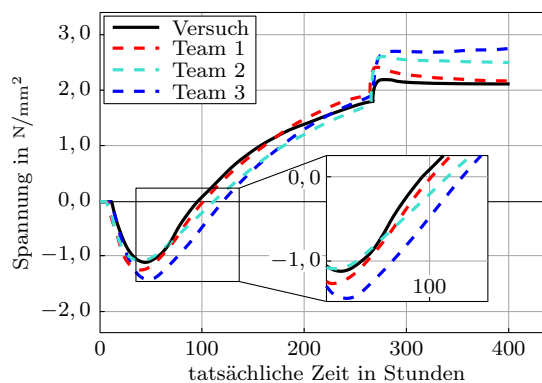


Abbildung 1.1: Nachrechnung eines Versuches mit unterschiedlichen Modellen aus [Jędrzejewska et al., 2018]

gezogene schwarze Linie die im Versuchsrahmen gemessene Spannung. Die strichlierten Linien zeigen die Simulationsergebnisse, wobei eine Farbe der jeweils ein eigenes Forschungsteam repräsentiert. Es wird ersichtlich, dass die Ergebnisse nicht nur quantitativ sondern zum Teil auch

¹European Cooperation in Science and Technology

qualitativ deutlich voneinander abweichen. Einerseits kann dies auf unterschiedlich ermittelte und entsprechend verschiedene Schwindeinwirkungen zurückgeführt werden, andererseits wird in [Jędrzejewska et al., 2018] hervorgehoben, dass die Abweichungen mehrheitlich auf die verwendeten Modelle zur Berücksichtigung der viskoelastischen Betoneigenschaften (Kriechen bzw. Relaxation) zurückzuführen sind. Damit zeigt das Benchmarkprogramm auf, dass die Erfassung dieser stark zeitabhängigen Eigenschaften aus heutiger Sicht die größte Herausforderung in der Simulation erhärtender Betonbauteile darstellt.

1.2 Zielsetzung und Herangehensweise

Gegenwärtig existiert eine Vielzahl an Modellen zur Erfassung der viskoelastischen Betoneigenschaften *Kriechen* bzw. *Relaxation*. Die Bandbreite der Modelle reicht von der Modellierung beginnend auf der Mikrostrukturebene über Multiskalenmodelle bis hin zur phänomenologischen Erfassung der viskoelastischen Eigenschaften. Grundsätzlich können mit allen Herangehensweisen gute Ergebnisse erzielt werden und sowohl Kriechen als auch Relaxation in seiner „Reinform“ gut vorausgesagt werden, was in vielen Versuchen bestätigt werden konnte. Dies gelingt durch eine Kalibrierung der verwendeten Modelle an Versuchsdaten. Die Durchführung von Kriech- und Relaxationsversuchen ist jedoch üblicherweise mit hohem Zeit- und nicht unbeträchtlichem Kostenaufwand verbunden. Allerdings ist es bereits möglich, durch die Verwendung von Multiskalen- bzw. Mikrostrukturmodellen bei einer genauen Kenntnis der Betonzusammensetzung und -rezeptur das chemo-physikalische und damit die Viskoelastizität beeinflussende Verhalten hinreichend gut zu prognostizieren. Vielfach stehen diese Daten in der Planungsphase jedoch noch nicht zur Verfügung, da zunächst nur die Festigkeitsklasse bekannt ist. Als praxisrelevant erweist es sich daher das viskoelastische Betonverhalten ausgehend von normativen Vorgaben zu erfassen.

Wie das zuvor erwähnte Benchmark gezeigt hat, ist es allerdings nachwievor problematisch die Spannungsentwicklung in realen Strukturen vorauszusagen. Die Gründe hierzu sind vielfältig: Zum einen ist das physikalische Materialverhalten hinter dem Phänomen des Kriechens bzw. der Relaxation noch nicht restlos geklärt und zum anderen sind die Ursachen in der rechnerischen Behandlung des Problems zu suchen. Die Erfassung der viskoelastischen Betoneigenschaften in numerischen Simulationen ist häufig mit einem erheblichen Rechen- und damit Zeitaufwand verbunden, der ihre Berücksichtigung in der Praxis vielfach in den Hintergrund rücken lässt, was wiederum zu unwirtschaftlichen und u. U. unsicheren Bemessungsergebnissen führen kann.

Das vorrangige Ziel dieser Arbeit ist es, vor dem Hintergrund des aktuellen Forschungsstandes ein Berechnungsmodell zu entwickeln, das die Berücksichtigung der viskoelastischen Betoneigenschaften *zwangbeanspruchter* Betonbauteile realistisch und zugleich recheneffizient ermöglicht. Es soll ein Modell entwickelt werden, das

- effizient im Hinblick auf die Rechenzeit ist,
- das Materialverhalten realistisch erfasst,
- basierend auf der aktuellen Normengeneration eingesetzt und
- vergleichsweise unkompliziert in existierende FE-Lösungen integriert werden kann.

Um diese Ziele erreichen zu können, werden verschiedene existierende Ansätze hinsichtlich ihrer Stärken und Schwächen untersucht und darauf aufbauend ein eigenes Modell entwickelt, das die Stärken gezielt kombiniert und gleichzeitig die zuvor definierten Ziele erfüllt. Um die praktische

Anwendbarkeit zu testen, wird das Modell anhand des eingangs präsentierten Benchmarkbeispiels des Zwangrahmens verifiziert und weiters in eine kommerzielle FE-Lösung integriert.

1.3 Aufbau und Gliederung der Arbeit

In einer überblicksmäßigen Darstellung werden zunächst in Kap. 2 die an Betonkörpern beobachtbaren viskoelastischen Effekte in ihren Reinformen erläutert. Auf eine Definition der Begriffe „Kriechen“ und „Relaxation“ folgt eine knappe Darstellung gängiger Theorien zur Beschreibung des vermuteten physikalischen Ursprungs dieser Eigenschaften. Ausgehend von der Vielzahl an durchgeführten Versuchen werden die bisher bekannten wesentlichen Einflussfaktoren aufgezeigt. Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine zusammenfassende Darstellung von ebenfalls in der jüngeren Vergangenheit durchgeführten Relaxationsversuchen bzw. Versuchen unter allgemeiner Zwangbeanspruchung.

Neben der grundsätzlichen Betrachtung des Phänomens beschäftigt sich Kap. 3 mit der rechnerischen Erfassung des viskoelastischen Verhaltens. Der Fokus liegt hierbei auf *linearer Viskoelastizität*, sodass das Superpositionsprinzip (s. Abschn. 2.3) gilt. Ausgehend davon werden einfache rheologische Modelle vorgestellt, um in die generelle Arbeitsweise dieser Modelle einzuführen. Abgeschlossen wird das Kapitel durch die Vorstellung möglicher Lösungsverfahren für jene Differentialgleichungen, die sich aus der Anwendung von rheologischen Modellen ergeben.

Anschließend wird in Kap. 4 eine Auswahl existierender Ansätze zur Erfassung des Betonkriechens vorgestellt. Dies beinhaltet einerseits Kriechansätze aus der derzeitigen Normengeneration und andererseits Ansätze aus der jüngeren Forschung. Zudem werden einige neuere, auf rheologischen Körpern basierende, Modelle vorgestellt. Ausgehend von Vor- und Nachteilen die die jeweiligen Modelle mit sich bringen wird unter Beachtung der einleitend angegebenen Ziele im folgenden Kap. 5 ein neuer Ansatz erarbeitet. Hierzu wird zunächst das grundlegende Modell – ein „klassischer“ rheologischer Körper – vorgestellt und die zugehörige Materialgleichung abgeleitet, sowie Verfahren zur Bestimmung der Modellparameter vorgestellt. Die Wirkungsweise des Modells wird anhand verschiedener theoretischer Szenarien präsentiert, worin sich die Notwendigkeit einer Modifikation des Lösungsansatzes zeigt. Diese Modifikation wird im Anschluss vorgestellt, wobei das Kapitel mit weiteren grundlegenden Vergleichsrechnungen zwischen der bisherigen „klassischen“ Modellformulierung und dem neuen Ansatz schließt. Durch die Nachrechnung eines Versuches wird das Modell in Kap. 6 verifiziert. Dabei werden auch die Unterschiede gegenüber der klassischen Formulierung verdeutlicht.

Kap. 7 beschreibt die Implementierung des Modells in eine kommerzielle FE-Umgebung. Hierzu werden zunächst allgemeine Grundlagen der FE-Berechnung erläutert und darauf aufbauend die Implementierung vorgenommen. Die Wirkungsweise des Modells wird anhand unterschiedlich belasteter und verschieden gezwängter dreidimensionaler Strukturen vorgestellt. Validiert wird die Implementierung durch eine Simulation des bereits aus Kap. 6 bekannten Zwangrahmenversuchs. Kap. 8 wendet das Materialmodell im Rahmen der Simulation zweier massiger Bauteile an: Zunächst wird die erhärtungsbedingten Zwangbeanspruchung einer Bodenplatte untersucht, was einen typischen Fall für die Anwendung solcher Modelle darstellt. Das zweite Anwendungsbeispiel ist ein massiges Fundament einer großen Fachwerkbrücke.

Die Arbeit wird mit Kap. 9 durch eine Zusammenfassung aller wesentlichen Punkte abgerundet, wobei auch auf noch bestehenden Forschungsbedarf eingegangen wird.

2 Viskoelastisches Verhalten von Beton

2.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird überblicksmäßig auf das viskoelastische Verhalten von Beton eingegangen. Neben einer allgemeinen Definition und der Erläuterung von grundlegenden Begriffen der linearen Viskoelastizität wird der Stand der Wissenschaft bezüglich des viskoelastischen Verhaltens kurz dargestellt. Letzteres beinhaltet eine knappe Zusammenfassung der bisher vermuteten physikalischen Ursachen. Dabei werden verschiedene Theorien zur Ursache des viskoelastischen Materialverhaltens erläutert. Darauf aufbauend werden die in den gängigen Kriechtheorien meist berücksichtigten und daher als maßgeblich anerkannten Einflussfaktoren beschrieben. Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine kurze Darstellung der Ergebnisse der jüngeren Forschung.

Wird für einen beliebigen Körper elastisches Materialverhalten unterstellt, besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung: $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Dieser Zusammenhang ist gänzlich unabhängig von der Zeit. Wird ein einfacher nicht knickgefährdeter Stab mit elastischem Materialverhalten in Stabrichtung (einaxial) belastet, stellt sich eine sofortige Verformung ein. Diese Verformung geht unmittelbar mit dem Entfernen der Belastung zurück und der Stab nimmt seine ursprüngliche Länge an – die Stauchung wird zu Null. Trägt man dieses Verhalten eines typischen Festkörpers in einem σ - ε -Diagramm auf, fallen Belastungs- und Entlastungsast zusammen. Ist das Werkstoffverhalten *linear-elastisch* besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Als Stoffgleichung gilt dann das HOOKEsche Gesetz $\sigma = \varepsilon \cdot E$, vgl. Abschn. 3.3.

Daneben existieren Materialien, die ab einer bestimmten Spannung σ_F eine überproportionale Dehnungszunahme bei nahezu gleichbleibender Spannung zeigen – dieses Verhalten wird als *Fließen* bezeichnet. Entlastet man dann das über σ_F beanspruchte Material vollständig, geht die Verformung bzw. die Dehnung nicht zur Gänze zu Null zurück. Im Material bleibt eine sogenannte plastische Dehnung erhalten, es verhält sich *ideal-plastisch*. Zwischen Spannung und Dehnung besteht dann kein eindeutiger Zusammenhang mehr und die Spannung ist von einer „Deformationsgeschichte“ abhängig, vgl. [Gross, Hauger & Wriggers, 2009]. Wie auch das elastische ist das plastische Verhalten zeitunabhängig und stellt sich in vielen Materialien sofort ein, wenn die entsprechende Schwellenspannung überschritten wird.

In einer weiteren Gruppe von Werkstoffen wie z. B. Polymeren zeigt sich hingegen bei einer konstant einwirkenden Spannung keine konstante Dehnung mehr. Die Dehnung ist *zeitabhängig*. Solche Materialien besitzen die Eigenschaften eines Festkörpers und einer *viskosen* Flüssigkeit. Man bezeichnet dieses Verhalten als *viskoelastisch*. Das Verhalten einer viskosen Flüssigkeit kann durch eine Stoffgleichung der Form $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$ beschrieben werden. Für *linear-viskoses* Materialverhalten gilt $\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$, vgl. Abschn. 3.3. Darin ist $\dot{\varepsilon}$ die Dehngeschwindigkeit bzw. Dehnungsrate woraus man auch aus der Stoffgleichung erkennt, dass sich viskoses Materialverhalten durch die Zeitabhängigkeit charakterisiert.

Grundsätzlich besitzen Werkstoffe immer elastische, plastische und viskose Eigenschaften, wobei je nach Werkstoff die eine oder andere Eigenschaft stärker hervortritt.

Im Falle des in dieser Arbeit betrachteten Werkstoffs „Beton“ äußert sich das viskoelastische Verhalten vor allem durch die auf Bauteilebene beobachtbaren Kriech- bzw. Relaxationseigenschaften. Diese Eigenschaften sind bei jungem, sich noch deutlich im Hydratationsprozess befindlichem, im Vergleich zu bereits erhärtetem Beton besonders ausgeprägt. Insgesamt kommt der Berücksichtigung der Viskoelastizität zur hinreichend genauen Erfassung des Trag- und Verformungsverhaltens von Strukturen aus Beton eine entscheidende Bedeutung zu.

2.2 Kriechen und Relaxation

2.2.1 Definition

Belastet man eine Betonprobe mit einer konstanten Spannung und wird die Dehnung betrachtet, so ändert sich diese im Zeitverlauf, s. Abb. 2.1. Dieses Verhalten bezeichnet man als *Kriechen*,

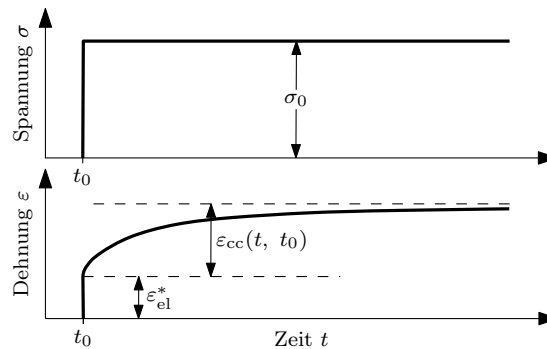


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des Kriechens

das im idealen Fall die völlige Verformungsfreiheit der Probe voraussetzt. Die Entwicklung der Kriechverformung kann durch die Kenntnis einer dimensionslosen Kriechzahl φ beschrieben werden. Die Kriechzahl wird als der Quotient aus Kriechdehnung ϵ_{cc} und der elastischen Dehnung ϵ_{el}^* definiert.

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\epsilon_{cc}(t, t_0)}{\epsilon_{el}^*} \quad (2.1)$$

Dabei ist t_0 der Zeitpunkt des Belastungsbeginns. Die zur Ermittlung der Kriechzahl erforderliche elastische Dehnung ϵ_{el}^* variiert je nach Literatur hinsichtlich des zu ihrer Ermittlung zugrundegelegten Elastizitätsmoduls: In der aktuellen Fassung des EC 2 [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] wird beispielsweise die elastische Dehnung eines bereits erhärteten Betons im Alter von 28 Tagen herangezogen.

Andere Autoren verwenden hingegen die elastische Dehnung $\epsilon_{el}(t_0)$ entsprechend des zum Belastungszeitpunkt vorhandenen Elastizitätsmoduls als Bezugsgröße.

Wird eine Betonprobe einer konstanten Dehnung ausgesetzt und verfolgt man die Spannung im Zeitverlauf, so ändert sich diese ebenfalls, s. Abb. 2.2. Dieses Verhalten setzt im idealen Fall definitionsgemäß eine vollständige Verformungsbehinderung voraus und wird als *Relaxation* bezeichnet. Ähnlich wie beim Kriechen kann auch das Relaxationsverhalten durch die Kenntnis

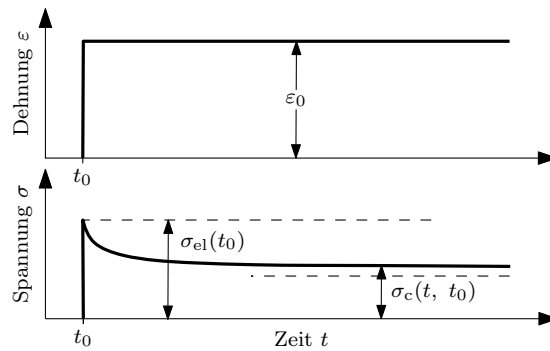


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Relaxation

einer dimensionslosen Relaxationszahl ψ beschrieben werden. Die Relaxationszahl ist definiert als der Quotient aus verbliebener Restspannung und (elastischer) Anfangsspannung.

$$\psi(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t, t_0)}{\sigma_{el}(t_0)} \quad (2.2)$$

Nach klassischem Verständnis beruhen Kriechen und Relaxation auf derselben Materialeigenschaft und deshalb wird gefordert, dass beide unter idealen Randbedingungen (volle bzw. keine Behinderung) eindeutig ineinander überführbar sind. Das bedeutet, dass das viskoelastische Verhalten von Beton auch ausgehend von dessen Kriechverhalten beschrieben und damit aus seinen Kriechkurven abgeleitet werden können muss, s. u. a. [Gutsch, 1998].

Da Kriechversuche in technischer Hinsicht wesentlich einfacher als Relaxationsversuche durchzuführen sind, hat sich letztendlich in der Praxis des Bauingenieurwesens das Vorgehen durchgesetzt, das viskoelastische Verhalten des Betons durch Kriechversuche zu bestimmen und die damit einhergehende Relaxation im Bauteil rechnerisch zu erfassen.

Abb. 2.3 zeigt nun schematisch einen einstufigen Kriechversuch² mit Entlastung: Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird eine Last der Größe $\Delta\sigma_0$ auf eine erhärtende Betonprobe gebracht und bei t^* entfernt.

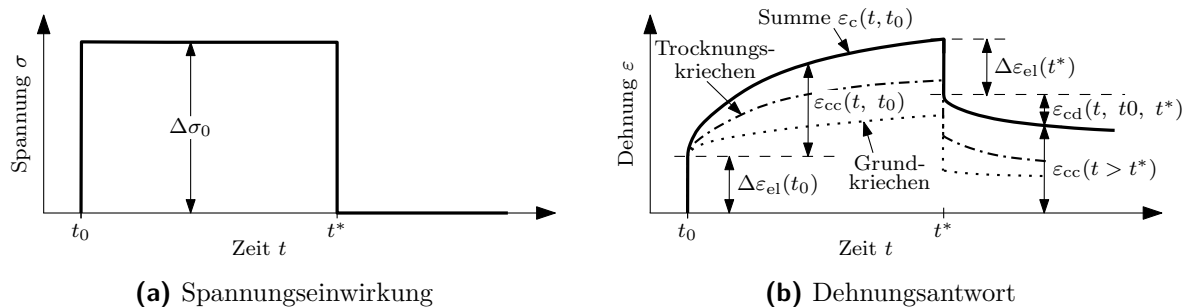


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung von Kriechkomponenten

Zunächst reagiert die Probe mit einer unmittelbar mit der Lastaufbringung einhergehenden elastischen Dehnungsänderung $\Delta\varepsilon_{el}(t_0)$. Da Beton mit der Zeit seine Eigenschaften ändert ist

²Etwasiges Schwinden bleibt in dieser Betrachtung unberücksichtigt.

die bei t^* erneut auftretende elastische Dehnungsänderung $\Delta\varepsilon_{el}(t^*)$ entsprechend geringer. Die Dehnungszunahme die während $t^* - t_0$ stattfindet entsteht als Folge des Kriechens. Diese Kriechdehnung geht nach vollständiger Entlastung zum Teil zurück, was auch als verzögert elastische Rückverformung oder als *Rückkriechen* (engl.: *recovery*) $\varepsilon_{cd}(t, t_0, t^*)$ bezeichnet wird.

Die Änderung der Betoneigenschaften mit der Zeit führt auch dazu, dass die zuvor entstandenen Kriechdehnungen nicht vollständig reversibel³ sind. Aus diesem Grund wird häufig zwischen reversiblen und irreversiblen Kriechanteilen unterschieden. Wird diese Unterscheidung in Berechnungsmodellen berücksichtigt, erfolgt dies meist unter der Voraussetzung, dass sich die Kriechdehnung während der Be- und Entlastungsphase analog entwickeln.

Zudem wird vielfach eine Unterscheidung zwischen *Grund-* und *Trocknungskriechen* (auch als *Pickett Effekt* bezeichnet) vorgenommen: Dabei beschreibt das Grundkriechen jene Kriechdehnungen die auftreten, wenn die Betonprobe während der Belastung keinerlei Feuchtaustausch mit der Umgebung erfährt.

Unter Trocknungskriechen versteht man hingegen die Dehnungen die infolge des Feuchtaustausches mit der Umgebung durch Diffusionsprozesse zusätzlich entstehenden, vgl. [Zilch & Zehetmaier, 2010]. Diese Unterscheidung ist ebenfalls schematisch in Abb. 2.3 dargestellt.

Eine weitere allgemein anerkannte Unterscheidung kann in Abhängigkeit des Belastungsniveaus erfolgen. Hierbei werden hinsichtlich der Kriechrate die Phasen Primär-, Sekundär- und Tertiärkriechen unterschieden, was in Abb. 2.4 illustriert ist.

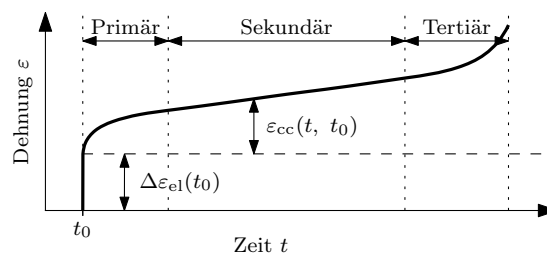


Abbildung 2.4: Einteilung der Kriechphasen in Abhängigkeit der Kriechrate

– *Primärkriechen*

Primäres Kriechen tritt bei Belastungen unterhalb der Dauerstandsfestigkeit auf und ist gekennzeichnet durch eine kontinuierlich abnehmende Kriechrate ($\frac{d^2\varepsilon_{cc}}{dt^2} < 0$).

– *Sekundärkriechen*

Sekundäres Kriechen stellt sich mit zunehmender Belastungssteigerung ein. Es ist gekennzeichnet durch eine konstante Kriechrate, d.h. die Kriechdehnung nimmt über die Zeit hin linear zu ($\frac{d\varepsilon_{cc}}{dt} = \text{const.}$).

– *Tertiärkriechen*

Bei Belastungen über etwa 85 % der Festigkeit tritt tertiäres Kriechen ein. Dieses ist gekennzeichnet durch eine überproportionale Zunahme der Kriechdehnung ($\frac{d^2\varepsilon_{cc}}{dt^2} > 0$). Die einsetzende Rissbildung innerhalb der Zementmatrix nimmt nun weiter zu bis schließlich das Versagen des Betons eintritt.

³Dies gilt auch für ältere Betone, bei welchen anhaltende Diffusions- und Austrocknungsprozesse zur Änderung der Materialeigenschaften führen

Ausgehend von Glg. (2.1) kann die elastische Dehnung sowie die Kriechdehnung zur gesamten spannungsinduzierten Dehnung $\varepsilon_c(t, t_0)$ zusammengefasst werden:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \varepsilon_{el}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0) = \Delta\sigma_c(t_0) \cdot \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E(t_0)} = \Delta\sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (2.3)$$

Der durch $J(t, t_0)$ ersetzte Term wird auch als *Kriech-, Nachgiebigkeits- bzw. Retardationsfunktion* bezeichnet und ist auch unter dem Begriff *Komplianzfunktion* (engl.: *compliance function*) anzutreffen⁴. Die Funktion $J(t, t_0)$ ist eine charakteristische Materialeigenschaft und gibt die durch eine konstante Einheitslast hervorgerufene Gesamtdehnung wieder.

2.3 Theorie der linearen Viskoelastizität

Wird ein proportionaler Zusammenhang zwischen Kriechverformung und kriecherzeugender Spannung⁵ unterstellt, spricht man von *linearer* Viskoelastizität. Die rechnerischen Materialparameter sind *unabhängig* von der kriecherzeugenden Spannung und entsprechend unabhängig davon ist die resultierende Kriechverformung. Falls die Materialparameter abhängig von der Einwirkung sind, handelt es sich um *nichtlineare* Viskoelastizität.

Wenn sich – unabhängig davon, ob eine Abhängigkeit von der Einwirkung besteht oder nicht – die Materialparameter über die Zeit ändern, so kennzeichnet dies einen *alternden* Prozess bzw. ein alterndes Material.

Die Zusammenhänge zwischen Spannung und Dehnung können unterhalb der sogenannten Linearitätsgrenze (vgl. Abschn. 2.5.1) mit verhältnismäßig einfachen mathematischen Beziehungen dargestellt werden. Nach [Kara, 2005] bilden die damit hergeleiteten Materialgesetze auch für nichtlineare Formulierungen bereits eine Basis.

Für die in dieser Arbeit später betrachteten Einwirkungsgeschichten kann unter Voraussetzung der zuvor genannten Linearitätsgrenze von einem linearen Zusammenhang zwischen Beanspruchungsniveau und viskoelastischem Verhalten ausgegangen werden: Auf der Druckseite ist dies durch ein stets geringeres Spannungsniveau als etwa $0,40 \cdot f_c(t)$ gegeben bzw. kann dies für Zugbeanspruchungen bis zum Einsetzen der Rissbildung ab ca. $f_{ctk;0,05}$ unterstellt werden.

Wesentliche Grundlage der Theorie der linearen Viskoelastizität bildet das BOLTZMANNsche Superpositionsprinzip. Für Beton im Gebrauchsspannungsbereich wurde es erstmals von [Mc Henry, 1943] angewendet. Es besagt, dass die Summe aus n Spannungsinkrementen $\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i(t, t_i)$ die Verformung $\sum_{i=1}^n \Delta\varepsilon_i(t, t_i)$ hervorruft, wenn die Spannungsinkremente $\Delta\sigma_i(t, t_i)$ einzeln zur Verformung $\Delta\varepsilon_i(t, t_i)$ führen. Dies ist in Abb. 2.5 illustriert.

Für Relaxationsprobleme gilt das Superpositionsprinzip sinngemäß, wobei dann eine Geschichte von Dehnungseinwirkungen zur entsprechenden Spannungsgeschichte führt.

Ausgehend von diesem Prinzip kann nun eine beliebige Spannungsgeschichte durch Aufteilen in eine Summe von Spannungsinkrementen beschrieben werden. Dies wird exemplarisch in Abb. 2.5b gezeigt. Für einen beliebigen Zeitpunkt t gilt somit

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_0(t_0) \cdot J(t, t_0) + \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i(t_i) \cdot J(t, t_i) \quad (2.4)$$

⁴Dies kann in ähnlicher Weise für Relaxation ausgehend von der Relaxationszahl erfolgen – man erhält dann die Relaxationsfunktion $G(t, t_0)$.

⁵Dies gilt entsprechend auch für relaxierte Spannung und die zugehörige relaxationserzeugende Verformungseinwirkung.

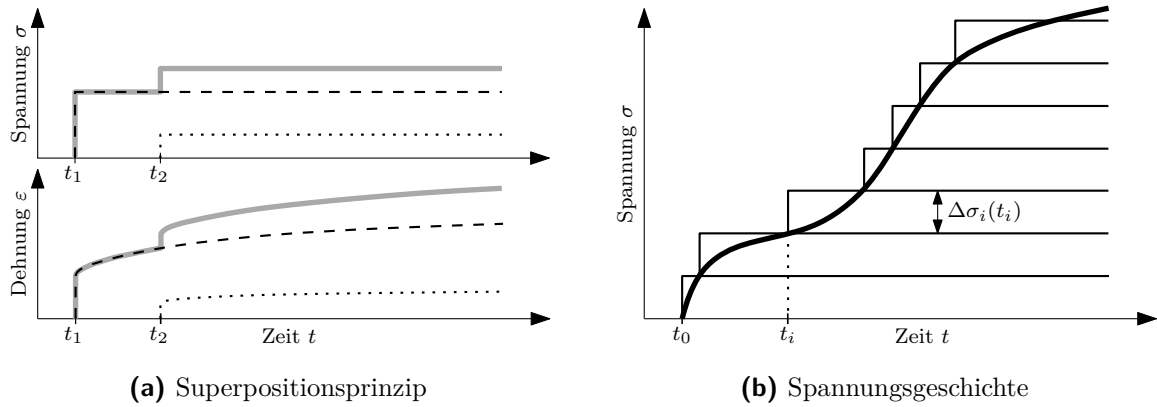


Abbildung 2.5: Superpositionsprinzip nach Boltzmann

Dieses Vorgehen kann allerdings zu einer Überschätzung der durch Superposition ermittelten Dehnungen ab der zweiten Spannungsstufe im Vergleich zu gemessenen Kriechdehnungen führen. [CEB Bulletin 199, 1990], [Rottler, 1998] und [Anders, 2012] erklären dieses in mehrstufigen Kriechversuchen beobachtbare Verhalten durch ein vermindertes Kriechvermögen nach Vorbelastung, das auch als spannungsinduzierte Alterung bezeichnet wird. Ähnliches stellt bereits [Troost, 1967a] bzw. [Troost, 1967b] bei der Anwendung des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme fest, und schlägt einen als *Relaxations-* bzw. *Alterungsbeiwert* bezeichneten Faktor zur Berücksichtigung dieses Effekts vor, s. a. Abschn. 3.2.1.

Ein weiterer wesentlicher Aspekt des Superpositionsprinzips – und ein zentraler Punkt der vorliegenden Arbeit – ist der Umgang mit entlastend wirkenden Spannungsinkrementen. Im Superpositionsprinzip werden *Entlastungen* als gleichzeitig wirkende Spannungsinkremente mit umgekehrtem Vorzeichen betrachtet. Nach [Müller, 1986] überschätzt⁶ die so vorhergesagte Dehnungsentwicklung nach einer vollständigen Entlastung die im reinen Kriechversuch auftretende verzögert elastische Rückverformung. Häufig kann bei Anwendung des Superpositionsprinzips auch eine Dehnungsumkehr nach anfänglicher Kriecherholung beobachtet werden, die sich als erneuter Anstieg der Kriechverformung zeigt. Dies tritt dann ein, wenn in der Superposition divergente Kriechkurven verwendet werden⁷, s. Abb. 2.6a.

Bei Relaxationsproblemen hingegen kann eine Überschätzung des Spannungsabbaus und ein damit einhergehender Vorzeichenwechsel der Spannung die Folge sein, falls die verbleibende Restspannung über die Kriechfunktion ermittelt wird, s. Abb. 2.6b.

Trotz dieser Prognosefehler hat es sich auch in Normen durchgesetzt das zeitabhängige Verformungsverhalten von Beton durch Stoffgesetze der linearen Viskoelastizität mit Alterung und ausgehend von Kriechfunktionen unter strikter Anwendung des Superpositionsprinzips zu beschreiben, vgl. Abschn. 2.2.1.

In Abschn. 5.5.3 wird im Detail ein weiterer Kritikpunkt der strikten Anwendung des Superpositionsprinzips bei Relaxationsproblemen deutlich: Aufgrund der jedem entlastenden Inkre-

⁶ Alternativ existiert ein von STAFFORD entwickeltes Superpositionsprinzip, worin die Spannungsgeschichte in Spannungsimpulse anstelle von Spannungssprünge aufgeteilt wird. Damit können die beschriebenen Schwächen zum Teil umgangen werden; für linear viskoelastisches Materialverhalten ohne Alterung liefert es dasselbe Ergebnis, vgl. [Hermerschmidt, 2016a].

⁷ Dies kann mathematisch nachgewiesen werden, wenn $\frac{\partial^2 C}{\partial t \partial t_0} < 0$ ist, wobei das *Kriechmaß* $C(t, t_0)$ (engl.: *specific creep*) mit Hilfe der Kriechzahl $\varphi(t, t_0)$ aus Glg. (2.3) ausgedrückt werden kann: $J(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E(t_0)} = \frac{1}{E(t_0)} + C(t, t_0)$.

ment zugeordneten Kriechkurve, die mit der vorhandenen Kriechgeschichte superponiert wird, kommt es ab einer bestimmten Größe des entlastenden Inkrements zum Rückkriechen in der Kriechgeschichte. Dies führt allerdings stets zu einem unplausiblen Spannungsanstieg bei Systemen unter überwiegender Relaxationsbeanspruchung. Besonders problematisch ist das, wenn kontinuierliche Beanspruchungsgeschichten betrachtet werden, da der Zeitpunkt des Vorzeichenwechsels der verbleibenden Spannung nicht zutreffend erfasst wird. Dies ist in Abb. 2.6c skizziert. Werden Relaxationsprobleme ausgehend von Kriechkurven unter Anwendung des Superpositionsprinzips berechnet, sollte – wie bereits in [Schlicke, 2014] festgestellt wurde – der globale Systemspannungszustand berücksichtigt werden.

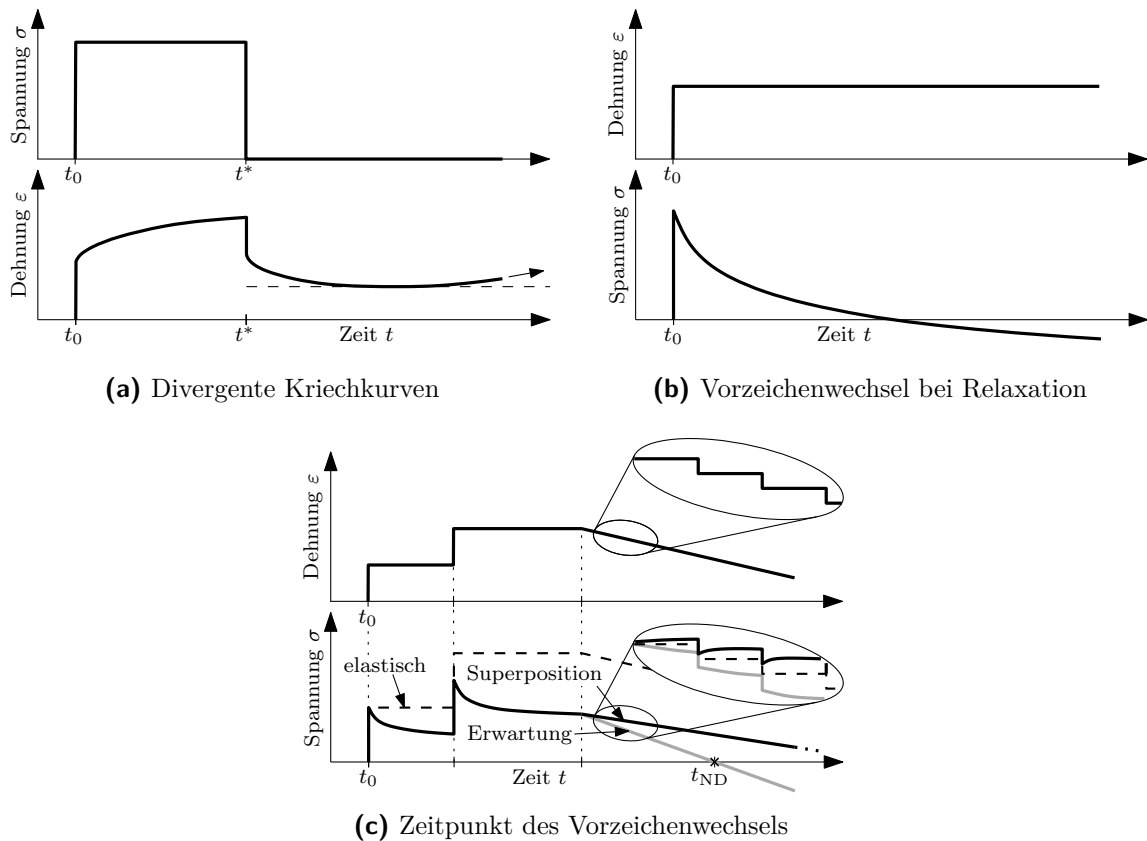


Abbildung 2.6: Qualitative Darstellung möglicher Prognosefehler: Kriechkurvendivergenz (a), Vorzeichenwechsel (b) und Zeitpunkt des Vorzeichenwechsels (c) bei Relaxation

Ein weiterer Nachteil des Superpositionsprinzips zeigt sich in dessen Anwendung bei der Berechnung großer Strukturen. Hier führt es zu einem erheblichen Speicheraufwand, da stets sämtliche Dehnungs- bzw. Spannungsinkremente ab dem Zeitpunkt der Erstbelastung bereitgestellt werden müssen. Außerdem müssen in jedem Zeitschritt sämtliche vorangegangene Inkremente summiert werden, was zu Lasten der Rechenzeit geht.

2.4 Physikalische Ursachen des Kriechens – Kriechtheorien

Da die Gesteinskörnung eher ein elastisches Verformungsverhalten zeigt und nicht kriecht, ist das Kriechen hauptsächlich dem Zementstein des Betons zuzurechnen. Bis heute sind die phy-

sikalischen Ursachen und damit die grundlegenden Vorgänge im Betongefüge, die hinter dem viskoelastischen Betonverhalten stecken allerdings nicht vollständig geklärt. [Müller, 2013] bezeichnet den Beton deshalb als eine Art „black box“, wobei nach derzeitigem Wissensstand nicht nur ein einzelner Mechanismus als alleinige Ursache des Grundkriechens gesehen werden kann.

Zwar können in Versuchen die Einwirkungen definiert gesteuert und die Auswirkungen präzise bestimmt werden, allerdings lassen sich die erhaltenen Zusammenhänge zwischen Einwirkung und Antwort nur phänomenologisch erfassen – sie sind nicht prozessbezogen beschreibbar. Die Erfahrung zeigt jedoch, dass auch eine phänomenologische Beschreibung des Problems eine hinreichend genaue Erfassung des Tragverhaltens auf Strukturebene ermöglicht. Aus diesem Grund liegt in dieser Arbeit der Fokus auf der phänomenologischen Erfassung des viskoelastischen Verhaltens.

Der Vollständigkeit halber werden an dieser Stelle einige existierende Theorien zu den grundlegenden Vorgängen auf Materialebene zusammenfassend wiedergegeben. Für tiefergehende Betrachtungen und/oder entsprechende Modelle, die in der Mikrostrukturebene ansetzen, wird auf entsprechende weiterführende Literatur verwiesen. Grundsätzlich führen die meisten vorhandenen Theorien das Kriechen auf ein Zusammenwirken folgender Effekte zurück:

- Konsolidierung durch Porenwasserumlagerung
- viskoses Fließen des Zementsteins infolge von Gleiten und Abscheren einzelner Hydratationsprodukte
- verzögerte elastische Verformungen der Zuschläge durch Verformungsbehinderung durch den Zementleim
- Mikrorissbildung

2.4.1 Seepage Theorie nach Davis et al.

Die *Seepage Theorie* betrachtet den Zementstein als kolloidales Gel. Das Betonkriechen wird danach durch das Auspressen bzw. Abfließen von unter Druck stehendem oder sich nicht mehr im Gleichgewicht befindlichen Gelwasser in vorhandene Kapillarporen erklärt, vgl. [Wesche & Boes, 1973]. Kriechen wird als ein Prozess, der dem Trocknungsschwinden ähnlich ist verstanden und der sich aufgrund von Gelwasserbewegungen ergibt. Gegenüber dem Schwinden ist allerdings zur Kriecherzeugung eine äußere Beanspruchung erforderlich und kein Feuchtegefälle wie es bei Austrocknungsprozessen der Fall ist. [L’Hermite, 1957] versteht die Ursache des Kriechens als Wasserbewegung innerhalb des Betons: Ein Wasserverlust nach außen tritt nicht ein, daher führt ein durch Belastung verursachtes Feuchtigkeitsgefälle zwischen Gel- und Kapillarporen zu dieser Wasserbewegung.

[Powers, 1968] führt das Schwinden und Kriechen auf Adsorption und Desorption des Wassers im Zementstein zurück. Damit ändern sich die energetischen Verhältnisse des „lasttragenden Wassers“ wodurch es mit seiner Umgebung nicht mehr im Gleichgewicht steht was letztlich zu Diffusion führt, die eine makroskopische Verformung bewirkt. Allerdings kann damit nicht erklärt werden, dass bereits vollständig getrocknete Proben ebenfalls kriechen. Irreversible Kriechdehnungen sieht [Powers, 1968] im Entstehen neuer Verbindungen die sich zwischen erstmalig zusammengedrückten Oberflächen bilden. Nach dieser Vorstellung dürfte allerdings ein erneutes Belasten einer zuvor entlasteten Probe zu keinem merklichen neuen Kriechen führen. Dies steht im Widerspruch zu experimentellen Beobachtungen, vgl. [Gutsch, 1998] oder [Hermerschmidt, 2016a].

2.4.2 Microprestress-Solidification Theory nach Bažant et al.

In [Bažant & Prasannan, 1989a] bzw. [Bažant & Prasannan, 1989b] wurde die sogenannte *Solidification Theory* („Verfestigungstheorie“) erarbeitet. Das mit dem Hydratationsfortschritt abnehmende Kriechpotential wird nach dieser Theorie durch die Volumenzunahme des Zementgels erklärt, das als eine nichtalternde viskoelastischen Materialkomponente verstanden wird. Aufgrund der zu geringen Dauer der Volumenzunahme der Hydratationsprodukte kann mit dieser Theorie das Langzeitverhalten nicht ausreichend erklärt werden, vgl. [Hermerschmidt, 2016a].

Eine Erweiterung der Solidification Theory stellt die *Microprestress-Solidification Theory* dar, vgl. [Bažant, Hauggaard, Baweja & Ulm, 1997] und [Bažant, Hauggaard & Baweja, 1997]. Gegenüber der Solidification Theory wird darin zusätzlich davon ausgegangen, dass in den Bereichen des Zementgels eine Mikrovorspannung entsteht. Diese resultiert aus dem Spaltdruck des adsorbierten Wassers in den Gelporen und lokalen Volumenveränderungen durch Feuchteänderungen. Die Mikrovorspannungen können die Gelporen überbrücken und schließlich durchqueren. Aus viskosem Abgleiten zwischen gegenüberliegenden Gelporenwänden folgt nach der Microprestress-Solidification Theory das Kriechen unter Langzeitbeanspruchung. Dabei brechen jedoch durchquerende Verbindungen (Vorspannungen) auseinander und ordnen sich schließlich neu. Die Ursache des Trocknungskriechens wird in der Änderung des Mikrovorspannungszustandes gesehen welche die Veränderungen des Spaltdrucks ausgleichen, die durch Veränderungen des Feuchtezustands in den Kapillarporen hervorgerufen werden.

2.4.3 Kriechen als Folge von Mikrorissen nach Rossi et al.

Einen gänzlich anderen Ansatz verfolgen Forscher rund um ROSSI, vgl. [Rossi, Tailhan, Le Maou, Gaillent & Martin, 2012]. Rossi sieht die Ursache des Grundkriechens in Mikrorissen, die im Zementstein auftreten. Dieser Schluss lässt sich aus Schallemissionsprüfungen ziehen, die an Kriechkörpern für verschiedene Belastungsniveaus unter der Annahme, dass die Anzahl der akustischen Ereignisse der Anzahl der entstandenen Mikrorisse während der Spannungseinwirkung entspricht, durchgeführt worden sind. In [Rossi et al., 2012] wird u. a. gezeigt, dass bei Druckkriechversuchen die Anzahl der akustischen Ereignisse proportional zur Kriechdehnung ist. Außerdem konnte festgestellt werden, dass mit steigendem Belastungsniveau auch die Dichte der erzeugten Mikrorisse bzw. das Verhältnis von erzeugter Mikrorissdichte zur Grundkriechdehnung steigt.

Die Entstehung der Mikrorisse bewirkt ein feuchtigkeitsbedingtes Ungleichgewicht innerhalb des Bauteils. Dadurch entstehen in der Nähe des Mikrorisses Druck- und Konzentrationsgradienten, wodurch es zu einer weiteren Umlagerung des Kapillarporenwassers hin zu den Mikrorissen kommt. Daraus resultiert zusätzliches Trocknungsschwinden. Wird die Schwindverformung nun durch Sand- oder Gesteinskörnungen verhindert, sind zusätzliche Zugspannungen die Folge, die wiederum zur Bildung neuer Mikrorisse führen. So kommt es zu einer Verdichtung der Mikrorisse im Beton und zu weiteren Trocknungsschwindverformungen. Das Grundkriechen wird letztlich auf eine Art zusätzliches Selbsttrocknungsschwinden unter Lastbeanspruchung zurückgeführt.

2.5 Experimentelle Beobachtungen

2.5.1 Kriechversuche

Ungeachtet von den tatsächlichen Vorgängen auf Mikrostrukturebene konnten in umfassenden Untersuchungen immer wieder Faktoren festgestellt werden, die das Kriechen maßgeblich beeinflussen. Vielfach wird dabei in *innere* und *äußere* Einflussfaktoren unterschieden. Innere Einflussfaktoren resultieren aus den Betoneigenschaften selbst, d. h. Betonzusammensetzung, Festigkeit und Hydratationsgrad. Umgebungslufttemperatur und -feuchte, Betonalter bei Belastungsbeginn, Probekörpergeometrie und Größe der aufgetragenen Einwirkung zählen hingegen zu den äußeren Einflussfaktoren.

Einfluss der Gesteinskörnung

Da das Kriechen überwiegend aus dem Zementstein stammt, bewirkt dieselbe Spannungseinwirkung für diesen größeres Kriechen als es bei der Gesteinskörnung der Fall ist. Die Gesteinskörnung behindert damit die Kriechverformung des Zementsteins, wobei die Größe der Behinderung vom Volumenanteil und den Eigenschaften der Gesteinskörnung (d. h. Elastizitätsmodul, Korngröße bzw. Rauigkeit der Partikeloberfläche) abhängt. Betone mit einer Gesteinskörnung von höherem Elastizitätsmodul kriechen weniger als Betone mit ähnlicher Zusammensetzung, jedoch aus Gesteinskörnung mit niedrigerem E-Modul. Mit steigendem Elastizitätsmodul der Gesteinskörnung wird nun auch die Kriechverformung des Zementsteins behindert. Insgesamt nimmt somit die Kriechverformung der Betonprobe ab. Die Zunahme des Volumenanteils der Gesteinskörnung bewirkt deshalb eine Reduktion des Kriechvermögens.

Die Behinderung der Kriechverformung des Zementsteins durch die Gesteinskörnung wird zudem von der Qualität der Kontaktzone beeinflusst, wobei diese von der Rauigkeit der Gesteinskörnungspartikel abhängt. Gesteinskörnungen mit rauer Oberfläche führen tendenziell ebenfalls zu einer Reduktion des Betonkriechens, vgl. [Ma, 2010].

Letztlich beeinflusst neben der Korngröße, also i. w. S. der Volumenanteil der Gesteinskörnung, die Partikelform der Gesteinskörnung die Spannungskonzentration und damit die Mikrorissbildung in der Kontaktzone, worin [Ma, 2010] eine mögliche Ursache für das Kriechen bei hohem Belastungsniveau sieht.

Einfluss der Betonfestigkeit

In Kriechversuchen üblicher Konstruktionsbetone bei denen ausschließlich ihre Druckfestigkeit durch Veränderung des Wasserzementwertes variiert wurde zeigt sich deutlich, dass mit sinkendem w/z -Wert das Kriechen abnimmt, vgl. [Müller, 2013]. Eine Erhöhung der Festigkeit (z. B. durch Verwenden festerer Gesteinskörnung) führt bei konstantem w/z -Wert zu einer Verringerung des Kriechens und auch der Kriechzahl.

Einfluss des Alters des Betons bei Belastungsbeginn

Grundsätzlich konnten sowohl für Druck- als auch Zugkriechversuche ähnliche Ergebnisse erzielt werden: Je früher der Beton belastet wird umso größer ist die resultierende Kriechverformung. Für Betone mit kleinem Belastungsalter können daher kurz nach Aufbringen der Belastung große Dehngeschwindigkeiten festgestellt werden. Weil sich aber gleichzeitig im erhärtenden

Beton die Festigkeitseigenschaften ändern, sinkt die Dehngeschwindigkeit mit zunehmender Belastungsdauer rasch ab⁸.

Einfluss der Umgebungsluftfeuchte

Neben dem Feuchtegehalt des Betons bei Belastungsbeginn beeinflusst die Bauteilgeometrie die Trocknungsrate maßgeblich. Aus diesem Grund ist es nicht möglich, die Intensität des Kriechens direkt mit der relativen Luftfeuchtigkeit zu verknüpfen. Versuche zeigen, dass die Kriechverformung mit der Stärke der Austrocknung während der Belastung zunimmt.

Einfluss der Temperatur

[Bažant & Parsannan, 1988], [Budelmann, 1989] oder [Neville, Dilger & Brooks, 1983] u. a. zeigen, dass die Kriechverformungen eines nahezu erhärteten Betons zunehmen, wenn dieser erhöhten Temperaturen ausgesetzt ist. Den Einfluss der Temperatur auf junge Betone beschreibt [Gutsch, 1998] als „ambivalent“, als dass eine erhöhte Temperatur die Festigkeitsentwicklung beschleunigt und neben einer höheren Festigkeit bei Belastungsbeginn zu einem schnelleren Festigkeitszuwachs während der Belastung führt. Diese Einflüsse sind kriechmindernd, überlagern sich aber mit dem eigentlichen Einfluss der Temperatur auf die Kriechverformung.

Einfluss der Beanspruchungsrichtung (Druck/Zug)

Werden Kriechversuche in der Literatur betrachtet, handelt es sich dabei meist um Druckkriechversuche. Der Grund ist die in Versuchen technisch einfacher realisierbare zentrische Lasteinleitung bzw. die messtechnische Erfassung der Kriechdehnungen. Unter zentrischem Zug gestaltet sich all dies als deutlich schwieriger. Eine Rolle spielt hierbei zum einen die Messgröße, die unter Zug nur etwa 10 % der Messgröße unter Druck entspricht. Dadurch ist einerseits die Anfälligkeit für Messungenauigkeiten erhöht und andererseits liegt die Messgröße etwa in der Größenordnung gleichzeitig auftretender Schwinddehnungen, wodurch deren Kompensation erschwert wird. Nach [Schlicke, 2014] ist u. a. die zutreffende Ermittlung der Schwindverformung von entscheidender Bedeutung, wobei nicht zuletzt die Lagerung des Begleitkörpers zur Schwindkompensation so zu konzipieren ist, dass zusätzliche Kriechverformungen aus dem Probeneigengewicht in Messrichtung ausgeschlossen werden können. Trotz all dieser Schwierigkeiten liegen heute einige vergleichende Ergebnisse zu Druck- und Zugkriechen vor, die jedoch zum Teil kontrovers diskutiert werden:

Zunächst erhält [Gutsch, 1998] für Betonalter von einem und zwei Tagen vergleichbare Kriechzahlen für zug- und druckbeanspruchte Proben. Diese Ergebnisse stellen auch [Kordina, Schubert & Troitzsch, 2000] fest. Zu ähnlichen Ergebnissen gelangen auch [Briffaut, Benboudjema, Torrenti & Nahas, 2012] für bezogene Kriechdehnungen unter Zug- und Druckbeanspruchung an jungem Beton mit unterschiedlichen Betonaltern zwischen einem und fünf Tagen.

Damit wird die zur Zeit in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] verankerte Regelung bestätigt. [Hermerschmidt, 2016a] kann dieses Verhalten ebenfalls für Betone im Alter von 2 und 3 Tagen beobachten, für Betone im Alter von 1 Tag ergeben sich deutlich größere Kriechzahlen für Zugbeanspruchungen.

⁸Manche Forscher sehen hierin den Grund, dass der Einfluss des Belastungsalters in der rechnerischen Erfassung des Kriechens nicht durch einen mit einer Verlaufsfunktion verknüpften Faktor berücksichtigt werden kann, vgl. [Hermerschmidt, 2016a].

[Grübl, Weigler, Karl & Kupfer, 2001] schreiben, dass aufgrund von Mikrorissbildungen die Kriechdehnungen unter Zug größer werden können als unter Druckbeanspruchung, was u. a. [Forth, 2013] bestätigen kann. Der Unterschied zwischen Zug- und Druckkriechen kann auch in Versuchen von [Delsaute, 2010] beobachtet werden. Hierin wurden Betonproben mit einem Erstbelastungsalter von 20 bis 72 Stunden untersucht. Unabhängig davon zeigt sich eine höhere Kriechgeschwindigkeit für druckbeanspruchte Proben wenige Stunden nach Belastungsbeginn, wobei dieser Unterschied mit dem Belastungsalter zunimmt. Bei höheren Belastungsaltern ist der Unterschied im qualitativen Verlauf allerdings nicht mehr so stark ausgeprägt.

Unterschiedliches Druck- und Zugkriechverhalten wird ebenfalls von [Atrushi, 2003] bestätigt, wobei dort erst mit zunehmender Zeit eine Zunahme der Kriechdehnungen unter Zugbeanspruchung gegenüber den sich stetig verringernden Kriechdehnungen aus Druckbeanspruchungen beobachtet werden konnte. Anfänglich fielen die Druckkriechdehnungen geringer als die Zugkriechdehnungen aus. Ähnliches zeigen auch die Ergebnisse von [Ji, Kanstad & Bjøntegaard, 2013]: sowohl in der Größe als auch im zeitlichen Verlauf treten deutliche Unterschiede zwischen zug- und druckbeanspruchten Proben auf. Allerdings zeigen sich zunächst bei den zugbeanspruchten Proben keine kontinuierlich abnehmenden Kriechgeschwindigkeiten sondern vielmehr ein Anstieg, der erst nach etwa einer Woche wieder kleiner wird. Vergleichbare Ergebnisse im Hinblick auf die Größe des Kriechens erhält auch [Kristiawan, 2006]: Darin wird festgehalten, dass Zugkriechen etwa doppelt so groß wie Druckkriechen ist. Werden jedoch die Ergebnisse von Proben mit gleichem Einwirkungs-Festigkeitsverhältnis verglichen, ergibt sich ein sieben mal größeres Zugkriechen. Für die zeitliche Entwicklung des Kriechens zeigen sich ähnliche Verläufe für Druck- bzw. Zugkriechen unter derselben Spannungseinwirkung.

Versuche von [Tailhan, Boulay, Rossi, Le Maou & Martin, 2013] zeigen dagegen, dass die viskoelastischen Effekte unter Zug bis zu 80 % geringer ausfallen als unter Druck. Ähnliche Ergebnisse erhalten [Schlicke & Dorfmann, 2017], wobei eine Reduktion der Kriechverformungen unter Zugbeanspruchung um 70 % gegenüber Druckbeanspruchungen festgestellt werden kann. Vergleichbares Verhalten zeigt sich auch in Versuchen von [Ranaivomanana, Multon & Turatsinze, 2013] an 28 Tage altem Beton, wobei sich hier sogar nach einiger Zeit eine negative Zugkriechgeschwindigkeit zeigt, was einer der Belastung entgegengesetzten Kriechdehnung entspricht⁹. Dies deckt sich zum Teil mit den Ergebnissen von [Rossi, Tailhan & Le Maou, 2013], worin sich ebenfalls negative Zugkriechgeschwindigkeiten zeigten, die an Betonen im Alter von sieben Tagen festgestellt wurden, wenn die Proben gegen Feuchteaustausch versiegelt waren. Einen ähnlichen Effekt können auch [Reinhardt & Rinder, 2006] bei Zugkriechversuchen an hochfesten Betonen beobachten. Die Autoren führen dies auf die Erfassung des autogenen Schwindens zurück, welches nach deren Annahmen unter Zugbeanspruchung größer ausfällt als bei unbelasteten Probekörpern, s. a. [Rossi et al., 2012]. Für Betone im Alter von 64 Tagen stellen [Rossi et al., 2013] allerdings ähnliche relative Dehnungen für Druck- und Zugkriechversuche fest.

Druck- und Zugkriechversuche wurden auch von [Brooks & Neville, 1977] durchgeführt, jeweils zu einem Belastungsalter von 28 und 56 Tagen sowohl ohne als auch mit Feuchteaustausch d. h. Trocknung. Diese Versuche ließen allerdings keine systematische Beschreibung zu, da je nach Belastungsalter und Feuchtezustand zum Teil unter Druck- und zum Teil unter Zugbeanspruchung größere Kriechdehnungen gemessen wurden.

[Delsaute, Staquet & Boulay, 2012] führten auch zyklische Kurzzeit-Kriechversuche sowohl für Druck- als auch Zugbeanspruchungen durch. Dabei konnte für kurze Beanspruchungsdauern

⁹Dies darf nicht mit dem Phänomen des Rückkriechens verwechselt werden, das auch einer der Belastung entgegengesetzten Kriechdehnung entspricht. Allerdings tritt Rückkriechen definitionsgemäß bei einer Reduktion der Einwirkung bzw. nach der vollständigen Entlastung einer zuvor bereits belasteten Probe auf. Die hier erwähnte der Belastung entgegengesetzte Kriechdehnung tritt jedoch ohne Änderung der Einwirkung auf.

(5 min) und begrenzte Beanspruchungsniveaus ($0,20 \cdot f_c$ bei Druck- und $0,40 \cdot f_{ct}$ bei Zugbeanspruchungen) im Verlauf der normierten Kriechfunktion für Druck- und Zugbeanspruchungen kein Unterschied festgestellt werden. Diese Ergebnisse decken sich wiederum mit den zuvor erwähnten Beobachtungen von [Kordina et al., 2000].

Einfluss des Spannungsniveaus

Ähnlich kontrovers wird diskutiert, ab welchem Spannungsniveau die Proportionalität zwischen einwirkender Spannung und resultierender Kriechdehnung verloren geht. Unterhalb dieses Niveaus kann von einem linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Kriechdehnung¹⁰ ausgegangen werden, wobei bei einer Überschreitung die Kriechdehnung überproportional zunimmt. Für Druckkriechen wird die Linearitätsgrenze zwischen 30 % und 50 % der Druckfestigkeit angegeben, vgl. [Alda, 1978], [Neville et al., 1983], [Müller, 1986] oder [Bažant & Parsannan, 1988]. Für Zugkriechen stehen weniger Versuche zur Verfügung, die Ergebnisse von [Kordina, 1999] bzw. [Atrushi, 2003] geben eine Linearitätsgrenze von etwa 70 % der Zugfestigkeit an, [Gutsch, 1998] stellt sogar bei 90 % noch lineares Kriechen fest.

Abweichend hiervon stellt [Forth, 2013] fest, dass sich für Druckkriechversuche mit sehr geringem Beanspruchungsniveau ($< 0,20 \cdot f_{ck}$) höhere Kriechverformungen einstellen, als es Proben desselben Belastungsalters erwarten ließen, die mit Spannungen zwischen $0,20 \cdot f_{ck}$ und $0,60 \cdot f_{ck}$ belastet worden sind. Daher wird vermutet, dass keine „einheitliche“ Proportionalität i. S. einer einheitlichen Geradensteigung herrscht. Für Zugkriechen wurde beobachtet, dass dessen Größe zwar vom Spannungsniveau abhängt, allerdings nicht proportional zur aufgetragenen Spannung ist.

2.5.2 Relaxationsversuche

Gutsch

[Gutsch, 1998] führt in seiner Dissertation neben umfassenden Kriechversuchen auch eine Vielzahl an Relaxationsversuchen unter Zugbeanspruchung durch. Dabei kann gezeigt werden, dass erwarteterweise das viskoelastische Verhalten bei früher Erstbelastung besonders ausgeprägt ist und ein entsprechend größeres Relaxationsvermögen herrscht. Durchgeführt werden ein- und

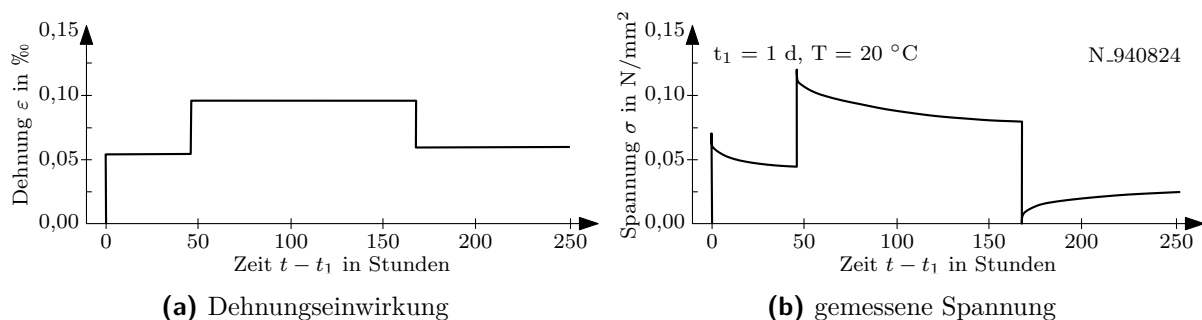


Abbildung 2.7: Mehrstufiger Zugrelaxationsversuch aus [Gutsch, 1998]

¹⁰Der Zeitverlauf der (primären) Kriechdehnung ist stets nichtlinear. Linearität des Kriechens bezeichnet in diesem Zusammenhang die Proportionalität zwischen der Größe des Kriechens und der Einwirkung.

mehrstufige Relaxationsversuche, wobei die jeweiligen Dehnungseinwirkungen bzw. -änderungen stets nahezu „schlagartig“ aufgebracht werden. Beispielhaft ist ein Versuch in Abb. 2.7 dargestellt. Nach einer definierten Lastgeschichte wird die untersuchte Probe jeweils so entlastet, dass sie zunächst spannungsfrei ist. Wird der zum Spannungsnullpunkt führende Dehnungszustand konstant gehalten, zeigt sich ein Wiederanstieg der Spannung, der mit einem zum Rückkriechen äquivalenten Phänomen der „Rückrelaxation“ erklärt wird.

Delsaute und Staquet

[Delsaute et al., 2012] führen neben zyklischen Kriech- auch Relaxationsversuche sowohl für kurzzeitige Zug- als auch Druckbeanspruchungen durch. Dabei wird die Beanspruchung nicht „schlagartig“ sondern über einen definierten Zeitraum mit einer konstanten Geschwindigkeit (zwischen 1 und 5 $\mu\text{m/s}$) aufgebracht. Die Geschwindigkeit hängt dabei von der Betonfestigkeit, dem Belastungsalter und der Beanspruchungsrichtung ab. Nach Ablauf einer bestimmten Belastungszeit innerhalb der die aufgebrachte Dehnung konstant gehalten wird (rd. 6 min) wird die Probe sukzessive entlastet, bis der Nullspannungszustand in der Probe erreicht wird. In

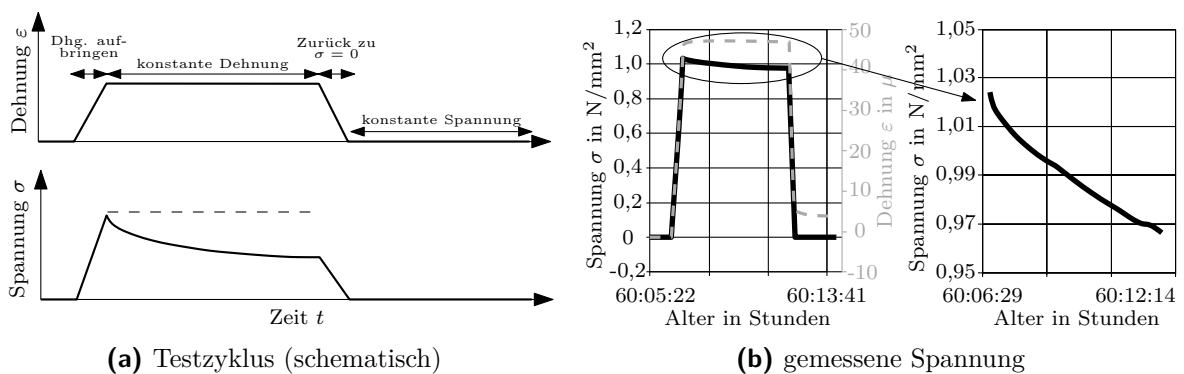


Abbildung 2.8: Zyklischer Relaxationsversuch aus [Delsaute, Staquet & Boulay, 2012]

Abb. 2.8a ist ein derartiger Zyklus schematisch dargestellt und Abb. 2.8b zeigt die für einen Zugrelaxationsversuch gemessene Spannung. Daraus wird deutlich, dass es nach Erreichen des Nullspannungszustands nach sukzessiver Entlastung ohne äußere Einwirkung zu keinem erneuten Spannungsanstieg kommt. [Delsaute et al., 2012] stellen zudem fest, dass für kurze Beanspruchungsdauern (5 min) und bei begrenzten Beanspruchungsniveaus ($0,20 \cdot f_c$ bei Druck- und $0,40 \cdot f_{ct}$ bei Zugbeanspruchungen) derselbe Verlauf für die normierte Relaxationsfunktion resultiert.

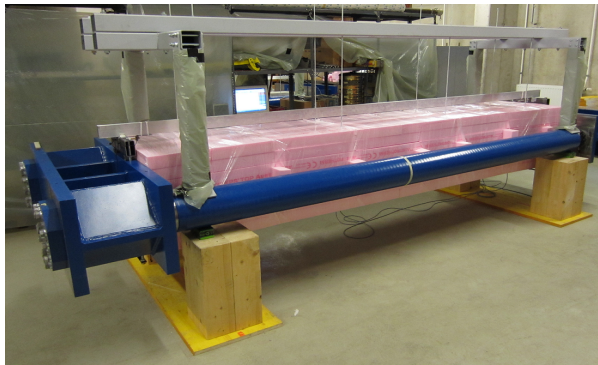
Schlicke und Turner

Am Institut für Betonbau der Technischen Universität Graz wurde das viskoelastische Verhalten von gezwängten Betonbauteilen unter realistischen Einwirkungen untersucht. Reale Beanspruchungen sind meist kontinuierlicher Natur (Temperatur, Schwinden, ...), sodass die sich ständig ändernden äußeren Einwirkungen Spannungsänderungen im Bauteil bewirken. Details zum Versuchsprogramm können [Schlicke, 2014], [Turner, Schlicke & Tue, 2015] und überblicksmäßig Abschn. 6.2 entnommen werden.

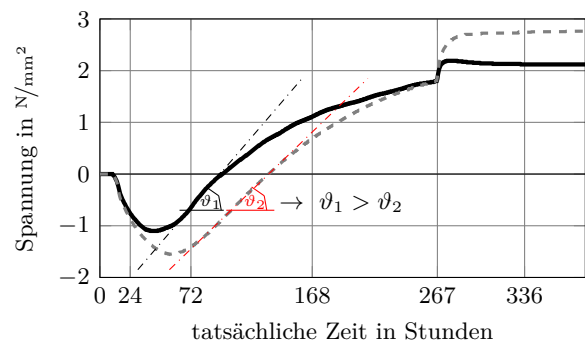
Bei den durchgeführten Versuchsserien hat sich gezeigt, dass der Abbau der Zwangspannung

unter Zugbeanspruchung deutlich geringer ausgeprägt ist, als der unter Druckbeanspruchung zeitlich beschleunigt stattfindende Abbau. [Schlicke, 2014] vermutet dahinter unterschiedliche Ursachen für das viskoelastische Verhalten unter Druck- bzw. Zugbeanspruchung. Danach hängt das Verhalten unter Druck maßgeblich von der Bewegung des Kapillarporenwassers im gedrückten Zementstein ab. Diese Vorstellung eignet sich nicht für Zugbeanspruchungen, da hier – zumindest aus globaler Sicht – der Kapillarporenraum eher zunimmt. [Schlicke, 2014] deutet daher das Zugkriechen als Folge der Mikrorissbildung, vgl. Abschn. 2.4.3. Zur Bestätigung dieser These werden derzeit Zugkriechversuche an aufgehängten Betonzylindern durchgeführt. Erste Ergebnisse hierzu können [Schlicke, Turner & Tue, 2015] bzw. [Schlicke & Dorfmann, 2017] entnommen werden.

Abb. 2.9a zeigt einen der beiden Zwangrahmen, an denen die beschriebenen Zwangversuche durchgeführt worden sind. Abb. 2.9b zeigt neben der über Kraftmessdosen bestimmten Betonspannung auch eine linear-elastische Nachrechnung ohne Berücksichtigung der Viskoelastizität. Darin ist einerseits gut zu erkennen, dass eine Vernachlässigung viskoelastischen Effekte das Ergebnis stark verfälscht. Ein Vergleich der Steigungen ϑ_1 und ϑ_2 zweier gedachter Geraden durch die Phase des Spannungsrückgangs im Druckbereich macht außerdem deutlich, dass auch während des Zwangspannungsabbaus viskoelastisches Verhalten auftritt ($\vartheta_1 > \vartheta_2$) wodurch der Spannungsabbau rascher erfolgt. Würden hier keine viskoelastischen Effekte wirken, müsste die Geradensteigung der Messkurve jener der linear-elastischen Berechnung entsprechen.



(a) Zwangrahmen 01 der TU Graz



(b) Spannung Messung/Berechnung

Abbildung 2.9: Zwangrahmenversuch der TU Graz: Versuchsaufbau und Messdaten bzw. linear-elastische Berechnung

2.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde verdeutlicht, dass die Ursachen der Viskoelastizität des Betons bis heute nicht vollständig geklärt sind. Diesen Schluss lassen Versuchsergebnisse zu, die mit keiner von einer Vielzahl an existierenden Theorien basierend am physikalischen Mechanismus vollständig beschrieben werden können. Dieser Mangel erschwert die Erarbeitung von Modellen zur Erfassung des Phänomens auf Mikrostrukturebene.

Aus diesem Grund werden die viskoelastischen Effekte meist phänomenologisch erfasst. Damit gelingt auch eine zur Untersuchung des Tragverhaltens verschiedener Strukturen hinreichend genaue Beschreibung der Effekte, die i. d. R. meist aus Kriechdaten abgeleitet werden. Umfassende Versuche legen dar, dass das Kriechen von inneren und äußeren Einflussfaktoren bestimmt wird.

Diese Einflussfaktoren wurden im Vorhergehenden gemeinsam mit Beobachtungen aus unterschiedlichen Versuchen erläutert. Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine Zusammenstellung in jüngerer Zeit durchgeführter Relaxationsversuche. Aufgrund der Tatsache, dass die Vorgänge im Material bei herrschender Viskoelastizität noch nicht vollständig verstanden sind, liegt in dieser Arbeit der Fokus auf einer phänomenologischen Erfassung der Viskoelastizität. Hierzu stehen verschiedene Formulierungen zur Verfügung, die in Kap. 4 diskutiert werden. Zuvor wird in Kap. 3 allgemein auf die rechnerische Erfassung der Viskoelastizität eingegangen.

3 Rechnerische Abbildung des viskoelastischen Verhaltens

3.1 Allgemeines

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der rechnerischen Erfassung des viskoelastischen Betonverhaltens. Zunächst werden hierzu grundlegende Herangehensweisen aufgezeigt, um dann vertieft den Bereich der linearen Viskoelastizität mit Alterung zu behandeln. Dabei liegt der Fokus auf der Anwendung von so genannten rheologischen Modellen, mit deren Hilfe es möglich ist, das Materialverhalten effizient in Form von Differentialgleichungen (DGLn) zu beschreiben. Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine Zusammenstellung mathematischer Verfahren zur Lösung dieser Gleichungen.

Wie schon in Kap. 2 erwähnt hat Beton ein stark ausgeprägtes viskoelastisches Materialverhalten, das sich definitionsgemäß im Erscheinungsbild der jeweiligen Reinform als Kriechen oder Relaxation äußert. Ersteres trifft auf typische Fälle wie Durchbiegungszunahmen von Balken oder Verkürzungen von Stützen zu. Die in dieser Arbeit vordergründig behandelten Zwangbeanspruchungen erfordern allerdings eine differenzierte Betrachtung: In der Realität ist in den seltensten Fällen eine vollständige Verformungsbehinderung vorhanden – entsprechend selten tritt auch reine Relaxation auf. Reines Kriechen kann ebensowenig stattfinden, da für die Entstehung einer Zwangbeanspruchung eine Verformungsbehinderung erforderlich ist, die die auftretenden Kriechverformungen wieder behindern würde. Nach [Schlicke, 2014] kann daher behauptet werden, dass reines Kriechen nur in Systemen mit reiner Lastbeanspruchung auftreten kann und in realen Strukturen aufgrund der so genannten *teilweisen Verformungsbehinderung* immer eine Mischform aus Kriechen und Relaxation vorhanden ist.

Wesentliches Merkmal der teilweisen Verformungsbehinderung ist, dass sowohl Kriechverformungen als auch Spannungsrelaxation gleichzeitig wirken und einander bedingen: Infolge von Relaxation wird die wirkende Systemspannung reduziert und damit die resultierenden Kriechverformungen.

Aus rechnerischer Sicht kann das viskoelastische Verhalten linear oder nichtlinear beschrieben werden. Je nach Beschreibung gibt es Unterschiede in der Modellbildung, beides kann jedoch mit oder ohne der Berücksichtigung von Alterungsprozessen erfolgen. Da in dieser Arbeit ausschließlich Spannungen um das Gebrauchsniveau betrachtet werden, ist es ausreichend viskoelastische Effekte durch alternde lineare Modelle zu erfassen.

3.2 Prinzipielle Herangehensweisen

3.2.1 Vereinfachtes Verfahren

In der Praxis hat es sich durchgesetzt, die viskoelastischen Betoneigenschaften vereinfachend durch die Verwendung eines effektiven Elastizitätsmoduls zu berücksichtigen. Der effektive Elas-

tizitätsmodul ist als

$$E_{\text{eff}}(t, t_0) = \frac{E(t_0)}{1 + \rho \cdot \varphi(t, t_0)} \quad (3.1)$$

definiert. Darin ist ρ der so genannte *Relaxationsbeiwert* nach [Trost, 1967a], der unabhängig von [Bažant, 1988] als *Alterungsbeiwert* in einer allgemeineren Form ermittelt wurde.

Die Verwendung des effektiven Elastizitätsmoduls verfälscht allerdings bei der Betrachtung von sich gegenseitig behindernden Bauteilen den Systembehinderungsgrad. Dies hat zur Folge, dass nun die Zwängungssituation nicht mehr zutreffend beschrieben wird. Nach [Schlicke, 2014] bietet daher die Anwendung des effektiven Elastizitätsmoduls bei der Betrachtung von Zwangsspannungen keine allgemeingültige Lösung mehr und weitere Überlegungen oder gar Absicherungen durch Versuchsdaten werden erforderlich, wie [Tue, Schlicke & Bödefeld, 2007] bzw. [Tue, Schlicke & Schneider, 2009] zeigen.

Zutreffender ist es hingegen, die viskoelastischen Betoneigenschaften auf Grundlage der Verformungskompatibilität zu erfassen. Danach bewirkt ein in einem teilweise gezwängten System hervorgerufener Spannungszustand eine theoretische viskoelastischen Verformung, die in das System als zusätzliche Beanspruchung eingetragen wird. Damit kann die Spannungsänderung infolge von Relaxation berücksichtigt werden, welche wiederum das Kriechvermögen beeinflusst. Es gilt:

$$\alpha_T \cdot \Delta T + \varepsilon_{\text{cs}} + \varepsilon_{\text{cc}} = \varepsilon_{\text{frei}} - \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (3.2)$$

mit:

α_T	...	Temperaturdehnungskoeffizient
ΔT	...	Temperaturänderung
ε_{cs}	...	Verformungseinwirkung infolge Schwinden
ε_{cc}	...	zeitabhängige Verformungsänderung infolge Viskoelastizität
$\varepsilon_{\text{frei}}$...	frei einstellbare Verformungsantwort im System
σ_c	...	Zwangsspannung infolge behinderter Verformungseinwirkung

Die sich ständig ändernden Materialeigenschaften während der Erhärtung machen grundsätzlich eine zeitdiskrete Betrachtung erforderlich. Das Ziel ist es nun, die Kriecheinwirkung ε_{cc} je Zeitschritt zutreffend zu bestimmen. Dies kann, wenn zunächst dessen bereits beschriebene Schwächen außer Acht gelassen werden, prinzipiell auf Grundlage des in Abschn. 2.3 erwähnten Superpositionsprinzips geschehen. Allerdings ist seine „manuelle“ Anwendung vielfach mit hohem Rechenaufwand verbunden. Nachfolgend werden deshalb effizientere Herangehensweisen besprochen.

3.2.2 Integrale Betrachtung

Geht man zunächst davon aus, dass eine beliebige Einwirkung eines Kriechproblems nicht als diskrete Reihe von Spannungssprüngen¹¹ sondern als stetige und differenzierbare Spannungsgeschichte $\sigma(t)$ gegeben ist, dann geht Glg. (2.4) über in

$$\varepsilon_c(t) = \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \hat{t}) \cdot \frac{d\sigma}{d\hat{t}} d\hat{t} = \sigma(0) \cdot J(t) + \int_0^t J(t - \hat{t}) \cdot \frac{d\sigma}{d\hat{t}} d\hat{t} \quad (3.3)$$

¹¹Dies gilt sinngemäß auch für Dehnungssprünge bei reinen Relaxationsproblemen.

bzw. nach partieller Integration und der Substitution (t, t_0) bzw. $(t - t_0) = s$ folgt

$$\varepsilon_c(t) = \sigma(t) \cdot J(t_0, t_0) + \int_0^t \sigma(t, s) \cdot \frac{dJ}{ds} ds = \sigma(t) \cdot J(0) + \int_0^t \sigma(t - s) \cdot \frac{dJ}{ds} ds \quad (3.4)$$

wenn jeweils $t_0 = 0$ und $\sigma(t_0) = \sigma_0$ ist. Damit ist das Stoffgesetz in einer integralen Form gegeben¹², wobei diese Form auch als *Geschichts-* oder *Hereditary-Integral* bezeichnet wird. Entsprechend ähnliche Ausdrücke können analog für Relaxation gefunden und zudem kann gezeigt werden, dass auch ein rechnerischer Zusammenhang zwischen der Kriech- und Relaxationsfunktion besteht. Hierzu wird allerdings auf weiterführende Literatur z.B. [Kelly, 2015], [Gross et al., 2009] oder auch [Tacke, 2002] verwiesen.

Die Verwendung des Stoffgesetzes in seiner integralen Form setzt allerdings die Kenntnis der Kriech- bzw. Relaxationsfunktion voraus. Zudem muss Glg. (3.4) numerisch gelöst werden, da i. d. R. keine analytische Lösung gefunden werden kann. Derartige numerische Lösungsverfahren erfordern aber wiederum entsprechenden rechnerischen Aufwand.

Abhilfe kann die Entwicklung eines effizienten Lösungsalgorithmus schaffen, wenn der Kern $J(t, t_0)$ der Integralgleichung Glg. (3.3) in eine Reihe von Funktionen von t und t_0 aufgespalten wird. Dies gelingt beispielsweise effektiv durch dessen Approximation über eine DIRICHLET-Reihe, vgl. [Selna, 1969], [Bažant, 1971], [Bažant & Wu, 1973] oder [Tacke, 2002].

3.2.3 Differentielle Betrachtung

Ein sehr effizienter Weg zur Berechnung der Kriechdehnungs- oder Relaxationsspannungsantwort infolge einer Spannungs- bzw. Dehnungsgeschichte kann ebenfalls entwickelt werden, wenn das Stoffgesetz auf differentielle Weise formuliert wird. Für linear-viskoelastisches Werkstoffverhalten gelingt dies durch eine lineare inhomogene Differentialgleichung der Form

$$\sum_j^N P_j \cdot \frac{d^j \sigma}{dt^j} = \sum_k^M Q_k \cdot \frac{d^k \varepsilon}{dt^k} \quad (3.5)$$

Darin sind P_j bzw. Q_k Konstanten oder zeitabhängige¹³ Funktionen, die die Materialeigenschaften widerspiegeln und daher auch als *Materialparameter* bezeichnet werden. Grundsätzlich kann die Beschreibung des gewünschten viskoelastischen Verhaltens bereits durch Einsetzen der entsprechenden Größen für P_j bzw. Q_k in Glg. (3.5) erhalten werden. Hilfreicher und zugleich anschaulicher ist es dagegen, auf so genannte rheologische Modelle zurückzugreifen, um bereits eine Vorstellung vom Materialverhalten zu bekommen, vgl. [Kelly, 2015]. Dies führt ebenfalls auf eine DGL in o. g. Form und wird im Detail in Abschn. 3.3 erläutert.

Durch die differentielle Formulierung des Werkstoffgesetzes ist es nicht länger erforderlich die gesamte Spannungs- oder Dehnungsgeschichte im Speicher vorzuhalten. Vielmehr kann bei inkrementeller Betrachtung – sofern die entsprechenden Anfangswerte bekannt sind – von jedem beliebigen Zeitpunkt aus ($t \geq 0$) mit der Lösung begonnen werden.

Jedenfalls muss eine dem Grad der DGL entsprechende Anzahl so genannter *innerer Variablen* im Speicher vorgehalten werden. Diese Variablen enthalten die gesamte Spannungs- bzw. Dehnungsgeschichte und müssen mit jedem Zeitschritt aktualisiert werden, vgl. Abschn. 3.4 bzw. Kap. 5. Es kann gezeigt werden, dass das Ergebnis der inkrementellen Formulierung jenem entspricht das man auch durch Auswertung von Glg. (3.4) erhält, vgl. [Benboudjema, 2002].

¹²Ein Integral der Form $\int_a^b f(t - \hat{t})g(\hat{t}) d\hat{t}$ wird als STIELTJES- oder *Faltungintegral* bezeichnet.

¹³bei alternden Materialien

3.3 Phänomenologische Rheologie

Die Rheologie ist eine Wissenschaft, die sich mit dem Verformungs- und Fließverhalten von Stoffen beschäftigt. Sie umfasst dabei Teilgebiete der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie und auch der Strömungslehre. So genannte rheologische *Grundelemente* dienen dazu, durch ihre Kombinationen zu komplizierteren *Modellen* das Verhalten eines Stoffes *phänomenologisch* nachzubilden und eine Materialgleichung dafür zu liefern. Dies wird in diesem Abschnitt übersichtlich dargestellt. Weiterreichende Informationen können entsprechender Literatur wie z.B. [Boley & Weiner, 1997], [Mase & Mase, 1999] oder [Altenbach, 2012] entnommen werden.

Die Schaltungen der rheologischen Grundelemente sind im Grunde anschauliche Darstellungen mathematischer Gleichungen für mechanische Zusammenhänge. Daraus können sowohl Kriech- als auch Relaxationsfunktionen abgeleitet werden. Es kann gezeigt werden, dass in der linearen Viskoelastizität jede Kombination von rheologischen Modellen zu einem Stoffgesetz als DGL in der Form von Glg. (3.5) führt.

3.3.1 Lineare Grundelemente

Rheologische Grundelemente sind jene Körper, mit denen ideal *elastisches*, ideal *viskoses* bzw. ideal *plastisches* Materialverhalten abgebildet werden kann. Nachfolgend werden die in dieser Arbeit eingesetzten Grundelemente näher betrachtet, und ihre Reaktionen bei einwirkender konstanter Spannung (Kriechen) bzw. Dehnung (Relaxation) dargestellt.

Ideale Elastizität

Der Körper zur Beschreibung der idealen Elastizität ist das HOOKEsche Federelement. Die Materialgleichung des Federelements ist das Hookesche Gesetz: Die Dehnung ist proportional zur Spannung

$$\sigma = \varepsilon \cdot a \tag{3.6}$$

wobei die Konstante a die Werkstoffeigenschaft repräsentiert.

Im Allgemeinen ist sie bei Dehnungseinwirkungen der Elastizitätsmodul E , bei Stauchung der Kompressionsmodul K und bei Scherung oder Torsion der Schubmodul G . In der vorliegenden Arbeit wird dahingehend nicht unterschieden und Beton als homogener isotroper Werkstoff betrachtet – die Konstante stellt somit den Elastizitätsmodul dar. Die typische Modellvorstellung für das Hooke-Element ist eine Feder.

Abb. 3.1a zeigt die Reaktion bei konstanter Spannungs-, Abb. 3.1b bei Dehnungseinwirkung mit anschließender Vollentlastung jeweils im zeitlichen Verlauf. Es wird ein sprunghaftes Auftreten der Einwirkung bei t_0 bzw. ein entsprechend sprunghafter Rückgang bei t^* angenommen. Aufgrund der Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung zeigt sich sowohl für den Kriech- als auch Relaxationsversuch dasselbe Verhalten. Damit weist das Hooke-Element die Eigenschaften eines idealen Festkörpers auf:

- Das Federelement antwortet auf eine Einwirkung sofort und ohne zeitliche Verzögerung. Die Reaktion ist stets proportional zur Einwirkung und über die Werkstoffeigenschaft skaliert.

- Ist keine Einwirkung mehr vorhanden, stellt sich sofort und ohne zeitliche Verzögerung der Ausgangszustand ein. Die Reaktion auf die ursprüngliche Einwirkung ist vollständig reversibel.
- Die Zeit hat keinen Einfluss auf die Größe der im Körper hervorgerufenen Reaktion: Weder Spannung noch Dehnung ändern sich.

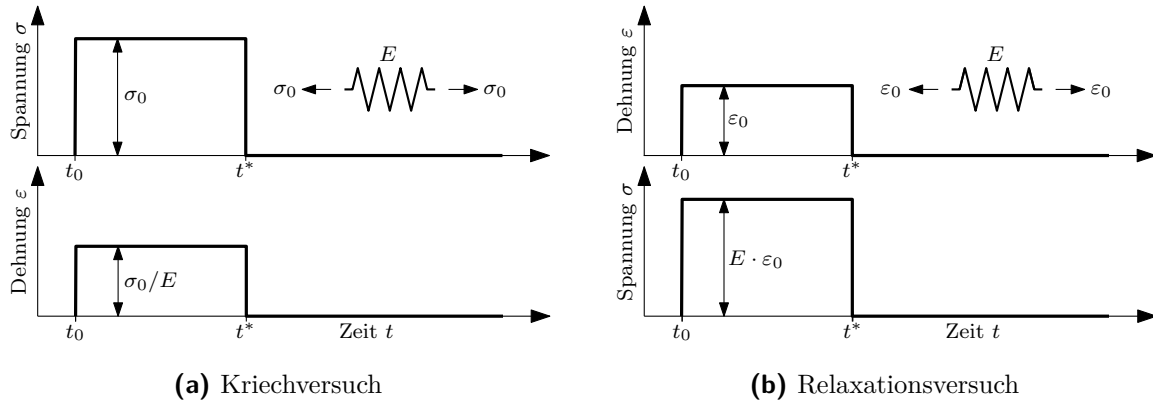


Abbildung 3.1: Verhalten des Hookeschen Federelements

Ideale Viskosität

Ideale Viskosität wird durch das NEWTONSche Dämpferelement beschrieben. Dabei herrscht Proportionalität zwischen einwirkender Spannung und Deformations*geschwindigkeit*. Daraus ist bereits erkennbar, dass auch die Zeit die Größe der Reaktion beeinflusst.

$$\sigma = \dot{\varepsilon} \cdot \eta = \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \eta \quad (3.7)$$

Die Konstante η ist die so genannte dynamische Viskosität. Die Modellvorstellung des Dämpferelements ist eine Art flüssigkeitsgefüllter Zylinder mit Kolben, ähnlich einem Stoßdämpfer. Der Zylinder wird als so groß angenommen, dass der Kolben nie in seiner Beweglichkeit eingeschränkt ist.

Abb. 3.2a zeigt die Reaktion des Newton-Elements bei konstanter Spannungs-, Abb. 3.2b bei konstanter Dehnungseinwirkung mit anschließender Vollentlastung jeweils im zeitlichen Verlauf. Die Beanspruchungswechsel erfolgen dabei wiederum schlagartig bei t (Belastung) bzw. t^* (Entlastung¹⁴).

Das Dämpfungselement besitzt die Eigenschaften einer idealen Flüssigkeit (Newtonsches Fluid) und zeigt folgendes Verhalten:

- Auf eine einwirkende Spannung σ reagiert der Dämpfer mit einer zeitlich verzögerten Deformation ε . Diese Deformation ist unbegrenzt, solange die Spannung wirkt. – Die Zeit beeinflusst also die Größe der Deformation.

¹⁴Da das Boltzmann-Superpositionsprinzip gilt, wird durch die inkrementelle Betrachtung bei $t = t^*$ der Körper dergestalt „entlastet“, als dass eine zusätzlich wirkende Last mit umgekehrtem Vorzeichen aufgebracht wird. Diese zusätzliche Last ist genau so groß wie die ursprüngliche Einwirkung, sodass der betrachtete Körper in Summe unbelastet erscheint. Die Superposition wird durch die DGL „übernommen“, wodurch man aus dieser unmittelbar die summierten Einzelantworten erhält.

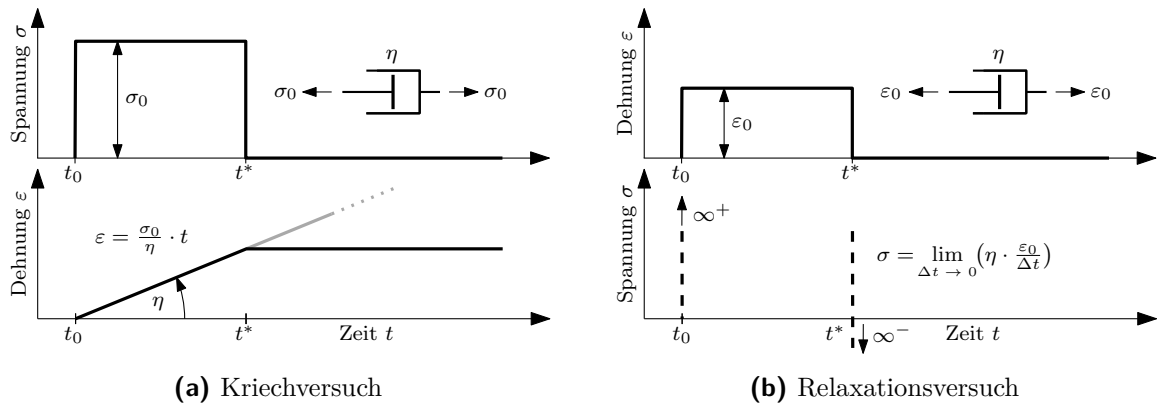


Abbildung 3.2: Verhalten des Newtonschen Dämpferelements

- Wirkt die Spannung nicht weiter ein, bleibt die bis zu diesem Zeitpunkt aufgetretene Verformung dennoch bestehen. Sie ist also irreversibel.
- Eine Dehnungseinwirkung kann auf den Körper nicht schlagartig aufgebracht werden; im Grenzfall wird die resultierende Spannung $\sigma \rightarrow \infty$. – Der Körper besitzt damit keine Relaxationseigenschaft.

3.3.2 Aus Grundelementen zusammengesetzte Modelle: Grundkörper

Die bisher gezeigten Grundelemente reichen nicht aus, das viskoelastische Verhalten eines Stoffes zu beschreiben. Aus diesem Grund werden sie zu komplizierteren rheologischen Körpern bzw. Modellen kombiniert. In diesem Abschnitt werden die zwei Grundkörper Kelvin- (auch Kelvin-Voigt) bzw. Maxwell-Körper näher betrachtet.

Maxwell-Körper

Die Serienschaltung eines Feder- und eines Dämpfungselements wird als MAXWELL-Körper (MW) bezeichnet. Sein Schaltbild ist u. a. in Abb. 3.3 dargestellt. Darin ist zu erkennen, dass die einwirkende Spannung σ aufgrund der Gleichgewichtsbedingung sowohl der Feder- als auch Dämpferspannung entsprechen muss: $\sigma = \sigma_F = \sigma_D$. Dagegen setzt sich die Gesamtdehnung additiv aus den beiden Dehnungsanteilen zusammen: $\varepsilon = \varepsilon_F + \varepsilon_D$.

Weil in Glg. (3.7), dem Stoffgesetz des Dämpferelements, nicht die Dehnung sondern die Dehnungsgeschwindigkeiten (-raten) vorkommen, werden diese anstelle der Dehnungen addiert: $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_F + \dot{\varepsilon}_D$. Dies führt auf eine lineare inhomogene DGL 1. Ordnung:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E} \rightarrow \dot{\varepsilon} \cdot \eta = \sigma + \frac{\eta}{E} \cdot \dot{\sigma} \quad (3.8)$$

Für eine schlagartig aufgebraachte Spannungseinwirkung erhält man aus der Integration der DGL und der Anfangsbedingung der unmittelbaren¹⁵ Verformung des Federelements bei Lastaufbringung $\sigma(t = t_0 = 0) = \sigma_0/E$ die Dehnungsentwicklung $\varepsilon(t)$ bzw. auf die Spannung bezogen

¹⁵Eine schlagartig aufgebraachte Spannung führt zunächst zum Blockieren des Dämpferelements, wogegen die Feder sofort reagiert. Erst mit zunehmender Zeit beginnt die Dehnungszunahme am Dämpfer.

die Kriech- oder Komplianzfunktion $J(t)$:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \rightarrow J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad (3.9)$$

Zur Bestimmung der Relaxationsfunktion des MW-Körpers wird die Dehnung mit $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{const.}$ vorgegeben. Damit ist $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ und die DGL wird zu $\sigma + \eta/E \cdot \dot{\sigma} = 0$. Mit der Anfangsbedingung der unmittelbaren¹⁶ Reaktion des Federelements bei Lastaufbringung $\sigma(t = t_0 = 0) = E \cdot \varepsilon_0$ ergibt sich für die Spannungsentwicklung $\varepsilon(t)$ bzw. auf die Dehnung bezogen die Relaxationsfunktion $G(t)$:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \rightarrow G(t) = \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \quad (3.10)$$

Das Verhalten des MW-Körpers ist in Abb. 3.3 dargestellt. Abb. 3.3a zeigt einen Kriech- und Abb. 3.3b einen Relaxationsversuch.

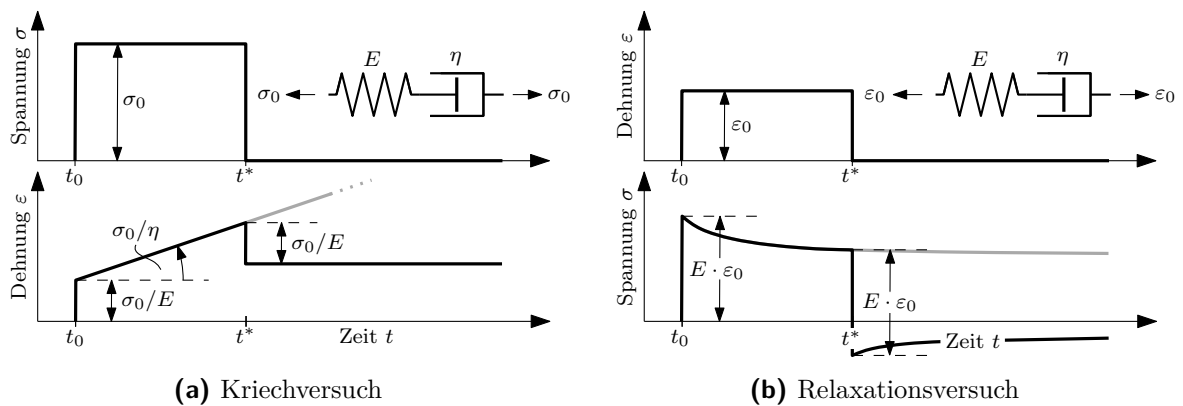


Abbildung 3.3: Verhalten des Maxwell-Körpers

Im Kriechversuch ist zu erkennen, dass die Spannung bei $t = 0$ zunächst einen Sprung in der Dehnung erzeugt – die Feder reagiert sofort. Mit zunehmender Zeit steigt nur noch die Dehnung des Dämpfers (Geradensteigung = σ_0/η) an. Damit hat der MW-Körper ein festkörperartiges Anfangsverhalten, das durch die Momentannachgiebigkeit $J(t = t_0 = 0) \cdot \sigma_0 = 1/E \cdot \sigma_0$ charakterisiert wird. Im Zeitverlauf stellt sich aber ein flüssigkeitsartiges Verhalten ein, sodass der Körper damit im Wesentlichen eine Flüssigkeit ist.

Im Relaxationsversuch zeigt sich, dass der allein von der Feder verursachte Dehnungssprung bei $(t = 0)$ zu einem Spannungssprung führt. Danach beginnt sich der Dämpfer zu dehnen, wobei sich die Feder gleichzeitig entspannt: Damit sinkt die Spannung, die erforderlich ist um die Gesamtdehnung aufrecht zu erhalten immer weiter. – Das System relaxiert. Sobald es zu einer weiteren äußeren Dehnungsänderung kommt, erfährt das System ebenfalls zunächst eine schlagartige Spannungsänderung, welche dann im Zeitverlauf wiederum relaxiert.

¹⁶Eine schlagartig aufgebrachte Dehnung führt ebenso zum Blockieren des Dämpferelements, wogegen die Feder sofort reagiert. Erst mit zunehmender Zeit beginnt die Dehnungsänderung am Dämpfer und damit die Spannungsänderung im System.

Kelvin-Körper

Schaltet man ein Feder- mit einem Dämpferelement parallel, erhält man den KELVIN-Körper (KV). Sein Schaltbild geht aus Abb. 3.4 hervor. Ausgehend davon kann nun das Stoffgesetz hergeleitet werden: Aufgrund der Parallelschaltung müssen die Dehnungen von Dämpfer- und Federelement gleich sein, d. h. $\varepsilon = \varepsilon_F = \varepsilon_D$. Außerdem muss die Summe aus Dämpfer- und Federspannung der einwirkenden Spannung entsprechen: $\sigma = \sigma_F + \sigma_D$.

Durch Einsetzen der Stoffgleichungen von Dämpfer Glg. (3.7) und Feder Glg. (3.6) ergibt sich für das Stoffgesetz des KV-Körpers ebenfalls eine lineare inhomogene DGL 1. Ordnung:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon} = E \cdot \left(\varepsilon + \frac{\eta}{E} \dot{\varepsilon} \right) \quad (3.11)$$

Für eine schlagartig aufgebrachte konstante Einwirkung σ_0 erhält man nach Integration der DGL mit der Anfangsbedingung der unmöglichen¹⁷ Verformung bei schlagartig aufgebrachter Spannung $\varepsilon(t = t_0 = 0) = 0$ die Dehnungsentwicklung $\varepsilon(t)$ für den KV-Körper, bzw. $J(t)$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right] \rightarrow J(t) = \frac{1}{E} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right] \quad (3.12)$$

Um die Relaxationsfunktion zu erhalten, wird die Dehnung mit ε_0 vorgegeben. Eine sprunghafte Änderung der Dehnung ist allerdings nicht möglich, weil für $t \rightarrow 0$ wird $d\varepsilon_0/dt \rightarrow \infty$. Es ergibt sich deshalb für die Spannungsentwicklung bzw. als Relaxationsfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} \infty & \text{falls } t = 0 \\ E \cdot \varepsilon_0 & \text{sonst} \end{cases} \rightarrow G(t) = \begin{cases} \infty & \text{falls } t = 0 \\ E & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.13)$$

In Abb. 3.4 ist das Kriech- und Relaxationsverhalten des KV-Körpers für eine schlagartig aufgebrachte Spannung bzw. Dehnung dargestellt, welche bei $t = t^*$ entfernt wird. Der Kriechversuch

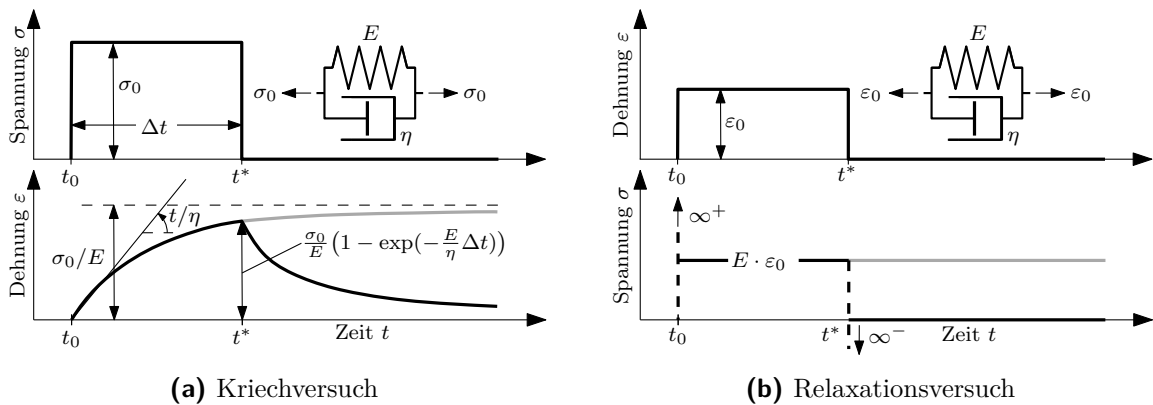


Abbildung 3.4: Verhalten des Kelvin-Körpers

in Abb. 3.4a zeigt zunächst an der Stelle $t = 0$ ein Knick in der Verformungskurve. Dies liegt an der schlagartig aufgebrachte Spannung σ , die zu einem sprunghaften Anstieg der Dehnungsrate

¹⁷Für schlagartig aufgebrachte Spannungen gibt es zunächst keine Dehnungsänderung, da für einen infinitesimal kleinen Zeitraum der Lastaufbringung der Dämpfer unendlich steif ist. Damit nimmt er alle Spannung auf und eine Dehnung der Feder wird in diesem Zeitraum verhindert, vgl. Abb. 3.2a.

$\dot{\varepsilon}$ führt und im Dämpferelement einen linearen Dehnungsverlauf $\varepsilon(t) = t/\eta$ bewirkt. Dieser ist durch die Tangente bei $t = 0$ an die Kriechkurve verdeutlicht.

Damit hat der KV-Körper ein flüssigartiges Anfangsverhalten und ein festkörperartiges Endverhalten. Die Dehnung strebt einem endlichen Wert $J(\infty) = \sigma_0/E$ entgegen und deshalb ist der KV-Körper im Wesentlichen ein Festkörper. Abb. 3.4b zeigt den Relaxationsversuch. Hierbei wird deutlich, dass der KV-Körper (im Wesentlichen) keine Relaxationseigenschaft besitzt. In der Literatur wird der Abfall von $\sigma(t = t_0 = 0) \rightarrow \infty$ auf $\sigma(t > 0) = E \cdot \varepsilon_0$ auch als „Spontanrelaxation“ bezeichnet.

Unter Anwendung des in Abschn. 3.4 beschriebenen Verfahrens wird an dieser Stelle die inkrementelle Lösung von Glg. (3.11) für einen Kriechversuch angegeben. Man erhält sie durch die stete Formulierung bzw. Lösung eines Anfangswertproblems, wenn am Beginn t^* des aktuellen Zeitschrittes die Dehnung am Ende des letzten Zeitschrittes durch $\tilde{\varepsilon}$ gegeben ist.

Es gilt $\varepsilon(t^*) = \tilde{\varepsilon} + 0$, wenn wiederum eine schlagartige Spannungsänderung unterstellt wird, da Spannungssprünge keinen Dehnungssprung bewirken können. Beliebige Spannungsverläufe werden entsprechend Abb. 2.5b stufenförmig angenähert. Damit ergibt sich:

$$\varepsilon(\Delta t, \tilde{\varepsilon}) = \tilde{\varepsilon} \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta} \Delta t\right) + \frac{\sigma}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} \Delta t\right)\right] \quad (3.14)$$

Von Bedeutung ist im Zusammenhang mit dem KV-Körper auch die so genannte Retardationszeit. Sie ist eine für das Verhalten des Materials charakteristische Zeit und ergibt sich aus dem Verhältnis von Dämpferviskosität und Elastizitätsmodul der Feder:

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (3.15)$$

Die Retardationszeit ist ein Maß für die „Kriechdauer“: Für Belastungsdauern $(t - t_0) > \tau$ ist $\dot{J}(t) \approx 0$, es liegen dann praktisch stationäre Verhältnisse vor, vgl. [Gross et al., 2009].

3.3.3 Verallgemeinerte Modelle

Da weder ein einzelner MW-Körper noch ein einzelner KV-Körper ausreicht, das Relaxations- bzw. Kriechverhalten von Beton ausreichend genau wiederzugeben, können diese durch Parallelschaltung mehrerer MW-Körper bzw. Serienschaltung mehrerer KV-Körper zu sogenannten verallgemeinerten Modellen erweitert werden. Man spricht dann auch von KV- bzw. MW-Reihen. Details hierzu können z. B. [Altenbach, 2012] oder [Mase & Mase, 1999] entnommen werden, s. a. Abschn. 5.2.

3.4 Zeitschrittbasierte Lösungsverfahren von Differentialgleichungen

Dieser Abschnitt zeigt überblicksmäßig gängige Verfahren, mit denen DGLn in der Form von Glg. (3.5) gelöst werden können. Die hier diskutierten Verfahren sind Standard-Verfahren der Mathematik, sodass tiefere Informationen entsprechender Literatur entnommen werden müssen. Grundsätzlich lassen sich alle hier vorgestellten Verfahren sowohl auf Kriech- als auch Relaxationsprobleme übertragen. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, wird hier die Symbolik von Kriechproblemen verwendet.

3.4.1 Lösung mittels Laplace-Transformation

Falls eine Spannungsgeschichte als Funktion $\sigma(t)$ bekannt ist kann Glg. (3.5) vergleichsweise unkompliziert mit Hilfe der LAPLACE-Transformation gelöst werden: Komplizierte DGLn werden damit in algebraische Gleichungen umgewandelt und gelöst. Der Originalfunktion $f(t)$ der reellen Veränderlichen t wird eine Bildfunktion $F(s)$ der komplexen Veränderlichen s in der Laplace-Ebene zugeordnet. Nach erfolgter Lösung in der Laplace-Ebene wird die Lösung der DGL in der reellen Ebene über eine Rücktransformation ermittelt und es ergibt sich ein zu lösendes Faltungsintegral. Nach [Kara, 2005] kann die Laplace-Transformation nur

- im Zeitbereich von $0 \leq t \leq \infty$,
- wenn bei $t = 0$ auch $\sigma = 0$ und $\varepsilon = 0$ gilt und
- das Material bis zu $t = 0$ keine Vorbelastung hatte

angewendet werden. Oft kann allerdings das resultierende Faltungsintegral nicht analytisch gelöst werden, sodass dann numerische Integrationsverfahren erforderlich werden.

3.4.2 Anfangswertprobleme

Einwirkungen sind i. d. R. nie als kontinuierliche Funktion bekannt sondern meist in Form von diskreten Zeitreihen. Aus diesem Grund werden zeitinkrementelle Verfahren erforderlich. Ein solches zeitinkrementelles Verfahren kann entwickelt werden, wenn die Lösung der DGL durch stetes Formulieren eines Anfangswertproblems (AWP) je Zeitschritt ermittelt wird. Je nach Typ der je Zeitschritt zu lösenden DGL existieren unterschiedliche Lösungsmethoden.

3.4.3 Lineare inhomogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Für die Voraussetzung, dass die Parameter der DGL als konstant¹⁸ angenommen werden können, kann das im Folgenden gezeigte analytisch-inkrementelle Lösungsverfahren angewendet werden. Es kann grundsätzlich auf jede lineare inhomogene Differentialgleichung der Ordnung n die die Form

$$L_n(\varepsilon) = \varepsilon^{(n)} + a_{n-1} \cdot \varepsilon^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{\varepsilon} + a_0 \cdot \varepsilon = \sigma(t) \quad (3.16)$$

mit:

σ	...	Spannung als Funktion der Zeit
ε	...	Dehnung als Funktion der Zeit
$\varepsilon^{(n)}$...	n -te Zeitableitung von ε
a_i	...	konstante Koeffizienten („Materialparameter“)

hat übertragen werden, vgl. [Bartsch, 2007].

Für die Gesamtlösung der DGL gilt, dass sie sich aus der Summe der Lösung des homogenen und partikulären Anteils zusammensetzt:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_H(t) + \varepsilon_P(t) \quad (3.17)$$

¹⁸Dies ist bei nicht alternden Materialien a priori der Fall.

Um die homogene Lösung zu finden, muss zunächst die charakteristische Gleichung aufgestellt und ihre Nullstellen bestimmt werden. Dabei steigt der Lösungsaufwand mit dem Grad der Differentialgleichung. Bis zum Grad 3 existieren analytische Verfahren (quadratische Lösungsformel, CARDANO-Formeln), Grade $n > 3$ erfordern numerische Verfahren.

Als besonders geeignet erweist sich hierfür das Verfahren nach BAIRSTOW, vgl. [Herrmann, 2007]. Dieses Verfahren bietet einige Vorteile, so

- arbeitet es bei Polynomen mit reellen Koeffizienten vollständig im Reellen. Dies kommt der Iterationsgeschwindigkeit zu Gute.
- Weiters findet es auch möglicherweise paarweise konjugiert komplex auftretende Nullstellen. Damit macht es eine Nullstellenberechnung auch Programmen zugänglich, die mit komplexer Arithmetik nicht umgehen können.

Die Basislösung der homogenen DGL setzt sich additiv aus Anteilen $\varepsilon_i(t)$ zusammen. Hat das charakteristische Polynom einfache reelle Wurzeln λ_i , ergibt sich die Basislösung zu:

$$\varepsilon_H(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot \exp(\lambda_i \cdot t) \quad (3.18)$$

Mehrfache reelle oder konjugiert komplexe Wurzeln führen zu davon abweichenden Ausdrücken. Diese können z. B. [Bartsch, 2007] entnommen werden. Die partikuläre Lösung kann durch entsprechende Störgliedansätze¹⁹ gefunden werden, danach hat die Gesamtlösung die Form

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_P(t) + \sum_{i=1}^n C_i \cdot \exp(\lambda_i \cdot t) \quad (3.19)$$

Durch mehrmalige Differentiation von Glg. (3.19) nach t kann die zur Bestimmung der Konstanten erforderliche 1. bis $(n-1)$ -te Ableitung gefunden werden. Die Bestimmung der Konstanten C_i ist nun ausgehend von einem „Ausgangszustand“ bei $t = t_0 = 0$ oder allgemein für bekannte Anfangswerte eines beliebigen Zeitpunktes $t^* < t$ möglich. Hierzu werden die Anfangswerte in Glg. (3.19) bzw. deren Ableitungen für den beliebigen Ausgangszeitpunkt t^* eingesetzt. Dies führt auf ein $n \times n$ Gleichungssystem der Form:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}\varepsilon(t)}{dt^{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_P(t) \\ \dot{\varepsilon}_P(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}\varepsilon_P(t)}{dt^{n-1}} \end{pmatrix} + \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

mit:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 \cdot t) & \exp(\lambda_2 \cdot t) & \cdots & \exp(\lambda_n \cdot t) \\ \lambda_1^1 \exp(\lambda_1 \cdot t) & \lambda_2^1 \exp(\lambda_2 \cdot t) & \cdots & \lambda_n^1 \exp(\lambda_n \cdot t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^n \exp(\lambda_1 \cdot t) & \lambda_2^n \exp(\lambda_2 \cdot t) & \cdots & \lambda_n^n \exp(\lambda_n \cdot t) \end{bmatrix}$$

Hieraus ist gut zu erkennen, dass mit dem Grad n der DGL auch die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten C_n steigt. Bei niedergradigen DGLn ist dies oft einfach durch Substitution o. ä. möglich; höhergradige DGLn erfordern an dieser Stelle die Lösung des durch Glg. (3.20)

¹⁹Diese sind abhängig von $\sigma(t)$ (z. B. konstant, linear, o. ä.) für den betrachteten Zeitschritt.

gegebenen linearen $n \times n$ Gleichungssystems. Ein effizientes Lösungsverfahren hierzu stellt das GAUSSsche Eliminationsverfahren mit Pivoting dar. Allerdings kann es vorkommen dass das Gleichungssystem schlecht konditioniert ist wodurch u. U. eine Lösung erheblich erschwert oder gar verhindert²⁰ wird.

Zusammenfassend erfordert eine analytisch-inkrementelle Lösung einer linearen inhomogenen DGL mit konstanten Koeffizienten einerseits die Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms und andererseits die Ermittlung der Konstanten C_i aus einem linearen Gleichungssystem für jeden Zeitschritt über Anfangsbedingungen. Diese Anfangsbedingungen müssen jeweils im Speicher als Variable vorgehalten werden. Eine DGL höherer Ordnung geht aufgrund der vielen durchzuführenden Berechnungsverfahren häufig zu Lasten der Rechenzeit u. U. ist bei schlecht konditionierten Gleichungssystemen eine Lösung gar nicht möglich. Abhilfe kann die Anwendung eines numerischen Verfahrens schaffen.

3.4.4 Lineare inhomogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten

Numerische Verfahren werden auch dann erforderlich, wenn die Bedingung der konstanten Koeffizienten im Zeitschritt keine Gültigkeit mehr besitzt. Bis zum Grad 2 der DGL existieren zwar hierzu noch analytische Verfahren, diese eignen sich allerdings nicht bzw. sind nur bedingt zur programmiertechnischen Umsetzung geeignet. Aus diesem Grund kann man zur Lösung des AWP's auf effiziente numerische Verfahren ausweichen, die dann wiederum für jeden Zeitschritt angewendet werden, sodass die Anfangsbedingungen wieder über Variablen bereitgestellt werden müssen.

Zunächst sind das Mittel der Wahl klassische RUNGE-KUTTA-Verfahren, vgl. [Henrici, 1964]. Dabei handelt es sich um s -stufige Einschrittverfahren zur näherungsweise Lösung von AWP's. Prinzipiell unterscheidet man zwischen *expliziten* und *impliziten* Verfahren.

Explizite Verfahren haben den Vorteil, dass die einzelnen Stufen durch aufeinanderfolgendes Ineinandereinsetzen berechnet werden können.

Bei impliziten Verfahren entstehen i. d. R. (nicht-) lineare Gleichungssysteme, die für jeden Zeitschritt gelöst werden müssen. Der Lösungsaufwand ist entsprechend höher, dennoch müssen diese Verfahren in Betracht gezogen werden, da explizite Runge-Kutta-Verfahren nur ein beschränktes Stabilitätsgebiet haben.

Die Genauigkeit der Runge-Kutta-Verfahren kann gesteigert werden, indem entweder

- die Verfahrenschrittweite (i. d. R. nicht deckungsgleich mit der Zeitschrittweite) verkleinert d. h. die Anzahl der Diskretisierungspunkte erhöht, oder
- ein Verfahren von höherer Konvergenzordnung gewählt wird.

Die Effizienz der Verfahren kann erhöht werden, indem die Verfahrensschrittweite über eine Fehlertoleranz angepasst wird. Durch so genannte *eingebettete Verfahren* bieten Runge-Kutta-Verfahren hierzu eine recht einfache Möglichkeit.

Eingebettete Verfahren bestehen aus einem zweiten Satz an Verfahrenskoeffizienten für ein zweites Verfahren. Dessen Koeffizienten werden dabei so gewählt, dass sich damit ein Verfahren von

²⁰Dies kann z. B. eintreten, wenn die Koeffizienten a_i in Glg. (3.16) in sehr unterschiedlichen Größenordnungen vorliegen; dies verhindert möglicherweise eine „vernünftige“ Skalierung des Gleichungssystems, sodass numerische Probleme auftreten können. Numerische Probleme können überdies resultieren, falls weite Zeiträume betrachtet werden und sich die Exponentialausdrücke in \mathbf{M} nahe dem in programmiertechnischer Hinsicht möglichen Gültigkeitsbereich der eingesetzten Variablen bewegen.

niedrigerer Ordnung als das ursprüngliche ergibt. Aus der Differenz kann der lokale Fehler des ursprünglichen Verfahrens in derselben Ordnung wie das eingebettete Verfahren geschätzt werden. Außerdem kann die Bestimmung einer neuen Verfahrensschrittweite aus dem Fehlerschätzer über verschiedene Schrittweitensteuerungen erfolgen, vgl. [Glyn, 2011] und [Glyn, 2015]. Aus der Familie der expliziten eingebetteten Runge-Kutta-Verfahren sind als die bekanntesten die auf viele DGLn anwendbaren DORMAND-PRINCE-Formeln zu nennen, vgl. [Dormand & Prince, 1980]. Ein neueres effizientes Verfahren stellen die BOGACKI-SHAMPINE-Formeln dar, vgl. [Shampine & Reichelt, 2006].

Für *steife* Anfangswertproblemen zeigen sich implizite Verfahren effizienter als explizite, da explizite Verfahren oftmals einen erhöhten Berechnungsaufwand erfordern. Allerdings sind die in impliziten Verfahren entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme vergleichsweise aufwändig zu lösen. Aus diesem Grund wurden linear-implizite Verfahren entwickelt. Als gut geeignet erweisen sich hier die ROSENBROCK-WANNER-Verfahren, welche mit vergleichsweise wenig Rechenschritten auskommen, vgl. [Hairer & Wanner, 1996] und [Press, Teukolsky, Vetterling & Flannery, 2002].

3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die rechnerische Erfassung von Kriech- und Relaxationsproblemen unter der Beschränkung auf lineare Viskoelastizität besprochen. Hierbei bedient man sich zur Berechnung von allgemeinen Beanspruchungsgeschichten häufig des Superpositionsprinzips. Das Superpositionsprinzip weist jedoch einige Schwächen auf, so erfordert es u. a. einen hohen Speicheraufwand was insbesondere bei der Berechnung von großen Systemen bzw. längeren Betrachtungsdauern ein erheblicher Nachteil ist. Zudem erfordern Rechenoperationen die auf sämtliche gespeicherte Werte zugreifen müssen erhebliche Ressourcen bzgl. der Rechenzeit. Um diesen Mangel zu beheben können Materialgleichungen in Form von DGLn eingesetzt werden. Sie bieten den Vorteil, dass der Speicheraufwand drastisch gesenkt werden kann, da für die Lösung derartiger DGLn nur innere Variablen gespeichert werden müssen, die die gesamte Einwirkungsgeschichte vorhalten. So genannte rheologische Modelle bieten hierbei eine Möglichkeit, die Materialgleichungen herzuleiten und anschaulich darzustellen. Hierfür wurden überblicksmäßig einfache lineare rheologische Modelle besprochen und deren Eigenschaften umfassend diskutiert. Die aus den Modellen resultierenden DGLn können vielfach effizient durch stetes Formulieren eines AWP gelöst werden. Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine knappe Darstellung dieses Verfahrens und führt einige alternative numerische Möglichkeiten an.

4 Überblick über existierende Ansätze

4.1 Allgemeines

In der Vergangenheit wurde bereits eine Vielzahl an Modellen zur Beschreibung des viskoelastischen Betonverhaltens entwickelt. Dabei handelt es sich einerseits um spezifische Kriech- bzw. Relaxationsfunktionen, andererseits wurden auch konstitutive Materialmodelle ausgehend von rheologischen Körpern erarbeitet. Vor allem erstere fanden aufgrund ihrer einfachen Handhabung Eingang in viele Normenwerke. Letztere entspringen hauptsächlich der Forschung, eignen sich aber aufgrund ihrer Effizienz besonders für numerische Simulationen. In dieser Arbeit wird das viskoelastische Betonverhalten ausgehend von der Kriecheigenschaft beschrieben. Hierfür werden in diesem Kapitel überblicksmäßig jüngere Kriechansätze und neuere konstitutive Modelle zur Beschreibung des Betonkriechens vorgestellt sowie deren Eigenschaften bzw. Vor- und Nachteile diskutiert.

Grundsätzlich kann mit allen hier vorgestellten Modellen das Kriechverhalten von Beton beschrieben werden. Dabei wird jedoch zwischen einer *Kriechfunktion* und einem *Materialmodell* unterschieden, das letztlich ebenfalls die Kriecheigenschaft wiedergeben kann. Mit der Kriech- oder Komplianzfunktion kann das (betonspezifische) Verhalten für einen *einstufigen* Kriechversuch wiedergegeben werden kann. Um damit mehrstufige Versuche berechnen zu können, muss i. d. R. das bereits beschriebene Superpositionsprinzip angewendet werden. Kriech- bzw. Komplianzfunktionen sind auch in den meisten gängigen betonspezifischen Normen enthalten, unterscheiden sich jedoch oftmals in deren Aufbau.

Demgegenüber stehen Materialmodelle, die neben dem Kriechverhalten unter einstufiger Beanspruchung auch die Berechnung mehrstufiger bzw. allgemeiner Beanspruchungen direkt ermöglichen. Diese Materialmodelle sind i. d. R. konstitutive Gleichungen, die entsprechend gelöst werden müssen, z. B. durch Verwendung der in Abschn. 3.4 beschriebenen Verfahren bzw. werden mitunter eigene Routinen erforderlich. Derartige Modelle entspringen meist der Forschung und sind bisher in keinem Regelwerk verankert. Prinzipiell eignen sie sich zur Anpassung an beliebige Kriechdaten, die z. B. aus Messungen gewonnen werden.

4.2 Kriechfunktionen

Die in den Normen verankerten Kriechansätze haben teilweise eine lange Geschichte und unterlagen auch starken Wandlungen. Wogegen heutzutage vielfach die Zeiverlaufs-funktionen der Kriechansätze diskutiert werden, waren der Kern der Diskussion zuvor die Vor- und Nachteile der grundlegenden Gestalt des Ansatzes, d. h. ob *Summen-* oder *Produktansätze* gewählt werden sollen. Nach [Müller, 2013] gilt der Produktansatz als gebräuchlich, wobei dessen Auslegung einzelner Merkmale diskutiert wird und drei zentrale Punkte im Fokus stehen:

- *Überwindung bekannter stoffgesetzlicher Schwächen*
Die Verwendung des Produktansatzes in Kombination mit dem Boltzmann-Superpositionsprinzip kann unter den Randbedingungen der Vollentlastung als auch der Relaxation zu stoffmechanisch unsinnigen Verformungs- bzw. Spannungsvorhersagen führen, vgl. Prognosefehler in Abb. 2.6.
- *Aufspaltung in Grund- und Trocknungskriechen*
Ohne größere Genauigkeitseinbußen ist es ausreichend, bei der alleinigen Betrachtung von normalfesten Betonen auf eine Separation der Anteile in Grund- und Trocknungskriechen zu verzichten. Danach wird dies erst für hochfeste Betone erforderlich, da das Grund- und Trocknungskriechen unterschiedlich stark durch die Festigkeitssteigerung beeinflusst wird.
- *Wahl der Zeitverlaufsfunktion*
Hierbei steht zur Diskussion, welcher Funktionstyp den Verlauf von Grund- bzw. Trocknungskriechen bestmöglich annähert bzw. ob diese Funktionen einen definierten Endwert erreichen.

Unabhängig von Modellen, die durch Arbeitsgruppen verschiedener Normenausschüsse erstellt wurden haben sich auch einzelne Forscher und -gruppen mit der Entwicklung von Kriechmodellen beschäftigt, die jedoch nicht Einzug in Regelwerke gefunden haben. Nachfolgend werden zunächst einige der derzeit gängigen normativ verankerten Ansätze bzw. Ansätze und Modelle der Forschung wiedergegeben. Dabei erhebt diese Darstellung keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit und soll ausschließlich zum Überblick dienen. Die Formelzeichen wurden nicht vereinheitlicht und direkt den jeweiligen Originalquellen entnommen.

4.2.1 Eurocode 2

Die in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] verankerte Kriechfunktion stammt ursprünglich von einer Arbeitsgruppe des Comité Euro-International du Béton (CEB). Sie wurde zunächst im [CEB-FIP MODEL CODE 90, 1990] veröffentlicht und später in den Eurocode übernommen.

Von der Model-Code-Fassung weicht die Eurocode-Fassung durch eine Erweiterung auf höherfeste Betone ab, s. a. Glg. (4.5). Außerdem fehlt die nach [CEB-FIP MODEL CODE 90, 1990] mögliche Berücksichtigung der Auswirkung von Temperaturen $>20\text{ °C}$ während der Belastung auf die Kriechzahl bzw. deren zeitliche Entwicklung, vgl. sinngemäß Glg. (4.13) bis Glg. (4.15).

Die Kriechfunktion selbst wurde ausgehend von einer Datenbank bestehend aus umfassenden Laborversuchen entwickelt. Details dazu können [CEB Bulletin 199, 1990] entnommen werden. Der mittlere Variationskoeffizient der so vorausgesagten Größe des Kriechens wird mit 20% angegeben und die ermittelten Werte für die Kriechzahl müssen auf den Tangenten-E-Modul bezogen werden. Ab einer maximalen Betonspannung von $\sigma_c \leq 0,45 \cdot f_{ck}(t_0)$ ist von nichtlinearem Kriechen auszugehen, wofür entsprechende Formeln zur Verfügung stehen.

Grundsätzlich erfolgt weder eine explizite Betrachtung von Grund- und Trocknungskriechen noch eine Unterscheidung zwischen Druck- und Zugkriechen. Bei der Grundgleichung zur Ermittlung der zeitlichen Entwicklung der Kriechzahl handelt es sich um einen Produktansatz,

der wie folgt aufgebaut ist:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (4.1)$$

mit:

t_0	...	Zeitpunkt der Lastaufbringung in Tagen
t	...	tatsächliche Zeit in Tagen
φ_0	...	Grundkriechzahl
$\beta_c(t, t_0)$...	zeitl. Entwicklungsfunktion des Kriechens

Die Grundzahl des Kriechens φ_0 ist abhängig von der relativen Luftfeuchtigkeit ($[RH]$ in %), der wirksamen Bauteildicke ($[h_0]$ in mm), der Zylinderdruckfestigkeit f_{cm} und dem Betonalter bei Belastungsbeginn t_0 :

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (4.2)$$

mit:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}}$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0,1+t_0^{0,20})}$$

$$\varphi_{RH} = \begin{cases} 1 + \frac{1-RH/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} & \text{f. } f_{cm} \leq 35 \text{ N/mm}^2, h_0 \text{ n. Glg. (4.4)} \\ \left(1 + \frac{1-RH/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1\right) \cdot \alpha_2 & \text{f. } f_{cm} > 35 \text{ N/mm}^2, \alpha_i \text{ n. Glg. (4.5)} \end{cases}$$

Die Funktion $\beta_c(t, t_0)$ zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des Kriechens nach Belastungsbeginn hängt von der *tatsächlichen* Belastungsdauer ($t - t_0$) und dem Zeitbeiwert β_H ab und kann über Glg. (4.3) ermittelt werden. Der Zeitbeiwert β_H berücksichtigt die relative Luftfeuchte ($[RH]$ in %) und die wirksame Bauteildicke ($[h_0]$ in mm). h_0 kann über Glg. (4.4) und α_3 aus Glg. (4.5) berechnet werden.

$$\beta_c(t, t_0) = \left(\frac{t - t_0}{\beta_H + t - t_0} \right)^{0,30} \quad (4.3)$$

mit:

$$\beta_H = \begin{cases} 1,50 \cdot \left[1 + \left(1,20 \cdot \frac{RH}{100}\right)^{18}\right] \cdot h_0 + 250 \leq 1500 & \text{f. } f_{cm} \leq 35 \text{ N/mm}^2 \\ 1,50 \cdot \left[1 + \left(1,20 \cdot \frac{RH}{100}\right)^{18}\right] \cdot h_0 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3 & \text{f. } f_{cm} \geq 35 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

Die wirksame Bauteildicke ist eine Verhältniszahl aus Querschnittsfläche ($[A_c]$ in mm) und dem Umfang ($[u]$ in mm) des Querschnitts, der der Trocknung ausgesetzt ist. Sie ist in der Kriechfunktion das Maß für die Geschwindigkeit und Intensität des Austrocknungsprozesses.

$$h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} \quad (4.4)$$

Die dimensionslosen Beiwerte α_i berücksichtigen den Einfluss der Betondruckfestigkeit:

$$\alpha_1 = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0,70}, \quad \alpha_2 = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0,20}, \quad \alpha_3 = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0,50} \quad (4.5)$$

Schließlich können die Auswirkungen der Zementart auf die Kriechzahl des Betons durch die

Anpassung des Betonalters bei Belastungsbeginn t_0 berücksichtigt werden. Dann wird t_0 zu:

$$t_0 = \max \left\{ t_{\text{eff}} \cdot \left(\frac{9}{2 + t_{\text{eff}}^{1,20}} + 1 \right)^\alpha ; 0,50 \right\} \quad (4.6)$$

Die Potenz α berücksichtigt die Zementart, wobei sie -1 für Zemente der Klasse S, 0 für Zemente der Klasse N und 1 für Zemente der Klasse R ist. Die Auswirkungen von gegenüber Laborbedingungen erhöhten oder verminderten Temperaturen in einem Bereich von 0 °C bis 80 °C werden durch Berücksichtigung des *effektiven Alters*²¹ t_{eff} erfasst. Für t_{eff} wird eine Modellfunktion vorgeschlagen. Mit der im Zeitintervall ($[\Delta t_i]$ in Tagen) herrschenden Temperatur ($[T(\Delta t_i)]$ in °C) ergibt sich t_{eff}

$$t_{\text{eff}} = \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)} - 13,65 \right) \right] \cdot \Delta t_i \quad (4.7)$$

Nichtlineare Effekte sind zu berücksichtigen, wenn die Druckspannung $\sigma_c(t_0) \geq 0,45 \cdot f_{ck}(t_0)$ ist. Für die Kriechzahl gilt dann in Abhängigkeit der einwirkenden Spannung:

$$\varphi_{\text{nl}}(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \cdot \exp \left[1,50 \cdot \left(\frac{|\sigma_c|}{f_{ck}(t_0)} - 0,45 \right) \right], \quad \text{falls } \sigma_c \geq 0,45 \cdot f_{ck} \quad (4.8)$$

4.2.2 Modelcode 2010

Bis einschließlich der First-Draft-Version des [CEB-FIP MODEL CODE 2010, 2013] war die zuvor beschriebene Kriechfunktion mit den entsprechenden Abweichungen dessen Bestandteil. In der Finalversion wurde allerdings eine in weiten Teilen geänderte Version publiziert: Nunmehr wird zwischen Grund- und Trocknungskriechen unterschieden und beide Anteile werden additiv verknüpft, wobei die Kriechzahl für Druck- und Zugbeanspruchungen gilt.

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{\text{bc}}(t, t_0) + \varphi_{\text{dc}}(t, t_0) \quad (4.9)$$

mit:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{bc}}(t, t_0) & \dots \text{ Grundkriechzahl} \\ \varphi_{\text{dc}}(t, t_0) & \dots \text{ Trocknungskriechzahl} \end{aligned}$$

Die Trocknungskriechzahl wird über

$$\varphi_{\text{dc}}(t, t_0) = \beta_{\text{dc}}(f_{\text{cm}}) \cdot \beta(RH) \cdot \beta_{\text{dc}}(t_0) \cdot \beta_{\text{dc}}(t, t_0) \quad (4.10)$$

mit:

$$\begin{aligned} \beta_{\text{dc}}(f_{\text{cm}}) &= \frac{412}{f_{\text{cm}}^{1,40}} \\ \beta(RH) &= \frac{1 - RH/100}{\sqrt[3]{0,1 \cdot h/100}} \end{aligned}$$

²¹Die Rechengröße des effektiven Alters entspringt dem Reifekonzept. Dadurch können Einflüsse von gegenüber Laborbedingungen abweichenden Temperaturen auf das Alter bzw. die Reife des Betons erfasst werden. Das effektive Betonalter t_{eff} entspricht einer Zeitachsenverzerrung: Ein Prozess unter isothermen Bedingungen hat bei $T = \text{const.} = 20 \text{ °C}$ nach der tatsächlichen Zeit $t = t_{\text{eff}}$ denselben Fortschritt erreicht, wie ein Prozess unter beliebigen Temperaturen bei $t \neq t_{\text{eff}}$. Damit ändert sich die Erhärtungsgeschwindigkeit und die Alterung des Betons je nach Temperaturniveau. Dies führt dazu, dass bei zunehmender Temperatur auch das Freiwerden der Hydratationswärme beschleunigt wird – die so genannten Selbstbeschleunigung des Betons tritt ein, vgl. [Schlicke, 2014] bzw. [Röhling, 2005]. Zur Beschreibung des effektiven Alters existieren verschiedene Ansätze.

(forts. v. Glg. (4.10))

$$\begin{aligned}
\beta_{\text{dc}}(t_0) &= \frac{1}{0,10+t_{0,\text{eff}}^{0,20}} \\
\beta_{\text{dc}}(t, t_0) &= \left(\frac{t-t_0}{\beta_{\text{H}}+t-t_0} \right)^{\gamma(t_0)} \\
\gamma(t_0) &= \frac{1}{2,30+\frac{3,50}{\sqrt{t_{0,\text{eff}}}}} \\
\beta_{\text{H}} &= 1,50 \cdot h + 250 \cdot \alpha_{f_{\text{cm}}} \leq 1500 \cdot \alpha_{f_{\text{cm}}} \\
\alpha_{f_{\text{cm}}} &= \left(\frac{35}{f_{\text{cm}}} \right)^{0,50}
\end{aligned}$$

bestimmt. Die Funktion ist in ihrer Gestalt ein Produkt mehrerer Funktionen, wobei die Zeitfunktion der bisher verwendeten entspricht. Allerdings ist der Exponent kein fester Wert mehr, da dieser nun vom Belastungszeitpunkt abhängt. Wie auch in der Eurocode-Kriechfunktion ist RH die relative Umgebungsluftfeuchte in % und h die wirksame Bauteildicke, die wie h_0 in Glg. (4.4) bestimmt werden kann.

Die Funktion des Grundkriechens $\varphi_{\text{bc}}(t, t_0)$ ist ein Produktansatz. Allerdings handelt es sich nun bei der Zeitfunktion um eine unbeschränkte Logarithmusfunktion. Das führt dazu, dass sich die Grundkriechzahl *keinem* Endwert nähert.

$$\varphi_{\text{bc}}(t, t_0) = \beta_{\text{bc}}(f_{\text{cm}}) \cdot \beta_{\text{bc}}(t, t_0) \quad (4.11)$$

mit:

$$\begin{aligned}
\beta_{\text{bc}}(f_{\text{cm}}) &= \frac{1,80}{f_{\text{cm}}^{0,70}} \\
\beta_{\text{bc}}(t, t_0) &= \ln \left[\left(\frac{30}{t_{0,\text{eff}}} + 0,035 \right)^2 - (t - t_0) + 1 \right]
\end{aligned}$$

Die Anwendung des hier dargestellten Formelapparats ist nach [CEB-FIP MODEL CODE 2010, 2013] auf Normalbetone mit Druckfestigkeiten im Bereich $20 \text{ N/mm}^2 \leq f_{\text{cm}} \leq 130 \text{ N/mm}^2$ beschränkt, wobei die Linearitätsgrenze des Kriechens mit $|\sigma_{\text{c}}| \leq 0,40 \cdot f_{\text{cm}}(t_0)$ zum Belastungszeitpunkt angegeben wird. Zum Belastungszeitpunkt sollte der Beton zumindest einen Tag alt sein. Die Umgebungsluftfeuchte sollte sich zwischen 40 und 100 % bewegen, wobei Temperaturen von 5 °C bis 30 °C abgedeckt werden. Der Einfluss unterschiedlicher Zementsorten kann mit Glg. (4.6) erfasst werden. Für Leichtbetone ist ein Abminderungsfaktor der Kriechzahl aus Glg. (4.9) in Abhängigkeit der Trockenrohdichte vorgesehen.

Nichtlineare Effekte können ähnlich zum Eurocode über eine Anpassung der Kriechzahl in Abhängigkeit der Betonspannung berücksichtigt werden:

$$\varphi_{\text{nl}}(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \cdot \exp \left[1,50 \cdot \left(\frac{|\sigma_{\text{c}}|}{f_{\text{cm}}(t_0)} - 0,40 \right) \right], \quad \text{falls } 0,40 < \frac{|\sigma_{\text{c}}|}{f_{\text{cm}}(t_0)} \leq 0,60 \quad (4.12)$$

Höhere Temperaturen die das Alter des Betons vor Erstbelastung beeinflussen können durch Glg. (4.7) berücksichtigt werden. Gemäß [CEB-FIP MODEL CODE 2010, 2013] haben insbesondere für dünnere Bauteile Temperaturen $>20 \text{ °C}$ zum Zeitpunkt der Belastung einen Einfluss auf die Größe bzw. zeitliche Entwicklung des Kriechens, was durch Modifikation einzelner Faktoren in den bereits gegebenen Gleichungen berücksichtigt werden kann. Soll der Einfluss erhöhter Temperaturen T auf die zeitliche Entwicklung des Kriechens berücksichtigt werden, ist β_{H} in Glg. (4.10) durch $\beta_{\text{H},T}$ gemäß

$$\beta_{\text{H},T} = \beta_{\text{H}} \cdot \exp \left(\frac{1500}{273 + T} - 5,12 \right) \quad (4.13)$$

zu ersetzen. Der Einfluss erhöhter Temperaturen auf die Endkriechzahl kann in ähnlicher Weise berücksichtigt werden, wenn φ_{bc} bzw. φ_{dc} durch einen Faktor φ_T modifiziert werden:

$$\varphi_{bc,T} = \varphi_{bc} \cdot \varphi_T \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{dc,T} = \varphi_{dc} \cdot \varphi_T^{1,20} \quad (4.14)$$

mit:

$$\varphi_T = \exp[0,015 \cdot (T - 20)]$$

Zusätzlich können Temperatureinflüsse berücksichtigt werden, die erst nach bereits erfolgter Belastung auftreten (transientes Kriechen). Dies kann durch eine Erhöhung der Gesamtkriechzahl über einen additiven Term geschehen, es gilt dann

$$\varphi(t, t_0, T) = \varphi_{bc,T}(t, t_0, T) + \varphi_{dc,T}(t, t_0, T) + \Delta\varphi_{T,trans} \quad (4.15)$$

mit:

$$\Delta\varphi_{T,trans} = 4 \cdot 10^{-4} \cdot (T - 20)^2$$

In [CEB-FIP MODEL CODE 2010, 2013] wird allerdings auch bemerkt, dass die Berücksichtigung dieser Temperatureinflüsse nur grobe Näherungen darstellen. Für eine genauere Vorhersage werden danach kompliziertere Modelle erforderlich, die u. a. den Feuchtegehalt des Betons zum Belastungszeitpunkt usw. berücksichtigen. Werden die Temperaturanpassungen *nicht* vorgenommen, eignet sich die Kriechfunktion besser im Zusammenhang mit dicken Bauteilen, wo weniger Änderungen in der Feuchte zu erwarten sind als es bei dünnen Bauteilen insbesondere bei steigenden Temperaturen der Fall ist.

4.2.3 Bažant (B4)

Das B4-Modell²² wurde durch ein Team an der Northwestern University rund um Bažant entwickelt. Das B4-Modell stellt eine Verbesserung des B3-Modells dar, das seit 1996 von RILEM²³ empfohlen wurde. Durch die Neuformulierung des Modells stehen nun neue Gleichungen und

Tabelle 4.1: Anwendungsgrenzen des B4-Modells

Einflussgröße	Minimum	Maximum	Einheit
Wasser-Zement-Wert w/c	0,22	0,87	–
Zuschlag-Zement-Verhältnis a/c	1	13,20	–
Mittlere Zylinderdruckfestigkeit nach 28 Tagen \bar{f}_c	15	70	N/mm ²
Zementgehalt	200	1 500	kg/m ³
Umgebungstemperatur T	-25	75	°C
Umgebungstemperatur während der Erhärtung T_{cur}	20	30	°C
Volumen-Oberflächenverhältnis V/S	12	120	mm

Parameter bereit, mit denen die Fortschritte in der Betontechnologie und damit eine Vielzahl an Einflussfaktoren unterschiedlicher Betonrezepturen und Zusatzstoffe erfasst werden können. Das Modell wurde an einaxialen zentrischen Druckversuchen kalibriert und kann sowohl für Kurz- als auch Langzeitkriechprobleme unter Druckbeanspruchung angewendet werden, vgl. [Wendler, Hubler & Bažant, 2013]. Seine Anwendungsgrenzen sind in Tab. 4.1 zusammengefasst und es ist detailliert in [RILEM draft recommendation TC-242-MDC, 2015] beschrieben.

²²Trotz seines Eigennamens handelt es sich entgegen der Klassifikation in dieser Arbeit um eine sehr komplexe Kriechfunktion.

²³Réunion Internationale des Laboratoires et Experts des Matériaux, systèmes de construction et ouvrages

Die Anwendung des Modells auf Betone, die jünger als einen Tag sind bzw. Querschnitte die kleiner als 51 mm sind wird nicht empfohlen. Die Kriechzahl $\varphi(t, t')$ kann über

$$\varphi(t, t') = E(\hat{t}') \cdot J(\hat{t}, \hat{t}') - 1 \quad (4.16)$$

bestimmt werden, wobei Alterungseffekte über \hat{t} bzw. \hat{t}_0 erfasst werden:

$$\hat{t}' = t' \cdot \beta_{\text{Th}} \quad \text{und} \quad \hat{t} = \hat{t}' + (t - t') \cdot \beta_{\text{Tc}} \quad (4.17)$$

mit:

$$\beta_{\text{Th}} \quad \dots \quad \exp\left[\frac{U_{\text{h}}}{R} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T_{\text{cur}} + 273}\right)\right]$$

$$\beta_{\text{Tc}} \quad \dots \quad \exp\left[\frac{U_{\text{c}}}{R} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T + 273}\right)\right]$$

$$U_{\text{c}} \quad \dots \quad \text{Aktivierungsenergie des Kriechens}$$

$$U_{\text{h}} \quad \dots \quad \text{Aktivierungsenergie der Hydratation}$$

$$R \quad \dots \quad \text{universelle Gaskonstante, } R = 8,3143 \text{ J/mol K}$$

Bei einer konstanten Temperatur von 20 °C ist $\hat{t}' = t'$ und $\hat{t} = t$ bzw. $U_{\text{c}}/R = U_{\text{h}}/R = 4000 \text{ K}$. Die Gesamtverformung erhält man durch die additiven Verknüpfung der sofortigen elastischen Verformung q_1 mit der Grund- $C_0(\hat{t}, \hat{t}')$ und Trocknungskriechverformung $C_{\text{d}}(\hat{t}, \hat{t}', \tilde{t}_0)$:

$$J(\hat{t}, \hat{t}') = q_1 + R_{\text{T}} \cdot C_0(\hat{t}, \hat{t}') + C_{\text{d}}(\hat{t}, \hat{t}', \tilde{t}_0) \quad (4.18)$$

mit:

$$R_{\text{T}} \quad \dots \quad \exp\left[\frac{U'_{\text{c}}}{R} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T + 273}\right)\right]$$

$$U'_{\text{c}} \quad \dots \quad \text{effektive Kriechaktivierungsenergie, falls n. V. } U'_{\text{c}} = U_{\text{c}}$$

Die Komplianzfunktion des Grundkriechens ist als Produktansatz gegeben durch:

$$C_0(\hat{t}, \hat{t}') = q_2 \cdot Q(\hat{t}, \hat{t}') + q_3 \cdot \ln\left[1 + \left(\frac{\hat{t} - \hat{t}'^{0,1}}{1 \text{ d}}\right)\right] + q_4 \cdot \ln\left(\frac{\hat{t}}{\hat{t}'}\right) \quad (4.19)$$

mit:

$$Q(\hat{t}, \hat{t}') \quad \dots \quad Q_{\text{f}}(\hat{t}') \cdot \left[1 + \left(\frac{Q_{\text{f}}(\hat{t}')}{Z(\hat{t}, \hat{t}')}\right)^{r(\hat{t}')}\right]^{-\frac{1}{r(\hat{t}')}}$$

$$Q_{\text{f}}(\hat{t}') \quad \dots \quad \left[0,086 \cdot \left(\frac{\hat{t}'}{1 \text{ d}}\right)^{2/9} + 1,21 \cdot \left(\frac{\hat{t}'}{1 \text{ d}}\right)^{4/9}\right]$$

$$Z(\hat{t}) \quad \dots \quad \left(\frac{\hat{t}}{1 \text{ d}}\right)^{-0,50} \cdot \ln\left[1 + \left(\frac{\hat{t} - \hat{t}_0}{1 \text{ d}}\right)^{0,10}\right]$$

$$r(\hat{t}') \quad \dots \quad 1,70 \cdot \left(\frac{\hat{t}'}{1 \text{ d}}\right)^{0,12} + 8$$

Die Trocknungskriechfunktion ist als

$$C_{\text{d}}(\hat{t}, \hat{t}', \tilde{t}_0) = q_5 \cdot \sqrt{\max\{\exp[-p_{5\text{H}} \cdot H(\hat{t}, \tilde{t}_0)] - \exp[-p_{5\text{H}} \cdot H_{\text{c}}(\hat{t}_0, \tilde{t}_0)]; 0\}} \quad (4.20)$$

mit:

$$H(\hat{t}, \tilde{t}_0) \quad \dots \quad 1 - (1 - h) \cdot \tanh\sqrt{\frac{\hat{t} - \tilde{t}_0}{\tau_{\text{sh}}}}$$

(forts. v. Glg. (4.20))

$$\begin{aligned}
H_c(\hat{t}, \tilde{t}_0) & \dots 1 - (1 - h) \cdot \tanh \sqrt{\frac{\hat{t} - \tilde{t}_0}{\tau_{\text{sh}}}} \\
\tilde{t}_0 & \dots t_0 \cdot \beta_{\text{Th}}, \beta_{\text{Th}} \text{ nach Glg. (4.17)} \\
h & \dots \text{relative Umgebungsluftfeuchte} \\
\tau_{\text{sh}} & \dots \tau_{\text{cem}} \cdot \left(\frac{a/c}{6}\right)^{p_{\tau a}} \cdot \left(\frac{w/c}{0,38}\right)^{p_{\tau w}} \cdot \left(\frac{6,50c}{\rho}\right)^{p_{\tau c}} k_{\tau a} \left(k_s \frac{2V/S}{1 \text{ mm}}\right) \\
S & \dots \text{Oberfläche in mm}^2 \\
V & \dots \text{Volumen in mm}^3
\end{aligned}$$

als Wurzelfunktion gegeben. Die Modellparameter q_1 bis q_5 sind durch folgende Funktionen definiert

$$q_1 = \frac{1}{E_0} = \frac{p_1}{E_{28}} \quad (4.21)$$

mit:

$$E_{28} \dots 4734 \text{ N/mm}^2 \cdot \sqrt{\frac{\bar{f}_c}{1 \text{ N/mm}^2}}$$

$$q_2 = \frac{p_2}{1 \text{ kN/mm}^2} \cdot \left(\frac{w/c}{0,38}\right)^{p_{2w}} \quad (4.22)$$

$$q_3 = p_3 \cdot q_2 \left(\frac{a/c}{6}\right)^{p_{3a}} \cdot \left(\frac{w/c}{0,38}\right)^{p_{3w}} \quad (4.23)$$

$$q_4 = \frac{p_4}{1 \text{ kN/mm}^2} \cdot \left(\frac{a/c}{6}\right)^{p_{4a}} \cdot \left(\frac{w/c}{0,38}\right)^{p_{4w}} \quad (4.24)$$

$$q_5 = \frac{p_5}{1 \text{ kN/mm}^2} \cdot \left(\frac{a/c}{6}\right)^{p_{5a}} \cdot \left(\frac{w/c}{0,38}\right)^{p_{5w}} |k_h \cdot \varepsilon_{\text{sh}\infty}(\tilde{t}_0)|^{p_{5\varepsilon}} \quad (4.25)$$

mit:

$$\varepsilon_{\text{sh}\infty}(\tilde{t}_0) \dots -\varepsilon_{\text{cem}} \left(\frac{a/c}{6}\right)^{p_{\varepsilon a}} \left(\frac{w/c}{0,38}\right)^{p_{\varepsilon w}} \left(\frac{6,50c}{\rho}\right)^{p_{\varepsilon c}} k_{\varepsilon a} \frac{E(7\beta_{\text{Th}} + 600\beta_{\text{Ts}})}{E(t_0 + \tau_{\text{sh}}\beta_{\text{Ts}})}$$

$$\beta_{\text{Ts}} \dots \exp\left[\frac{U_s}{R} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T+273}\right)\right]$$

$$\beta_{\text{Th}} \dots \text{nach Glg. (4.17)}$$

$$\tau_{\text{sh}} \dots \text{nach Glg. (4.20)}$$

$$U_s \dots \text{Aktivierungsenergie der Feuchtediffusion}$$

$$E(t) \dots E_{28} \cdot \sqrt{\frac{t}{4 \text{ Tage} + (6/7) \cdot t}}$$

$$k_h \dots \begin{cases} 1 - h^3 & \text{falls } h \leq 0,98 \\ 12,94 \cdot (1 - h) - 0,20 & \text{falls } 0,98 \leq h \leq 1 \end{cases}$$

$$\rho \dots 2350 \text{ kg/m}^3$$

Die nicht in Form von Formeln wiedergegebenen Parameter können in Abhängigkeit der Baustoffzusammensetzung aus Tabellen ausgewählt werden, vgl. [RILEM draft recommendation TC-242-MDC, 2015]. Dabei sind die Parameter p_{ri} , p_{ei} , p_{ij} , τ_{cem} und ε_{cem} in Abhängigkeit der Zementart (R, RS oder SL) definiert²⁴. Durch k_s wird die Bauteilgeometrie erfasst, wofür eben-

²⁴ i bzw. j steht dabei für eine Zahl oder einen Buchstaben

falls Werte tabelliert sind. Schließlich sind k_{ε_a} und k_{τ_a} aus einer Tabelle zu wählen um die Art Zusatzstoffes zu berücksichtigen.

Falls detaillierte Informationen zur Betonzusammensetzung und den Zusatzstoffen vorhanden sind, können diese zur Verbesserung der Vorhersage herangezogen werden. Hierzu stehen eine Reihe von Korrekturfaktoren zur Verfügung, die aus umfassenden statistischen Analysen gewonnen wurden. Im B4-Modell wird, wie aus den Gleichungen ersichtlich, auch der Einfluss des Schwindens auf das Kriechverhalten berücksichtigt, da eine Wechselwirkung beider Phänomene in Versuchen beobachtet werden konnte. Zur Erfassung von autogenem und Trocknungsschwinden stehen ebenfalls eigene Formeln zur Verfügung, da Schwinden und Kriechen üblicherweise getrennt voneinander erfasst werden, vgl. [Zilch & Zehetmaier, 2010].

Oftmals stehen in der Planungsphase jedoch keine detaillierten Informationen bzgl. der Betonzusammensetzung zur Verfügung. Deshalb sollte das Kriechverhalten rein aus der Festigkeitsklasse abgeleitet werden können. Aus diesem Grund wurde eine vereinfachte Version des B4-Modells als „B4s“ veröffentlicht. Darin ist neben der Zementart die einzige Kenngröße die Druckfestigkeit des verwendeten Betons. An der Modellformulierung ändert sich die Definition der Faktoren q_2 bis q_5 , die [RILEM draft recommendation TC-242-MDC, 2015] entnommen werden können.

4.2.4 Gutsch et al.

In [Gutsch, 1998] wird das *Zug*kriechverhaltens von jungem Beton untersucht und ein Ansatz für dessen Erfassung vorgestellt. Die Funktion des Grundkriechens wird über eine von [Laube, 1990] entwickelte Potenzfunktion definiert

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\varepsilon_{el}(t_0)} = P_{1c}(\alpha_{t_0}) \cdot \left(\frac{t - t_0}{t_c}\right)^{P_{2c}(\alpha_{t_0})} \quad (4.26)$$

wobei $t_c = 1$ h und die Parameter P_{1c} und P_{2c} vom Hydratationsgrad α des Belastungszeitpunkts t_0 abhängen. Durch die Abhängigkeit der Parameter vom Hydratationsgrad wird die Alterung des Betons und die damit verbundene Abnahme seines viskoelastischen Verhaltens abgebildet.

Die Funktionen der Parameter P_{1c} und P_{2c} wurden aus Versuchen eines mit Portlandzement hergestellten Normalbetons abgeleitet. Danach besteht zwischen dem Hydratationsgrad und den Parametern näherungsweise ein linearer Zusammenhang, der durch die Gleichungen

$$P_{1c}(\alpha_{t_0}) = 0,3160 - 0,2909 \cdot \alpha_{t_0} \text{ bzw. } P_{2c}(\alpha_{t_0}) = 0,2614 + 0,1475 \cdot \alpha_{t_0} \quad (4.27)$$

beschrieben werden kann. Damit wird prinzipiell die von [Laube, 1990] aufgezeigte Hydratationsgradabhängigkeit der Parameter bestätigt. Gleichzeitig zeigt sich, dass die lineare Annahme bei sehr frühen Erstbelastungsaltern $\alpha_{t_0} < 0,40$ nur eingeschränkt gültig ist. Da vergleichsweise kurze Belastungsdauern untersucht wurden führt dies zu einer unsicheren Beschreibung des Zugkriechens bei längeren Belastungsdauern: Die Potenzfunktion strebt keinem Endwert entgegen und zeigt für frühe Belastungszeitpunkte auch nach langer Belastungszeit noch eine vergleichsweise große Steigung, die nicht experimentell erfasst wurde. Nach [Gutsch, 1998] herrscht auch noch bei einem Belastungsgrad von 90 % Proportionalität zwischen Kriechverformung und Zugspannung. Aus diesem Grund berücksichtigt der Ansatz auch keine Nichtlinearität des Kriechens.

4.3 Materialmodelle für Kriechgeschichten

4.3.1 Tacke

Zunächst greift [Tacke, 2002] den Kriechansatz von Gutsch auf. Um ihn in numerischen Simulationen effizient nutzen zu können, wird er auf eine alternde KV-Reihe übertragen, deren Parameter je nach Hydratationsgrad so gewählt werden, dass die KV-Reihe den Kriechansatz wiedergibt. Die Parameter der KV-Reihe sind jeweils konstant und werden nur bei einer Einwirkungsänderung geändert und stehen in Referenz zum jeweils vorhandenen Hydratationsgrad. Dies führt auf Ergebnisse, die sich mit denen von [Gutsch, 1998] unter strikter Anwendung des Boltzmann-Superpositionsprinzips ermittelten decken. Das Kriechverhalten kann so bis zur Entlastung gut abgebildet werden.

Nach vollständiger Entlastung kann allerdings ein Wiederanstieg der Kriechdehnungen beobachtet werden. Dass dies eine Folge von divergierenden Kriechkurven ist, die bei der Superposition verwendet werden, zeigt [Tacke, 2002] und ist in Abb. 4.1b dargestellt, s. a. Abschn. 2.3. Aus diesem Grund weicht [Tacke, 2002] nun von der strikten Anwendung des Superpositionsprinzips ab und unterstellt in der Modellformulierung der KV-Reihe zusätzlich eine „alternde Spannungsgeschichte“. Dies führt zu einer Verbesserung der Ergebnisse zwischen Simulation und Versuch und letztlich zur Vermeidung der aufgetretenen Prognosefehler. Dies zeigen die in Abb. 4.1a strichliert eingetragenen Kurven.

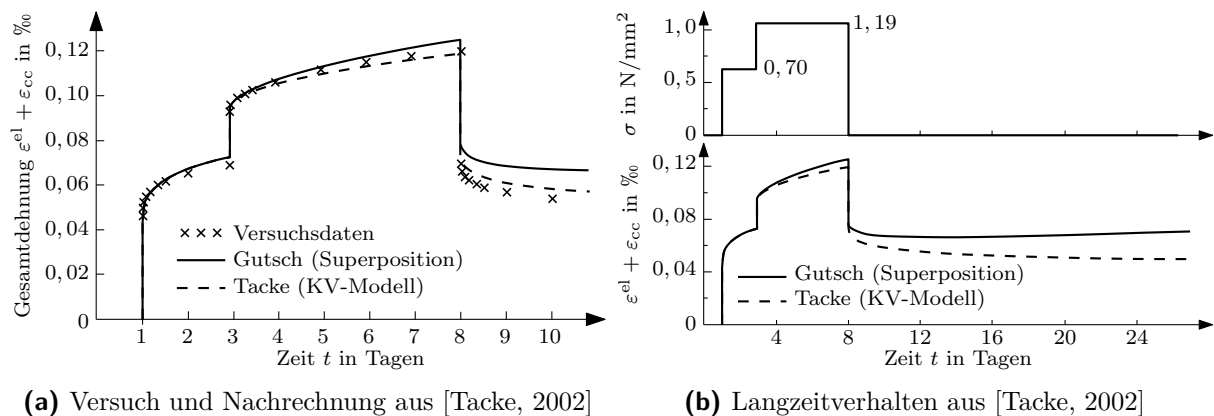


Abbildung 4.1: Vergleich unterschiedlicher Modelle aus [Tacke, 2002] zur Nachrechnung eines Versuchs von [Gutsch, 1998]

4.3.2 De Schutter et al.

[De Schutter, 1999] schlägt zur Vorhersage des Kriechverhaltens unter Druckbeanspruchung als rheologischen Körper einen sog. linearen Standardkörper (engl. *standard linear solid*) vor. Dieser besteht aus einer Serienschaltung eines Hooke-Federelements mit einer Kelvin-Einheit²⁵. Die Eigenschaften der Federn bzw. des Dämpfers werden in Abhängigkeit des Hydratationsgrads

²⁵Ein einzelner KV-Körper, wie in Abb. 3.4

$\alpha(t)$ durch die Formfunktionen

$$E_0(\alpha) = 37\,100 \text{ N/mm}^2 \cdot \left(\frac{\alpha - 0,25}{1 - 0,25} \right)^{0,62} \quad (4.28)$$

$$E_1(\alpha) = \frac{37\,100 \text{ N/mm}^2}{2,081 - 1,608 \cdot \alpha} \cdot \left(\frac{\alpha - 0,25}{1 - 0,25} \right)^{0,62} \quad (4.29)$$

$$\eta_1(\alpha) = \tau \cdot E_1(\alpha) = 20 \text{ h} \cdot E_1(\alpha) \quad (4.30)$$

beschrieben und ändern sich daher kontinuierlich mit fortschreitender Zeit. Die Parameter haben ab $\alpha \geq 0,25$ Gültigkeit, d. h. sobald nach diesem Modell der Beton als Feststoff betrachtet werden kann. Verifiziert wurde das Modell an mehrstufigen Kriechversuchen, die numerisch durch inkrementelles Lösen der Gleichung des rheologischen Körpers nachgerechnet wurden, vgl. [De Schutter, 1999]. Darin konnten gute Übereinstimmungen zwischen gemessener und berechneter Dehnung aus Druckkriechversuchen mit Spannungsgeschichten unter ausschließlich ansteigender Spannung und unterschiedlichen Belastungsaltern bei einem Belastungsgrad von 20 % gezeigt werden.

Abweichungen ergeben sich hingegen bei einem Belastungsgrad von 40 %. [De Schutter, 1999] erklärt dies durch das Erreichen der Linearitätsgrenze im Versuch, wogegen sich das Modell selbst linear verhält und damit das Grundkriechen unterschätzt wird. Werden hingegen Span-

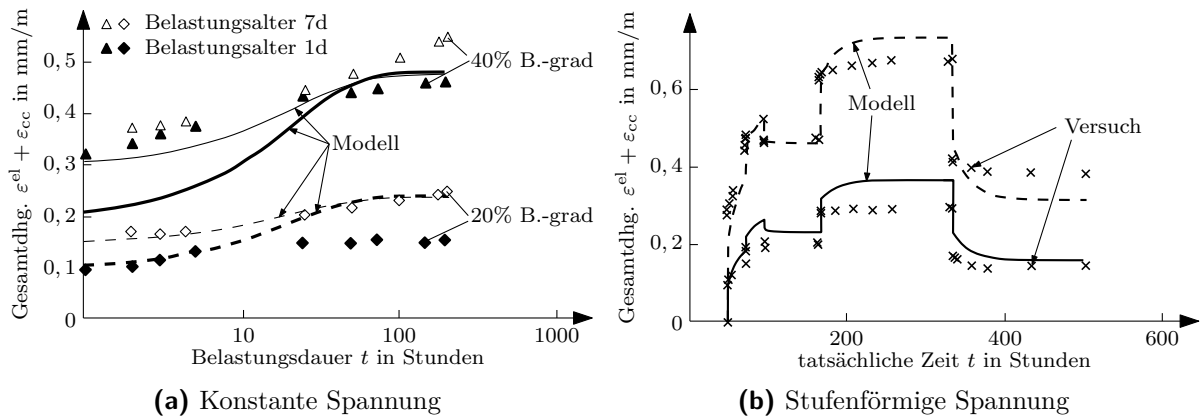


Abbildung 4.2: Vergleich zwischen gemessener und berechneter Kriechdehnungen nach [De Schutter, 1999]

nungsgeschichten mit Teil- oder Vollentlastungen betrachtet, ergeben sich größere Abweichungen zwischen Versuch und Modell: Die Rückverformung nach vollständiger Entlastung wird überschätzt. Dies lässt sich durch die strikte Anwendung des hinter dem Modell stehenden Superpositionsprinzips begründen und deckt sich auch mit Beobachtungen anderer Autoren, vgl. [CEB Bulletin 199, 1990], [Tacke, 2002].

Außerdem wird deutlich, dass die durch das Modell vorhergesagte Kriechdehnung vergleichsweise rasch ihren Endwert erreicht. Nach den in [De Schutter, 1999] gezeigten Daten ist dies nach etwa 4 Tagen der Fall, wogegen bei den dargestellten Messdaten noch weiteres Ansteigen der Dehnung beobachtet werden kann. Der Grund liegt in der relativ klein gewählten Retardationszeit des Modells, wodurch die Kriechdauer auf einen kleinen Zeitraum beschränkt wird.

Ausgehend von diesem rheologischen Körper entwickelten andere Autoren ähnlich geartete Mo-

delle, die sich hauptsächlich in der Anzahl der verwendeten KV-Einheiten unterscheiden bzw. durch zusätzlich angeordnete Grundelemente ergänzt werden, vgl. [Benboudjema, 2002] oder [Briffaut et al., 2012]. Gemeinsam ist allen jenen Modellen, dass die Materialeigenschaften in Abhängigkeit des Hydratationsgrades formuliert werden. Die resultierende Materialgleichung ist definitionsgemäß in allen Fällen eine DGL, wodurch eine effiziente Anwendung in numerischen Simulationen ermöglicht wird. Da sich sowohl Materialparameter als auch Einwirkung über die Zeit ändern, erfolgt die Lösung jeweils inkrementell, wobei die Zeitschritte hinreichend klein gewählt werden, sodass je Zeitschritt konstante Materialparameter unterstellt werden können.

[Benboudjema, 2002] unterscheidet allerdings in der dreidimensionalen Formulierung seines Modells zwischen *sphärischem* und *deviatorischem* Kriechen und nutzt hierzu unterschiedliche Parameterdefinitionen für die Eigenschaften der Elemente der KV-Reihe. In [Benboudjema & Torrenti, 2006] wird eine weitere Version des Modells präsentiert, in dem nicht nur unterschiedliche Parameterdefinitionen sondern auch verschiedene Modelle verwendet werden und eine KV- mit einer MW-Reihe kombiniert wird.

4.3.3 Hermerschmidt

In [Hermerschmidt, 2016a] wird ebenfalls ein Modell auf Basis eines rheologischen Körpers zur Beschreibung des Kriechens von jungem Beton unter Zugbeanspruchungen entwickelt. Im Gegensatz zu den zuvor beschriebenen Modellen basiert es auf einer MW-Reihe, wobei die resultierende DGL nach der Dehnung gelöst wird, um die Kriechverformungen zu erhalten. Es besteht aus einer Parallelschaltung von einer Einzelfeder und vier MW-Einheiten. Die Steifigkeit der Federn der MW-Einheiten wird als konstant angenommen, wogegen die Steifigkeit der Einzelfeder sowie die Viskosität der Dämpfer der MW-Einheiten in Abhängigkeit des effektiven Betonalters definiert sind. Dies ermöglicht die Erfassung von Alterungseinflüssen. Als Formfunktionen wird für die Entwicklung der Federsteifigkeit der Einzelfeder eine Exponentialfunktion der Form

$$E_0(t) = f_1 + \exp\left[f_2 \cdot \left(\frac{t}{1\text{d}}\right)^{f_3}\right] + \Delta E_0(t) \quad (4.31)$$

$$\text{mit } \Delta E_0(t) = \begin{cases} f_4 \cdot \left(\frac{t}{1\text{d}} - \frac{t_0}{1\text{d}}\right)^7 & \text{für } 1\text{d} \leq t < 2\text{d} \\ 0 & \text{für } t \geq 2\text{d} \end{cases}$$

mit vier freien Parametern verwendet. Die Entwicklung der Dämpferviskositäten wird durch eine Potenzfunktion

$$\eta_i(t) = d_{1,i} \cdot \left(\frac{t}{1\text{d}}\right)^{d_2} + \Delta\eta_i(t) \quad \text{und } i = 1, \dots, 4 \quad (4.32)$$

$$\text{mit } \Delta\eta_i(t) = \begin{cases} d_{3,i} \cdot \left(\frac{t}{1\text{d}} - \frac{t_0}{1\text{d}}\right)^7 & \text{für } 1\text{d} \leq t < 2\text{d} \\ 0 & \text{für } t \geq 2\text{d} \end{cases}$$

mit drei freien Parametern beschrieben. Die enthaltenen Zusatzterme ΔE_0 bzw. $\Delta\eta_i$ führt Hermerschmidt ein, um die von ihr festgestellte rasche Änderung der Materialparameter im jungen Alter und die damit verbundenen großen Kriechdehnungen abbilden zu können.

Die Lösung der DGL erfolgt durch ein linear implizites Rosenbrock-Wanner-Verfahren mit dem Löser `ode23s` der Matlab-Suite. Dies ist erforderlich, da sich durch die Einführung der Zusatzterme im Bereich bis 2 Tagen die DGL steif verhält, und Näherungsverfahren die Lösung nicht

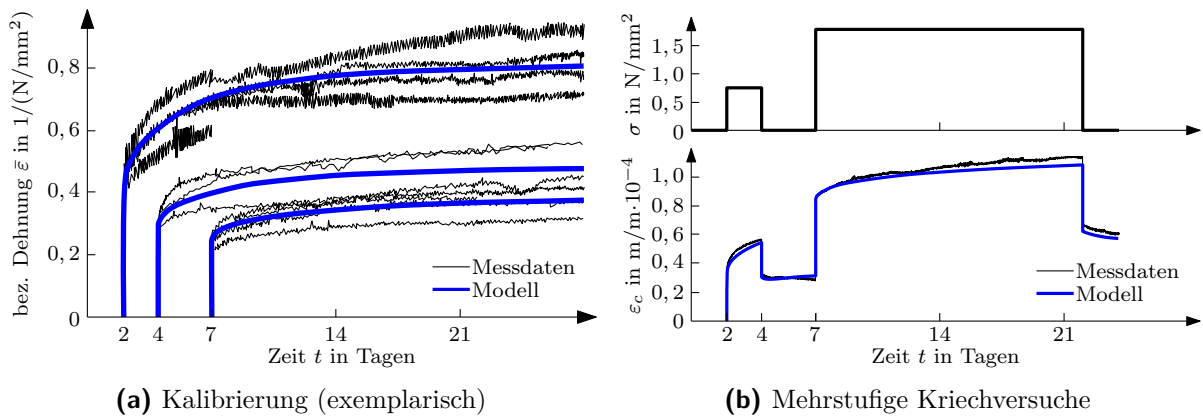


Abbildung 4.3: Kalibrierung (exemplarisch) und Versuchsnachrechnung nach [Hermerschmidt, 2016a]

ausreichend treffen. Für spätere Zeitbereiche kann jedoch das in Abschn. 3.4.3 beschriebene Zeitschrittverfahren unter der Annahme konstanter Materialparameter je Zeitschritt angewendet werden, wie u. a. [Heinrich, Schlicke & Tue, 2015] zeigen.

Die Formparameter bestimmt Hermerschmidt ausgehend von Kriechversuchen mit unterschiedlichen Belastungsaltern von 24, 32, 48, 72, 96 und 168 Stunden, s. Abb. 4.3a. Durch ein Trust-Region-Verfahren der Matlab Optimization-Toolbox wird die durch die DGL beschriebene Kurvenschar an die Messkurven gefittet. Dadurch ergeben sich gute Übereinstimmungen mit den Messergebnissen verschiedenster Belastungsgeschichten. Allerdings können auch hier (geringfügige) unplausible Dehnungszunahmen festgestellt werden, wenn eine Vollentlastung im jungen Alter erfolgt, vgl. Abb. 4.3b.

4.3.4 Schlicke

Bei den bisher gezeigten Modellen handelt es sich um reine Kriechmodelle, die entsprechend an Kriechversuchen kalibriert wurden und zum Teil zur Nachrechnung von zwangbeanspruchten Strukturen eingesetzt werden. Schlicke nutzt nun eine normativ gegebene Kriechfunktion und errichtet damit ein in [Schlicke & Tue, 2012] bzw. [Schlicke, 2014] vorgestelltes Modell, das die zeitdiskrete Ermittlung der Zwangspannungen in Betonbauteilen widerspruchsfrei ermöglicht und an Zwangversuchen und umfassenden Bauwerkmonitorings verifiziert wurde.

Zunächst wird ein so genanntes viskoelastisches (Verformungs-) Potential definiert, das die Höhe des Kriechens bzw. der Relaxation bestimmt. Dieses steht in linearem Zusammenhang zum Systemglobalspannungszustand. Erfährt ein System ausschließlich äußere Beanspruchungen die zur Zunahme der Sytemglobalspannung führen, wird zur Ermittlung der Höhe des viskoelastischen Potentials das Superpositionsprinzip nach Boltzmann herangezogen. Erfolgt keine weitere von außen induzierte Spannungsänderung, fällt die Gesamtspannung im System aufgrund der Relaxation ab. Ab diesem Zeitpunkt geht auch das viskoelastische Verformungspotential der eingprägten Spannungsinkremente zurück, indem je Spannungsinkrement das im aktuellen Zeitschritt vorhandene Ausgangspotential entsprechend der Spannungsänderung im System anteilig modifiziert wird. Dies ist in Abb. 4.4a verdeutlicht.

Erfährt das System eine Entlastung aufgrund von zum Globalspannungszustand entgegengesetzt wirkenden äußeren Verformungseinwirkungen wird ebenfalls vom Superpositionsprinzip

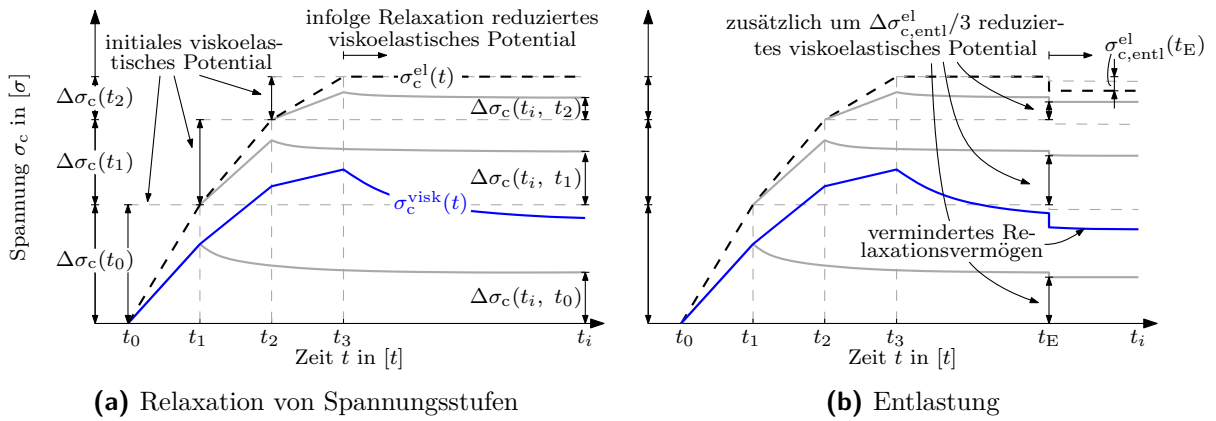


Abbildung 4.4: Schematische Vorgehensweise der Superposition im Ansatz von Schlicke

abgewichen: Nach Schlicke ist die Superposition bei Entlastungsvorgängen eher eine theoretische Überlegung, die im Hinblick auf die herrschende Globalspannung keinen direkten Bezug zur tatsächlichen Beanspruchung des Materials hat: Ein druckbeanspruchtes Element bleibt nach teilweiser Entlastung immer noch – zwar weniger als zuvor – gedrückt; es erfährt jedoch keinerlei Zugbeanspruchung mit entsprechendem Zugkriechen wie dies nach dem Superpositionsprinzip der Fall wäre. Ein entlastendes Spannungsinkrement besitzt danach kein eigenes viskoelastisches Verformungspotential sondern wirkt reduzierend auf alle bisher im System eingprägten Potentiale. Die Reduktion selbst wird durch gleichmäßiges Verteilen der entlastenden Spannungsstufe auf alle vorhandenen Potentiale vorgenommen, dies ist exemplarisch in Abb. 4.4b dargestellt.

Die im System vorhandene Globalspannung wird außerdem herangezogen, um hinsichtlich Druck- und Zugkriechen zu unterscheiden. Für Druckbeanspruchungen werden die in EC2 verankerten Druckkriechkurven verwendet, wogegen unter Zugbeanspruchung aus den Druckkriechkurven abgeleitete Zugkriechkurven herangezogen werden. Der Einfluss der Alterung wird durch Definition des Alterungsbeiwerts $\beta(t_0)$ auf Basis des effektiven Betonalter zum Belastungszeitpunkt t_0 berücksichtigt. Durch den steten Bezug zur Globalspannung ist es zudem nicht möglich, dass das System als alleinige Folge der Relaxation einen Nulldurchgang erfährt. – Somit können Prognosefehler, wie in Abb. 2.6b dargestellt, vermieden und ein Nulldurchgang ausschließlich durch äußere Spannungsänderungen hervorgerufen werden. Im Modell wird außerdem angenommen, dass bei einem Nulldurchgang die im System bisher vorhandene Belastungsgeschichte das Kriechverhalten nicht länger beeinflusst und die Kriechgeschichte erneut beginnt.

4.4 Beurteilung der Materialmodelle

Die zuvor gezeigten Modelle wurden mit Ausnahme des Ansatzes von [Schlicke, 2014] zur alleinigen Beschreibung der Kriecheigenschaften verschiedener spezifischer Betone entwickelt. Mit ihnen kann die Spannungsentwicklung in zwangbeanspruchten Bauteilen ermittelt werden, wenn dies auf Basis der Verformungskompatibilität erfolgt und die Kriechdehnung als zusätzliche Einwirkung für das zu berechnende System betrachtet wird. Dies zeigen bspw. [De Schutter, 1999], [Benboudjema, 2002], und [Hermerschmidt, 2016a]. Entsprechende Ergebnisse können den einzelnen Arbeiten entnommen werden. Details zu dieser Vorgehensweise sind in Abschn. 5.4 zu finden. Sämtliche der hier vorgestellten Modelle basieren aufgrund ihrer differentiellen Form

auf dem Superpositionsprinzip. Dass dessen Verwendung auch bei (voll) gezwängten Systemen Gültigkeit besitzt, vermutet [Gutsch, 1998]. Jüngst in [Jędrzejewska et al., 2018] veröffentlichte Ergebnisse lassen allerdings den Zweifel aufkommen, dass durch die Anwendung des Superpositionsprinzips in zwangbeanspruchten Systemen die tatsächliche Materialbeanspruchung zutreffend erfasst wird, und sich die Überlegungen von [Schlicke, 2014] als richtungweisend zeigen, s.a. Abb. 1.1.

Außerdem wurden die hier gezeigten Materialmodelle für die Beschreibung des Kriechverhaltens von jungem Beton entwickelt. Aus den veröffentlichten Daten geht nicht hervor, ob das Kriechen auch bei sehr hohen Belastungsdauern von mehreren Monaten oder Jahren bzw. bei entsprechend hohen Belastungsaltern hinreichend genau erfasst werden kann. Sollen die Modelle für die praktische Bemessung herangezogen werden wird es erforderlich diese an die in der jeweils zugrunde gelegten Bemessungsnorm enthaltene Kriechfunktion zu kalibrieren. Dies scheitert aber oftmals am Gültigkeitsbereich der gezeigten Modelle, da mit diesen primär die Erfassung des Kriechverhaltens von jungem Beton zutreffend möglich sein soll. Deshalb können vielfach die ersten Tage der durch die Normkurven gegebenen Kriechdehnungen durch die Modelle gut wiedergegeben werden. Sollen allerdings die in einem Teil der Normmodelle beobachtbaren Kriechverformungszunahmen im späten Alter erfasst werden, scheitert die Kalibrierung und größere Abweichungen sind die Folge.

Das Modell von Schlicke hingegen wurde ursächlich zur Beschreibung von Zwangsspannungen in erhärtenden Betonbauteilen ausgelegt, wobei die Kriecheigenschaft durch eine gegebene Kriechfunktion beschrieben werden soll. Dabei lag der Fokus auf der Berücksichtigung des tatsächlichen Materialverhaltens, sodass das viskoelastische Verhalten ausschließlich durch den Systemglobalspannungszustand bestimmt wird. In einem jüngst durchgeführten Benchmark im Rahmen einer COST-Action konnte gezeigt werden, dass sich das Modell am besten eignet um Zwangsspannungen in teilweise verformungsbehinderten Systemen unter realistischen Beanspruchung zu bestimmen, vgl. [Jędrzejewska et al., 2018] bzw. „Team 3“ in Abb. 1.1. Ein weiterer Vorteil des Modells ist, dass nahezu jede Kriechfunktion als Grundlage verwendet werden kann – allerdings scheitert eine individuelle Anpassung des Kriechverhaltens an spezifische Messkurven. Der größte Nachteil ist, dass das Modell zunächst auf der Grundlage des Superpositionsprinzips errichtet wurde. Dies führt vor allem in größeren Strukturen zu einer negativen Beeinflussung der Rechenzeit und eignet sich daher zum effizienten Einsatz in numerischen Simulationen nur bedingt, vgl. Abschn. 2.3.

Aufgrund der guten Übereinstimmung mit Messdaten aus der Praxis und der normativen Referenz wird nun ausgehend von den Überlegungen von Schlicke ein Modell entwickelt, das

- an beliebige gegebene Kriechfunktionen kalibriert,
- Ergebnisse in ähnlicher Qualität liefern,
- den Rechenaufwand um ein Vielfaches reduzieren und damit
- die effiziente Nutzung sicherstellen

soll. Dies bietet einerseits den Vorteil, dass durch die Verwendung von Normkriechkurven zur Kalibrierung der Anspruch an eine Verwendung für den praktischen Einsatz i. S. von allfälligen Bemessungsaufgaben sichergestellt wird. Andererseits macht die Effizienz des Modells seine Implementierung und weitere Anwendung in komplexen Programmen wie FE-Umgebungen attraktiv.

Verweisend auf [Schlicke, 2014] werden in dieser Arbeit Kriechen und Relaxation als reine Wekstoffeigenschaft unter idealen Randbedingungen verstanden. Aus der bereits erwähnten Forderung, dass unter diesen Randbedingungen beide Effekte ineinander überführbar sind, wird

das viskoelastische Verhalten auf der Basis von Kriechkurven abgeleitet und Kriechen bzw. Relaxation ausgehend von einem viskoelastischen Potential als Systemantworten verstanden. Für die rechnerische Abbildung der Effekte werden folgende Annahmen getroffen:

- Relaxation und Kriechen werden als zeitdiskrete Systemantworten auf ein spannungsabhängiges Verformungsbestreben verstanden. Sie stehen in engem Zusammenhang mit dem Systembehinderungsgrad.
- Die Beschreibung der Kriecheigenschaft erfolgt phänomenologisch auf Grundlage normativer Modelle.
- Für sämtliche betrachtete Spannungsgeschichten wird ein linearer Zusammenhang zwischen Beanspruchungsniveau und Viskoelastizität unterstellt. Für Druckbeanspruchungen ist dies durch resultierende Spannungen $< 0,40 \cdot f_c$ sichergestellt; bei Zugbeanspruchungen kann von Linearität bis zum Einsetzen der Rissbildung bei $f_{ctk;0,05}$ ausgegangen werden.
- Zunächst gilt die Superponierbarkeit der einwirkenden Inkremente im Zeitverlauf.
- Schwinden wird unabhängig von der Viskoelastizität erfasst, obwohl das Gegenteil bis zu einem bestimmten Grad bewiesen werden könnte.
- Der Einfluss der Reife wird hinreichend genau durch die Endkriechzahl auf Grundlage des effektiven Betonalters erfasst.
- Da Temperaturgeschichten bis max. 55°C betrachtet werden, kann eine mögliche Temperaturabhängigkeit auf die zeitliche Entwicklung des zu einer bestimmten Spannungsänderung gehörenden viskoelastischen Potentials vernachlässigt werden.

4.5 Zusammenfassung

Neben einigen Kriechansätzen der aktuellen Normengeneration wurden in diesem Abschnitt auch Ansätze der jüngeren Forschung vorgestellt. Dabei unterscheiden sich diese Ansätze im Aufbau teilweise beträchtlich. Unterschiede zeigen sich vor allem darin, ob nur Grundkriechen allein, oder auch Trocknungskriechen oder eine Kombination davon im Ansatz erfasst wird. Mit der Kenntnis von Kriechansätzen allein ist es prinzipiell nur möglich die Kriechverformung für eine einwirkende einzelne Spannungsstufe wiederzugeben. Liegen hingegen veränderliche Beanspruchungen oder gar Relaxationsprobleme vor die mit den Kriechfunktionen berechnet werden, müssen weitere Hilfsmittel in Betracht gezogen werden: Darunter versteht man einerseits unter der Voraussetzung von linearer Viskoelastizität die Anwendung des Boltzmann-Superpositionsprinzips. Andererseits ist der Einsatz effizienter differentiell formulierter Materialmodelle möglich, die in linearer Viskoelastizität dieselben Ergebnisse liefern. Die Parameter der Materialmodelle müssen i. d. R. anhand von Daten bestimmt werden, damit das gewünschte Kriechverhalten beschrieben werden kann. Derartige für spezifische Betone entwickelte Materialmodelle wurden in diesem Abschnitt ebenfalls vorgestellt. Grundsätzlich kann unter Einhaltung der Verformungskompatibilität jedes Modell zur Erfassung der in gezwängten Systemen auftretenden Relaxation herangezogen werden. Hierzu erweist sich ein kürzlich von [Schlicke, 2014] entwickeltes Modell als besonders geeignet. Vor dem Hintergrund der tatsächlichen Materialbeanspruchung beruht es allerdings in seiner Grundidee auf dem Superpositionsprinzip, wodurch seine Anwendung mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden ist. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit im Folgenden ein recheneffizienteres Modell entwickelt, dessen grundlegende Annahmen abschließend in diesem Kapitel wiedergegeben wurden.

5 Entwicklung eines eigenen Modells

5.1 Allgemeines

Dieser Abschnitt behandelt die Entwicklung eines neuen Materialmodells, das sich zur realistischen Beschreibung von Zwangsspannungen in erhärtenden Betonbauteilen eignet. Nach dem Stand der Wissenschaft basieren die viskoelastischen Betoneigenschaften Kriechen und Relaxation auf identen physikalischen Ursachen bei unterschiedlichen Randbedingungen. Weil in der Praxis meist Kriechdaten bzw. -funktionen zur Verfügung stehen stellt die reine Kriecheigenschaft für die Modellbildung den Ausgangspunkt dar. Das Modell soll dabei auf gegebene Kriechkurven, die den aktuellen Normen entspringen, eingestellt werden können. Dadurch soll eine abgesicherte Grundlage für die Anwendung im frühen und späten Betonalter sichergestellt werden. Neben der realistischen Erfassung des viskoelastischen Verhaltens auf Strukturebene, liegt das Augenmerk in diesem Abschnitt auf der Entwicklung eines recheneffizienten Algorithmus.

5.2 Generelle Modellbeschreibung

Wie in Kap. 3 bzw. Abschn. 4.3 beschrieben wurde bieten sich Materialgleichungen in differentieller Form besonders dann an, wenn hohe Ansprüche an die Recheneffizienz bzw. Speicherauslastung gestellt werden. Da die Lösung zeitschrittbasierend über die stete Formulierung eines Anfangswertproblems erfolgen kann, wird der Speicher nur durch eine konstante Anzahl an Variablen beansprucht, die die entsprechenden Anfangsbedingungen bereitstellen. Diese inneren Variablen enthalten stets die gesamte Information, die notwendig ist um die Differentialgleichung im betrachteten Zeitschritt zu lösen. Eine deutliche Steigerung der Recheneffizienz ist überdies dann möglich, wenn zur Lösung der Differentialgleichung im Zeitschritt selbst keine weiteren numerischen Verfahren erforderlich sind.

5.2.1 Modelldefinition

Ein Modell, auf das die zuvor genannten Anforderungen zutreffen, ist das schon in Abschn. 3.3.3 erwähnte generalisierte KV-Modell. Es ist in Abb. 5.1 dargestellt und eignet sich besonders gut zur Beschreibung von Kriechproblemen. Seine Materialgleichung kann, wie später gezeigt wird,

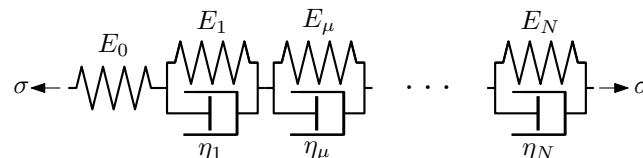


Abbildung 5.1: KV-Reihe mit zusätzlicher Einzelfeder

unter geeigneten Voraussetzungen ohne zusätzliche numerische Verfahren gelöst werden. Da mit einer einzigen KV-Einheit das Kriechverhalten von Beton nicht ausreichend genau beschrieben werden kann, müssen mehrere KV-Einheiten verwendet werden. Dies ermöglicht eine Anpassung der KV-Reihe in beliebiger Genauigkeit an unterschiedlich geartete Kriechkurven. Die Erweiterung auf die Reihe erfordert zudem keinen höheren Lösungsaufwand, da die DGL nicht komplizierter wird, weil jede KV-Einheit nur einen additiven Beitrag leistet. Auf die Rechenzeit hat daher die Anzahl der KV-Einheiten kaum einen Einfluss.

Das Verhalten der KV-Reihe kann über ihre Materialparameter gesteuert werden, durch deren geeignete Wahl die gewünschten Kriechkurven erzeugt werden können, vgl. Abschn. 5.3. Für die in Abb. 5.1 dargestellte KV-Reihe sind die Materialparameter für das μ -te Reihenglied der Elastizitätsmodul E_μ der Hooke-Feder bzw. die dynamische Viskosität η_μ des Newton-Dämpfers.

Die Kriech-, Komplianz- oder Nachgiebigkeitsfunktion der in Abb. 5.1 dargestellten KV-Reihe kann mit Verweis auf Abschn. 3.3.2 für ein nichtalterndes Material, d.h. mit konstanten Materialeigenschaften, angegeben werden mit:

$$J(t, t_0) = J(t - t_0) = \varphi(t - t_0) = \frac{1}{E_0} + \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{E_\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_\mu}\right) \right] \quad (5.1)$$

mit:

t	...	tatsächliche Zeit
t_0	...	Zeitpunkt der Lastaufbringung
$(t - t_0)$...	Belastungsdauer
τ_μ	...	Retardationszeit η_μ/E_μ

Beton ist allerdings ein Material, das einer ausgeprägten Alterung unterliegt. Das muss auch bei der Formulierung eines Materialgesetzes berücksichtigt werden: $E_\mu \rightarrow E_\mu(t) = f_1(t)$ bzw. $\eta_\mu \rightarrow \eta_\mu(t) = f_2(t)$. Glg. (5.1) ist hierzu jedoch nicht geeignet – zeitabhängige Parameter führen darin zu unsinnigen Ergebnissen. Vielmehr müssen Alterungseffekte in der Formulierung der DGL berücksichtigt werden.

5.2.2 Stoffgleichung eines alternden Kelvin-Modells

[Bažant, 1988] zeigt, dass die konstitutive Beziehung über Dehnungs- und Spannungsrate für eine alternde Feder die einzig mögliche ist, ohne thermodynamische Einschränkungen zu verletzen. Wie schon in Abschn. 3.3.2 gezeigt, muss die Dehnung von Feder und Dämpfer in einer KV-Einheit ident sein. Daraus folgt auch für die Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}$:

$$\varepsilon = \varepsilon_D = \varepsilon_F \rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_D = \dot{\varepsilon}_F \quad (5.2)$$

Für die Spannung und damit auch die Spannungsrate $\dot{\sigma}$ gilt:

$$\sigma = \sigma_D + \sigma_F \rightarrow \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_D + \dot{\sigma}_F \quad (5.3)$$

Die Dehnungsrate einer Kelvin-Einheit kann deshalb auch über

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_D}{\eta(t)} = \frac{\dot{\sigma}_F}{E(t)} \quad (5.4)$$

ausgedrückt werden. Darin ist $\eta(t)$ die Viskosität des Dämpfers bzw. $E(t)$ die Steifigkeit der Feder der KV-Einheit. Die Spannungsrate im Dämpfer führt ausgehend von Glg. (5.4) auf:

$$\dot{\sigma}_D = \frac{\partial[\eta(t) \cdot \dot{\epsilon}]}{\partial t} = \eta(t) \cdot \ddot{\epsilon} + \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\epsilon} \quad (5.5)$$

Einsetzen von Glg. (5.5) und Glg. (5.4) in Glg. (5.3) liefert zunächst

$$\dot{\sigma} = \eta(t) \cdot \ddot{\epsilon} + \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\epsilon} + \dot{\epsilon} \cdot E(t) \quad (5.6)$$

woraus nach Umstellen eine lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten wird:

$$\ddot{\epsilon} + \frac{E(t) + \dot{\eta}(t)}{\eta(t)} \cdot \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\eta(t)} \quad (5.7)$$

5.2.3 Lösungsalgorithmus

Voraussetzungen und Annahmen

Um eine vergleichsweise einfache und effiziente Lösung zu ermöglichen wird die DGL zeitdiskret betrachtet. Dabei werden die Zeitschritte Δt als hinreichend klein angenommen, sodass die Materialeigenschaften innerhalb eines Zeitschrittes als annähernd konstant betrachtet werden können. Abb. 5.2 zeigt dies schematisch.

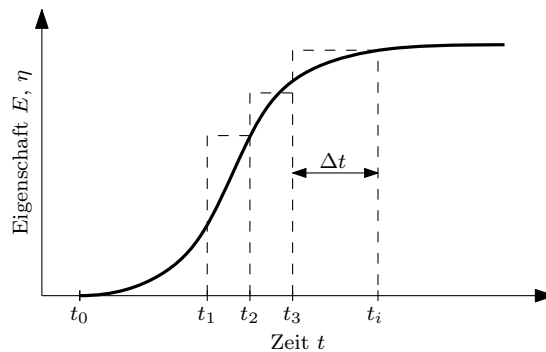


Abbildung 5.2: Konstante Materialeigenschaften bei kleinen Zeitschritten

Weil durch diese Annahme $\dot{\eta}(t) = 0$ ist vereinfacht sich Glg. (5.7) zu:

$$\ddot{\epsilon} + \frac{\bar{E}}{\bar{\eta}} \cdot \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\bar{\eta}} \quad (5.8)$$

Die Überstreichung verdeutlicht, dass es sich um Mittelwerte im jeweiligen Zeitschritt handelt. Weiters wird die Änderung der einwirkenden Spannung innerhalb eines Zeitschrittes als linear angenommen – damit ist auch $\dot{\sigma}$ konstant.

Nunmehr handelt es sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die mit dem in Abschn. 3.4.3 gezeigten Verfahren analytisch geschlossen gelöst werden kann. Dieses Verfahren wird zunächst anhand einer einzelnen KV-Einheit demonstriert und anschließend zu einer KV-Reihe erweitert.

Allgemeine Lösung für ein einzelnes KV-Element

Wie in Abschn. 3.4.3 beschrieben, setzt sich die allgemeine Lösung von Glg. (5.8) aus einem homogenen und einem partikulären Anteil zusammen, die getrennt voneinander bestimmt werden können, es gilt Glg. (3.17). Die Lösung des homogenen Anteils von Glg. (5.8) erfordert zunächst die Ermittlung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\overline{E}}{\overline{\eta}} \cdot \dot{\varepsilon} = 0 \rightarrow \lambda^2 + \frac{\overline{E}}{\overline{\eta}} \cdot \lambda + 0 = 0 \quad (5.9)$$

Diese ergeben sich zu

$$\lambda_1 = \frac{\overline{E}}{2\overline{\eta}} - \frac{\overline{E}}{2\overline{\eta}} = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{\overline{E}}{2\overline{\eta}} - \frac{\overline{E}}{2\overline{\eta}} = -\frac{\overline{E}}{\overline{\eta}} \quad (5.10)$$

Damit kann die Lösung des homogenen Anteils direkt angegeben werden mit

$$\varepsilon_H(t) = C_1 \cdot \exp(0 \cdot t) + C_2 \cdot \exp\left(-\frac{\overline{E}}{\overline{\eta}} \cdot t\right) \quad (5.11)$$

Da es sich bei der Inhomogenität von Glg. (5.8) um eine Konstante handelt, kann die partikuläre Lösung unkompliziert gefunden werden:

$$\varepsilon_P(t) = \frac{\frac{\dot{\sigma}}{\overline{\eta}}}{\frac{\overline{E}}{\overline{\eta}}} t = \frac{\dot{\sigma}}{\overline{E}} t \quad (5.12)$$

Schließlich ergibt sich die allgemeine Lösung durch Addition von Glg. (5.11) und Glg. (5.12) zu:

$$\varepsilon(t) = C_1 + C_2 \cdot \exp\left(-\frac{\overline{E}}{\overline{\eta}} t\right) + \frac{\dot{\sigma}}{\overline{E}} t \quad (5.13)$$

Spezielle Lösung für eine KV-Einheit: Anfangswertproblem

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 aus Glg. (5.13) wird ein Anfangswertproblem formuliert. Eine DGL 2. Ordnung benötigt zwei Anfangsbedingungen: eine für das Funktional selbst sowie eine von dessen erster Ableitung; d. h. die alleinige Kenntnis eines Dehnungszustandes ε ist nicht ausreichend. Nach Abschn. 3.4.3 ergibt sich $\dot{\varepsilon}(t)$ aus der Differentiation von Glg. (5.13) nach t :

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\frac{\overline{E}}{\overline{\eta}} \cdot C_2 \cdot \exp\left(-\frac{\overline{E}}{\overline{\eta}} t\right) + \frac{\dot{\sigma}}{\overline{E}} \quad (5.14)$$

Die Konstanten müssen nun je Zeitschritt durch Anpassung an die Anfangswerte gefunden werden: Zum Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ beginnt die Belastung der KV-Einheit, wobei diese zunächst spannungsfrei war und daher keine Dehnung vorhanden ist. Daher ist $\varepsilon(t_0) = 0$.

Aus der Kenntnis der Dämpferspannung σ_D zum selben Zeitpunkt folgt für $\dot{\varepsilon}(t = t_0) = \frac{\sigma_D(t=t_0)}{\overline{\eta}}$; wobei σ_D zu Beginn ebenfalls spannungsfrei war, da eine lineare Spannungszunahme unterstellt wird. Damit ist bei t_0 auch $\dot{\varepsilon}(t_0) = 0$. Ausgehend von diesen Anfangsbedingungen gilt die gefundene Lösung der DGL für ein einzelnes Spannungsinkrement, das bei t_0 auf das KV-Element aufgebracht wird.

Für den allgemeinen Fall einer veränderlichen Einwirkungsgeschichte muss das Anfangswertproblem für jeden Zeitschritt erneut formuliert werden. Bei bekannter Dehnung $\tilde{\varepsilon}$ des KV-Elements und dessen erster Ableitung $\tilde{\dot{\varepsilon}}$ am Zeitschrittbeginn t^* folgt dann aus Glg. (5.14)

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t = t^*) &= -C_2 \cdot \frac{\bar{E}}{\bar{\eta}} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}t^*\right) + \frac{\dot{\sigma}}{\bar{E}} = \tilde{\dot{\varepsilon}} \\ \rightarrow C_2 &= -\frac{\bar{\eta}}{\bar{E} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}t^*\right)} \left(\tilde{\dot{\varepsilon}} - \frac{\dot{\sigma}}{\bar{E}}\right)\end{aligned}\quad (5.15)$$

Schließlich ergibt sich mit Glg. (5.13) aus Glg. (5.15)

$$\begin{aligned}\varepsilon(t = t^*) &= C_1 + C_2 \cdot \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}t^*\right) + \frac{\dot{\sigma}}{\bar{E}}t^* = \tilde{\varepsilon} \\ \rightarrow C_1 &= \tilde{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{\bar{E}}t^* + \left(\tilde{\dot{\varepsilon}} - \frac{\dot{\sigma}}{\bar{E}}\right) \cdot \frac{\bar{\eta}}{\bar{E}}\end{aligned}\quad (5.16)$$

Glg. (5.15) und Glg. (5.16) eingesetzt in Glg. (5.13) liefert dann für $t > t^*$ mit $\Delta t = t - t^*$ und $\dot{\sigma} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$ die gesuchte Lösung und damit die Dehnung am Ende eines Zeitschrittes

$$\begin{aligned}\varepsilon(\Delta t, \Delta\sigma, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\dot{\varepsilon}}) &= \tilde{\varepsilon} + \tilde{\dot{\varepsilon}} \cdot \frac{\bar{\eta}}{\bar{E}} \left[1 - \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}\Delta t\right)\right] \\ &\quad + \frac{\Delta\sigma}{\bar{E}} \left[1 - \frac{\bar{\eta}}{\Delta t \cdot \bar{E}} \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}\Delta t\right)\right)\right]\end{aligned}\quad (5.17)$$

$\dot{\varepsilon}(t)$ kann durch einmalige Differentiation von Glg. (5.17) nach t gefunden werden und es ergibt sich nach Umformung:

$$\dot{\varepsilon}(\Delta t, \Delta\sigma, \tilde{\dot{\varepsilon}}) = \left[1 - \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}\Delta t\right)\right] \frac{1}{\bar{E}} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} + \tilde{\dot{\varepsilon}} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}\Delta t\right)\quad (5.18)$$

Dies entspricht der Lösung²⁶, die auch durch die Auswertung des in Abschn. 3.2.2 beschriebenen integralen Ansatzes über eine Reihenapproximation gefunden werden kann und entspricht damit einer strikten Anwendung des Superpositionsprinzips, vgl. [Tacke, 2002]. Die Lösung des integralen Ansatzes über eine Approximation durch eine DIRICHLET- (auch PRONY-) Reihe kann damit aus mechanischer Sicht als Kelvin-Reihe interpretiert werden.

Für jeden Zeitschritt müssen nun Glg. (5.17) und Glg. (5.18) ausgewertet werden, wobei stets der jeweilige Wert am Ende des vorhergehenden Zeitschrittes bekannt sein muss. Ist die Gesamtdehnung von Interesse, müssen für eine KV-Einheit zwei Variablen im Speicher vorgehalten werden ($\tilde{\varepsilon}, \tilde{\dot{\varepsilon}}$). Wird nur die Dehnungsänderung im Zeitschritt benötigt, ist das Vorhalten einer

²⁶[Tacke, 2002], [Hauggaard, Damkilde & Hansen, 1999] bzw. [Bažant, 1988] zeigen ein anderes Vorgehen: Die Anfangsbedingung für $\dot{\varepsilon}$ wird aus der Dämpferspannung ermittelt: Zunächst ist $\dot{\varepsilon}(t_0 = 0) = \tilde{\sigma}_D/\bar{\eta} = 0$. In der Lösung des AWP's wird $\tilde{\sigma}_D$ als innere Variable mitgeführt, die über die Gleichgewichtsbedingung $\Delta\sigma_D = \Delta\sigma - \Delta\varepsilon(\Delta t, \Delta\sigma, \tilde{\sigma}_D) \cdot \bar{E}$ aktualisiert werden muss. Dadurch wirkt sich die Alterung auf die gesamte Kriechgeschichte aus. Damit wird das Modell nichtlinear in Bezug auf die Spannungsgeschichte, nicht jedoch bzgl. der Spannungsintensität. Prognosefehler wie in Abb. 2.6 können auf diese Weise vermieden werden.

Variable ausreichend. $\Delta\varepsilon$ ergibt sich aus Glg. (5.17) und hängt nur noch von $\tilde{\varepsilon}$ ab:

$$\Delta\varepsilon(\Delta t, \Delta\sigma, \tilde{\varepsilon}) = \underbrace{\tilde{\varepsilon} \cdot \frac{\bar{\eta}}{\bar{E}} \left[1 - \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}} \Delta t\right) \right]}_{\text{Gedächtnisterm}} + \underbrace{\frac{\Delta\sigma}{\bar{E}} \left[1 - \frac{\bar{\eta}}{\Delta t \cdot \bar{E}} \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}} \Delta t\right) \right) \right]}_{\text{Änderung im aktuellen Zeitschritt}} \quad (5.19)$$

Übertragen auf eine KV-Reihe

Da es nicht möglich ist mit einer einzigen KV-Einheit das Kriechverhalten von Beton ausreichend genau zu beschreiben, muss eine Reihenschaltung mehrerer KV-Einheiten entwickelt werden. Die Übertragung der zuvor hergeleiteten Lösung einer einzelnen KV-Einheit auf eine Reihe von N KV-Einheiten fällt nicht weiter schwer, da jede KV-Einheit in der Reihe einen additiven Beitrag leistet:

$$\varepsilon(t) = \sum_{\mu=1}^N \varepsilon_{\mu}(t) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{\mu}'' + \frac{\bar{E}_{\mu}}{\bar{\eta}_{\mu}} \dot{\varepsilon}_{\mu} = \frac{\dot{\sigma}_{\mu}}{\bar{\eta}_{\mu}} \quad (5.20)$$

Ausgeweitet auf eine Reihe, bestehend aus N KV-Einheiten, wird die in Abschn. 5.2.3 hergeleitete Glg. (5.19) zu

$$\Delta\varepsilon(\Delta t, \Delta\sigma, \tilde{\varepsilon}_{\mu}) = \sum_{\mu=1}^N \left\{ \tilde{\varepsilon}_{\mu} \left[\frac{\bar{\eta}_{\mu}}{\bar{E}_{\mu}} - \exp\left(-\frac{\bar{E}_{\mu}}{\bar{\eta}_{\mu}} \Delta t\right) \right] + \frac{\Delta\sigma}{\bar{E}_{\mu}} \left[1 - \frac{\bar{\eta}_{\mu}}{\bar{E}_{\mu} \cdot \Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{E}_{\mu}}{\bar{\eta}_{\mu}} \Delta t\right) \right) \right] \right\} \quad (5.21)$$

Die innere Variable $\tilde{\varepsilon}_{\mu}$ muss darin *getrennt* für jede einzelne KV-Einheit berücksichtigt werden, damit wird Glg. (5.18) zu

$$\dot{\varepsilon}_{\mu}(\Delta t, \Delta\sigma, \tilde{\varepsilon}_{\mu}) = \left[1 - \exp\left(-\frac{\bar{E}_{\mu}}{\bar{\eta}_{\mu}} \Delta t\right) \right] \frac{1}{\bar{E}_{\mu}} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} + \tilde{\varepsilon}_{\mu} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{E}_{\mu}}{\bar{\eta}_{\mu}} \Delta t\right) \quad (5.22)$$

5.3 Bestimmung der Modellparameter

Um die zuvor hergeleiteten Gleichungen der praktischen Anwendung zugänglich zu machen, ist es erforderlich die in den Gleichungen auftretenden Materialparameter zu bestimmen. Hierzu stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Die Wahl der Methode hängt u. a. davon ab wie das Modell aufgebaut ist, d. h. ob „konstante“ Materialparameter oder zeitabhängige Formfunktionen verwendet werden bzw. woran (analytische Kriechfunktionen oder Messdaten) das Modell angepasst werden soll.

In dieser Arbeit es das Ziel, das Modell an die in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] gegebene Kriechfunktion anzupassen. Probleme die sich bei einer derartigen Anpassung ergeben können falls die Materialparameter durch zeitabhängige Formfunktionen beschrieben werden, können vermieden werden, wenn die Parameterbestimmung auf analytischem Weg erfolgt. Dies gelingt jedoch nur

in der Annahme *konstanter* Materialparameter, die mit Auftreten eines neuen Spannungsincrements der Alterung entsprechend aktualisiert werden. In Abschn. 5.3.1 wird ein derartiges Verfahren ausgehend von einem kontinuierlichen Retardationsspektrum gezeigt. Hierzu ist es jedoch zusätzlich erforderlich, dass in der durch das Modell zu approximierenden Kriechfunktion der Einfluss der Alterung von der zeitlichen Entwicklung des Kriechens getrennt werden kann. Wie in Abschn. 5.3.1 gezeigt, trifft dies auf das Eurocode Kriechmodell zu, sodass das analytische Verfahren angewendet werden kann.

Der Vollständigkeit halber wird in Abschn. 5.3.2 eine mögliche Vorgehensweise zur Bestimmung der Parameter mittels Optimierungsverfahren überblicksmäßig beschrieben.

5.3.1 Diskretisierung des Retardationsspektrums

Die Bestimmung der Materialparameter über ein Retardationsspektrum geht zunächst von einer nichtalternden KV-Reihe aus. Die Lösung ihrer DGL ist bereits durch Glg. (5.1) als Dirichlet-Reihe gegeben.

Retardationsspektrum

Zusammen mit der Retardationszeit τ_μ und der zugehörigen Nachgiebigkeit $J_\mu = \frac{1}{E_\mu}$ kann eine einzelne KV-Einheit eindeutig beschrieben werden. Daraus ergibt sich, dass eine KV-Reihe durch die Gesamtheit der Retardationszeiten τ_μ und der Nachgiebigkeiten J_μ charakterisiert und diese Gesamtheit zur Kennzeichnung der Summe in Glg. (5.1) verwendet werden kann. Werden dazu die Wertepaare (J_μ, τ_μ) gegeneinander aufgetragen stellen sie die Spektralwerte eines so genannten *diskreten Retardationsspektrums* dar. Führt man den Grenzübergang zu einer KV-Reihe mit unendlich vielen Elementen ($\mu \rightarrow \infty$) und infinitesimal benachbarter Retardationszeiten τ_μ durch, wird aus dem diskreten Spektrum ein *kontinuierliches Retardationsspektrum* $L(\tau)$. Kontinuierliche Spektren wurden u. a. in [Xi & Bažant, 1993] bzw. [Bažant & Xi, 1995] untersucht. Abb. 5.3 zeigt exemplarisch ein diskretes Retardationsspektrum und stellt es dem kontinuierlichen gegenüber.

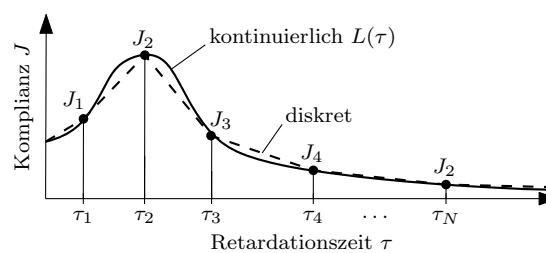


Abbildung 5.3: Aus Spektralwerten gebildetes diskretes und kontinuierliches Retardationsspektrum

Die Idee ist es nun, das kontinuierliche Retardationsspektrum einer bekannten Kriechfunktion zu ermitteln und ausgehend davon die Parameter für das KV-Modell zu bestimmen indem diese für diskret *gewählte* Retardationszeiten aus dem kontinuierlichen Retardationsspektrum abgegriffen werden. Dieses Vorgehen wurde erstmals von [Bažant & Wu, 1973] vorgeschlagen, da nur so eine *eindeutige* Parameterbestimmung möglich ist, s. a. Abschn. 5.3.2. In diesem Zusammenhang wurde der Einfluss beliebig gewählter diskreter Retardationszeiten in [Bažant, 1988] diskutiert. Je besser das kontinuierliche Retardationsspektrum durch die Diskretisierung genähert werden kann, umso genauer können auch die Materialparameter bestimmt werden und

umso besser gelingt die Approximation der Kriechfunktion. Allerdings ist eine große Anzahl an Spektralwerten vielfach mit hohem Speicher- und Rechenbedarf verbunden. Falls keinerlei Einschränkungen bezüglich dieser Ressourcen bestehen können prinzipiell mit der Verwendung vieler Spektralwerte gute Ergebnisse erzielt werden, was u. a. in [Bažant, Yu & Li, 2012] gezeigt wird.

Das kontinuierliche Spektrum kann grundsätzlich aus einer analytisch bekannten Kriechfunktion bestimmt werden. Allerdings gelingt in den meisten Fällen nur eine (kontinuierliche) Approximation des kontinuierlichen Spektrums. Mit steigender Approximationsordnung steigt auch die Genauigkeit der Näherung des kontinuierlichen Spektrums. Ein höherer Approximationsgrad führt jedoch auch zu erhöhtem Rechenaufwand. Dies bedeutet letztlich nicht zwangsläufig eine entsprechend höhere Verbesserung der Genauigkeit, was nachfolgend im Detail erläutert wird.

Neuere Untersuchungen von [Jirásek & Havlásek, 2014] zeigen, dass eine Approximation des Retardationsspektrums in niedriger Ordnung bereits zu guten Ergebnissen führt, wenn im Approximationsverfahren die Besonderheiten des zu approximierenden Kriechmodells individuell berücksichtigt werden.

Zusammenhang zwischen Kriechfunktion und kontinuierlichem Spektrum

Der zuvor angesprochene Grenzübergang zu einer KV-Reihe mit unendlich vielen Einheiten und infinitesimal benachbarten Retardationszeiten lässt sich nach [Tschoegl, 1989] bzw. [Xi & Bažant, 1993] im logarithmischen Maßstab durch das Stieltjesintegral

$$\varphi(t - t_0) = \int_{\tau=0}^{\infty} L(\tau) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right)\right) d(\ln \tau) \quad \text{und} \quad (t - t_0) \geq 0 \quad (5.23)$$

ausdrücken. Darin ist $L(\tau)$ die Funktion des kontinuierlichen Spektrums. Falls in $L(\tau)$ keine Sprünge auftreten, ist auch $\varphi(t - t_0)$ kontinuierlich und verschwindet bei $(t - t_0) = 0$. Eine unmittelbare (elastische) Nachgiebigkeit $1/E_0$ kann daher nicht durch das Spektrum abgebildet und muss ggf. als zusätzliche Konstante addiert werden, falls die zu approximierende Kriechfunktion bspw. sehr steile Anfangssteigungen aufweist, vgl. [Jirásek & Havlásek, 2014].

Besonders geeignet ist das Verfahren zur Bestimmung der Materialparameter ausgehend von einem kontinuierlichen Spektrum, wenn die analytisch bekannte Kriechfunktion durch eine Dirichlet-Reihe angenähert wird, wie sie durch die KV-Reihe gegeben ist. Dann können die Reihenglieder $1/E_\mu$ direkt bestimmt werden, sobald die Funktion des Spektrums $L(\tau)$ bekannt ist. Vorab muss jedoch eine geeignete Wahl der (diskreten) Retardationszeiten τ_μ getroffen werden.

[Xi & Bažant, 1993] zeigen, dass eine gute Approximation des kontinuierlichen Spektrums bei gegebener differenzierbarer Kriechfunktion durch die Anwendung eines von [Tschoegl, 1989] entwickelten Verfahrens erreicht werden kann. Das Verfahren selbst basiert auf der POST-WIDDER-Formel, die zur Bestimmung der inversen Laplace-Transformation einer kontinuierlichen expo-

mentiellen Funktion eingesetzt wird. Es kann gezeigt werden, dass die Reihenapproximation

$$L_k(\tau) = -\frac{(-k\tau)^k}{(k-1)!} \cdot \varphi^{(k)}(k\tau), \quad \text{und} \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.24)$$

mit:

$$\begin{array}{ll} k & \dots \text{ Ordnung der Näherung} \\ \varphi^{(k)} & \dots \text{ } k\text{-te Ableitung von } \varphi \end{array}$$

im Grenzübergang zum kontinuierlichen Spektrum

$$L(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k(\tau) \quad (5.25)$$

konvergiert. Mit Glg. (5.24) kann somit das zu einer gegebenen Kriechfunktion gehörende kontinuierliche Spektrum in einer beliebigen Ordnung approximiert werden.

Sobald die Approximation des Spektrums entwickelt wurde, kann mit der Diskretisierung des Integrals in Glg. (5.23) fortgefahren werden. Dies ist insofern nicht unproblematisch, als dass der Integrator ($\ln \tau$) ist und damit der Bereich zwischen $\tau = 0$ und $\tau = \tau_1$ ein halboffenes Intervall darstellt. Ersetzt²⁷ man $d(\ln \tau)$ durch $d\tau/\tau$ zeigt sich sofort, dass $\tau \rightarrow \infty$ wenn $\tau \rightarrow 0^+$.

Diesem Umstand kann man nach [Jirásek & Havlásek, 2014] entgegenreten: Eine Dirichlet-Reihe nähert die Kriechfunktion nur für bestimmte Belastungsdauern ($t - t_0$) gut an. Dieser Bereich wird durch die vorab gewählten diskreten Retardationszeiten τ_μ bestimmt. Die numerische Auswertung des Integrals Glg. (5.23) muss also nur für eben jene Belastungsdauern genau sein, die in derselben Größenordnung von τ_1 oder darüber liegen. Damit liegt der Term $1 - \exp(-(t - t_0)/\tau)$ für alle Belastungsdauern die von Interesse sind und auch für alle Werte $\tau \ll \tau_1$ sehr nahe neben 1.

[Jirásek & Havlásek, 2014] trennen deshalb das Integral in einen Bereich $-\infty < \ln \tau < \ln \tau_0$ und setzen dafür $1 - \exp(-t/\tau) = 1$. Damit wird das entsprechend Integral über $L(\tau)$ eine Konstante, die die sofortige Nachgiebigkeit $1/E_0$ repräsentiert – das „nullte“ Glied der KV-Reihe. Der verbleibende Teil des Integrals im Bereich $\tau_N - \tau_0$ wird über eine Mittelpunkregel numerisch ausgewertet. Die Wahl der Retardationszeiten schlagen [Jirásek & Havlásek, 2014] ausgehend vom Zusammenhang

$$\tau_\mu = 10^{\mu-1} \cdot \tau_1 \quad \text{und} \quad \mu = 2, 3, \dots, N \quad (5.26)$$

vor. Jede der Retardationszeiten stellt dabei eine Größenordnung dar, die mit dem Intervall $[\tau_\mu/\sqrt{10}, \tau_\mu\sqrt{10}]$ verknüpft ist. Um für alle Retardationszeiten τ_μ dieselben Integrationsgewichte zu erhalten wird $\tau_0 = \tau_1/\sqrt{10}$ gesetzt. Für Glg. (5.23) ergibt sich daraus als Näherung

$$\begin{aligned} \varphi(t - t_0) &= \int_{\tau=0}^{\infty} L(\tau) \left(1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right)\right) d(\ln \tau) \quad \text{und} \quad (t - t_0) \geq 0 \\ &\approx \int_{\tau=0}^{\tau_1/\sqrt{10}} L_k(\tau) d(\ln \tau) + (\ln 10) \cdot \sum_{\mu=1}^N L_k(\tau_\mu) \left(1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_\mu}\right)\right) \\ &\equiv \varphi_k(t - t_0) \end{aligned} \quad (5.27)$$

die nun einer Dirichlet-Reihenentwicklung mit den Koeffizienten

²⁷Für Stieltjesintegrale gilt bei stetig differenzierbarem Integrator h : $\int_a^b f(x) dh(x) = \int_a^b f(x)h'(x) dx$.

$$\frac{1}{E_0} = \int_{\tau=0}^{\tau_1/\sqrt{10}} L_k(\tau) d(\ln \tau) \quad (5.28)$$

$$\frac{1}{E_\mu} = (\ln 10) \cdot L_k(\tau_\mu) \quad \text{und} \quad \mu = 1, 2, \dots, N$$

entspricht. Der Anteil des Intervalls $[\tau_N, \infty)$ wird darin nicht erfasst. Aus diesem Grund ist die Näherung der Kriechfunktion sehr ungenau, sobald $(t - t_0) \gg \tau_N$.

Zusammenfassend können die gesuchten Materialparameter durch Auswertung von Glg. (5.28) bestimmt werden. Je nach gewünschter Genauigkeit ist mit $L_k(\tau) \approx L(\tau)$ ein Spektrum entsprechender Ordnung k gemäß Glg. (5.24) heranzuziehen. Die Bestimmung der Parameter für das in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] verankerte Kriechmodell erfolgt damit in Anlehnung an [Jirásek & Havlásek, 2014] mit dem zuvor vorgestellten Verfahren.

Spektrum des Kriechmodells aus EC2

In Abschn. 4.2.1 wurde das Kriechmodell aus Eurocode 2 bereits detailliert beschrieben. Da das Modell Alterungseinflüsse berücksichtigt, hängt die Kriechzahl φ zunächst von den beiden Variablen t und t_0 ab. Die in Glg. (4.1) gegebene Kriechfunktion kann jedoch allgemein auch als

$$J(t, t_0) = \varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \frac{\beta_c(t, t_0)}{0,10 + (t_0)^{0,20}} = c \cdot \frac{\beta_c(t, t_0)}{g(t_0)} \quad (5.29)$$

mit:

c	...	Konstante
$\beta_c(t, t_0)$...	Zeitfunktion nach Glg. (4.3)
$g(t_0)$...	Alterungsfunktion

dargestellt werden. Dabei wird deutlich, dass Alterungseinflüsse von der zeitlichen Entwicklung getrennt werden können. Die von t und t_0 unabhängige Konstante c fasst die in φ_0 enthaltenen Einflüsse aus Umgebungsluftfeuchte, Betonzusammensetzung etc. zusammen. Die zeitliche Entwicklung der Kriechkurve wird durch die Zeitfunktion $\beta_c(t, t_0) \rightarrow \beta_c(t - t_0)$ beschrieben. Das aufgrund der Alterung mit zunehmendem Belastungsalter zurückgehende Kriechvermögen wird getrennt durch die vom Belastungszeitpunkt abhängige Alterungsfunktion $g(t_0)$ erfasst.

Die Zeitfunktion des Kriechens und die Alterungsfunktion können somit getrennt voneinander betrachtet werden. Da die Zeitfunktion nur von der Belastungsdauer abhängt, ist es möglich die Parameter der KV-Reihe für die Zeit- bzw. i. w. S. die Komplianzfunktion zu bestimmen und sie dann entsprechend der Alterung anzupassen:

$$J(t, t_0) = \frac{c}{g(t_0)} \cdot \beta_c(t - t_0) \approx \frac{c}{g(t_0)} \cdot \underbrace{\left\{ \frac{1}{E_0} + \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{E_\mu} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_\mu}\right) \right] \right\}}_{\text{Approximation der Zeitfunktion}} \quad (5.30)$$

Die Parameter $1/E_0$ bzw. $1/E_\mu$ sind damit konstant und werden nur durch eine von t_0 abhängige Funktion skaliert, auf die die Belastungsdauer keinen Einfluss hat. Den Ausgangspunkt der Koeffizientenbestimmung ausgehend vom Retardationsspektrum bildet damit eine (nichtalternde), ausschließlich von der Belastungsdauer abhängige Zeitfunktion. Dieses Vorgehen für alternde Material heranzuziehen ist insoweit zulässig, als dass die altersbedingte Änderung der

Koeffizienten bzw. Materialparameter auf eine Skalierung der Endkriechzahl durch das Alter bei Belastungsbeginn beschränkt bleibt. Um den Alterungseinfluss entsprechend dem Kriechmodell korrekt zu erfassen, müssen die Materialparameter bei jeder Spannungsänderung aktualisiert werden, s. a. [Tacke, 2002] bzw. können tieferegehende Informationen [Bažant & Wu, 1973] entnommen werden.

Die Parameter müssen nun so bestimmt werden, dass mit der KV-Reihe das Retardationsspektrum bestmöglich genähert werden kann. Entsprechend Abschn. 5.3.1 wird zunächst das Spektrum $L(\tau)$ über die Post-Widder-Formel durch ein Spektrum der Ordnung k approximiert. Dazu ist die k -te Ableitung²⁸ der Zeitfunktion β_c zu bilden:

$$\begin{aligned} \beta_c(\chi) &= \left(\frac{\chi}{\beta_H + \chi} \right)^m = \underbrace{\chi^m}_{u(\chi)} \cdot \underbrace{(\beta_H + \chi)^{-m}}_{v(\chi)} & (5.31) \\ \rightarrow \frac{d^k}{d\chi^k} [u(\chi) \cdot v(\chi)] &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cdot u^{(k-j)}(\chi) \cdot v^{(j)}(\chi) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cdot \left(\chi^{m-(k-j)} \cdot \prod_{s=1}^{k-j} (m-s+1) \right) \cdot \left((\beta_H + \chi)^{-m-j} \cdot \prod_{s=1}^j (-m-s+1) \right) \end{aligned}$$

Der Exponent der Zeitfunktion wird in Glg. (5.31) durch die Konstante m repräsentiert; β_H ist ein Beiwert nach Glg. (4.3) und die Hilfsgröße χ ersetzt zur besseren Darstellung $(t - t_0)$.

Für $\beta_H = 600$ und $m = 0,30$ sind in Abb. 5.4 Approximationen des Retardationsspektrums in unterschiedlicher Ordnung dargestellt. In Abb. 5.4 ist deutlich zu erkennen, dass sich je

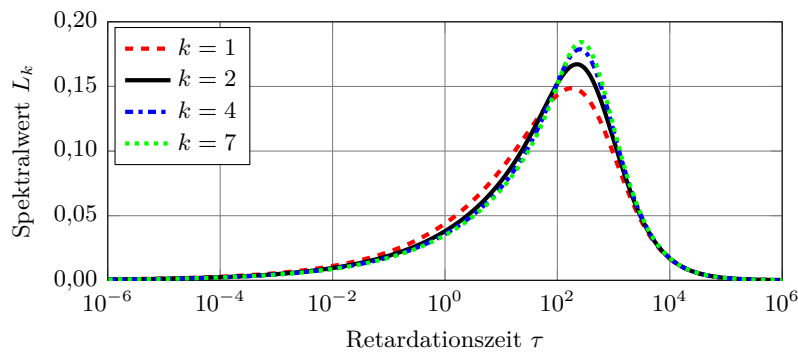


Abbildung 5.4: Approximationen unterschiedlicher Ordnung k des zum Kriechmodells aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] gehörenden Retardationsspektrums ($m = 0,30$ und $\beta_H = 600$)

nach gewählter Approximationsordnung Spektren ergeben, die mit steigender Ordnung erwartungsgemäß immer weniger voneinander abweichen. Außerdem zeigt sich, dass sich bei großen Retardationszeiten der Wert von L_k asymptotisch an 0 nähert. Dies liegt daran, dass die Zeitfunktion des Eurocode-Kriechmodells einem Grenzwert asymptotisch entgegenstrebt.

Um einen möglichst großen Zeitbereich abdecken zu können, wird festgelegt, dass die KV-Reihe aus 9 Gliedern besteht. Die kleinste Retardationszeit τ_1 wird mit 10^{-3} Tagen angenommen.

²⁸Hierzu eignet sich die oft auch als LEIBNIZSche Regel bezeichnete Produktregel. Danach ergeben sich Ableitungen k -ter Ordnung eines Produktes zweier Funktionen zu: $(uv)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u^{(j)} v^{(k-j)}$

Dies führt auf einen Maximalwert von $\tau_9 = 10^5$ Tagen, bis zu dem die Kriechfunktion noch gut angenähert werden kann.

Da die Eurocode-Kriechkurven einen vergleichsweise steilen Beginn aufweisen wird dieser zweckmäßig durch ein zusätzliches Federelement in der KV-Reihe berücksichtigt. Dieses kann einfach erzeugt werden, indem der Reihe eine „0“-te KV-Einheit hinzugefügt wird, deren Retardationszeit sehr nahe bei 0 liegt: Hier ist $\tau_0 = 10^{-20}$ Tage, woraus sich praktisch ein federähnliches Verhalten des Elements ergibt, s. a. [Bažant, 1988].

Untersuchungen von [Jirásek & Havlásek, 2014] haben gezeigt, dass die Koeffizienten (Spektralwerte) $1/E_\mu$ nur unzureichend über Glg. (5.28) bestimmt werden können. Daher wird als Verbesserung eine Zweipunkt-Gauss-Integration im Intervall um die jeweilige Retardationszeit τ_μ vorgeschlagen:

$$\frac{1}{E_\mu} = \frac{\ln 10}{2} \left(L(\tau_\mu 10^{-\sqrt{3}/6}) + L(\tau_\mu 10^{+\sqrt{3}/6}) \right) \quad (5.32)$$

Die Bestimmung des Koeffizienten $1/E_0$ scheitert allerdings, da das Integral in Glg. (5.28) nicht gelöst werden kann: Einerseits ist $\ln(\tau = 0)$ nicht definiert und andererseits wird das Retardationsspektrum selbst bzw. dessen Approximation bei $\tau = 0$ zu 0. Eine ausreichend gute Näherung kann allerdings erreicht werden, indem ausgehend von $\tau_1/\sqrt{10}$ hinreichend nahe zu 0 numerisch integriert wird. Hier erfolgt dies durch eine summierte Simpson-Integration des Grades n , wobei eigene Berechnungen gezeigt haben, dass $n = 7$ ausreichend ist:

$$\frac{1}{E_0} = \frac{\ln 10}{3} \cdot \left(L_k(\tau_0 \cdot 10^0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} L_k(\tau_0 \cdot 10^{-2j}) + L_k(\tau_0 \cdot 10^{-2n}) + 4 \sum_{j=1}^n L_k(\tau_0 \cdot 10^{-2j}) \right) \quad (5.33)$$

Mit den so ermittelten Koeffizienten kann nun die (dimensionslose) Kriechfunktion ($m = 0,30$; $\beta_H = 650$) durch die KV- bzw. Dirichlet-Reihe angenähert werden. Dies ist schematisch in Abb. 5.5 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass durch die Approximation des Retarda-

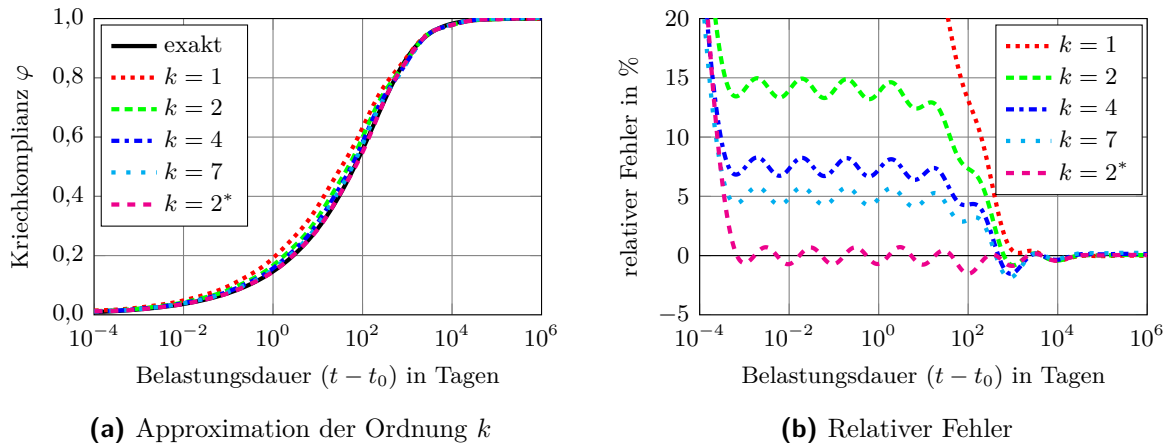


Abbildung 5.5: Verschiedene Approximationen k der Kriechfunktion durch eine Dirichlet-Reihe und relativer Fehler.

tionsspektrums ein Fehler in der Approximation der Kriechfunktion verursacht wird, der erst ab etwa 10^2 Tagen abnimmt und vernachlässigbar wird. Bis zu einer Belastungsdauer von 10^2 Tagen bewegt sich der relative Fehler zwischen 15 % ($k = 2$) und 6 % ($k = 7$). Hier kann er zwar durch ein Erhöhen der Approximationsordnung reduziert werden, bleibt aber trotzdem noch vergleichsweise groß. Die Approximationsordnung kann allerdings nicht beliebig erhöht werden, da das Berechnen der hierzu erforderlichen hochgradigen Ableitungen zu Speicherüberläufen führt²⁹. Eine Reduktion des Fehlers kann auch nicht durch Verwenden eines verbesserten Integrationsverfahrens zur Integration der Spektralwerte erzielt werden. Als Möglichkeit verbleibt noch die Anzahl der Spektralwerte bzw. der KV-Einheiten zu erhöhen, was jedoch wiederum zu erhöhtem Speicherbedarf führen kann, wie einleitend bereits vorweggenommen wurde.

Eine andere neuere Möglichkeit wird in [Jirásek & Havlásek, 2014] präsentiert. Hier wird gezeigt, dass der Fehler drastisch reduziert werden kann, wenn man an jenen (kleinen) Retardationszeiten – bei denen der Fehler am Ausgeprägtesten ist – eine Modifikation vornimmt:

Aus Abb. 5.5b ist ersichtlich, dass für sämtliche Belastungsdauern $(t - t_0) > \beta_H = 650$ bereits für ein Spektrum der Ordnung $k = 2$ der relative Fehler gering ausfällt. Wird nun eine Modifikation in Abhängigkeit von β_H bis zu diesem Wert vorgenommen, scheint die Ordnung $k = 2$ zur Approximation des Spektrums zunächst völlig ausreichend. Da dasselbe Verhalten auf sämtliche – beliebig gewählte – β_H zutrifft können die Retardationszeiten durch Multiplikation mit dem von β_H abhängigen Faktor α_μ verbessert werden. m ist wiederum der Exponent der Zeitfunktion.

$$\alpha_\mu = 1 + (0,255 + m) \cdot \exp\left(-\frac{4 \cdot \tau_\mu^2}{\beta_H^2}\right) \quad (5.34)$$

Glg. (5.34) entspricht einem nahezu konstanten Rechtsversatz der Retardationszeiten $\tau \ll \beta_H$ und Retardationszeiten $\tau > \beta_H$ bleiben fast unbeeinflusst. Die erreichte Verbesserung durch Modifikation der gewählten Retardationszeiten ist deutlich in Abb. 5.5b ersichtlich: Der auftretende relative Fehler ist geringer als 1%. Nun müssen die bestimmten Parameter nur noch entsprechend Glg. (5.30) skaliert werden, um die gewünschten Kriechkurven aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] zu erhalten.

5.3.2 Optimierungsmethoden

Ein gänzlich anderer Weg zur Bestimmung der Materialparameter der KV-Reihe stellt die Verwendung von Optimierungsmethoden („curve fitting“) dar. Optimierungsmethoden sind vor allem dann eine gute Möglichkeit die Parameter des KV-Modells zu bestimmen, falls keine Kriechfunktion im Vorhinein bekannt ist an die das Modell angepasst werden soll. Dies ist dann der Fall, wenn z. B. aus Kriechversuchen gewonnene Messdaten vorliegen. Optimierungsmethoden können aber auch herangezogen werden, um das KV-Modell an eine gegebene Kriechfunktionen anzupassen. Damit könnten u. U. bessere Näherungen erreicht werden, falls sich ein durch die Approximation des Spektrums zu großer relativer Fehler ergibt, der nicht durch zuvor beschriebene Modifikationen minimiert werden kann. Da in dieser Arbeit der Fokus auf der Verwendung eines normativen Kriechmodells liegt ist die Parameterbestimmung mittels Optimierungsmethoden jedoch von untergeordneter Bedeutung. Der Vollständigkeit halber wird nur überblicksmäßig darauf eingegangen, weiterführende Informationen sind der entsprechenden Literatur zu entnehmen.

²⁹Das Retardationsspektrum konnte bis zum Auftreten von numerischen Problemen in eigenen Untersuchungen maximal mit der Ordnung $k = 18$ approximiert werden. Der relative Fehler lag selbst dann noch bei rund 4%.

Als Optimierungsmethoden eignen sich (nichtlineare) Least-Square- oder Trust-Region-Verfahren, die in Softwarepaketen wie z. B. der Optimization Toolbox der MATLAB-Suite enthalten sind. Vor dem Fit sollten grundsätzlich die Regressionsparameter geeignet eingegrenzt werden, sodass sich diese in einem physikalisch sinnvollem Rahmen bewegen. Den Nachteil den Optimierungsmethoden mit sich bringen ist ihre Mehrdeutigkeit: Sollen sowohl Retardationszeiten als auch Elastizitätsmoduln gemeinsam durch einen linearen Least-Square-Fit bestimmt werden, scheitert dies daran, dass das Gleichungssystem überbestimmt ist – es können viele Kombinationen die ein Ergebnis gleich guter Qualität liefern gefunden werden, vgl. [Bažant, 1988]. Für eine effiziente Parameterbestimmung sollten daher die Retardationszeiten vor der Optimierung festgelegt werden, z. B. durch Anwendung von Glg. (5.26) oder wie auch in [Bažant, 1988] beschrieben.

Ist eine Kriechfunktion gegeben und kann in dieser die zeitliche Entwicklungsfunktion von der Alterungsfunktion getrennt werden, ist es in ähnlicher Weise zum im Vorhergehenden beschriebenen Prozess zielführend zunächst die Parameter der Zeitfunktion zu bestimmen und diese anschließend zu skalieren, vgl. Glg. (5.30). Um ein optimales Ergebnis zu erzielen, muss hier insbesondere auf die Weite der Stützstellen der „Zielkurve“ geachtet werden: Diese sollten sich möglichst mit der – vorab gewählten – kleinsten Retardationszeit bzw. auch mit der später beabsichtigten kleinsten Berechnungsschrittweite decken. Werden im Zuge des Fits zu große Schrittweiten gewählt, liefern die Parameter dann zwar für genau diese Schrittweite optimale Ergebnisse, bei kleineren Berechnungsschrittweiten hingegen können beträchtliche Abweichungen auftreten. Dies liegt daran, dass durch zu große Schrittweiten die kleinen Retardationszeiten im Optimierungsprozess nicht ausreichend erfasst werden können.

Alternativ kann die durch Glg. (5.7) beschriebene Kurvenschar an einer aus der Kriechfunktion „manuell“ erzeugten Kurvenschar gefittet werden. Dieses Verfahren empfiehlt sich, falls keine Trennung zwischen Alterungs- und Zeitfunktion vorgenommen werden kann.

Es ist dann überaus vorteilhaft die Materialparameter durch zeitabhängige Formfunktionen ($E_\mu = f(t_{\text{eff}}, a_\mu, b_\mu, \dots)$) zu beschreiben, die von unterschiedlichen Parametern wie z. B. Hydratationsgrad oder dem effektiven Betonalter abhängen, vgl. [Hermerschmidt, 2016b]. Die (konstanten) Retardationszeiten und die Parameter dieser Formfunktionen sind dann Regressionsparameter, welche durch den Optimierungsalgorithmus bestimmt werden. Der Einsatz von Formfunktionen ist besonders empfehlenswert, falls das KV-Modell an Versuchsdaten angepasst werden soll. Hier kann es allerdings erforderlich sein, dass sowohl Federsteifigkeit als auch Dämpfungviskosität jeder KV-Einheit durch eigene zeitabhängige Formfunktionen ($E_\mu = f_1(t_{\text{eff}}, a_{1,\mu}, b_{1,\mu}, \dots)$ bzw. $\eta_\mu = f_2(t_{\text{eff}}, a_{2,\mu}, b_{2,\mu}, \dots)$) beschrieben werden müssen. Die Regressionsparameter sind dann die Parameter der Formfunktionen f_1 und f_2 , vgl. [Hermerschmidt & Budelmann, 2014] oder [Benboudjema & Torrenti, 2006]. Allerdings steigt mit zunehmender Anzahl an Regressionsparametern auch der Berechnungsaufwand um optimale Parameter zu finden.

5.4 Berechnung von zwangbeanspruchten Systemen

Wie zuvor gezeigt, eignet sich die KV-Reihe gut um das Kriechverhalten von Beton abzubilden – die Relaxationseigenschaft fehlt ihr allerdings, s. a. Abschn. 3.3.2. Dennoch kann die KV-Reihe zur Ermittlung der viskoelastischen Spannungen in voll oder teilweise gezwängten Systemen eingesetzt werden. Die KV-Reihe stellt dann ein Hilffsystem dar, das mit den aus einem beliebigen statischen System resultierenden linear-elastischen Spannungsänderungen beaufschlagt

wird. Die KV-Reihe reagiert entsprechend der Beanspruchung mit *theoretischen viskoelastischen Kriechdehnungen*³⁰, die schließlich als zusätzlich zur äußeren Beanspruchung auftretende Einwirkung in das statische System eingetragen werden. Dies führt zu einer Änderung der Systemglobalspannung – das System relaxiert. Dieser Spannungsabbau beeinflusst wiederum die resultierende Kriechdehnung der KV-Reihe, da sich so auch die kriecherzeugende Spannung geändert hat. Abb. 5.6 veranschaulicht die prinzipielle Vorstellung schematisch am Beispiel eines teilweise gezwängten Stabes.

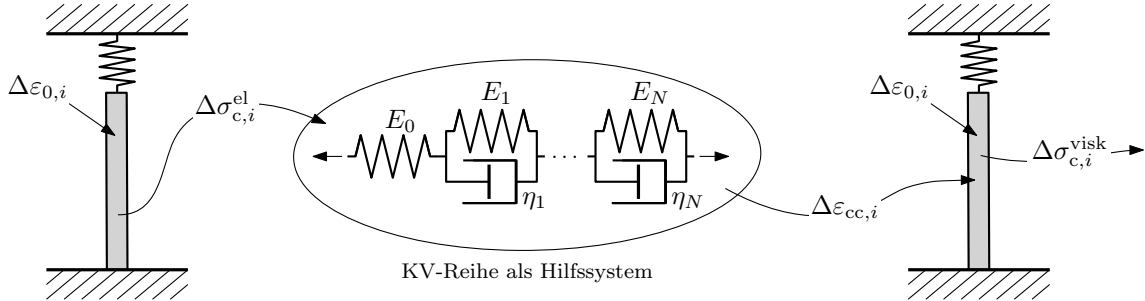


Abbildung 5.6: Teilweise gezwängter und durch $\Delta\varepsilon_{0,i}$ beanspruchter, Stab

In der zeitdiskreten Betrachtung werden die Auswirkungen von Spannungsänderungen auf das Kriechvermögen der KV-Reihe durch Aufbringen von be- bzw. entlastenden Inkrementen bestimmt. Da die Lösung der KV-Reihe der strikten Anwendung des Boltzmann-Superpositionsprinzip entspricht werden ursprünglich eingeprägte belastende Inkremente mit später auftretenden entlastenden Inkrementen überlagert. Dies führt entsprechend zur Reduktion des resultierenden Kriechvermögens.

Spannungsinkremente mit demselben Vorzeichen der Globalspannung wirken belastend und Inkremente mit entgegengesetztem Vorzeichen entlastend. Belastende Inkremente können nur durch eine Änderung der äußeren Beanspruchung hervorgerufen werden. Entlastende Inkremente können ebenso von außen induziert werden oder aber aus Relaxation entstehen. Letzteres tritt auch dann ein, wenn das Spannungsinkrement aus äußerer Belastung kleiner als das durch Relaxation verursachte ist und die Relaxation überwiegt.

Üblicherweise wird in der „klassischen“ Herangehensweise nicht explizit zwischen be- und entlastenden Inkrementen unterschieden und die Kriechdehnung ausgehend von einem „wirksamen Spannungsinkrement“ ermittelt. Das wirksame Inkrement ergibt sich aus dem im aktuellen Zeitschritt wirkenden elastischen Inkrement abzüglich der zum Ende des vorhergehenden Zeitschritts bekannten Spannungsänderung aufgrund von Viskoelastizität:

$$\Delta\sigma_{c,i}^{\text{wirks}} = \Delta\sigma_{c,i}^{\text{el}} - \Delta\sigma_{c,i}^{\text{visk}} \quad (5.35)$$

Um die Unterscheidung von Druck und Zugkriechen zu ermöglichen, werden in der programmier-technischen Umsetzung für das Materialmodell in Abhängigkeit des Globalspannungszustands (Druck oder Zug) unterschiedliche Parametersets zur Ermittlung der Kriechdehnung herangezogen. Der Wechsel zum jeweils anderen Parameterset erfolgt dann, wenn die Systemglobalspannung einen Nulldurchgang erfährt. Bei einem Nulldurchgang wird analog zu [Schlicke, 2014] unterstellt, dass die Belastungsgeschichte der KV-Reihe von Neuem beginnt. Dies erfordert ein

³⁰Weil bei (teilweise) gezwängten Systemen definitionsgemäß kein „reines“ Kriechen auftreten kann, werden die in der KV-Reihe entstehenden Dehnungen hier als „theoretisch viskoelastische Kriechdehnungen“ bezeichnet.

Zurücksetzen der inneren Variablen, da die Kriechdehnung ansonsten fehlerhaft berechnet wird, weil unzutreffende Anfangsbedingungen verwendet werden.

Ein Nulldurchgang ergibt sich, wenn die Summe aus der Systemglobalspannung $\sigma_{c,tot,i-1}$ am Ende des vorhergehenden Zeitschrittes und einem neuen elastischen Spannungszinkrement $\Delta\sigma_{c,i}^{el}$ einen Vorzeichenwechsel von $\sigma_{c,tot,i}$ bewirkt. Die Spannungseinwirkung auf die KV-Reihe ist dann das elastische Inkrement abzüglich der vor dem Nulldurchgang im System verbliebenen Systemglobalspannung.

Abb. 5.7a zeigt schematisch das Vorgehen bei zeitdiskreten Berechnungen wobei ein Zeitschritt im Detail in Abb. 5.7b dargestellt ist, um die verwendeten Variablen zu veranschaulichen.

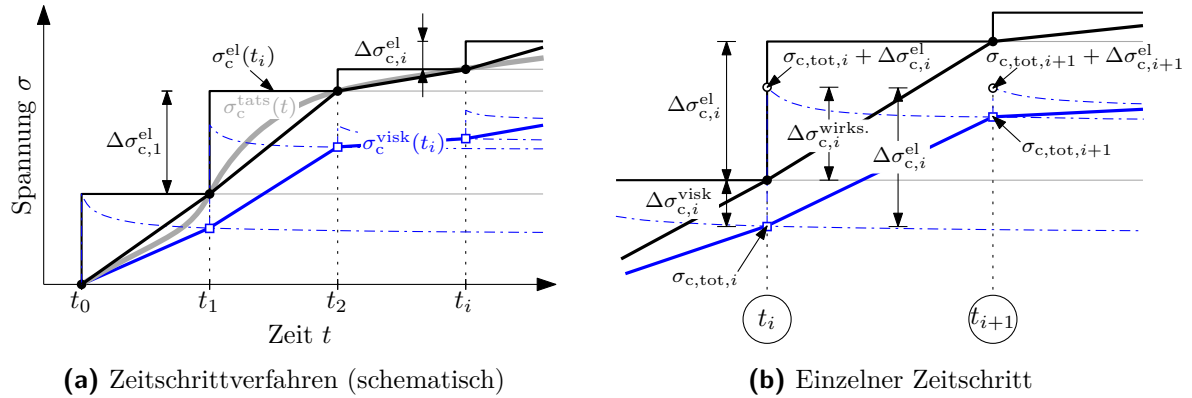


Abbildung 5.7: Zeitschrittverfahren: elastische und viskoelastische Spannungsanteile

5.5 Wirkungsweise des Modells

In diesem Abschnitt wird die Wirkungsweise der KV-Reihe demonstriert. Zuvor werden die Materialparameter mit dem in Abschn. 5.3.1 beschriebenen Verfahren an das Eurocode-Kriechmodell für definierte Umgebungsbedingungen angepasst. Damit wird im Folgenden das grundsätzliche Verhalten der KV-Reihe in ihrer „klassischen“ Form gezeigt.

5.5.1 Approximierte Kriechkurve

Für einen Beton der Klasse C 35/45 ergibt sich bei einer wirksamen Bauteildicke $h_0 = 125$ mm, einer Umgebungsluftfeuchte von $RH = 60\%$ und einem Erstbelastungsalter von $t_0 = 1$ d aus dem Formelapparat des Eurocode-Kriechmodells die theoretische Endkriechzahl $\varphi_0 \approx 4,16$. Der Beiwert β_H wird damit $\beta_H \approx 438$ d. Der Exponent m ist entsprechend der normativen Vorgabe mit 0,30 festgesetzt. Zunächst werden die Koeffizienten der KV-Reihe ausgehend vom Retardationsspektrum unter Berücksichtigung der zeitlichen Verlauf des Kriechens kennzeichnenden Parameter β_H bzw. m ermittelt. Um einen möglichst großen Zeitbereich abdecken zu können, werden wie in Abschn. 5.3.1 beschrieben, 10 KV-Einheiten verwendet.

Die Retardationszeit der sich quasi-elastisch verhaltenden KV-Einheit ist mit $\tau_0 = 10^{-20}$ d festgelegt, $\tau_1 = 10^{-3}$ d und τ_μ ($\mu = 2 \dots 9$) werden mit Glg. (5.26) bestimmt. Die mit φ_0 skalierten Parameter sind als E_μ^* in Tab. 5.1 wiedergegeben. α_μ gibt die Korrekturfaktoren der Retardationszeiten nach Glg. (5.34) an.

Tabelle 5.1: Parameter der KV-Reihe für $\beta_H \approx 438$ und $\varphi_0 \approx 4,16$ bzw. $m = 0,30$

μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1/E_\mu$	0,0126	0,0125	0,025	0,050	0,010	0,204	0,354	0,206	0,033	0,004
E_μ	79,261	79,733	39,960	20,021	10,002	4,913	2,825	4,854	30,381	286,676
E_μ^*	19,053	19,167	9,601	4,813	2,404	1,181	0,679	1,167	7,303	68,913
τ_μ	10^{-20}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
α_μ	1,555	1,555	1,555	1,555	1,555	1,554	1,451	1,000	1,000	1,000

Abb. 5.8 zeigt die Qualität der Approximation der Kriechzahlentwicklung nach Eurocode 2 durch die KV-Reihe. Die exakte Funktion ist in Abb. 5.8a im Hintergrund als dicke schwarze Linie geplottet, die Approximation ist die grün strichlierte Linie. Sie deckt sich gut mit der exakten Kurve.

In Abb. 5.8b sind die Beiträge jeder einzelnen KV-Einheit getrennt voneinander dargestellt, wobei jede Farbe einer KV-Einheit entspricht. Abb. 5.8a zeigt die nacheinander summierten Beiträge der KV-Einheiten, sodass der Beitrag einer einzelnen Einheit an der Gesamtapproximation deutlich wird. Der Einfluss der Retardationszeit ist ebenfalls gut zu erkennen: Je

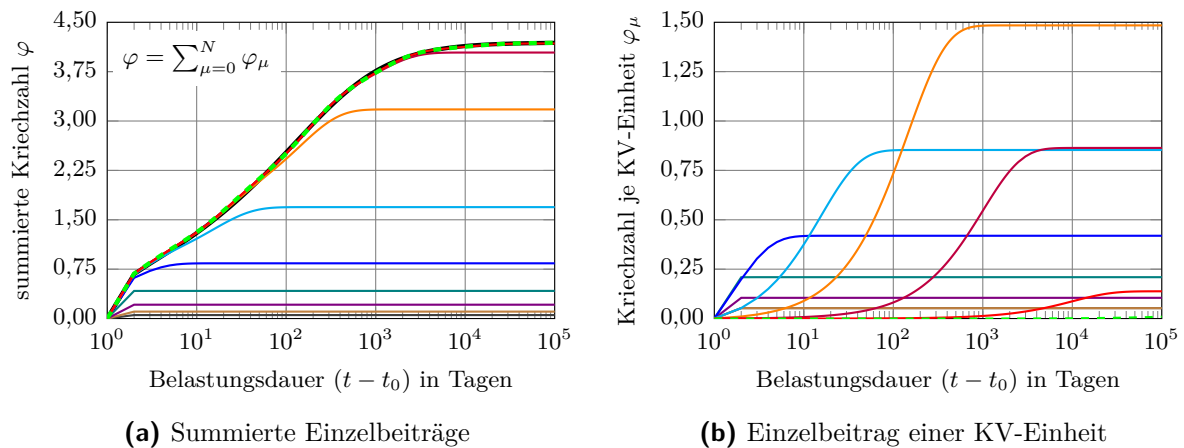


Abbildung 5.8: Exemplarische Entwicklung der Kriechzahl nach [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] sowie Einzelbeiträge der KV-Einheiten und deren Summe

geringer sie ist, umso früher springen die Einheiten an bzw. umso früher erreichen sie auch ihren Endwert. Je größer die Retardationszeit ist, umso langsamer beginnen die Einheiten zu arbeiten bzw. umso länger dauert auch der Prozess bis zum Erreichen des Endwertes an.

5.5.2 Beispiele zur Verdeutlichung der Arbeitsweise des Modells

Nachfolgend wird das Verhalten des Modells anhand einfacher ein- und mehrstufiger Kriech- und Relaxationsprobleme demonstriert. Der Einfachheit halber wird dabei von einem bereits erhärteten Beton der Klasse C 35/45 ausgegangen, der (konstante) Elastizitätsmodul wird für diesen Beton mit $34\,100\text{ N/mm}^2$ festgelegt.

Einstufiger Kriechversuch

Im Grunde genommen kann die Arbeitsweise der KV-Reihe als „zweistufig“ verstanden werden: Durch die Kenntnis der entsprechenden inneren Variablen d. h. der Anfangswerte des zuletzt berechneten Zeitschritts, kann auf die bis zu diesem Zeitpunkt auf das Modell wirkende Spannungsgeschichte „aufgesetzt“ werden. Erfolgt keinerlei Änderung der Anfangswerte im aktuellen Zeitschritt, z. B. durch das Fehlen einer entsprechenden Spannungsänderung im System, so verhält sich das Modell so, als würde der zuletzt erreichte Zustand eingepreßt worden sein. Dies ist in Abb. 5.9 dargestellt, worin ein einstufiger Kriechversuch gezeigt wird.

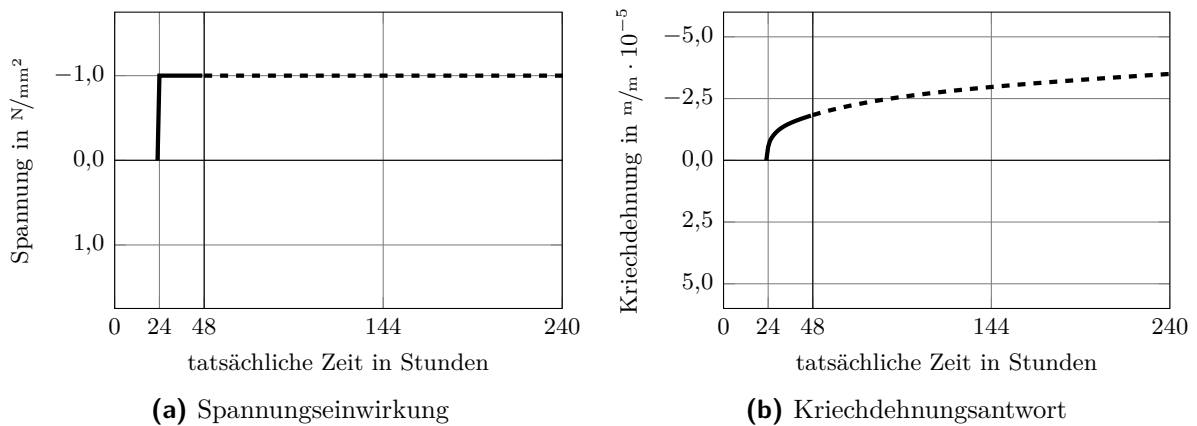


Abbildung 5.9: Einstufenkriechversuch: „vollständige“ Lösung über den gesamten Zeitbereich $t - t_0$ und ausgehend von einem definierten Zeitpunkt t^* durch Anfangsbedingungen

Zum Zeitpunkt $t_0 = 24$ h wird auf die zunächst spannungsfreie KV-Reihe ein Spannungsincrement der Größe 1 N/mm^2 aufgebracht (Lastwechseldauer $\Delta t_{\text{LW}} = 1$ h), s. Abb. 5.9a. D. h. die Anfangsbedingung für Glg. (5.19) ist durch $\dot{\varepsilon}_\mu(t = t_0) = 0$ gegeben. Danach wird die Spannung konstant gehalten. Bei $t^* = 48$ h erfolgt keine Spannungsänderung und die Kriechdehnung wird aus der Lösung der Differentialgleichung mit den für diesen Zeitpunkt bekannten Anfangsbedingungen $\dot{\varepsilon}(t = t^*) = \widetilde{\varepsilon}_\mu$ bestimmt.

In Abb. 5.9b ist die reine Kriechdehnungsantwort dargestellt. Daran ist deutlich zu erkennen, dass das Modell mit einer Dehnungszunahme reagiert, sobald es belastet wird. Die Zunahme der Dehnung wird sukzessive geringer – die Gesamtkriechdehnung strebt schließlich bei $(t - t_0) \rightarrow \infty$ dem Endwert entgegen. Die direkt aus bekannten Anfangswerten ab einem beliebigen Zeitpunkt bestimmte Lösung ist also äquivalent zur „vollständigen“ Lösung ab dem Erstbelastungszeitpunkt³¹.

Mehrstufiger Kriechversuch

Abb. 5.10 zeigt einen zweistufigen Kriechversuch mit und ohne Berücksichtigung der Alterung des Betons. Das zuvor spannungsfreie System wird bei $t_0 = 24$ h mit 1 N/mm^2 belastet ($\Delta t_{\text{LW}0} = 1$ h). Diese Spannung wird bei $t_1 = 48$ h um $\Delta\sigma = 0,50 \text{ N/mm}^2$ auf $1,50 \text{ N/mm}^2$

³¹Für einstufige Beanspruchungen entspricht im Übrigen die Lösung der DGL im Grenzfall einer schlagartig ($\Delta t \rightarrow \infty$) aufgebrachten Spannungseinwirkung ($\varepsilon_\mu(t = t_0) = 0$ bzw. $\dot{\varepsilon}_\mu(t = t_0) = \Delta\sigma/\eta_\mu(t_0)$) – und nur dann – der Lösung Glg. (5.1), vgl. [Bažant & Wu, 1973].

erhöht ($\Delta t_{LW1} = 1 \text{ h}$) und bis $t_2 = 144 \text{ h}$ konstant gehalten. Dann werden drei Zustände betrachtet:

- keine Spannungsänderung (Weiterkriechen)
- Teilentlastung um 48 %
- vollständige Entlastung

Die unterschiedlichen Strichtypen markieren zusammengehörige Ergebnisse. Die Einzelanteile die der Superposition zugrundeliegen sind im selben Strichtyp in dünnerer Strichstärke gezeichnet.

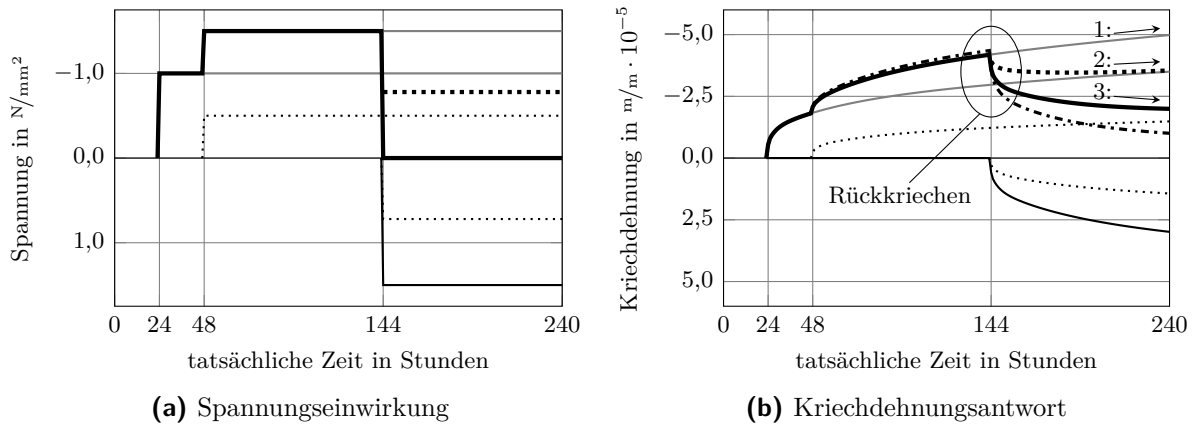


Abbildung 5.10: Mehrstufenkriechversuch (Belastung) und Einfluss der Alterung

Erwartungsgemäß führt die Lasterhöhung bei t_1 zu einer Zunahme der Kriechdehnung. Der Alterungseinfluss (dicke schwarze Linie) ist als Rückgang des Kriechvermögens gegenüber einem nichtalternden (dicke strichpunktierte Linie) Material deutlich zu erkennen. Wird die KV-Reihe entlastet, also ein zusätzliches mit umgekehrtem Vorzeichen wirkendes Inkrement aufgebracht, können entsprechend der Größe des entlastenden Inkrements drei Fälle unterschieden werden:

- Fall 1: reines Weiterkriechen
- Fall 2: zunächst Rückkriechen, dann (vermindertes) Weiterkriechen
- Fall 3: vollständiges Rückkriechen

Ändert sich die auf die KV-Reihe wirkende Spannung nicht, so erfolgt Weiterkriechen. Wird das System teilentlastet, so kommt es zunächst zum Rückkriechen, welches nach einer bestimmten Zeit zu einem verminderten Weiterkriechen führt. Die Größe und Ausprägtheit des „Rückkriech-Tales“ nach Teilentlastung wird maßgeblich von der Größe des durch das entlastende Spannungsinkrement hervorgerufenen Kriechvermögens und wegen der Alterung vom Entlastungszeitpunkt bestimmt.

Dies soll die schematische Darstellung in Abb. 5.11 verdeutlichen. Darin ist ein Kriechdehnungsverlauf $\varepsilon(t)_{cc,F}$ dargestellt, der sich aus einer beliebigen Spannungsgeschichte $F = \sum_i \Delta\sigma_i$ ergibt. Zum Entlastungszeitpunkt t_E bewirkt ein Spannungsinkrement beliebiger Größe zunächst dessen eigenen Kriechdehnungsverlauf $\varepsilon(t)_{cc}^{entl,i}$, der mit $\varepsilon(t)_{cc,F}$ superponiert wird und so das weitere Gesamtverhalten beeinflusst. Dementsprechend kann in der zeitinkrementellen Betrachtung die zuvor beschriebene Fallunterscheidung in Referenz zu Abb. 5.11 präzisiert werden:

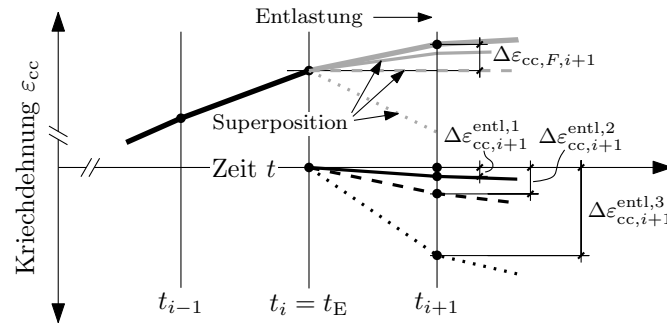


Abbildung 5.11: Superposition – Entlastung, schematische Darstellung

- Bei kleinen ($|\Delta\varepsilon_{cc}^{entl}| < |\Delta\varepsilon_{cc,F}|$) entlastenden Inkrementen tritt zunächst kein Tal auf. Vielmehr fällt nur das Gesamtkriechvermögen reduziert aus, solange das aus der Entlastung folgende Kriechinkrement kleiner ($\Delta\varepsilon_{cc,i+1}^{entl,1}$) als das aus der Beanspruchungsgeschichte resultierende Inkrement ist ($\Delta\varepsilon_{cc,F,i+1}$).

Größere entlastende Inkremente können im Grenzfall zunächst zu einer horizontalen Tangente führen, bevor vermindertes Weiterkriechen eintritt ($\Delta\varepsilon_{cc,i}^{entl,2}$).

- Große Inkremente ($|\Delta\varepsilon_{cc}^{entl}| > |\Delta\varepsilon_{cc,F}|$) führen zu Rückkriechen und bilden starke Täler aus. Dies ist bei $\Delta\varepsilon_{cc,i+1}^{entl,3}$ der Fall und stets mit einem Vorzeichenwechsel des Gesamtkriechdehnungsincrementes verbunden.

Im Fall der Vollentlastung hält – keine weitere äußere Spannungsänderung vorausgesetzt – das Rückkriechen dann bis $t \rightarrow \infty$ an³² und es schließlich verebbt. Anzumerken ist, dass bei nichtalternden Materialien die Kriechdehnung vollständig reversibel ist. Bei alternden Materialien bleibt hingegen stets eine Restdehnung in der KV-Reihe erhalten.

Einstufiger Relaxationsversuch

Die Relaxationsversuche werden entsprechend dem in Abb. 5.6 skizzierten Schema berechnet: Die KV-Reihe wird mit den elastischen Spannungsänderungen beaufschlagt, welche Kriechdehnungen (theoretische viskoelastische Dehnungen) liefert, die ins Ursprungssystem als zusätzliche Belastung eingetragen werden. Abb. 5.12 zeigt einen einstufigen Relaxationsversuch. Das zuvor spannungsfreie System wird bei $t_0 = 24$ h mit einer Verkürzung von $\Delta\ell = 0,0293$ mm ($\Delta t_{LW0} = 1$ h) belastet. Dies entspricht im betrachteten Einheitssystem der Stauchung $\Delta\varepsilon = -2,93$ m/m $\cdot 10^{-5}$.

Abb. 5.12a zeigt die resultierende Spannungsantwort, wobei die dargestellten Spannungswerte immer den Wert am Ende eines Zeitschrittes markieren. Deutlich zu erkennen ist, dass die Spannung mit der Zeit abnimmt und gegen einen Endwert strebt. Mit dem Spannungsrückgang geht auch die Größe des Spannungsabbaus je Zeitschritt – entsprechend dem Rückgang des viskoelastischen Potentials zurück.

³²Bei strikter Anwendung des Superpositionsprinzips ist es mitunter möglich, dass selbst bei Vollentlastung nach anfänglichem Rückkriechen (vermindertes) Weiterkriechen auftritt. Dies ist der Fall, falls in der Superposition divergierende Kriechkurven verwendet werden, s.a. Abschn. 2.3.

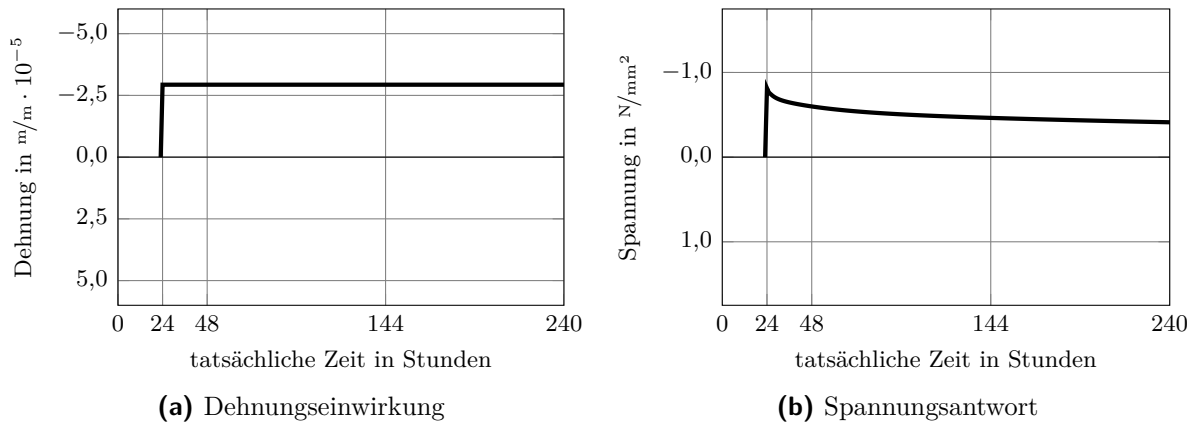


Abbildung 5.12: Einstufenrelaxationsversuch

Die auf Spannungen umgerechnete Dehnungseinwirkung entspricht der Einwirkung des einstufigen Kriechversuches, s. Abb. 5.9. Daher können die Dehnungen der KV-Reihe beider Versuche miteinander verglichen werden. In Abb. 5.13 sind diese gegenübergestellt.

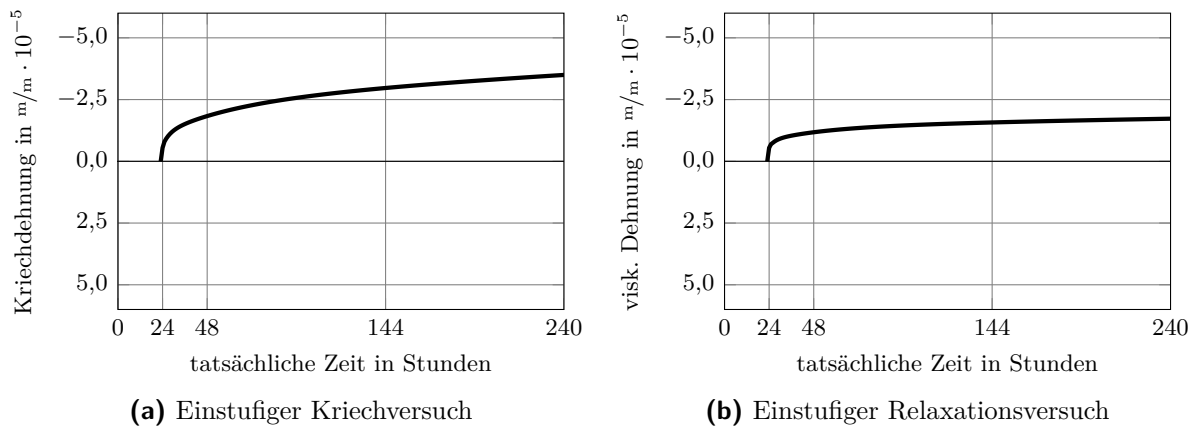


Abbildung 5.13: Vergleich der resultierenden Dehnungen der KV-Reihe in einem einstufigen Kriech- bzw. Relaxationsversuch

Dabei ist in Abb. 5.13 deutlich zu erkennen, dass die zum mehrstufigen Relaxationsversuch gehörende theoretische viskoelastische Dehnung (Kriechdehnung der KV-Reihe) geringer und deutlich flacher ausfällt. Dies liegt an der steten Reduktion des Kriechvermögens infolge von Relaxation.

Mehrstufiger Relaxationsversuch

Abb. 5.14 zeigt einen mehrstufigen Relaxationsversuch. Das zuvor spannungsfreie System wird bei $t_0 = 24$ h mit einer Stauchung von $\Delta\varepsilon = -2,93 \text{ m/m} \cdot 10^{-5}$ ($\Delta t_{LW0} = 1$ h) belastet, die bei $t_1 = 48$ h um $\Delta\varepsilon = 1,47 \text{ m/m} \cdot 10^{-5}$ auf $\varepsilon = 4,40 \text{ m/m} \cdot 10^{-5}$ erhöht und bis t_2 konstant gehalten wird. Anschließend wird die Stauchung zurückgenommen, wobei die Größe der Rücknahme

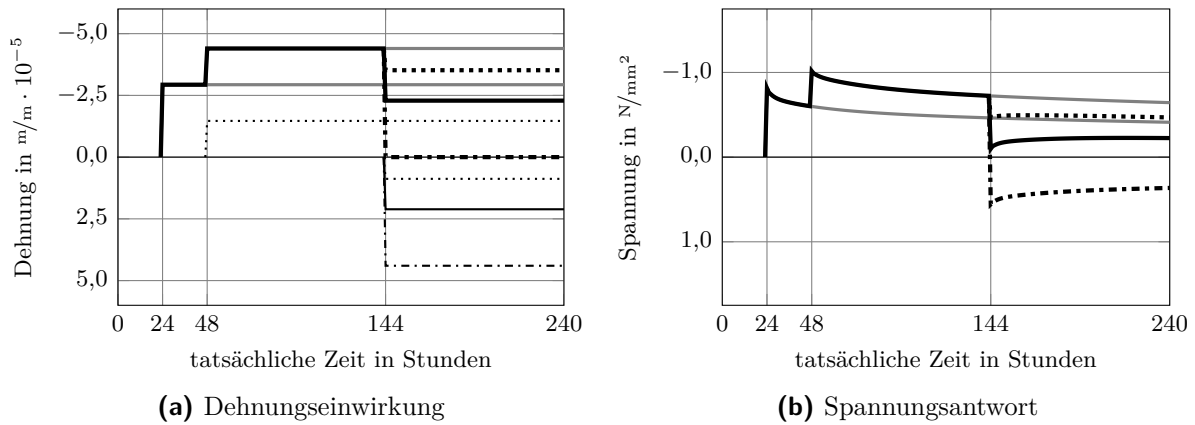


Abbildung 5.14: Mehrstufenrelaxation (Belastung – Entlastung)

unterschiedlich ist. Die Strichtypen der resultierenden Spannungen korrespondieren mit der entsprechenden Dehnungseinwirkung.

Abb. 5.14b zeigt die resultierende Spannungsantwort, wobei die dargestellten Spannungswerte immer den Wert am Ende eines Zeitschrittes markieren. Deutlich zu erkennen ist die mit der Dehnungsänderung einhergehende unmittelbare Spannungsänderung. Bei t_1 wird damit das viskoelastische Potential erhöht, wodurch zunächst das System stärker zur Relaxation angeregt wird. Erfolgt bei t_2 keine Änderung an der äußeren Dehnungseinwirkung relaxiert das System so weiter, wie es bei t_1 begonnen hat. Wird die äußere Verformungseinwirkung vollständig zurückgenommen, ergibt sich aufgrund der damit verbundenen Spannungsänderung ein Nulldurchgang im System und die Relaxation beginnt auf der Gegenseite erneut.

Ein interessantes Verhalten zeigt sich hingegen bei den beiden teilweisen Dehnungsrücknahmen: Unmittelbar nach der Entlastung steigt die Systemglobalspannung zunächst wieder an, s. Abb. 5.14b, um dann wieder abzubauen und sich einem Endwert zu nähern. Dieses Verhalten ist auf das in der KV-Reihe auftretende Rückkriechen zurückzuführen, das bei größeren entlastenden Inkrementen hervorgerufen wird, vgl. dazu Abb. 5.10. Wie in Abschn. 5.5.2 erläutert, kommt es so zu einem Vorzeichenwechsel des Kriechdehnungsincrement. Wird dieses ins System eingetragen, bewirkt das eine Spannungszunahme nach Entlastung. Ist das entlastende Inkrement klein (punktierter Linie), ergibt sich der Spannungsabbau nach anfänglichem Spannungsanstieg aus einem erneuten Vorzeichenwechsel des Kriechdehnungsincrement, da nach dem anfänglichen „Rückkriech-Tal“ vermindertes Weiterkriechen in der KV-Reihe auftritt, vgl. Abb. 5.10.

Zur Verdeutlichung des beschriebenen Verhaltens ist der zu Abb. 5.14b gehörende Kriechdehnungsverlauf in Abb. 5.15a dargestellt. Da die auf Spannungen umgerechnete Dehnungseinwirkung aus Abb. 5.14 der Einwirkung aus Abb. 5.10 entspricht, können auch hier die resultierenden Kriechdehnungen miteinander verglichen werden. In Abb. 5.15 sind die Verläufe für die Teilentlastung um 48 % der Einwirkung gegenübergestellt. Erwartungsgemäß fällt die Kriechdehnung des Relaxationsversuchs geringer aus³³.

³³Die Einwirkungen, die den Rückgang des viskoelastischen Potentials aufgrund von reiner Relaxation am Hilfsystem verursachen können nie so groß werden, als dass diese Rückkriechen hervorrufen würden. – Das in Abb. 5.15b beobachtbare Rückkriechen kann im Berechnungsmodell nur durch äußere Einwirkungsänderungen induziert werden.

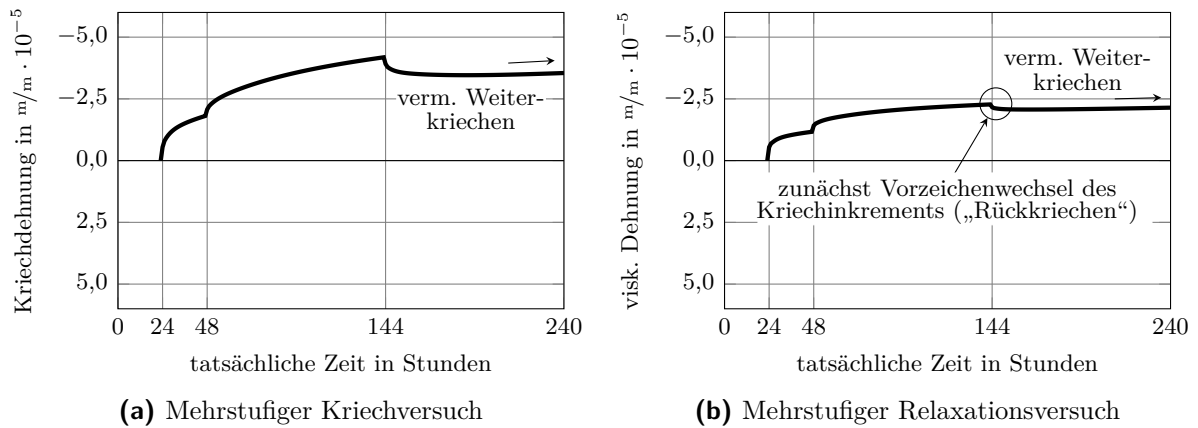


Abbildung 5.15: Vergleich der resultierenden Kriechdehnungen in der KV-Reihe bei einem mehrstufigen Kriech- bzw. Relaxationsversuch (Teilentlastung um 48 %)

5.5.3 Rückrelaxation

Aus den zuvor modellhaft gezeigten mehrstufigen Relaxationsversuchen zeigt sich ein Spannungsanstieg, sobald das System entlastet wird. Dieser Spannungsanstieg resultiert aus dem in der KV-Reihe entstehenden Rückkriechen, das sich aufgrund der strikten Anwendung des Superpositionsprinzips einstellt. Dieser – manchmal auch als „Rückrelaxation“ bezeichnete – Spannungsanstieg konnte vereinzelt bei tatsächlich durchgeführten Relaxationsversuchen beobachtet werden, vgl. Abschn. 2.5.2. Bisher wurde nicht diskutiert, ob dieser Spannungsanstieg tatsächlich einer „Rückrelaxationseigenschaft“ entspringt oder ob es sich um die gemessene Antwort eines durch nahezu schlagartige Einwirkungsänderung verursachten Eigenspannungszustand handeln könnte. Versuche, in denen die Spannungsgeschichte sukzessive verändert wurde zeigen jedoch, dass keine Spannungsänderung mehr auftritt, sobald das System spannungsfrei ist, vgl. Abschn. 2.5.2. Diese Beobachtung lässt sich allerdings durch die strikte Anwendung des Superpositionsprinzips nicht reproduzieren. Zudem wird vermutet, dass der (rechnerische) Wiederanstieg von Spannungen in einem zuvor spannungsfrei gemachten System dem Prinzip des Energieminimums widerspricht. Danach würde das System durch den Spannungsaufbau sich „selbst“ belasten was energetisch nicht möglich ist. Dies führt zur Hypothese, dass das Superpositionsprinzip bei (erhärtenden) Betonbauteilen unter Zwangbeanspruchungen offensichtlich nicht ungeingeschränkt gültig sein kann.

Wie bereits in Abschn. 4.4 erwähnt wird deshalb von der strikten Anwendung des Superpositionsprinzips bei Entlastungsvorgängen abgewichen. Hierzu wird die Idee von [Schlicke, 2014] aufgegriffen und die Annahme getroffen, dass ein entlastendes Inkrement ausschließlich zu einer Reduktion des vorhandenen viskoelastischen Potentials führt und kein eigenes Kriechvermögen mit sich bringt: Danach ist ein druckbeanspruchter Körper nach einer Teilentlastung nach wie vor einer Druckbeanspruchung ausgesetzt, wenngleich diese nun geringer ist als zuvor. Im Material selbst wird jedenfalls keine Zugbeanspruchung hervorgerufen wie dies nach strikter Anwendung des Superpositionsprinzips der Fall wäre. Relaxationsprobleme werden somit an den Globalspannungszustand gekoppelt, und eine widerspruchsfreie und im Einklang mit dem Prinzip des Energieminimums stehende Erfassung des Spannungszustandes wird ermöglicht. In Abschn. 4.3.4 bzw. [Knoppik-Wróbel & Schlicke, 2016] und [Schlicke, 2014] wurde gezeigt, dass mit dieser Annahme Spannungszustände realistisch erfasst werden können. Aus diesem Grund

wird das in diesem Abschnitt entwickelte Materialmodell basierend auf diesen Annahmen modifiziert.

5.6 Modifikation des Modells

Zusammenfassend muss am bisher entwickelte Modell eine Fallunterscheidung im Hinblick auf die Beanspruchungsrichtung der Inkremente vorgenommen werden. Dabei

- unterliegen alle Beanspruchungsinkremente in Globalspannungsrichtung (Druck-Druck, Zug-Zug) dem Superpositionsprinzip, wogegen
- Beanspruchungsinkremente die der Globalspannungsrichtung entgegengesetzt (Druck-Zug, Zug-Druck) sind zu einer Reduktion des vorhandenen viskoelastischen Potentials führen.

Um einen Ansatz zur Reduktion des viskoelastischen Potentials entwickeln zu können, wird zunächst das Verhalten einer einzelnen KV-Einheit im Detail betrachtet.

5.6.1 Eigenschaften einer Kelvin-Einheit

Abb. 5.16 zeigt die einwirkende Spannung sowie die resultierende Dehnungsantwort für einen mehrstufigen Kriechversuch an einer einzelnen KV-Einheit. Die (konstanten!) Parameter der KV-Einheit wurden beliebig gewählt, da das grundsätzliche Verhalten unabhängig von der Parameterwahl ist. Mit $E = 0,674 [E]$ und $\tau = 100 [t]$ ergibt sich $\eta = \tau \cdot E = 100 \cdot 0,674 = 67,4 [\eta]$ und damit entsprechen die hier gewählten Parameter dem 6. Glied der KV-Reihe aus Abschn. 5.5.1. Die KV-Einheit wird nun bei $t_0 = 1 \text{ d}$ mit einer Einheitsspannung belastet. Bei $t_1 = 168 \text{ d}$ folgt ein Lastwechsel mit unterschiedlich großem entlastenden Inkrement $\Delta\sigma_{\text{entl}}$. Dies ist durch verschiedene Strichtypen gekennzeichnet.

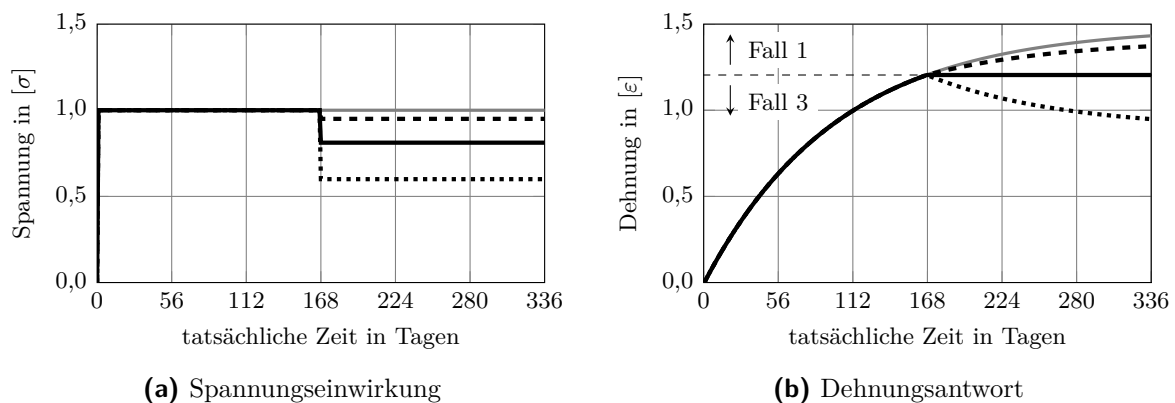


Abbildung 5.16: Einzelnes KV-Element unter verschiedenen Spannungseinwirkungen

In Abhängigkeit der Größe des entlastenden Inkrements können drei Zustände unterschieden werden, die an der KV-Einheit auftreten können:

- Verminderung des Weiterkriechens
- Rückkriechen

- kein Weiterkriechen (Kriechstopp)

Ähnlich zu dem in Abschn. 5.5.2 beschriebenen Verhalten der gesamten KV-Reihe gibt es auch bei einer einzelnen KV-Einheit einen Zustand, der nach Teilentlastung zu vermindertem Weiterkriechen führt. Dieser Zustand tritt unmittelbar ein und äußert sich durch einen Knick in der Dehnungsantwort. Daneben existiert ein Zustand bei dem die Einheit Rückkriechen zeigt. Hierbei kann es allerdings zu keinem Wiederanstieg der Kriechdehnung kommen, da die aus einer einzelnen KV-Einheit (eine konstante Retardationszeit ist hierbei Voraussetzung) gewonnenen Kriechdehnungsverläufe nicht divergent sind. Außerdem gibt es in einer KV-Einheit einen eindeutig definierten Zustand, bei dem das Weiterkriechen stoppt und keine Kriechdehnungen mehr entstehen.

Vermindertes Weiterkriechen tritt in einer einzelnen KV-Einheit nur für jene entlastenden Inkremente ein, die kleiner als das zum Kriechstopp führende Inkrement sind. Inkremente, die größer als ein zum Kriechstopp führendes Inkrement sind, führen zum Rückkriechen. Bei nichtalternden Materialien führt eine Vollentlastung zum kompletten Rückgang der Dehnung bei $t \rightarrow \infty$; bei alternden Materialien wird bei $t \rightarrow \infty$ asymptotisch ein entsprechender Wert erreicht.

Weil die DGL für eine KV-Einheit auf dem Superpositionsprinzip basiert, tritt der Zustand des Kriechstopps dann ein, wenn $\Delta\sigma_{\text{entl}}$ jene Größe erreicht die genau die Kriechdehnung hervorruft, die dem ab t_1 noch vorhandenen Anteil der ab t_0 eingepprägten Kriechverformung entspricht. Sie wird hier als $\Delta\sigma_{\text{max,entl}}$ bezeichnet.

Das durch $\Delta\sigma_{\text{max,entl}}$ hervorgerufene Kriechverhalten entspricht somit genau dem (unverminderten) Weiterkriechen der KV-Einheit ab t_1 . $\Delta\sigma_{\text{max,entl}}$ kann durch Nullsetzen von $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ bzw. von Glg. (5.18) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \dot{\varepsilon} &= \left[1 - \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}\Delta t\right) \right] \frac{1}{\bar{E}} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} + \tilde{\varepsilon} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}\Delta t\right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \rightarrow \Delta\sigma_{\text{max,entl}} = \Delta\sigma &= -\tilde{\varepsilon} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}\Delta t\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{\eta}}\Delta t\right)} \cdot \bar{E}\Delta t \end{aligned} \quad (5.36)$$

Wird in einem Zeitschritt das Spannungsinkrement $\Delta\sigma_{\text{max,entl}}$ auf die KV-Einheit gebracht, stoppt mit Zeitschrittende das Weiterkriechen. Dieser Zustand bleibt solange bestehen, solange keine weiteren Inkremente auftreten.

Demgegenüber kann eine Modifikation der inneren Variablen $\tilde{\varepsilon}$ und $\tilde{\varepsilon}$ in Glg. (5.19) bzw. Glg. (5.18) ebenfalls zur Reduktion des Weiterkriechvermögens bzw. zu dessen Unterbindung herangezogen werden: Die Multiplikation der inneren Variablen mit einem Faktor $0 \leq k_{\text{AB}} \leq 1$ führt zu unmodifiziertem Weiterkriechen ($k_{\text{AB}} = 1$) bzw. dem Stoppen ($k_{\text{AB}} = 0$) des Kriechens der Spannungsgeschichte direkt zum Zeitschrittbeginn. Dies gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, dass im aktuellen Zeitschritt kein weiteres Spannungsinkrement hinzukommt.

5.6.2 Bezug zur Globalspannung

Unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Beanspruchungsniveau und Systemantwort kann man sich nun das zuvor geschilderte Verhalten der KV-Einheit zur Vermeidung des Rückkriechens bzw. Rückrelaxation bei zwangbeanspruchten Systemen und damit zur Reduktion des Kriechpotentials zunutze machen: Entlastende Inkremente werden nicht länger vollständig auf die KV-Einheit gebracht, sondern über die am Zeitschrittanfang t_i tatsächlich

vorhandenen Systemglobalspannung $\sigma_{\text{tot},i}$ und $\Delta\sigma_{\text{max,entl},i}$ skaliert. Für die Einwirkung $\Delta\sigma_{\text{mod}}$ mit der die KV-Einheit schließlich belastet wird gilt für den betrachteten Zeitschritt:

$$\Delta\sigma_{\text{mod},i} = \begin{cases} \Delta\sigma_{\text{ela},i} & \text{falls Belastung} \\ \Delta\sigma_{\text{max,entl},i} \cdot \frac{\Delta\sigma_{\text{ela},i}}{\sigma_{\text{tot},i}} & \text{falls Entlastung} \end{cases} \quad (5.37)$$

In ähnlicher Weise kann auch der Sonderfall der reinen Relaxation behandelt werden: Hierbei ist der Spannungsrückgang $\Delta\sigma_{\text{visk},i}$ am Ende des vorhergehenden Zeitschrittes und damit zu Beginn des aktuellen bereits bekannt. Wenn auch hier wieder von einem linearen Zusammenhang zwischen Entlastung infolge von Relaxation und Größe des Weiterkriechens ausgegangen wird, kann dies durch Modifikation der inneren Variablen mit k_{AB} über den Anteil des viskoelastischen Spannungsabbaus am Ende des vorhergehenden Zeitschrittes gegenüber der zu Beginn vorhandenen Spannung geschehen:

$$k_{\text{AB}} = 1 - \frac{|\Delta\sigma_{\text{visk},i}|}{|\sigma_{\text{tot},i}| + |\Delta\sigma_{\text{visk},i}|} \quad (5.38)$$

Damit kann das reduzierte viskoelastische Potential bereits im aktuellen Zeitschritt berücksichtigt werden. Durch diese Modifikation können die in Abb. 2.6 dargestellten Prognosefehler bei mit Kriechfunktionen berechneten Relaxationsprobleme definitiv vermieden werden.

5.6.3 Anwendung in der KV-Reihe

Grundsätzlich ist es möglich auch aus Glg. (5.22) ein entsprechendes $\Delta\sigma$ zu bestimmen, das zum Kriechstopp am Ende des Zeitschrittes führt. Allerdings gilt dies nur für den aktuellen Zeitschritt. Erfolgt keine weitere Spannungsänderung, entstehen im nächsten Zeitschritt wiederum Kriechdehnungen die mit dem darauffolgenden Zustand superponiert werden und damit das Ergebnis beeinflussen. Der Grund ist, dass die Glieder KV-Reihe jeweils unterschiedliche Feder- und Dämpfereigenschaften aufweisen. Aus diesem Grund kann durch Nullsetzen von Glg. (5.22) kein eindeutiger Schwellenwert bestimmt werden, dessen Aufbringen auf die KV-Reihe zu einem Stoppen des Kriechens aller einzelnen Einheiten führen würde und auch – keine weitere Spannungsänderung vorausgesetzt – im Zeitverlauf erhalten bleibt. Letzteres ist u. a. Voraussetzung, um Wiederbelastungen vor dem Hintergrund des Superpositionsprinzips erfassen zu können.

Ein Stoppen aller Reihenglieder zu erwirken gelingt ausschließlich durch individuelle Betrachtung der KV-Einheiten im Entlastungsfall: Für jede KV-Einheit muss $\Delta\sigma_{\text{max,entl},i}$ aus Glg. (5.36) bestimmt werden. Für eine KV-Reihe wird Glg. (5.37) somit zu:

$$\Delta\sigma_{\text{mod},\mu,i} = \begin{cases} \Delta\sigma_{\text{ela},i} & \text{falls Belastung} \\ \Delta\sigma_{\text{max,entl},\mu,i} \cdot \frac{\Delta\sigma_{\text{ela},i}}{\sigma_{\text{tot},i}} & \text{falls Entlastung} \end{cases} \quad \text{mit } \mu = 1 \dots N \quad (5.39)$$

Abb. 5.17 verdeutlicht die Notwendigkeit der individuellen Betrachtung der KV-Einheiten, wenn eine Reduktion der Einwirkung zu einem verminderten Weiterkriechen führen soll anhand eines zweistufigen Kriechversuches eines alternden Materials. Bei t_0 wird eine Beanspruchung von $\sigma = 1 \text{ N/mm}^2$ auf die KV-Reihe gebracht, welche bei t_1 auf $\sigma = 0,25 \text{ N/mm}^2$ reduziert und bei t_2 wiederum auf $\sigma = 1 \text{ N/mm}^2$ erhöht wird.

Abb. 5.17a zeigt die resultierende Kriechdehnung für die KV-Reihe, wenn keine Modifikation am Kriechmodell vorgenommen wird und auf jedes Reihenglied $\Delta\sigma_{\text{entl}}$ wirkt. Demgegenüber zeigt Abb. 5.17b die Kriechdehnung, wenn die Einzelelemente individuell entsprechend Glg. (5.39)

betrachtet werden. Die beiden mittleren Graphiken zeigen die summierten Einzelbeiträge. In den unteren Graphiken sind die Einzelbeiträge explizit dargestellt, um einen besseren Vergleich untereinander zu ermöglichen und das Verhalten zu verdeutlichen.

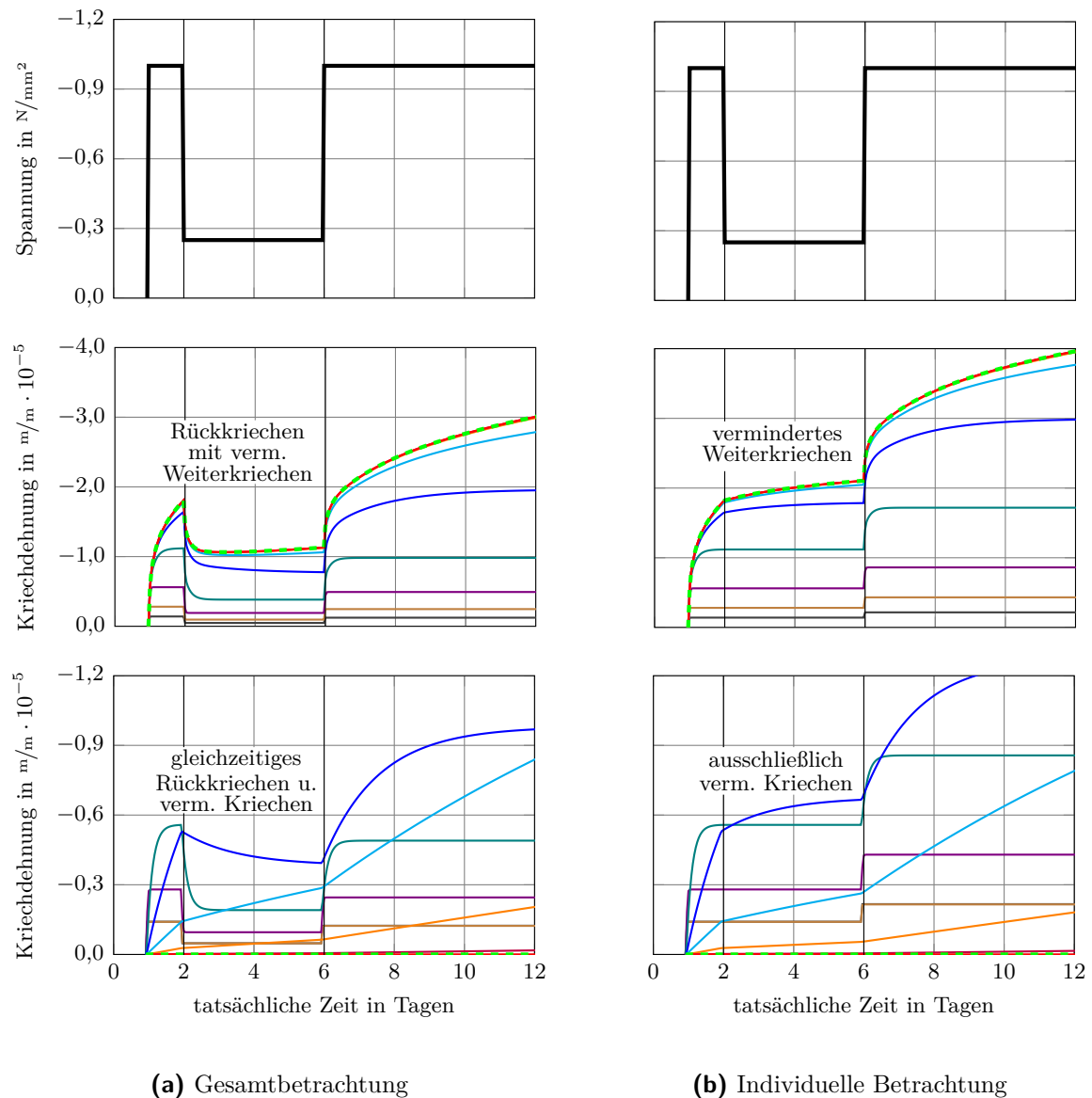


Abbildung 5.17: Dehnungsantworten der einzelnen KV-Einheiten bei Gesamtbetrachtung und individueller Betrachtung der Reihenelemente

Deutlich geht hervor, dass durch die individuelle Betrachtung das Kriechvermögen jeder KV-Einheit bei Entlastungen anteilig entsprechend dem Rückgang der Globalspannung vermindert wird. KV-Einheiten, die schon ihren Endwert erreicht haben bleiben nahezu unbeeinflusst und wirken sich daher auf das Weiterkriechverhalten kaum aus.

Ein gänzlich anderes Verhalten tritt in der „klassischen“ Betrachtung ein, nach der die KV-Einheiten nicht individuell betrachtet werden. Dies führt dazu, dass jedes Einzelelement ein unterschiedliches Kriechverhalten zeigt: In den Einheiten mit kleinen Retardationszeiten tritt durchwegs Rückkriechen auf, wogegen die Einheiten mit höheren Retardationszeiten zunächst

noch vermindert weiterkriechen.

Deutlich wird außerdem, dass der Fall des anfänglichen Rückkriechens, das sich später zu (vermindertem) Weiterkriechen umschlägt nur aus der Summation der Einzelbeiträge resultiert. In einer einzelnen KV-Einheit kann dieser Fall, wie in Abschn. 5.6.1 erwähnt, nicht eintreten.

5.6.4 Bezug zu Superpositionsprinzip

Abb. 5.18 zeigt die resultierende Kriechdehnung der KV-Reihe exemplarisch für einen Kriechversuch unter Anwendung des zuvor erläuterten Entlastungs-Ansatzes. Hier werden zunächst 4 belastende Spannungsinckremente aufgebracht, deren Gesamtheit als F bezeichnet wird: $\sum_i \Delta\sigma_i = F$. Bei $t_E = 5$ Tage wird die einwirkende Spannung entfernt, es findet eine Entlastung um $\Delta\sigma_{entl} = F$ satt und damit stoppt das Kriechvermögen.

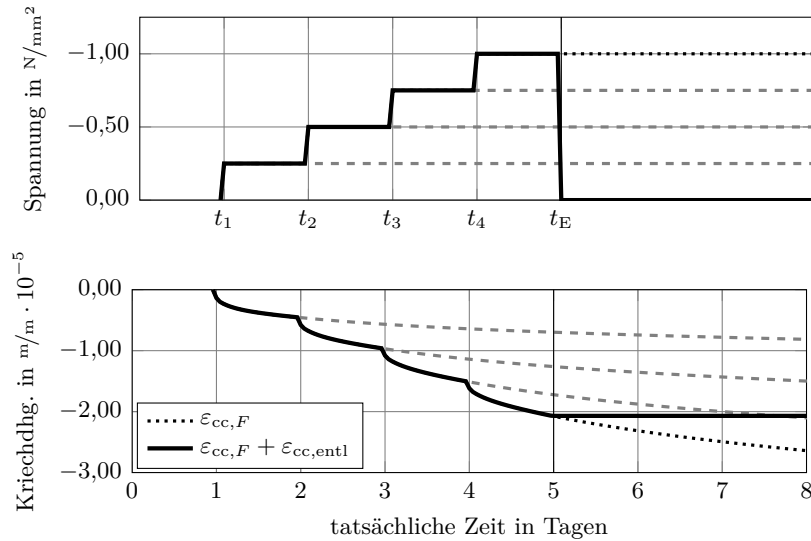


Abbildung 5.18: Exemplarischer mehrstufiger Kriechversuch

Bei t_5 wird das System also vollständig entlastet, es gilt ab t_E :

$$\varepsilon_{cc} = 0, \text{ da } |\varepsilon_{cc,F}| = |\varepsilon_{cc,entl}| \text{ und } \varepsilon_{cc,F} + \varepsilon_{cc,entl} = 0 \quad (5.40)$$

und entsprechend kann für mögliche Teilentlastungen ab t_E

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cc,F} + \varepsilon_{cc,F} \cdot \frac{\Delta\sigma_{entl}}{F} = \varepsilon_{cc,F} \cdot \left(1 + \frac{\Delta\sigma_{entl}}{F}\right) = \varepsilon_{cc,F} \cdot \left(1 + \frac{\Delta\sigma_{entl}}{\sum_i \Delta\sigma_i}\right) \quad (5.41)$$

geschrieben werden, wobei $\text{sgn}(\Delta\sigma_{entl}) \neq \text{sgn}(F)$ ist. Besteht die Einwirkungsgeschichte nur aus *einem* Spannungsinckrement ist

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cc,F} = \Delta\sigma_1 \cdot \varphi \quad (5.42)$$

und ab dem Entlastungszeitpunkt gilt

$$\varepsilon_{cc} = \Delta\sigma_1 \cdot \varphi + \Delta\sigma_1 \cdot \varphi \cdot \frac{\Delta\sigma_{entl}}{\Delta\sigma_1} = \Delta\sigma_1 \cdot \varphi + \Delta\sigma_{entl} \cdot \varphi = \varphi(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_{entl}) \quad (5.43)$$

Für eine aus i Spannungsincrementen bestehende Spannungsgeschichte ist entsprechend dem hier vorgestellten Ansatz dann

$$\begin{aligned}\varepsilon_{cc} &= \varepsilon_{cc,F} \cdot \left(1 + \frac{\Delta\sigma_{entl}}{F}\right) = \sum_i \varphi_i \Delta\sigma_i \cdot \left(1 + \frac{\Delta\sigma_{entl}}{F}\right) \\ &= \sum_i \varphi_i \Delta\sigma_i \cdot \left(1 + \frac{\Delta\sigma_{entl}}{\sum_i \Delta\sigma_i}\right)\end{aligned}\quad (5.44)$$

In Abb. 5.19a sind die mit dem hier vorgestellten Ansatz bestimmten Kriechdehnungen für eine beliebige Einwirkung aus zunächst 3 belastenden Inkrementen dargestellt. Sie werden darin einem aus „manueller“ Superposition ermittelten Kriechdehnungsverlauf gegenübergestellt, wobei hierbei das Kriechverhalten eines Inkrements bei Entlastungen anteilig um $\Delta\sigma_{entl}/3$ vermindert wird. Dies entspricht dem Vorgehen von [Schlicke, 2014] und es zeigt sich, dass beide Herangehensweisen zu denselben Ergebnissen führen³⁴.

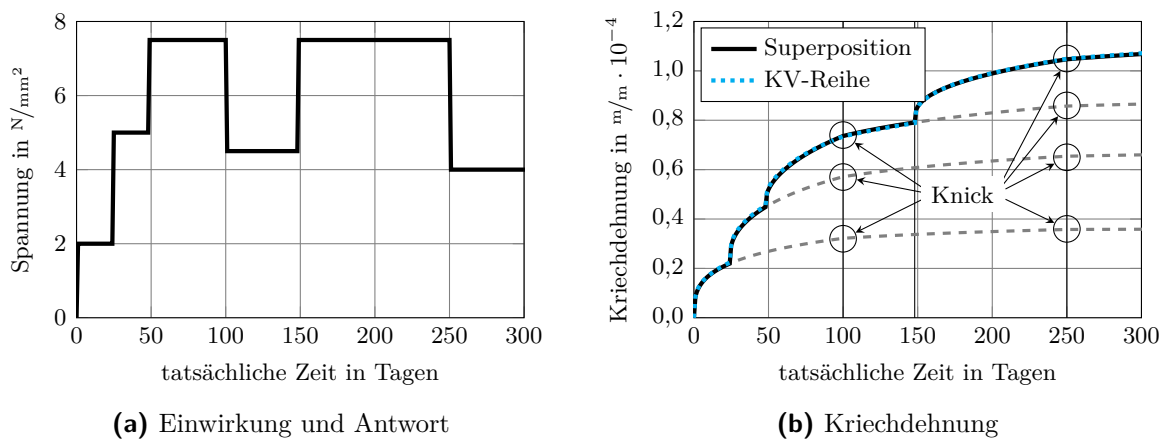


Abbildung 5.19: Vergleich mit modifiziertem Superpositionsprinzip

Die resultierenden Abweichungen sind gegenüber der händischen Superposition geringer als 2 %, was in der Größenordnung des Fehlers liegt, der durch die Approximation der Kriechkurven entsteht. In anderen Worten bedeutet das, dass eine zur Reduktion des Weiterkriechens führende Entlastung durch individuelles Aufbringen der mit Glg. (5.39) ermittelten Belastung auf die einzelnen Einheiten einer KV-Reihe einer betragsmäßig gleichen Reduktion aller vorhandenen viskoelastischen Ausgangspotentiale – und damit dem prinzipiellen Vorgehen von [Schlicke, 2014] – entspricht.

5.6.5 Wirkungsweise bei Relaxationsproblemen

Bisher wurde die Wirkungsweise des neuen Ansatzes anhand von (theoretischen) Kriechproblemen³⁵ demonstriert. Bei der Berechnung von Relaxationsproblemen wird für den Fall von

³⁴Zur besseren Vergleichbarkeit wurde für die Ermittlung der Kriechdehnung aus der KV-Reihe der Grenzfall einer schlagartig aufgebrachtten Einwirkung unterstellt

³⁵An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass das hier entwickelte Modell nur für die Berechnung zwangsbeanspruchter Systeme geeignet ist und reine Kriechprobleme mit Entlastung aufgrund der nun „fehlenden“ Rückkriecheneigenschaft qualitativ nicht zutreffend beschreiben kann.

entlastend wirkenden Inkrementen eine zusätzliche Fallunterscheidung notwendig, da Entlastungen nicht nur von außen induziert, sondern auch infolge von alleiniger Relaxation entstehen können.

Tritt ein belastendes Inkrement auf, das zu einer geringeren Spannungszunahme führt als es der Spannungsabbau infolge von Relaxation im vorhergehenden Zeitschritt verursacht, wird dies als „überwiegendes Relaxationsproblem“ behandelt und bei der Bestimmung der Einwirkung auf die KV-Reihe berücksichtigt. Die zugrundegelegte Fallunterscheidung ist in Abb. 5.20 in Form eines Ablaufplanes dargestellt. Die Wirkungsweise des neuen Ansatzes wird nun anhand eines

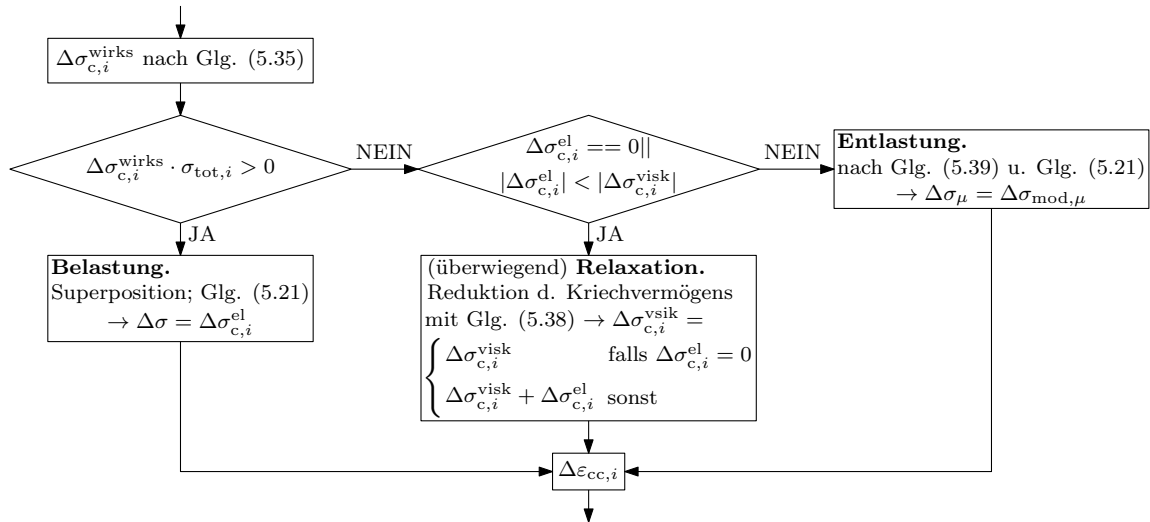


Abbildung 5.20: Fallunterscheidung bei Zwangbeanspruchung

mehrstufigen Relaxationsproblemes gezeigt. Abb. 5.21a zeigt die auf einen vollgezwängten Stab einwirkende äußere Verformungseinwirkung und Abb. 5.21b die Spannungsantwort. Der Elastizitätsmodul ist als konstant angenommen, das effektive Betonalter entspricht der tatsächlichen Zeit und die verwendeten Parameter der KV-Reihe sind für Druckbeanspruchungen in Tab. 5.1 gegeben. Für Zugbeanspruchungen werden die in Tab. 5.2 angegebenen Parameter verwendet. In Abb. 5.21 sind zwei Berechnungsvarianten dargestellt. Die blaue strichlierte Linie zeigt die

Tabelle 5.2: Parameter (Zugseite) der KV-Reihe für $\beta_H \approx 438$ und $\varphi_0 \approx 0,30 \cdot 4,16$ bzw. $m = 0,17$

μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1/E_\mu$	0,089	0,041	0,060	0,089	0,132	0,197	0,251	0,123	0,019	0,002
E_μ	11,785	24,498	16,562	11,196	7,560	5,081	3,980	8,123	53,269	505,564
E_μ^*	9,443	19,630	13,271	8,971	6,058	4,0713	3,189	6,509	42,684	405,100
τ_μ	10^{-20}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
α_μ	1,425	1,425	1,425	1,425	1,425	1,424	1,336	1,000	1,000	1,000

mit dem zuvor eingehend beschriebenen neuen Ansatz ermittelten Ergebnisse. Die rote durchgezogene Linie zeigt die Berechnungsergebnisse, wie sie aus dem klassischen Ansatz – d. h. der strikten Anwendung des Superpositionsprinzips – resultieren.

Die Einwirkungen (schwarze Linie) sind ausgehend vom neuen Ansatz so gewählt, dass der Beton anfangs unter Druckbeanspruchung bleibt und bei $t = 9$ Tagen in den Zugbereich wechselt. Dazwischen wird zu definierten Zeitpunkten die Beanspruchung nahezu sprunghaft geändert.

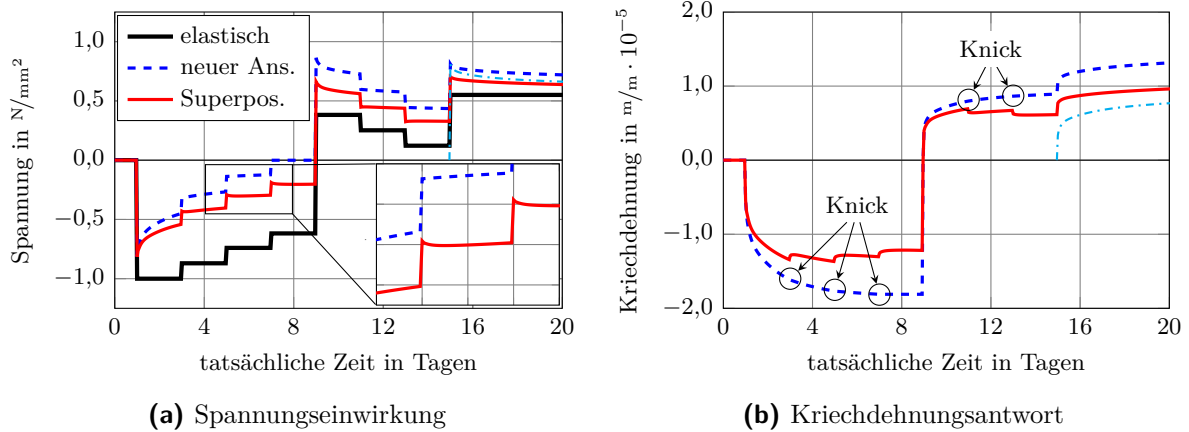


Abbildung 5.21: Vergleich der Ergebnisse mit neuem Ansatz bzw. „klassischer“ Lösung durch strikte Anwendung des Superpositionsprinzips

Zwischen den Zeitpunkten der Beanspruchungsänderung tritt keine weitere Verformung auf, d.h. die Spannungsänderung wird rein aus dem viskoelastischen Materialverhalten (reine Relaxation) verursacht.

Bei $t = 7$ Tagen wird die Beanspruchung so reduziert, dass keinerlei Systemspannung verbleibt. Entsprechend dem Materialmodell muss hier ein spannungsfreier Zustand ohne Weiterwirken von zuvor aufgebrachteneinwirkungsänderungen vorliegen. Bei $t = 9$ Tagen folgt die erneute Beanspruchung auf der Zugseite. Die Einwirkung entspricht dabei betragsmäßig der Erstbelastung und wird dann wiederum konstant gehalten bzw. bei $t = 11$ Tagen erneut reduziert und schließlich bei $t = 15$ Tagen erneut gesteigert.

Aufgrund der unterschiedlichen Parameter der Kriechkurven erfolgt der Spannungsabbau ab $t = 9$ Tagen weniger stark als nach der Erstbelastung. Um den Einfluss der Spannungsgeschichte zu verdeutlichen, wird bei $t = 15$ Tagen eine Zwangsspannung (strichpunktierte dünne türkise Linie) aufgebracht, die der Höhe der Spannung mit Vorgeschichte entspricht. Dabei zeigt sich, dass die zuvor eingeprägte Spannungsgeschichte ihr viskoelastisches Verformungsbestreben im Zeitverlauf schon teilweise aufgebraucht hat, wogegen eine neue später aufgebrachte Belastung derselben Höhe zu einem größeren viskoelastischen Effekt führt.

Abb. 5.21b zeigt die zugehörige Dehnungsgeschichte der KV-Reihe. Hierin ist deutlich zu erkennen, wie die Einwirkungsreduktion durch äußere Änderungen Rückkriechen in der KV-Reihe bei strenger Anwendung des Superpositionsprinzip hervorruft. Dieses Rückkriechen ist wiederum für die Rückrelaxation verantwortlich, die man unmittelbar nach den Spannungsänderungen in Abb. 5.21a erkennen kann (vgl. die vergrößerte Darstellung). Unterschiede in der resultierenden Spannung ergeben sich erwartungsgemäß auch, wenn der Fall der reinen Relaxation – wie im neuen Ansatz – gekoppelt an den Globalspannungszustand berechnet und auf die Anwendung des Superpositionsprinzips verzichtet wird. Der Fall der reinen Relaxation ohne äußere Spannungsänderungen ist eher theoretischer Natur und in diesem Zusammenhang ist die Gegenüberstellung mit dem neuen Ansatz, der für die Berechnung realer Spannungsgeschichten entwickelt wurde, als informativ zu betrachten.

5.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Entwicklung eines neuen Materialmodells zur Berechnung der viskoelastischen Spannungen in *gezwängten* Bauteilen beschrieben. Da es das Ziel war einen möglichst recheneffizienten Ansatz zu entwickeln, wurde das vorab ausgewählte Materialmodell eingehend erläutert und die entsprechenden Gleichungen hergeleitet. Beim Modell handelt es sich um eine alternde KV-Reihe. Da die KV-Reihe an eine analytisch gegebene Kriechfunktion angepasst werden soll wurde detailliert ein geeignetes Verfahren zur (eindeutigen) analytischen Bestimmung der Modellparameter auf Basis eines diskreten Retardationsspektrums vorgestellt und auf das Kriechmodell in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] angewendet. Dieses Verfahren kann auf alle beliebigen Kriechfunktionen angewendet werden. Voraussetzung ist aber, dass die zeitliche Entwicklungsfunktion des Kriechens nur von der Belastungsdauer abhängt und von Alterungseinflüssen getrennt werden kann.

Schließlich wurde der Einsatz des Materialmodells anhand ein- und mehrstufiger Kriech- und Relaxationsprobleme demonstriert. Im Fall von Relaxationsproblemen zeigt sich, dass es unmittelbar nach Entlastungen zu einem Spannungsanstieg im betrachteten System kommen kann. Diese Spannungszunahme tritt auch dann ein, wenn das System bis zum Spannungsnullpunkt entlastet wurde. Dies legt die Vermutung nahe, dass die Anwendung des Superpositionsprinzips bei zwangbeanspruchten (erhärtenden) Betonbauteilen das Prinzip der minimalen Energie verletzt: Ein Bauteil das völlig spannungsfrei ist, kann sich nicht „selbst“ belasten und Spannung erzeugen. Zudem bewirkt die Anwendung des Superpositionsprinzips, dass die tatsächliche Beanspruchung des Bauteils nicht zutreffend erfasst wird: Ein Bauteil das unter Druck steht und um einen Bruchteil der Beanspruchung entlastet wird, steht auch danach immer noch unter Druck, nur mit entsprechend niedrigerem Spannungsniveau. Im Material wird keine Zugbeanspruchung mit einhergehendem Zugkriechen hervorgerufen, wie dies nach dem Superpositionsprinzip der Fall wäre, vielmehr wird das Kriechvermögen (bzw. viskoelastische Potential) infolge der geringeren Beanspruchung reduziert. Aus diesem Grund wurde basierend auf Überlegungen von [Schlicke, 2014] zur Superponierbarkeit von Spannungsinkrementen ein Verfahren entwickelt, das eine konsequente Unterscheidung zwischen be- und entlastenden Inkrementen vornimmt und das viskoelastische Potential im Materialmodell in Referenz zum herrschenden Globalspannungszustand bestimmt. Den Abschluss des Kapitels bilden einige Beispiele, um die Wirkungsweise des neuen Ansatzes zu demonstrieren.

6 Verifikation des Modells

6.1 Allgemeines

Das in Kap. 5 entwickelte Modell wurde für die Berechnung (überwiegend) zwangbeanspruchter Systeme ausgelegt. Zunächst wurde die Wirkungsweise des Materialmodells an theoretischen mehrstufigen Kriech- und Relaxationsversuchen demonstriert. Definitionsgemäß wurden hierzu jeweils konstante Einwirkungen unterstellt. In der Praxis treten jedoch üblicherweise kontinuierliche Einwirkungsgeschichten (z. B. als Folge von externen Temperatureinwirkungen oder aus der Hydratation etc.) auf und gleichzeitig sind die betrachteten Systeme weder vollständig verformungsfrei noch vollständig verformungsbehindert. Häufig handelt es sich um eine teilweise Verformungsbehinderung, sodass Kriechen Relaxation beeinflusst und umgekehrt. Derartige Situationen wurden an Zwangrahmenversuchen an der TU Graz durchgeführt. Diese Versuche bilden nun den Ausgangspunkt zur Verifikation des Modells.

6.2 Zwangrahmenversuch

Zur Analyse der Spannungsgeschichte unter wirklichkeitsnahen Zwängungsbedingungen über den gesamten Lebenszeitraum eines Betonbauteils wurden im Rahmen eines Versuchsprogramms an der TU Graz umfangreiche Versuche an Zwangrahmen durchgeführt. Details zum Versuchsprogramm und zu den Ergebnissen können [Turner et al., 2015] und [Schlicke, 2014] entnommen werden.

6.2.1 Versuchsdaten und -aufbau

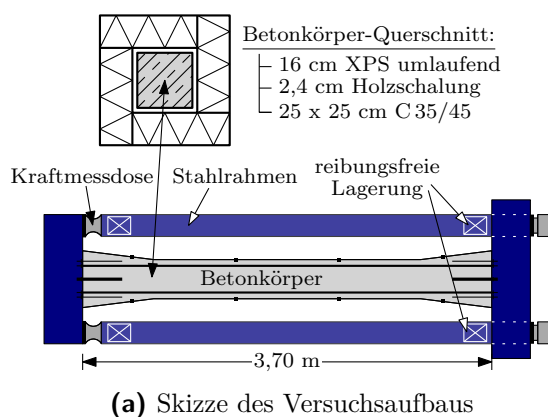


Abbildung 6.1: Zwangrahmenversuch an der TU Graz

Beim in Abb. 6.1 dargestellten Versuchsaufbau selbst handelt es sich um einen eigens für das beschriebene Versuchsprogramm hergestellten Zwangrahmen, zwischen dessen Querhäuptern ein hängend gelagerter Stahlbetonstab betoniert wurde. Durch die Anordnung von Wärmedämmung können im Bauteil Temperaturschichten erzeugt werden, wie sie auch üblicherweise in Massenbetonbauteilen auftreten. Details hierzu können ebenfalls [Turner et al., 2015] entnommen werden. Anhand der Versuchsergebnisse wird das in Kap. 5 entwickelte Modell verifiziert. Hierzu wurde das Materialmodell in eine eigene MATLAB-Routine implementiert. Einzelheiten zum Algorithmus können den folgenden Abschnitten entnommen werden.

6.2.2 Statisches System

Das statische System des Zwangrahmenversuchs entspricht dem eines teilweise gezwängten Betonstabs. Es ist in Abb. 6.2 dargestellt. Die Steifigkeit des Rahmens wird durch die Feder mit der

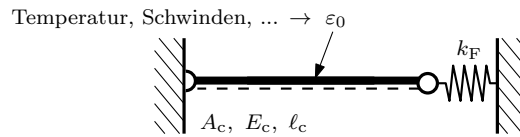


Abbildung 6.2: Statisches System des Versuches

Steifigkeit k_F abgebildet. Mit der Kenntnis des Systembehinderungsgrads a kann die aus einer Einwirkung ε_0 resultierende Spannung im Betonstab bestimmt werden, vgl. [Schlicke, 2014]:

$$\sigma_c(t) = -\varepsilon_0(t) \cdot E_c(t) \cdot a(t) \quad \text{mit} \quad a(t) = \left(1 + \frac{A_c \cdot E_c(t)}{k_F \cdot \ell_c}\right)^{-1} \quad (6.1)$$

Da Einwirkung, Elastizitätsmodul und der Behinderungsgrad einer zeitlichen Veränderung unterliegen, muss Glg. (6.1) inkrementell ausgewertet werden. Dazu wird der Zusammenhang zwischen der zeitlichen Veränderung der Spannung $\dot{\sigma}$ und der Dehnung $\dot{\varepsilon}$ definiert. Glg. (6.1) wird damit zu

$$\dot{\sigma} = -\dot{\varepsilon}_0 \cdot E_c(t) \cdot a(t) \quad (6.2)$$

und die zeitliche Entwicklung der Spannung im Betonstab ergibt sich aus Integration von Glg. (6.2). Für den Zwangrahmenversuch sind die Einwirkungen auf den Betonstab nur zu n diskreten Zeitpunkten t_i im zeitlichen Abstand von Δt_i bekannt. Damit kann die Dehnungsänderung im Zeitschritt näherungsweise durch $\dot{\varepsilon}_0 \approx \Delta \varepsilon_0 / \Delta t_i$ ermittelt und das Integral durch eine Summe genähert werden:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{t_0}^t E_c(\hat{t}) \cdot \dot{\varepsilon}_0(\hat{t}) \cdot a(\hat{t}) \, d\hat{t} \\ &\approx \sum_{i=1}^n E_c(t_i) \cdot \dot{\varepsilon}_0(t_i) \cdot a(t_i) \cdot \Delta t_i = \sum_{i=1}^n E_c(t_i) \cdot \Delta \varepsilon_0(t_i) \cdot a(t_i) \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.2.3 Temperaturschichte und Festigkeitsentwicklung

Neben der (bekannten) Hydratationswärmeentwicklung des Zements und aller relevanten thermischen Eigenschaften der Betonbestandteile wird die Temperaturschichte erhärtender Be-

tonbauteile auf Bauteilebene durch weitere Einflussfaktoren bestimmt. Dies sind neben der Frischbetontemperatur die Massigkeit des Bauteils und die klimatischen Randbedingungen unter Berücksichtigung der thermisch wirksamen Nachbehandlungsmaßnahmen. Die Entwicklung der mechanischen Festigkeitseigenschaften hängt zudem auch von der Temperaturgeschichte ab. Dies wird im Algorithmus mit dem effektiven Betonalter berücksichtigt, das über eine Reifefunktion ermittelt werden kann.

6.2.4 Reifekonzept

Als Reifefunktion zur Ermittlung des effektiven Betonalters wird ein Ansatz von [Freiesleben, Hansen & Pedersen, 1977] verwendet. Dieser basiert auf der ARRHENIUS-Funktion. Die Eingangsdaten entstammen dabei umfassenden Materialuntersuchungen, s. [Hermerschmidt & Budelmann, 2015] bzw. [Hermerschmidt, 2016a].

$$t_{\text{eff}} = \int \exp \left[\frac{E_A}{R} \cdot \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{273 + T(t)} \right) \right] dt \quad (6.4)$$

mit:

E_A	...	Aktivierungsenergie, $E_A = 46\,000 \text{ J/mol}$
R	...	universelle Gaskonstante, $R = 8,3143 \text{ J/mol K}$
T	...	Betontemperatur in °C

6.2.5 Mechanische Eigenschaften

Mit einem Modell von [Wesche, 1993] gelingt es, die Festigkeitsentwicklung auf Grundlage des effektiven Alters zu erfassen. Dieses Modell ermöglicht zudem die geschlossene Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Elastizitätsmodul bzw. Druck- und Zugfestigkeit. Die Grundlage hierzu bildet eine Zeitfunktion $f_\beta(t_{\text{eff}})$ die durch entsprechende Parameter an die Zementfestigkeitsklasse angepasst werden kann. Hier wurden die Parameter durch Anpassung der Gleichung zur Druckfestigkeitsentwicklung an die gemessenen Würfeldruckfestigkeiten festgelegt und sind [Schlicke, 2014] entnommen.

$$X(t_{\text{eff}}) = X_{28} \cdot [f_\beta(t_{\text{eff}})]^c = X_{28} \cdot \left\{ \exp[-a \cdot w/b \cdot (t_{\text{eff}}^{-b} - 28^{-b})] \right\}^c \quad (6.5)$$

mit:

a, b, c	...	freie Parameter
X_{28}	...	betrachtete Materialeigenschaft nach 28 Tagen
w/b	...	Wasser-Bindemittel-Wert der Betonrezeptur
t_{eff}	...	effektives Betonalter in Tagen

Der hier betrachtete Referenzbeton wurde als C 35/45 klassifiziert. Für ihn ergeben sich die in Tab. 6.1 zusammengefassten Parameter.

6.2.6 Schwinden

Nach [Schlicke, 2014] stellt Trocknungsschwinden eine nennenswerte Einwirkung bei üblichen Hochbauquerschnitten während der Nutzung dar, wogegen es bei massigen Querschnitten als

Tabelle 6.1: Parameter der Festigkeitsentwicklungsfunktionen

Größe	Wert	Einheit	Exponent c für f_{β}
$a \cdot w/b$	3,00	[-]	—
b	0,80	[-]	—
$f_{cm,28}$	35	N/mm ²	1
$f_{ctm,28}$	3,15	N/mm ²	2/3
$E_{cm,28}$	34 100	N/mm ²	1/3

Oberflächenproblem betrachtet werden kann. Aus diesem Grund wird in der späteren Berechnung ausschließlich autogenes Schwinden berücksichtigt. Da für den Referenzbeton keine Messungen über die Größe des Schwindens vorliegen, wird das autogene Schwinden mit dem in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] vorgeschlagenen Endschwindmaß für einen Beton der Klasse C 35/34 berücksichtigt. Die zeitliche Entwicklung wird an den Hydratationsfortschritt gekoppelt. Gleichzeitig wird unterstellt, dass der Schwindprozess unabhängig vom Kriechen abläuft, selbst wenn hierzu Gegenteiliges festgestellt werden konnte, [Bosnjak, 2000].

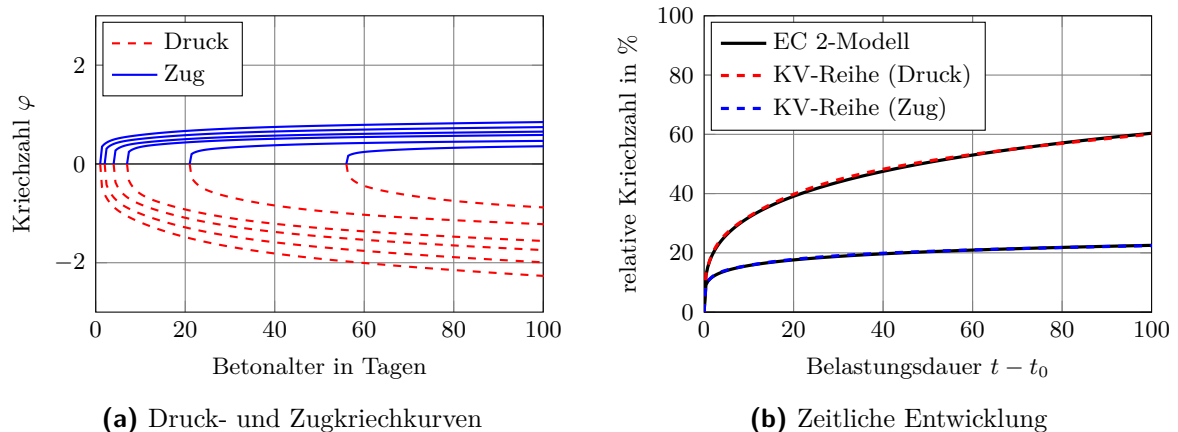
$$\varepsilon_{ca}(t_{\text{eff}}) = \varepsilon_{ca,\infty} \cdot \alpha(t_{\text{eff}}) = 2,50 \cdot (f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6} \cdot \frac{Q(t_{\text{eff}})}{Q_{\text{max}}} \quad (6.6)$$

mit:

$\varepsilon_{ca,\infty}$... Endschwindmaß in m/m

6.2.7 Druck- und Zugkriechen

Weder für Druck- noch für Zugkriechen wurde das Kriechverhalten des Referenzbetons in gesonderten Versuchen bestimmt. Aus diesem Grund wird die in dieser Arbeit beschriebene Kriechfunktion aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] herangezogen. Dabei wird eine Umgebungs-

**Abbildung 6.3:** Zugrundeliegende Druck- und Zugkriechkurven

luftfeuchte von $RH = 60\%$ sowie eine wirksame Bauteildicke von $h_0 = 125$ mm angenommen. Außerdem wird eine Unterscheidung zwischen Druck- und Zugkriechen vorgenommen, wobei für das Zugkriechen die Kriechfunktion nach [Schlicke, 2014] modifiziert wird:

- Die Endkriechzahl für Zugbeanspruchungen entspricht der 0,30-fachen Endkriechzahl bei Druckbeanspruchungen
- Der Exponent in der Zeitfunktion $\beta_c(t, t_0)$ wird für Zugbeanspruchungen von 0,30 auf 0,17 geändert

Durch diese Modifikation wird das Verhalten unter Zugbeanspruchung bei Verwendung des Eurocode Kriechmodells besser beschrieben wie in [Dorfmann, 2017] veröffentlichte Ergebnisse zeigen, s. a. Abschn. 2.5.2. Um den Unterschied in den Druck- (negativ) und Zugkriechkurven (positiv) zu verdeutlichen werden diese in Abb. 6.3a für ausgewählte Belastungszeitpunkte gezeigt.

Abb. 6.3b zeigt den Verlauf der jeweils Zeitfunktion auf der Druck- bzw. Zugseite und gibt damit auch die relative Entwicklung der Kriechzahl wieder. Zusätzlich sind die mit dem KV-Modell erhaltenen Näherungen den entsprechenden Eurocode Funktionen gegenübergestellt.

Aus der Darstellung wird vor allem die zuvor beschriebene Modifikation der Kriechzahlentwicklung deutlich: In beiden Fällen tritt vergleichbares Anfangskriechen ein, allerdings ist das Druckkriechen im weiteren Verlauf ausgeprägter wogegen das Zugkriechen früher seinem Endwert entgegenstrebt, s. a. [Schlicke, 2014].

6.2.8 Nachrechnung des Versuchs mit dem neuen Modell

Abb. 6.4 zeigt zunächst die Messergebnisse eines der durchgeführten Zwangrahmenversuche. Darin sind die mittels Temperatursensor gemessenen Temperaturverläufe in Bauteilkern- bzw. Randzone der resultierenden Betonspannung gegenübergestellt. Die Spannung im Betonstab wurde dabei aus den am Rahmen angebrachten Kraftmessdosen ermittelt.

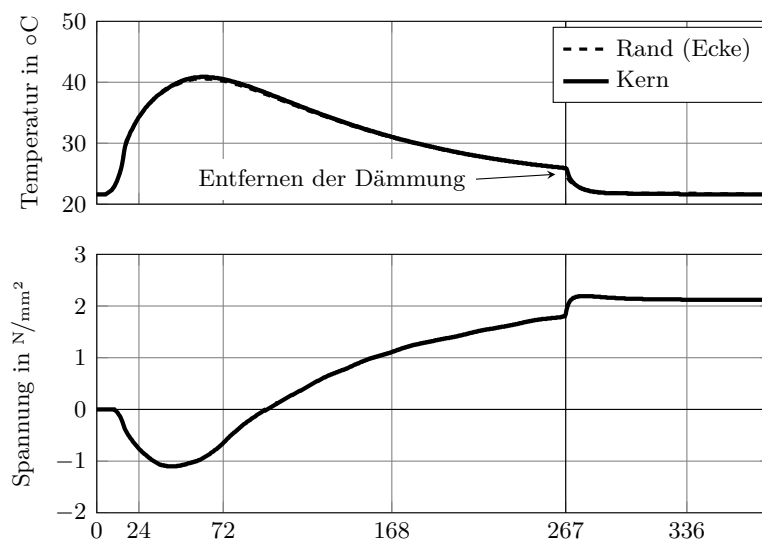


Abbildung 6.4: Zwangrahmenversuch an der TU Graz – Messergebnisse

Der bei $t \approx 267$ Stunden auftretende Knick in beiden Messkurven stammt aus dem Entfernen der Wärmedämmung, wodurch die Temperatur sehr plötzlich abfällt und damit einhergehend ein weiterer Aufbau von Zugspannung induziert wird.

Für die analytische Versuchsnachrechnung am eindimensionalen Stab stellt der auf den Querschnitt wirkende konstante Temperaturanteil T_k die Einwirkung dar. Dieser wurde aus den beiden Messpunkten mittels Simpson-Integration nach [Eierle & Schikora, 2000] ermittelt:

$$T_k(t) = \frac{1}{3} \cdot [T_{\text{Rand}}(t) + 2 \cdot T_{\text{Kern}}(t)] \quad (6.7)$$

Auf dieser Grundlage wurde das effektive Betonalter und daraus die Schwindeinwirkung sowie die zeitliche Entwicklung sämtlicher Materialeigenschaften und des Behinderungsgrades bestimmt. Abb. 6.5 zeigt die Entwicklung des Behinderungsgrades und stellt sie der Entwicklung des relativen Elastizitätsmoduls gegenüber. Hingewiesen werden muss an dieser Stelle darauf,

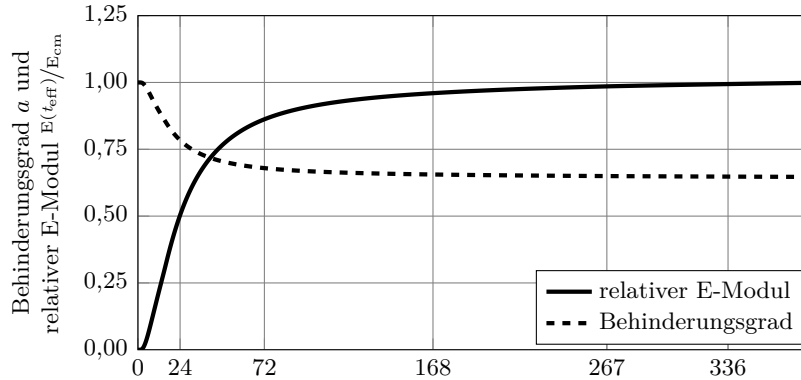


Abbildung 6.5: Entwicklung von Behinderungsgrad sowie relativem Elastizitätsmodul

dass für die Berechnung keine Unterscheidung zwischen Druck- und Zugelastizitätsmodul getroffen wurde und stets der Druckelastizitätsmodul herangezogen wird. Die Abweichungen die sich hieraus für Zugbeanspruchungen ergeben würden werden nach [Schlicke, 2014] bereits durch die modifizierten Kriechkurven der Zugseite ausgeglichen.

Da nun alle relevanten Größen für jeden Zeitschritt bekannt sind, wird zunächst die resultierende Spannung linear-elastisch ohne Berücksichtigung der Viskoelastizität berechnet. Die Spannungsentwicklung ergibt sich aus Glg. (6.3) und es gilt

$$\Delta\varepsilon_0(t_i) = -[\Delta\varepsilon_T(t_i) - \Delta\varepsilon_{ca}(t_i)] \quad (6.8)$$

mit:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_T & \dots \text{ Temperaturdehnungssinkrement } \varepsilon_T(t_{i+1}) - \varepsilon_T(t_i) \\ \Delta\varepsilon_{ca} & \dots \text{ Schwinddehnungssinkrement } \varepsilon_{ca}(t_{i+1}) - \varepsilon_{ca}(t_i) \end{aligned}$$

wobei der Temperatureausdehnungskoeffizient α_T für Beton konstant mit $10^{-5} \text{ (m/m)/}^\circ\text{C}$ angenommen wird. Der Beginn der Festigkeitsentwicklung³⁶ wird mit einem effektiven Alter von $t_{\text{crit}} = t_{\text{eff}} = 10,50$ Stunden festgelegt, s. a. [Schlicke, 2014].

Abb. 6.6 stellt die auf das System wirkende Verformungseinwirkung dem resultierenden Spannungsverlauf (grau) gegenüber. Außerdem ist die aus den Messwerten bestimmte Spannungsentwicklung (schwarz) eingetragen. In Abb. 6.6 ist gut zu erkennen, dass die resultierende Spannung dem Verlauf der Messkurve qualitativ ähnelt: Zunächst kommt es infolge der Zunahme der Verformungseinwirkung zu einem Spannungsanstieg als Folge der teilweise behinderten Dehnung.

³⁶Der Zeitpunkt des *Settings* wurde im Labor bestimmt.

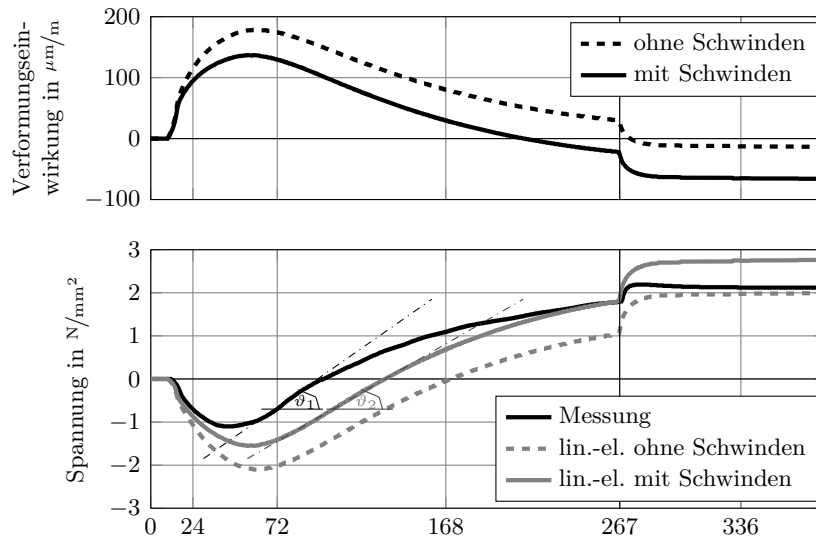


Abbildung 6.6: Verformungseinwirkungen mit und ohne Schwinden und linear-elastisch berechnete Spannungsentwicklung gegenüber der Messkurve

Mit dem Verformungsrückgang geht auch die Spannung zurück. Weil sich der Elastizitätsmodul über die Zeit ändert und mit deren Fortschreiten zunimmt, führt der Verformungsrückgang zu einem größeren Spannungsabbau als zunächst aufgebaut wurde. Dies bewirkt einen Spannungsnulldurchgang und auf die Entlastungsphase folgt eine erneute Belastungsphase, diesmal jedoch auf der Zugseite. Das Entfernen der Wärmedämmung bewirkt einen weiteren Verformungsrückgang, sodass letztlich noch mehr Zugspannung aufgebaut wird.

Deutlich ist jedoch zu erkennen, dass in der linear-elastischen Berechnung zunächst die Druckspannung weit überschätzt wird, was sich im weiteren Verlauf fortpflanzt. Der Vergleich mit der Messkurve zeigt auch, dass im Entlastungsbereich gegenüber der elastischen Lösung ein steilerer Abfall stattfindet ($\vartheta_1 > \vartheta_2$). Dies wird als Indiz dafür gewertet, dass auch während der Entlastungsphase viskoelastische Effekte in Abhängigkeit des globalen Spannungszustands weiterwirken und damit die in Abschn. 5.6 erläuterten Annahmen zur Superponierbarkeit von Spannungsinkrementen stützen.

Die Berücksichtigung der viskoelastischen Betoneigenschaften gelingen nun vergleichsweise unkompliziert, indem der entsprechende Anteil in Glg. (6.8) aufgenommen wird:

$$\Delta\varepsilon_0(t_i) = -[\Delta\varepsilon_T(t_i) - \Delta\varepsilon_{ca}(t_i) - \Delta\varepsilon_{cc}(t_i)] \quad (6.9)$$

mit:

$$\Delta\varepsilon_{cc} \quad \dots \quad \text{Kriechdehnungsinkrement } \varepsilon_{cc}(t_{i+1}) - \varepsilon_{cc}(t_i)$$

Die Kriechdehnung erhält man aus dem in Kap. 5 vorgestellten Modell. Die KV-Reihe wird je Zeitschritt mit der nun bekannten elastischen Spannungsänderung $\Delta\sigma_{el}(t_i)$ belastet. In Abhängigkeit der Größe des sich im Modell einstellenden viskoelastischen Potentials, kann das theoretisch viskoelastische Kriechdehnungsinkrement $\Delta\varepsilon_{cc}(t_i)$ abgegriffen und als Zusatzeinwirkung für das „elastische System“ verwendet werden. Abb. 6.7 zeigt wie zuvor die Messkurve (schwarz, durchgezogen) und die unter Berücksichtigung der Schwindeinwirkung linear-elastisch ermittelten Spannung (grau, durchgezogen). Zusätzlich ist die resultierende Spannung unter Berücksichtigung der Viskoelastizität eingetragen (blau, strichliert). Deutlich ist zu erkennen, dass der Einfluss der Viskoelastizität die Wirklichkeitsnähe des Ergebnisses stark verbessert. Die Sys-

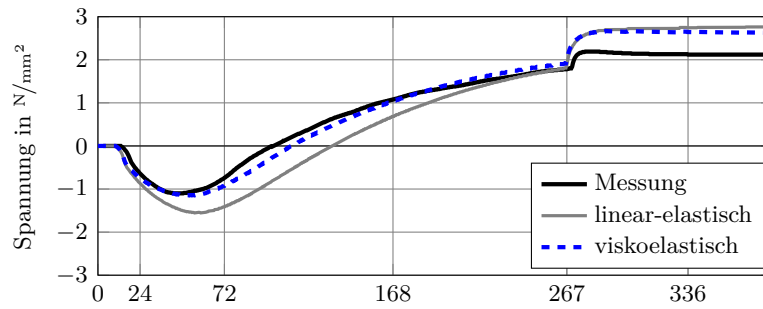


Abbildung 6.7: Spannungsentwicklung mit Berücksichtigung der Viskoelastizität

temantwort wird allerdings beim Entfernen der Wärmedämmung etwas überschätzt. [Schlicke, 2014] sieht den Grund darin vor allem in der zu diesem Zeitpunkt erreichten Gesamtspannung im Betonstab: Dabei wird das Niveau der 5%-Fraktile der Zugfestigkeit erreicht, wodurch von einer Nichtlinearität in der Zugbruchdehnung des Betons auszugehen ist.

Prinzipiell wird deutlich, dass durch eine Berechnung mit analytisch ermittelten Eingangsgrößen gute Ergebnisse erzielt werden können. Sollen allerdings Bauteile betrachtet werden, die in unterschiedliche Raumrichtungen verschieden beansprucht werden ist hierfür die zeitliche Beschreibung von Verformungseinwirkungen und Behinderungsgrad sehr komplex. Generell entzieht sich eine derartige Betrachtung der analytischen Herangehensweise, da die viskoelastischen Effekte eines jeden Materialpunkts von der in diesem Punkt vorherrschenden Gesamtspannung abhängig sind. Aus diesem Grund bieten sich zur Berechnung komplexer räumlicher Strukturen numerische Lösungsmethoden an, in die das Modell implementiert werden kann. Details sind hierzu in Kap. 7 zu finden.

6.3 Vergleich mit anderen Entlastungsansätzen

Die Notwendigkeit der in Abschn. 5.6ff beschriebenen Unterscheidung zwischen Be- und Entlastung unter Berücksichtigung des Globalspannungszustands wird in diesem Abschnitt veranschaulicht. Dies geschieht am Beispiel des Zwangrahmenversuchs. Hierzu werden dem entwickelten Berechnungsansatz zwei Modifikationen gegenübergestellt:

- Zum einen wird das Superpositionsprinzip in seiner bekannten Form strikt angewendet, sodass entlastende Spannungsinkremente nicht länger das vorhandene viskoelastische Potential reduzieren, sondern zu jeweils eigenen Kriechpotentialen mit umgekehrtem Vorzeichen führen. Dies entspricht der „klassischen“ Herangehensweise.
- Zum anderen wird im Entlastungsfall mögliches auftretendes Rückkriechen unterdrückt. Dies unterstellt, dass die zuvor vorhandene Spannungsgeschichte im Entlastungsfall nicht länger weiterkriecht und sich das System bei Entlastung streng linear-elastisch verhält.

Abb. 6.8 zeigt die Berechnungsergebnisse detailliert im Entlastungsbereich unter Anwendung der beschriebenen Modifikationen, wobei die Ergebnisse den mit dem neuen Modell (blaue strichlierte Linie, $t_{ND} = 110$ h) berechneten gegenübergestellt sind.

Deutlich ist zu erkennen, dass die Anwendung des Superpositionprinzips bei Entlastungen zu schlechteren Ergebnissen führt (rote Linie, $t_{ND} = 133$ h). Der Grund für dieses Verhalten liegt analog zu dem in Abb. 5.21 gezeigten Beispiel wiederum im auftretenden Rückkriechen bzw.

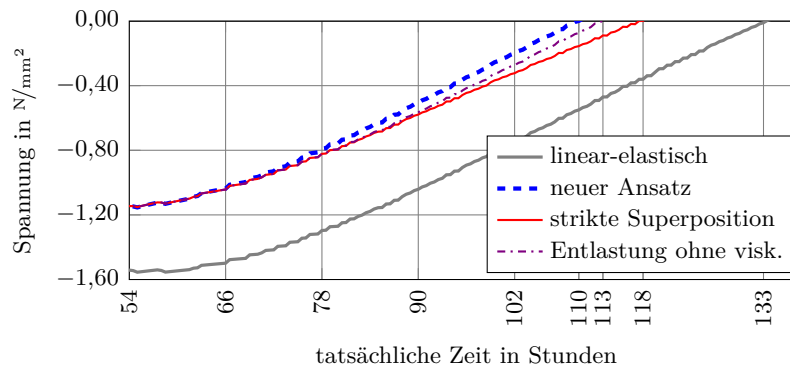


Abbildung 6.8: Berücksichtigung der Viskoelastizität – unterschiedliche Ansätze

im Superpositionsprinzip selbst: Ab einem bestimmten Punkt in der Kriechdehnungsgeschichte führt jedes weitere auf die KV-Reihe aufgebrachte entlastende Inkrement zu einem kurzen Moment des Rückkriechens³⁷. Da dies in weiterer Folge ein Kriechinkrement mit umgekehrtem Vorzeichen bewirkt, resultiert daraus eine Spannungszunahme im System. D. h. gemeinsam mit dem entlastenden elastischen Inkrement wird in einem Zeitschritt das System in Summe weniger stark entlastet. Dies ist der Grund, weshalb die Spannungsabnahme im Entlastungsfall hier „flacher“ erfolgt, als es die Lösung ohne Viskoelastizität erwarten ließe.

Ohne Verwendung des neuen Ansatzes ist bereits eine Verbesserung gegenüber der klassischen Herangehensweise möglich, wenn im Entlastungsfall ausschließlich das linear-elastische Spannungsinkrement herangezogen und das Auftreten eines zusätzlichen Spannungsabbaus infolge von Viskoelastizität zunächst vernachlässigt wird. Dies zeigt die violette strichpunktierte Linie in Abb. 6.8 ($t_{ND} = 113$ h).

6.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das in Kap. 5 entwickelte und vorgestellte Materialmodell anhand eines Zwangrahmenversuchs verifiziert. Da sowohl Temperatur- und Festigkeitsentwicklung des Betons bzw. die Rahmensteifigkeit bekannt ist, kann der das Spannungsniveau bestimmende Behinderungsgrad auf analytischem Weg ermittelt werden. Die linear-elastische Nachrechnung des Versuchs unter Berücksichtigung von Schwindeinwirkungen führt bereits zu einem qualitativ dem Messergebnis ähnlichen Spannungsverlauf. Allerdings unterscheiden sich die damit zunächst erreichten Druckspannungen beträchtlich von den gemessenen Spannungen was sich auch im Zeitverlauf fortpflanzt. Dieser Mangel kann durch die Berücksichtigung der Viskoelastizität mit dem vorgestellten Modell beseitigt werden. Dabei zeigt sich zudem eine gute Übereinstimmung mit der gemessenen Spannung. Dass der Ansatz auch qualitativ „richtiges“ Verhalten zeigt geht aus einer abschließenden Betrachtung hervor: Hierbei wird der Zwangrahmenversuch einerseits mit dem strikten Superpositionsprinzip und andererseits mit dem neuen Modell nachgerechnet. Dabei ist deutlich zu sehen, dass durch die strikte Superposition in der KV-Reihe Rückkriechen hervorgerufen wird, wodurch letztlich der Spannungsabbau beeinflusst wird und im Widerspruch zum beobachteten Weiterwirken der Viskoelastizität auch unter Entlastungsvorgängen steht. Die Verwendung des neuen Ansatzes kann dagegen die Ergebnisqualität deutlich verbessern.

³⁷ Würde keine weitere Spannungsänderung erfolgen, die zu weiterem Rückkriechen führt, würde das anfängliche Rückkriechen der Gesamtkriechdehnung in (geringfügig) reduziertes Weiterkriechen übergehen.

7 Implementierung in ein FE-System

7.1 Allgemeines

Im Gegensatz zu dem in Abschn. 6.2 beschriebenen Zwangrahmenversuch ist bei realen Bauteilen der Behinderungsgrad eines Systems nicht a priori bekannt. Dadurch ist eine analytische Berechnung der Spannung im Bauteil nicht länger möglich und numerische Verfahren werden erforderlich. Als geeignet erweist sich hierzu der Einsatz der vielfach angewendeten Methode der Finiten Elemente (FE) zur Lösung verschiedener multiphysikalischer Systeme. Von besonderer Bedeutung sind in diesem Zusammenhang auch die i. d. R. vor der eigentlichen Spannungsberechnung durchzuführenden Berechnungen zur Ermittlung des Temperaturfelds bzw. der Steifigkeitsentwicklung des Bauteils, da diese die Grundlage der nachgeschalteten Spannungsberechnung bilden. Neben einer kurzen Einführung in die Thematik der FE-Methode wird in diesem Kapitel das in Kap. 5 präsentierte Materialmodell in eine kommerzielle FE-Software implementiert. Die Wirkungsweise des Modells wird dann zunächst anhand einfacher Beispiele unterschiedlicher (räumlicher) Behinderungssituationen und anhand des Zwangrahmens sowie gezeigt.

7.2 Grundlagen der Methode der Finiten Elemente

Für eine ausführliche Darstellung der FE-Methode wird an dieser Stelle auf Grundlagenwerke wie [Zienkiewicz, Taylor & Zhu, 2005], [Bathe, 2014] oder [Merkel & Öchsner, 2010] verwiesen. Die FE-Methode selbst kann aus unterschiedlicher Motivation heraus formuliert werden: Einerseits kann sie recht anschaulich aus der ingenieurmäßigen Arbeitsweise (Matrixmethoden) andererseits auch physikalisch (Arbeits- und Energieprinzipien) oder mathematisch (Prinzip der gewichteten Residuen) motiviert hergeleitet werden. Es ergeben sich dementsprechend unterschiedliche Formulierungen, die allerdings alle in einer gemeinsamen Hauptgleichung resultieren, vgl. [Merkel & Öchsner, 2010].

Grundsätzlich kann die FE-Methode zur Lösung unterschiedlichster physikalischer Probleme verwendet werden, wobei in diesem Abschnitt ausschließlich Probleme der Strukturmechanik betrachtet werden. Im Allgemeinen handelt es sich um ein Verfahren zur numerischen Lösung von partiellen DGLn, die sich aus der Beschreibung von Temperaturfeldern und/oder Spannungs-Verformungszuständen in beliebigen Körpern (Kontinuen) ergeben.

In der Ingenieurwissenschaft ist vor allem die Beanspruchung des zu untersuchenden Körpers von Interesse. Zur Lösung bieten sich hierzu Matrixmethoden an, die in Kraft- und Verschiebungsmethoden unterschieden werden können. Bei der Verwendung von Kraftmethoden werden die statisch unbestimmten Kräfte direkt ermittelt, wogegen bei Verschiebungsmethoden Verschiebungen die unbekannte Größe sind. Letztere Methode bietet den Vorteil, dass in ihrer Anwendung nicht zwischen statisch unbestimmten und bestimmten Problemen unterschieden werden muss, vgl. [Merkel & Öchsner, 2010].

Hauptziel ist es zunächst die Steifigkeitsbeziehung einer in Abb. 7.1 dargestellten einfachen Gesamtstruktur aufzustellen. Dabei bildet die Grundlage die Gleichung

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (7.1)$$

worin \mathbf{K} die Gesamtsteifigkeitsmatrix, \mathbf{F} der Gesamtlastvektor und \mathbf{u} der Vektor mit den gesuchten Knotenverschiebungen ist. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix wird aus den Beiträgen der Einzelemente ermittelt (Assemblierung).

Ein Einzelement ist immer durch Knoten mit anderen Elementen verbunden, wobei an jedem Knoten Verschiebungen und Kräfte eingeführt werden. Zur Lösung des Gesamtproblems müssen Gleichgewicht und Kompatibilität erfüllt sein. Letzteres ist bereits durch die Definition des Verschiebungsvektors für alle an einem Knotenpunkt zusammenhängenden Elemente gegeben.

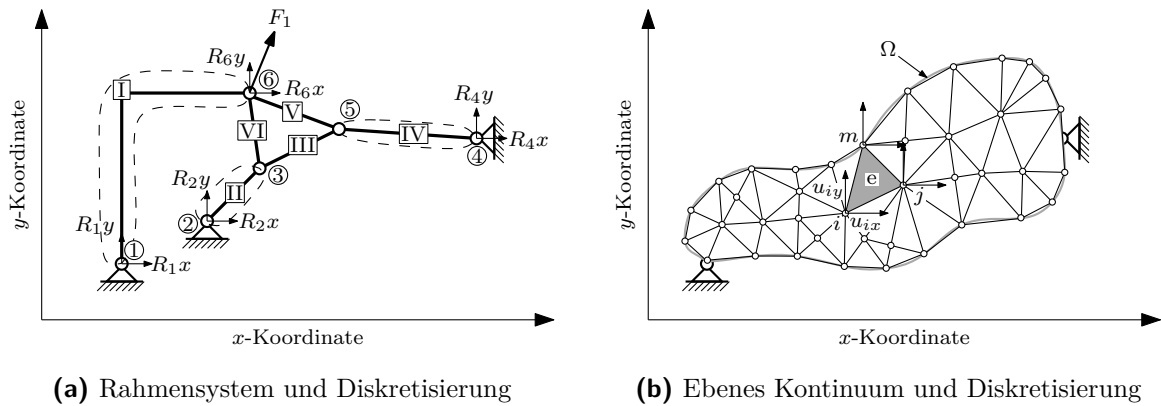


Abbildung 7.1: Diskretisierung des Gesamtsystems bei FE-Berechnungen

In Abb. 7.1a ist ein Stabwerk dargestellt. Es ist an den Knoten 1, 2 und 4 gehalten und wird am Knoten 6 durch eine Einzelkraft F_1 beansprucht. Bei solchen Stabwerken ist ein Einzelement ein Stab. Nach Einführung von Kräften und Verschiebungen für jeden Einzelknoten kann die Steifigkeitsbeziehung für ein Einzelement als

$$\mathbf{F}_p^e = \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{u}_p \quad (7.2)$$

angegeben werden. Dies ermöglicht eine Verknüpfung der Knotenkräfte mit den -verschiebungen. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix kann nun durch Aufstellen der Gleichgewichtsbedingung an jedem Knoten bestimmt werden. Damit ergibt sich die *Hauptgleichung der FE-Methode*

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K} = \sum_e \mathbf{k}_{ij}^e \quad (7.3)$$

in der auf der linken Seite der Vektor \mathbf{F} mit den äußeren Lasten (eingepögte Lasten bzw. Auflagerreaktionen) steht. Der rechtsseitige Vektor \mathbf{u} enthält alle Knotenverschiebungen. Solange die Einzelsteifigkeitsmatrizen \mathbf{k}_{ij}^e aufgestellt werden können und die Einzelemente an den Knoten miteinander gekoppelt sind, ist die Matrix-Verschiebungsmethode exakt und die Knotenverschiebungen und -kräfte können in Abhängigkeit der äußeren Lasten bestimmt werden, vgl. [Merkel & Öchsner, 2010].

Üblicherweise ist jedoch in Strukturen der Spannungs- und Verzerrungszustand im Inneren eines

Elements bzw. eines Kontinuums von Interesse. Aus diesem Grund wird eine Diskretisierung des Kontinuums erforderlich, wie sie Abb. 7.1b zeigt. Danach wird das betrachtete Kontinuum in endlich viele Elemente mit endlicher (finiter) Größe aufgeteilt. Die Bedingungen zu Kompatibilität und Gleichgewicht können dann allerdings nicht mehr beide gleichzeitig *exakt* erfüllt werden – eine der beiden wird nur im Mittel erfüllt. Bei der hier betrachteten Verschiebungsmethode wird die Kompatibilität nur im Rahmen des Approximationsgrades exakt erfüllt.

Mit Hilfe des Stoffgesetzes und unter der Verwendung geeigneter Prinzipien (hier: Prinzip der virtuellen Arbeit) können letztlich die Elementspannungen ermittelt werden. Zusammengefasst kann die FE-Methode für das Kontinuum (sowohl im zwei- als auch im dreidimensionalen Fall) in folgende Schritte werden:

1. *Diskretisierung des Kontinuums*

Je nach Dimension wird das System in mehrere Linien-, Flächen- oder Volumenelemente unterschiedlicher Knotenanzahl aufgeteilt. Die Kontaktbereiche zweier Elemente sind im eindimensionalen Fall Punkte, im zweidimensionalen Fall Linien und im dreidimensionalen Fall Flächen. Liegen zwei Punkte in unterschiedlichen Elementen, sind diese *nicht* direkt mit einander verbunden.

2. *Einführung der Unbekannten*

Im Falle der Verschiebungsmethode werden die Knotenverschiebungen \mathbf{u}_{ij} als Unbekannte aufgefasst. Die Verschiebungen sind für jedes angrenzende Element ausschließlich in den zuvor festgelegten Knoten identisch, wodurch die Kompatibilität direkt erfüllt wird. Der Informationsfluss zwischen zwei Elementen ist ausschließlich über die Knoten möglich, d. h. über die Elementränder werden keine Kräfte übertragen, selbst wenn die Ränder zusammenfallen.

3. *Beschreibung des Verschiebungsfeldes*

Innerhalb eines Elements kann das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$ als Funktion der Knotenverschiebungen \mathbf{u}_p durch geeignete Funktionen $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ approximiert werden (sog. Ansatz- bzw. Formfunktionen, *shape-functions*): $\mathbf{u}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_p$. Dabei sind die Verschiebungsansätze mit jenen von benachbarten Elementen kompatibel, wobei die Wahl der Formfunktionen entscheidend die Güte der Approximation beeinflusst.

4. *Anwendung des Stoffgesetzes*

Durch die Kenntnis des Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$ eines Elements ist über die kinematische Beziehung auch dessen Verzerrungsfeld $\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x})$ bekannt: $\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_1 \mathbf{u}^e(\mathbf{x})$, wobei \mathbf{D}_1 ein Differentialoperator 1. Ordnung ist³⁸. Über das Stoffgesetz kann dann der Spannungszustand als Funktion der Knotenverschiebungen ermittelt werden. Für linear-elastisches Materialverhalten (Stoffmatrix \mathbf{D}) gilt $\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \mathbf{D}_1 \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_p = \mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_p$

5. *Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit*

Den Spannungen entlang der Elementränder werden über das Prinzip der virtuellen Arbeit äquivalente Knotenkräften zugeordnet. Es gilt $\delta \Pi_{\text{ext}} = \delta \Pi_{\text{int}}$. Für die Einzelsteifigkeit ergibt sich mit den Knotenkräften \mathbf{F}_p^e die Beziehung $\mathbf{F}_p^e = \mathbf{k}^e \mathbf{u}_p$, worin die Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}^e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega$ ist.

6. *Ermitteln der Verschiebungen*

Aus dem Gesamtgleichgewicht erhält man die Gesamtsteifigkeitsbeziehung $\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{u}$. Das Gesamtgleichgewicht wird durch die Erfüllung aller Knotengleichgewichte sichergestellt. Daraus ergibt sich die Gesamtsteifigkeitsbeziehung. Aus dieser allein können die

³⁸Im eindimensionalen Fall ist $\mathbf{D}_1 = \frac{d}{dx}$.

Unbekannten noch nicht gewonnen werden, da die Systemmatrix nicht regulär ist. Durch Berücksichtigung der Randbedingungen können die unbekannt Knotenverschiebungen dann aus einem reduzierten Gleichungssystem $\mathbf{F}^{\text{red}} = \mathbf{K}^{\text{red}} \mathbf{u}_p^{\text{red}}$ berechnet werden.

7. Ermittlung des Spannungszustandes

Die Lösung des Gleichungssystems liefert die Knotenverschiebungen. Mit diesen können dann für jedes Element der Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungsverlauf im Inneren und auch die Auflagerreaktionen bestimmt werden.

Wird ein zeitabhängiger Prozess, wie in diesem Fall ein erhärtendes Betonbauteil, betrachtet muss zusätzlich eine Diskretisierung der Zeitachse vorgenommen werden, da sich die Eigenschaften des Materials ständig ändern. Daher muss für jeden Zeitpunkt das Gleichungssystem gelöst und die entsprechenden Spannungen bestimmt werden.

7.3 Berücksichtigung der Viskoelastizität

Die viskoelastischen Betoneigenschaften werden durch das in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellte Modell beschrieben. Da es sich bei viskoelastischen Effekten um zeitabhängige Prozesse handelt, ist eine Zeitdiskretisierung unumgänglich.

Prinzipiell kann das in Kap. 5 entwickelte Materialmodell in jede beliebige FE-Software implementiert werden, indem die entsprechende Beziehung als Stoffgesetz verwendet wird. Dies bietet sich vor allem dann an, wenn das Materialmodell sowohl den elastischen als auch viskoelastischen Anteil wiedergibt.

Das gegenständliche Modell liefert aber ausschließlich den viskoelastischen Anteil i. S. v. Kriechdehnungen. Durch die differentielle Formulierung der Materialgleichung wird allerdings eine vergleichsweise „einfache“ elementweise Berücksichtigung der Viskoelastizität ermöglicht, indem auch hier der viskoelastische Beitrag als Zusatzeinwirkung verwendet werden kann: Zunächst wird für die Einwirkung im Zeitschritt die Berechnung unter der Annahme von linear-elastischem Material durchgeführt; schließlich werden die erhaltenen Ergebnisse als Zustand zum Zeitschrittbeginn aufgefasst und als Einwirkung für das Modell bereitgestellt. Das Modell liefert dann die entsprechende Kriechdehnung, die als Zusatzeinwirkung zu berücksichtigen ist.

Die Einwirkungen für das Modell können je Element dem Spannungstensor entnommen werden, wobei analoges Materialverhalten für Normal- als auch Schubspannungen unterstellt wird. Zudem wird davon ausgegangen, dass die Querdehnzahl unter Langzeitbelastung der elastischen Querdehnzahl entspricht und keine zusätzliche Modifikation bei Beeinflussung jeder Richtung aus den Querrichtungen erforderlich wird. Für jeden Tensor-Eintrag je Element muss zudem je eine innere Variable je KV-Einheit zur Beibehaltung der Anfangsbedingungen mitgeführt werden. Bei einem mit 3D-Elementen diskretisierten Kontinuum sind das entsprechend der Größe des Spannungstensors 9 Einträge je Element, die sich aufgrund der Symmetrie des Tensors auf 6 reduzieren ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$) für die das Materialmodell ausgewertet werden muss. Das bedeutet für eine aus 10 KV-Einheiten bestehende KV-Reihe dann $10 \cdot 6 = 60$ erforderliche Speicherplätze je 3D-Element, wobei ihre Anzahl im Zeitverlauf konstant bleibt. Eine mögliche Alternative besteht darin, zunächst eine Hauptachsentransformation des Tensors vorzunehmen und dann das Modell auf die drei Hauptspannungen anzuwenden. Dadurch kann die Anzahl an erforderlichen Variablen zusätzlich halbiert werden.

7.4 Implementierung in eine kommerzielle FE-Umgebung

Für die Validierung des neuen Modells beim Einsatz in dreidimensionalen Strukturen, wurde es in eine kommerziell erhältliche FE-Umgebung implementiert. Dabei handelt es sich um das Software-Paket SOFiSTiK, das eine modular aufgebaute FE-Umgebung bereitstellt und vielfach für die Simulation von Problemen des Betonbaus eingesetzt wird. Grundsätzlich stellt SOFiSTiK eine Schnittstelle zur Implementierung von eigenen Materialmodellen zur Verfügung, über die das Modell in der zuvor beschriebenen Form implementiert werden kann. Die Programmierung hierzu muss allerdings in externen Programmierumgebungen (z. B. VisualBasic, C++, Lua, ...) vorgenommen werden. So kann schließlich eine Systemdatei (Materialtreiber) erzeugt werden, die von SOFiSTiK zur Laufzeit geladen werden kann. Dadurch entfallen Einschränkungen, die sich z. B. durch die Verwendung der SOFiSTiK-internen Programmiersprache CADINP ergeben und es kann die Recheneffizienz gegenüber der internen Programmierung um ein Vielfaches gesteigert werden.

7.5 Veranschaulichung der Wirkungsweise des Modells

Im Folgenden soll die Wirkungsweise des für dreidimensionale Elemente implementierten Modells anhand einfacher Beispiele demonstriert werden. Validiert wird das Modell anschließend anhand der Nachrechnung des Zwangrahmenversuchs, wobei dieser dann vollständig in der FE-Umgebung simuliert wird. Neben dem SOFiSTiK-Modul AQUA zur Materialdefinition werden die Module SOFIMSHA zur Netzgenerierung, HYDRA für die Berechnung des Temperaturfeldes und ASE für die Ermittlung der resultierenden Spannungen eingesetzt.

Nach erfolgter Material- und Netzdefinition wird zunächst mit den entsprechenden Rand- und Übergangsbedingungen das instationäre Temperaturfeld bestimmt, das gemeinsam mit möglichen zusätzlichen Einwirkungen (z. B. aus Schwinden) die Haupteinwirkung des linear-elastischen Systems darstellt.

7.5.1 Stufenbeanspruchung

Zur Demonstration der Funktionsweise wird zunächst ein vollständig behindertes Betonelement mit konstantem Elastizitätsmodul von $34,1 \text{ GN/m}^2$ betrachtet. Abb. 7.2 zeigt die hierzu verwendeten räumlichen FE-Berechnungsmodelle. Das ganz links dargestellte FE-Modell 1 kann sich

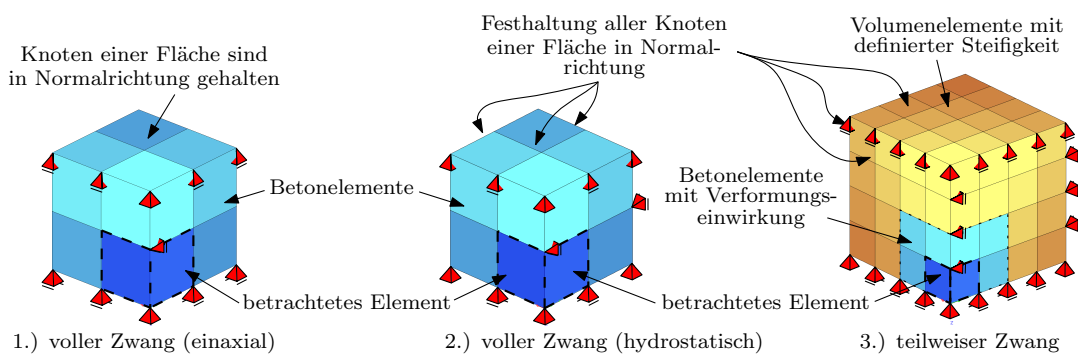


Abbildung 7.2: FE-Idealisierung verschieden gelagerter Betonkörper

in zwei Raumrichtungen frei verformen, wogegen die Verformung in eine Richtung vollständig durch unendlich steife Lagerung verhindert wird. Dies erzeugt einen einaxialen Spannungszustand.

Beim in der Mitte dargestellten FE-Modell 2 wird – wenn die Verformung jedes Knotens jeder Seite des Betonwürfels normal zur jeweiligen Außenfläche behindert wird – ein hydrostatischer Spannungszustand erzwungen: Damit wird eine Volumenänderung des Modells unmöglich.

Demgegenüber ist rechts FE-Modell 3 zur (mehraxialen) Berechnung von teilweise gezwängten Problemen dargestellt. Jene Betonelemente, in die die Zusatzverformungen eingetragen werden, werden von Volumenelementen mit einer definierten unveränderlichen Steifigkeit umgeben, so dass eine teilweise Verformung ermöglicht wird.

Um die Implementierung des Ansatzes zu überprüfen wird zunächst das einaxiale FE-Modell verwendet und damit der bereits in Abschn. 5.6.5 untersuchte Belastungsfall nachgerechnet. Das Ergebnis ist in Abb. 7.3a dargestellt und zeigt, dass beide Algorithmen idente Ergebnisse liefern und die 3D-Implementierung sich prinzipiell richtig verhält.

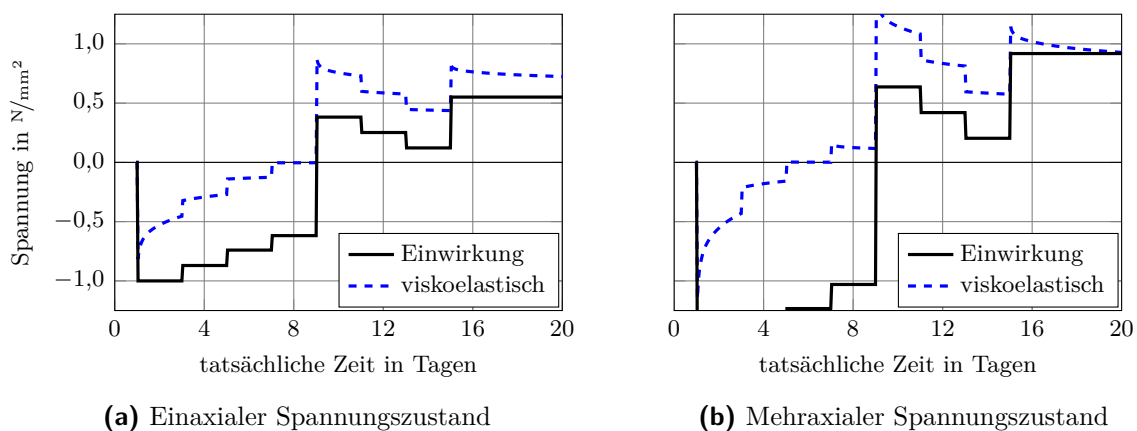


Abbildung 7.3: Vollständige Behinderung – einaxial und mehraxial

Abb. 7.3b zeigt denselben Versuch, diesmal jedoch unter vollständiger Behinderung aller Raumrichtungen (FE-Modell 2 in Abb. 7.2). Der Vergleich mit den Ergebnisse jenen unter einaxialer Beanspruchung (FE-Modell 1) zeigt, dass sich das FE-Modell unter vollständiger Behinderung im Grunde gleichartig verhält. Unterschiede ergeben sich aus der durch den Einfluss der jeweiligen Querbehinderung verursachten Änderung des Spannungsniveaus: Dadurch wird zunächst mehr Spannung im System aufgebaut was zu einem größeren Spannungsabbau infolge von Relaxation führt. Dieser Einfluss wird auch in den entsprechend höheren Spannungssprüngen deutlich. Gegenüber der einaxialen Variante wird aus diesen beiden Gründen der Spannungsnulldurchgang früher erreicht.

Unterstellt man eine teilweise Verformungsbehinderung, ähneln die Ergebnisse qualitativ einer reduzierten Querdehnungsbehinderung: Das Spannungsniveau liegt dann zwischen einaxialer und hydrostatischer Behinderungssituation, und der Einfluss auf den Spannungsabbau ist ebenfalls ähnlich.

7.5.2 Kontinuierliche Beanspruchung

Nun wird das Betonelement einer kontinuierlichen Beanspruchung ausgesetzt, die infolge der Hydratationswärmeentwicklung entsteht. Grundsätzlich ist es in FE-Berechnungen weder ziel-

führend noch möglich die Temperaturentwicklung einzelner Elemente durch diskrete Zeitreihen vorzugeben. Aus diesem Grund wird eine Wärmequellfunktion eingesetzt um das Temperaturfeld unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen ermitteln zu können. Für den zeitlichen Verlauf der Hydratationswärmeentwicklung von Beton existieren verschiedene Ansätze, die vielfach auf Exponentialfunktionen basieren. Unterschiede bestehen hauptsächlich in der Anzahl der Regressionsparameter, mit der die jeweilige Modellfunktion an Messdaten angepasst werden kann. In dieser Arbeit wird als Wärmequellfunktion eine Funktion nach JONASSON verwendet, vgl. [Jonasson, 1984]. Die freien Parameter a , b und τ_k sind [Schlicke, 2014] entnommen, und wurden durch Anpassung an teiladiabatische Kalorimeterversuche gewonnen.

$$\frac{Q(t_{\text{eff}})}{Q_{\text{max}}} = \frac{T(t_{\text{eff}}) \cdot S_c}{\Delta T_{\infty} \cdot S_c} = \exp \left[b \cdot \ln \left(1 + \frac{t_{\text{eff}}}{\tau_k} \right)^a \right] \quad (7.4)$$

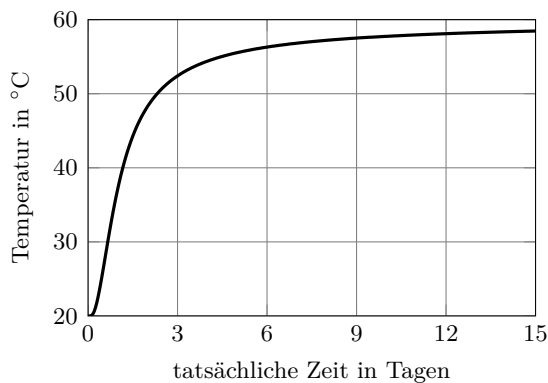
mit:

- a, b, τ_k ... freie Regressionsparameter: $-0,8486 [-]$; $-0,0315 [-]$; $1\,770 \text{ h}$
- ΔT_{∞} ... maximale Temperaturentwicklung: $41,60 \text{ }^\circ\text{C}$
- S_c ... spezifische Wärmekapazität (const.): $2\,500 \text{ kJ/m}^3\text{K}$

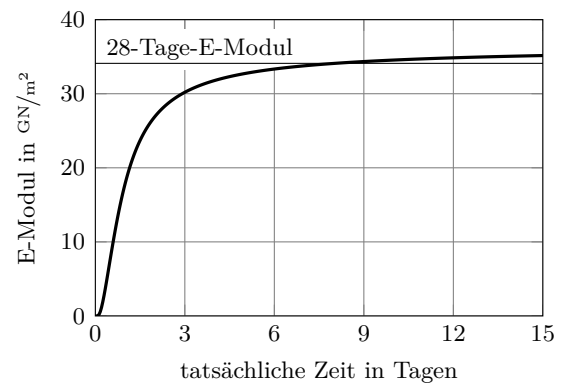
Die resultierenden Spannungen werden mit den zuvor gezeigten FE-Modellen berechnet, wobei die Kriechkurven aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] mit $RH = 60\%$ und $h_0 = 2000 \text{ mm}$ verwendet werden, welche aufgrund ausschließliche Druckbeanspruchung unmodifiziert blieben. Die entsprechenden Parameter der KV-Einheiten sind in Tab. 7.1 zusammengefasst, wobei diese wiederum nach dem in Abschn. 5.3.1 vorgestellten Verfahren bestimmt wurden.

Tabelle 7.1: Parameter der KV-Reihe für $\beta_H \approx 1\,353$ und $\varphi_0 \approx 3,14$ bzw. $m = 0,30$

μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1/E_\mu$	0,0088	0,0088	0,0175	0,0350	0,0699	0,1407	0,2842	0,3281	0,0940	0,0112
E_μ	113,115	113,787	57,028	28,579	14,309	7,109	3,519	3,048	10,635	88,922
E_μ^*	36,081	36,295	18,191	9,116	4,564	2,268	1,123	0,972	3,392	28,364
τ_μ	10^{-20}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
α_μ	1,555	1,555	1,555	1,555	1,555	1,554	1,543	1,063	1,000	1,000



(a) Temperaturentwicklung



(b) Entwicklung des E-Moduls

Abbildung 7.4: Zeitliche Entwicklung von Temperatur und Elastizitätsmodul

An den Elementaußenflächen ist kein Temperatúraustausch mit der Umgebung möglich, sodass der Körper eine adiabatische Temperaturerhöhung erfährt. Die adiabatische Temperaturentwicklung ist in Abb. 7.4a dargestellt.

Die Berechnung wird neben vollständiger auch für teilweise (FE-Modell 3 in Abb. 7.2, umgebender E-Modul $E_U = 2/3 \cdot E_C$) Verformungsbehinderung durchgeführt, jeweils unter der Annahme eines konstanten und veränderlichen E-Moduls. Abb. 7.4b zeigt die Entwicklung des E-Moduls. Um den Einfluss der Viskoelastizität zu verdeutlichen, sind die Berechnungsergebnisse auch den linear-elastischen Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Viskoelastizität gegenübergestellt.

Abb. 7.5 zeigt die Ergebnisse des vollständig bzw. teilweise verformungsbehinderten Würfels unter adiabatischer Temperatureinwirkung. Die Ergebnisse mit durchgezogenen Linien zeigen dabei einen zugrundegelegten konstanten E-Modul, wogegen sich bei den strichliert dargestellten Ergebnissen der E-Modul im Zeitverlauf ändert. Schwarze Linien geben die Berechnungsergebnisse ohne Berücksichtigung der Viskoelastizität wieder, bei blauen sind die viskoelastischen Eigenschaften entsprechend dem Modell berücksichtigt worden.

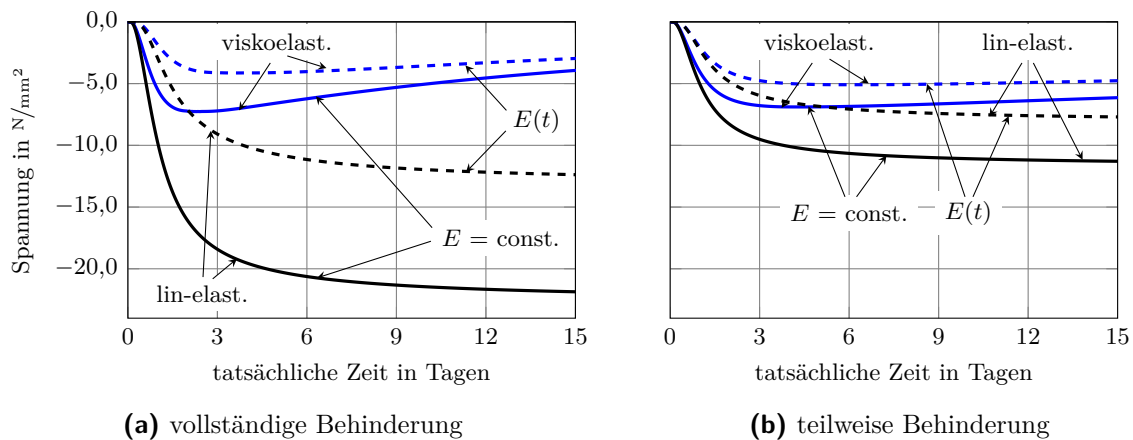


Abbildung 7.5: Spannungsentwicklung unter vollständiger und teilweiser Verformungsbehinderung

Grundsätzlich zeigt sich sowohl für die vollständige als auch teilweise behinderte Variante ein großer Einfluss der Viskoelastizität auf die resultierenden Spannungen. Im teilweise verformungsbehinderten Modell zeigt der Vergleich mit den linear-elastischen Ergebnissen, dass die Spannungen um den Faktor des Behinderungsgrades kleiner sind. Dabei ist bei veränderlichem E-Modul der Unterschied der endgültigen Spannungen kleiner, da auch der Behinderungsgrad im Zeitverlauf abnimmt. Dies wird erst im Zeitverlauf deutlich, da zu Beginn der Festigkeitsentwicklung bei sehr kleinem Elastizitätsmodul trotz endlicher Steifigkeit der Randbedingung der Behinderungsgrad immer noch rund 100 % beträgt.

Allerdings bleiben im FE-Modell mit teilweiser Verformungsbehinderung am Betrachtungsende größere Spannungen erhalten als es beim vollständig verformungsbehinderten Modell der Fall ist. Dies liegt daran, dass nicht nur ein ausschließlicher Zwangspannungsabbau hervorgerufen wird, sondern sich auch eine tatsächliche Verformungsänderung einstellen kann. Die teilweise Verformungsbehinderung führt dann zu größeren Spannungen, da der Effekt der vollständigen Behinderung des viskoelastischen Potentials größer ist, als die geringere Anfangsspannung bei teilweiser Verformungsbehinderung, vgl. [Schlicke, 2014].

7.6 Verifikation der Implementierung anhand des Zwangrahmenversuchs

Zur weiteren Validierung des in die FE-Umgebung implementierten Modells zur Berücksichtigung der Viskoelastizität wird der bereits in Abschn. 6.2 vorgestellte Zwangrahmenversuch nachgerechnet. Das hierzu verwendete FE-Modell ist in Abb. 7.6 dargestellt.

Sowohl Dämmung, Schalung als auch die Betonelemente wurden mittels dreidimensionaler Volumenelemente modelliert. Der Zwangrahmenversuch wird unter Ausnutzung der Symmetrie erstellt und ist durch entsprechende Symmetriebedingungen gelagert. Die Zwängung durch den Rahmen wird über linear-elastischer Federelemente simuliert, die als Steifigkeit die in Versuchen ermittelte Rahmensteifigkeit von $1\,053\text{ MN/m}$ haben.

Sowohl Dämmung als auch Schalung werden nur in der vorausgehenden thermischen Berechnung berücksichtigt und haben keinen mechanischen Einfluss auf das Spannungsergebnis. Der Temperatureaustausch mit der Umgebung wird über Oberflächenrandbedingungen erfasst; dabei wird eine gemessene näherungsweise konstante Umgebungstemperatur von $21,6\text{ °C}$ angenommen. Die Frischbetontemperatur entspricht der Umgebungstemperatur.

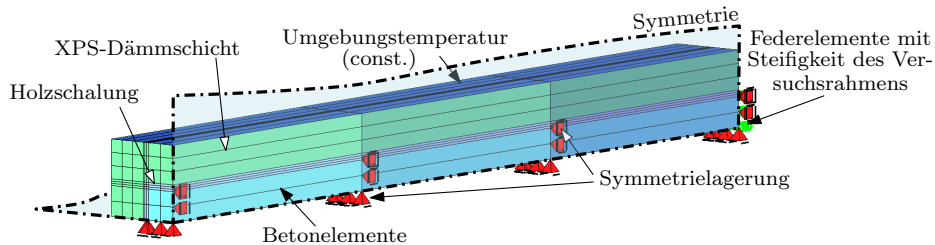


Abbildung 7.6: FE-Modell des Zwangrahmenversuchs

Wie zuvor erwähnt, muss für eine Simulation der Temperaturentwicklung zunächst die Wärmequellfunktion sowie die Umgebungsrandbedingungen bekannt sein. Die Wärmequellfunktion samt den verwendeten Parametern wurde bereits im vorhergehenden Abschnitt vorgestellt, s. Glg. (7.4). Die angesetzten Wärmeübergangskoeffizienten können Tab. 7.2 entnommen werden. Entsprechend des Ausschaltzeitpunktes wird der Wärmeübergangskoeffizient Dämmung-Luft dann auf Beton-Luft geändert. Tab. 7.3 gibt die Wärmeleiteigenschaften der in der Temperaturfeldsimulation berücksichtigten Materialien wieder. Abb. 7.7 zeigt die Ergebnisse der

Tabelle 7.2: Verwendete Wärmeübergangskoeffizienten

Phasenübergang	Wärmeübergangskoeffizient in $\text{W/m}^2\text{K}$
Luft-Wärmedämmung	10
Luft-Beton	20

Temperaturfeldsimulation und stellt sie den aus den Temperaturmessungen gewonnenen Daten gegenüber. Dabei wird der Temperaturverlauf je eines Elements der Randzone und Kernzone ausgewertet. Das Temperaturfeld bildet die Haupteinwirkung im Zwangrahmenversuch.

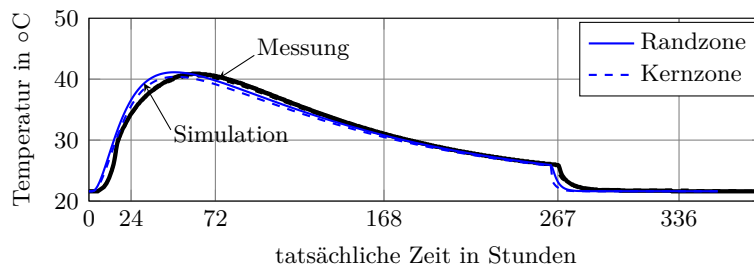
Um eine gute Übereinstimmung zwischen Messdaten und berechneter Temperaturentwicklung zu ermöglichen, ist es notwendig die thermischen Randbedingungen hinreichend genau zu erfassen. Dies gelingt nur, wenn sowohl Schalung als auch Wärmedämmung im FE-Modell als eigene

Tabelle 7.3: Thermische Eigenschaften der verwendeten Materialien

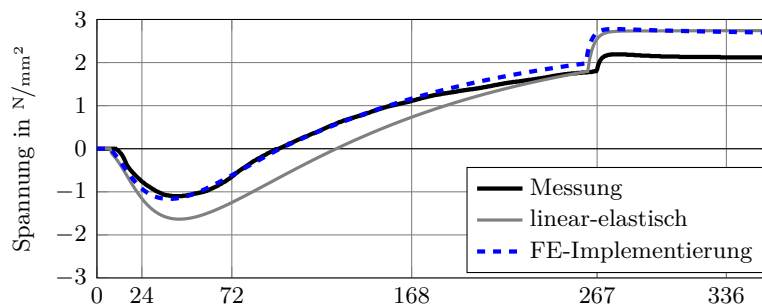
Material	W.-Leitfähigkeit in W/mK	W.-Speicherkapazität in $\text{kJ/m}^3\text{K}$
Beton	2,40	2 500
XPS-Dämmung	0,06	100
Holzschalung	0,24	1 600

Volumenelemente berücksichtigt werden. Es ist nicht ausreichend deren Einfluss in einem entsprechend ermittelten Übergangskoeffizienten „zusammenzufassen“.

Der Grund liegt in der nicht vernachlässigbaren Wärmespeicherwirkung von Schalung und Wärmedämmung, die sich in diesem Beispiel deutlich auf die Temperaturen im Inneren des Bauteils auswirken. Erst durch ihre Berücksichtigung und damit durch die darin gespeicherte Wärme wird es möglich auch den Temperaturabfluss nach Erreichen des Temperaturmaximums realistisch zu erfassen³⁹, vgl. [Jędrzejewska et al., 2018].

**Abbildung 7.7:** Hydratationswärmeentwicklung des Zwangrahmens

Die Entwicklung des E-Moduls wird wie in Abschn. 6.2.5 beschrieben mit dem Modell von Weishe erfasst. Analog wurde das Setting mit $t_{\text{crit}} = t_{\text{eff}} = 10,50 \text{ h}$ festgelegt. In der Berechnung wird ebenfalls Schwinden als Einwirkung berücksichtigt. Dabei wird wie in Abschn. 6.2.6 von einem Endschwindmaß von $\varepsilon_{\text{cs},\infty} = 0,05 \text{ ‰}$ ausgegangen. Dessen zeitliche Entwicklung ist wiederum an die Festigkeitsentwicklung gekoppelt. Als Kriechkurven werden jene aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] für $RH = 60 \text{ ‰}$ und $h_0 = 125 \text{ mm}$ mit Modifikation der Zugkriechkurven nach Abschn. 6.2.7 verwendet.

**Abbildung 7.8:** Berechnungsergebnisse am Zwangrahmen

³⁹Bei sehr dicken Bauteilen ist hingegen die Berücksichtigung von Schalung und Wärmedämmung über zusätzliche Volumenelemente nicht grundsätzlich erforderlich, da hier der Einfluss der Schalung hauptsächlich die Temperaturen in der Oberflächenzone beeinflusst.

Abb. 7.8 stellt nun die gemessene der berechneten Rahmenspannung gegenüber. Dabei ist deutlich zu erkennen, dass mit der FE-Implementierung ebenfalls eine gute Übereinstimmung erzielt werden kann, sofern die thermischen Randbedingungen und damit die Temperaturentwicklung hinreichend genau erfasst wird. Im Vergleich mit bisherigen, auf dem „manuellen“ Superpositionsprinzip basierenden Ansätzen wurde zudem bestätigt, dass die Recheneffizienz um ein Vielfaches gesteigert werden konnte.

7.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das zuvor entwickelte Materialmodell in eine kommerzielle FE-Umgebung implementiert. Um die Implementierung zu überprüfen bzw. validieren wurde die Wirkungsweise des Modells anhand einfacher FE-Modelle demonstriert. Dabei wurde sowohl der Einfluss mehrdimensionaler Verformungsbehinderungen und auch eines zeitlich veränderlichen E-Moduls betrachtet. Da sich das Modell erwartungsgemäß verhält, wurde im Anschluss der bereits bekannte Zwangrahmenversuch nachgerechnet. Zu diesem Zweck wurde ein eigenes FE-Modell mit Volumenelementen erstellt. Dieses beinhaltet neben den Betonelementen auch die angeordneten Dämm- und Schalelemente, um das Temperaturfeld realistisch zu erfassen. Dabei konnten Simulationsergebnisse von hoher Qualität erreicht werden, die sich gut mit den gemessenen Daten decken.

8 Anwendungsbeispiele

8.1 Bodenplatte

8.1.1 Eingangsgrößen

Im ersten Beispiel wird eine erhärtende Bodenplatte mit den Abmessungen $L/2 = B/2 = 20$ m und $H = 4$ m betrachtet. Dies entspricht einem Verhältnis von $L/H = B/H = 10$. Es werden dieselben Betoneigenschaften unterstellt, wie sie der Berechnung des Zwangrahmens entnommen werden können. Abweichend davon werden allerdings als Parameter für die Kriecheigenschaft die Umgebungsluftfeuchte mit $RH = 60\%$ und für $h_0 = 2000$ mm eingestellt, um die Gegebenheiten auf der Baustelle realistisch abzubilden. Für Druckbeanspruchung werden die unmodifizierten Kriechkurven nach Eurocode 2 verwendet, wobei die Parameter für die KV-Einheiten Tab. 7.1 entnommen werden können. Für die Zugseite werden die Kriechkurven wiederum gemäß dem Vorschlag von [Schlicke, 2014] modifiziert. Damit ergeben sich die in Tab. 8.1 angegebenen Parameter für die KV-Einheiten.

Tabelle 8.1: Parameter der KV-Reihe für $\beta_H \approx 1\,353$ und $\varphi_0 \approx 0,30 \cdot 3,14$ bzw. $m = 0,17$

μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1/E_\mu$	0,0694	0,0334	0,0494	0,0730	0,1080	0,1603	0,2344	0,2103	0,0544	0,0064
E_μ	14,416	29,968	20,261	13,697	9,257	6,237	4,267	4,756	18,396	156,584
E_μ^*	15,328	31,863	21,543	14,564	9,843	6,632	4,537	5,057	19,560	166,490
τ_μ	10^{-20}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
α_μ	1,425	1,425	1,425	1,425	1,425	1,425	1,416	1,048	1,000	1,000

Die Frischbetontemperatur wird mit 25°C angenommen, für die initiale Bodentemperatur werden 15°C angesetzt. Einflüsse aus Temperaturschwankungen der Umgebungsluft werden vernachlässigt – es herrschen konstante 20°C . Zudem werden an dieser Stelle auch keine zusätzlichen Energieeinträge in Form von Sonneneinstrahlung berücksichtigt.

Die Platte ist in ihrer Lagerfuge frei beweglich d. h. eine horizontale Behinderung die z. B. infolge von Reibungseffekten auftreten kann wird nicht betrachtet. Die Lagerung in Eigengewichtsrichtung erfolgt auf nichtlinearen Bettungsfedern, die unter Zugbeanspruchungen ausfallen. Die Federn werden als nahezu unendlich steif angenommen. Damit ist es für die Platte nicht möglich eine Setzungsmulde auszubilden, allerdings kann sie sich aus der Lagerfuge heben. Die Platte wird als „Eingussystem“ simuliert, d. h. der Bauablauf findet keine Berücksichtigung in der Berechnung.

An zusätzlichen Einwirkungen wird autogenes Schwinden berücksichtigt. Da Trocknungsschwinden im Hinblick auf die Massigkeit der Bodenplatte im Erhärtungszeitraum von untergeordneter Bedeutung ist, wird es vernachlässigt.

8.1.2 FE-System

Abb. 8.1 zeigt das FE-Modell der Bodenplatte, welches unter Ausnutzung der Symmetrie in SOFiSTiK erstellt wurde.

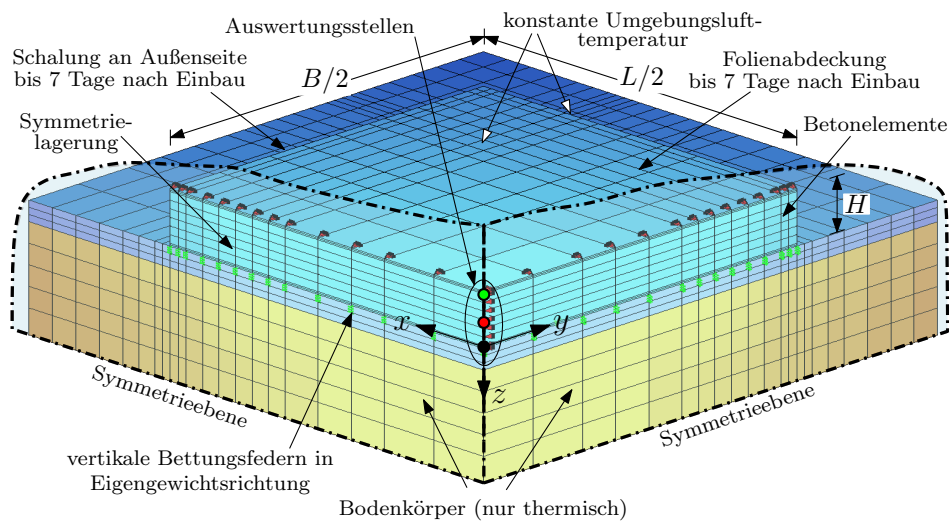


Abbildung 8.1: FE-Modell einer massigen Bodenplatte

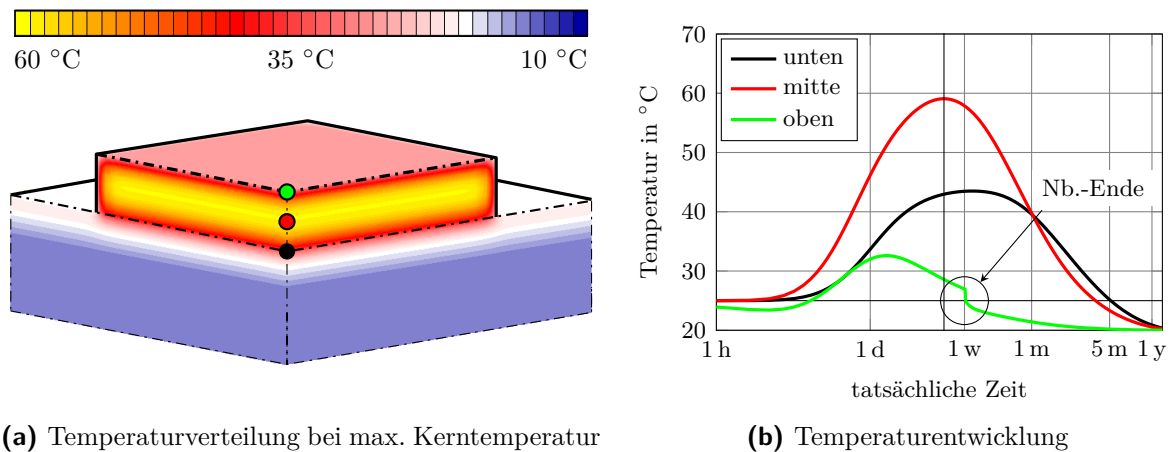
Der unter der Bodenplatte erkennbare Bodenkörper wird nur in der thermischen Simulation als wärmespeichernde Randbedingung berücksichtigt und später in der Spannungsberechnung durch vertikale nichtlineare Auflagerfedern ersetzt. Als Wärmeleitfähigkeit werden für den Boden $1,80 \text{ W/mK}$ bei einer Wärmespeicherkapazität von $1900 \text{ kJ/m}^3\text{K}$ angesetzt, was einem von Sand und Kies durchsetzten Erdreich entspricht.

Der Temperatureaustausch mit der Umgebung kann einerseits durch die Ober- und Seitenflächen der Bodenplatte, sowie über die Oberfläche des angrenzenden Bodens erfolgen, an den Symmetrieebenen und bodenseitigen Modellgrenzen ist kein Wärmeaustausch möglich, vgl. Abschn. 8.2.2. Bis 7 Tage nach Betonage befindet sich die Platte in einer Schalung. Der Wärmeübergangskoeffizient beträgt hierbei zunächst $5,20 \text{ W/m}^2\text{K}$ und wird dann auf $20 \text{ W/m}^2\text{K}$ erhöht. Entsprechend den Empfehlungen nach [ZTV-W LB 215, 2004] wird als Nachbehandlungsmaßnahme eine oberseitige Folienabdeckung angeordnet, was einem Wärmeübergangskoeffizienten von $12,50 \text{ W/m}^2\text{K}$ entspricht. Mit der Schalung wird nach 7 Tagen die Folie entfernt und dann ist auch die Oberseite der direkten Umgebungsluft ausgesetzt, wodurch der Wärmeübergangskoeffizient ebenfalls auf $20 \text{ W/m}^2\text{K}$ erhöht wird. Der Temperatureaustausch zwischen Umgebungsluft und Boden wird mit demselben Wärmeübergangskoeffizient von jeweils $20 \text{ W/m}^2\text{K}$ erfasst. An den Modellgrenzen des Bodens ist hingegen kein Wärmeabfluss möglich. Insgesamt kann somit der Wärmeaustausch mit bzw. der -abfluss in den Boden sowie dessen wärmespeichernder Einfluss realistisch nachgebildet werden.

Das resultierende Temperaturfeld wird zeitdiskret mit dem Modul HDYRA berechnet. Der Einfluss der Temperatur auf die Reife und damit auf die Betoneigenschaften wird im Nachgeschalteten Modul ASE bei der Spannungsermittlung berücksichtigt. Zur besseren Vergleichbarkeit werden die Spannungen zunächst ohne und dann mit Berücksichtigung der Viskoelastizität bestimmt und im Zeitverlauf geplottet.

8.1.3 Berechnungsergebnisse

Abb. 8.2 zeigt die Ergebnisse aus der Temperaturfeldsimulation. Dabei ist in Abb. 8.2a die Situation zum Zeitpunkt des Auftretens der maximalen Kerntemperatur (110 Stunden) dargestellt. Abb. 8.2b zeigt hingegen den zeitlichen Verlauf der Temperaturentwicklung an drei ausgewählten Knoten.



(a) Temperaturverteilung bei max. Kerntemperatur

(b) Temperaturentwicklung

Abbildung 8.2: Zustand zum Zeitpunkt der maximalen Kerntemperatur und Temperaturentwicklung in Bodenplattenmitte

Die drei zur Auswertung der Temperaturen herangezogenen Knoten befinden sich in der Plattensymmetrieachse. Über die Höhe betrachtet ist dies ein Punkt an der Plattenunterseite (schwarz), einer in Plattenmitte (rot) und einer an der Plattenoberseite (grün). Die Temperaturen im Zeitverlauf ergeben sich erwartungsgemäß: Die höchste Temperatur wird im Kern erreicht, da dieser nicht im unmittelbaren Kontakt zu den Umgebungsbedingungen steht. Die Temperatur kann nur vergleichsweise langsam abfließen, es herrscht ein quasi-adiabatischer Zustand und Maximaltemperaturen von rd. 60 °C sind die Folge.

Dagegen steht sowohl die Bauteilober- als auch Unterseite in direktem Kontakt mit der (kälteren) Umgebung. An der Bauteilunterseite ist dies der Bodenkörper. In diesen kann zunächst Wärme abfließen, gleichzeitig wird sie im Boden jedoch gespeichert. Die Temperatur ist an der Bauteilunterseite mit Maximalwerten um 43 °C deutlich niedriger als jene im Kern, dennoch ist sie im Vergleich zur Bauteiloberseite (max. 32 °C) wesentlich höher. Da an der Bauteiloberseite ausschließlich ein Wärmeabfluss stattfindet, keine zusätzliche Wärme eingetragen wird und weder wärmespeichernde noch abflussmindernde Randbedingungen (z. B. Schalung, etc.) vorhanden sind, liegt die dort erreichte Maximaltemperatur nicht weit über der Frischbetontemperatur. Das Ende der Nachbehandlung ist deutlich durch einen nahezu sprunghaften Temperaturabfall erkennbar. Dieser resultiert aus dem nun stärkeren Wärmeaustausch mit der Umgebung, sodass die Bodenplatte rascher auskühlen kann. Der Einfluss des Endes der oberseitigen Nachbehandlung bleibt allerdings auf die Oberflächenzone beschränkt. Der durch das Entfernen der Schalung an den Plattenseiten ebenfalls erhöhte Wärmeaustausch hat erwartungsgemäß keinen Einfluss auf die betrachteten Auswertungspunkte in Bauteilmitte. Schließlich ist am Ende des Betrachtungszeitraums (rd. 1 Jahr und 1 Monat) die infolge von Hydratation entstandene Wärme nahezu vollständig abgefließen und im gesamten Bauteil herrscht Umgebungstemperatur – der Temperaturengleich ist damit erreicht.

Wie deutlich zu sehen ist, wird das Temperaturfeld im Querschnitt durch die unterschiedlichen thermischen Randbedingungen beeinflusst: Die anfängliche Speicherung der in den Baugrund abfließenden Hydratationswärme führt zu einer gedämpften Erwärmung der Unterseite und letztlich zu einer sehr verzögerten Abkühlung dieser Seite. Dagegen werden die Temperaturen an den Oberflächen maßgeblich von den klimatischen Randbedingungen bzw. den Nachbehandlungsmaßnahmen beeinflusst. Aufgrund der geringeren Wärmeleitfähigkeit des Betons ist der Temperaturabfluss vom Kern- in den Randbereich begrenzt. Daraus resultieren die erkennbaren höheren Temperaturen im Kernbereich. Dieses größere Wärmepotential führt allerdings auch dazu, dass die nach dem Erreichen der Maximaltemperatur einsetzende Temperaturabnahme rascher erfolgt, vgl. [Schlicke, 2014].

Die Temperaturverteilung im Querschnitt kann nun in drei idealtypische Anteile zerlegt werden. Dabei handelt es sich um je einen *konstant*, *linear* und *nichtlinear* im Querschnitt verteilten Anteil. Der konstante Anteil bewirkt eine zentrische Dehnung und der lineare Anteil eine Verkrümmung, die beide jeweils mit entsprechenden Spannungen korrespondieren. Der nichtlineare Anteil hingegen bildet eine eigene Gleichgewichtsgruppe – Eigenspannungen sind die Folge. Üblicherweise können diese Anteile durch Integration über die Höhe und in die betrachtete Querschnittsbreite ermittelt werden. Ist die Querschnittsbreite konstant und auch die Temperaturverteilung über die Querschnittsbreite annähernd gleichmäßig, kann die Zerlegung vereinfachend durch alleinige Integration über die Querschnittshöhe durchgeführt werden. Ist der nichtlineare Anteil zudem annähernd parabolisch, können die Anteile vereinfachend durch von [Eierle & Schikora, 2000] angegebene Näherungsformeln bestimmt werden. Nach [Schlicke, 2014] sind die Voraussetzungen für die Näherungsformeln für Bodenplatten gegeben, wenn Einflüsse von lageweisem Betoneinbau und massiven Bewehrungslagen in der Randzone auf die Temperatur- (und Steifigkeits)entwicklung im Querschnitt gering sind. Berücksichtigt man zudem nur die spannungswirksam werdenden Temperaturfeldänderungen, so kann aus den ermittelten Anteilen bereits das Verhalten der Bodenplatte abgeschätzt werden. Diese Temperaturfeldänderungen sind in Abb. 8.3 dargestellt.

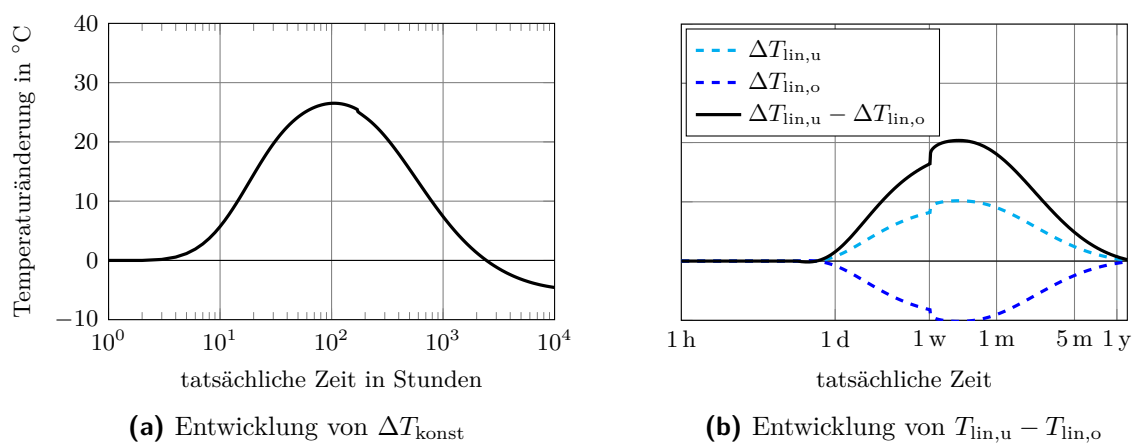


Abbildung 8.3: Temperaturänderungen in der betrachteten Bodenplatte

Deutlich zu erkennen ist, dass der konstante Temperaturanteil im Querschnitt sowohl in der Erwärmungs- als auch Abkühlungsphase sehr ausgeprägt ist. Der lineare Anteil zeigt an der Bodenplattenunterseite zunächst eine Temperaturzunahme an, wogegen die Oberseite eine Abkühlung erfährt, was durch die Randbedingungen erklärt werden kann, denen die Platte ausgesetzt

ist: durch die konstante Umgebungstemperatur, die zudem unterhalb der Frischbetontemperatur liegt, ist die Bauteiloberseite stets kühler als die Unterseite. Dies bewirkt, dass sich die Bodeplatte zunächst aus der Lagerfuge hebt, was jedoch durch das Eigengewicht beeinflusst wird, sodass an der Oberseite ausgeprägte Zugspannungen entstehen müssen. Dies zeigt auch Abb. 8.4 worin die aus der Spannungsberechnung resultierenden Ergebnisse dargestellt sind. Dabei ist in Abb. 8.4a der Spannungszustand beim Erreichen der maximalen Kerntemperatur dargestellt und Abb. 8.4b zeigt die Entwicklung der Spannungen im zeitlichen Verlauf. Ausgewertet wurden jeweils die mit den Temperatureauswertungspunkten korrespondierenden Stellen. Die Ergebnisgröße ist die mittlere Elementspannung in x -Richtung. Aufgrund der Symmetrie ergeben sich für die y -Richtung an der betrachteten Stelle dieselben Werte. Die Spannungen in z -Richtung sind von untergeordneter Bedeutung und werden nicht weiter betrachtet. Abb. 8.5 zeigt zudem die Spannungsverteilung im Plattenmittelpunkt über die Höhe an ausgewählten Zeitpunkten. Die durchgezogenen schwarzen Linien geben die Spannungsergebnisse

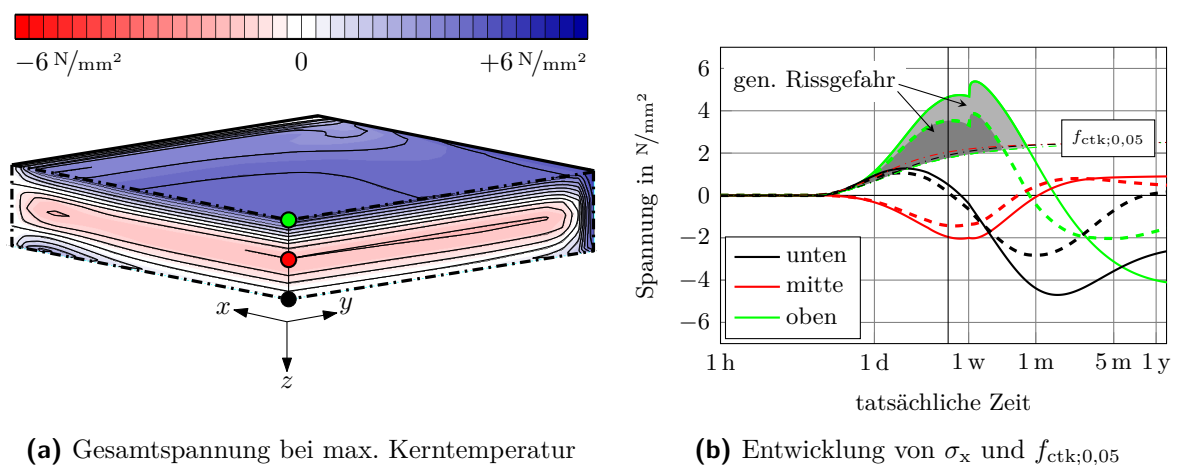


Abbildung 8.4: Zustand bei maximaler Kerntemperatur sowie Entwicklung der Spannung mit und ohne Viskoelastizität in lokaler x -Richtung in Bodenplattenmitte sowie Zugfestigkeit

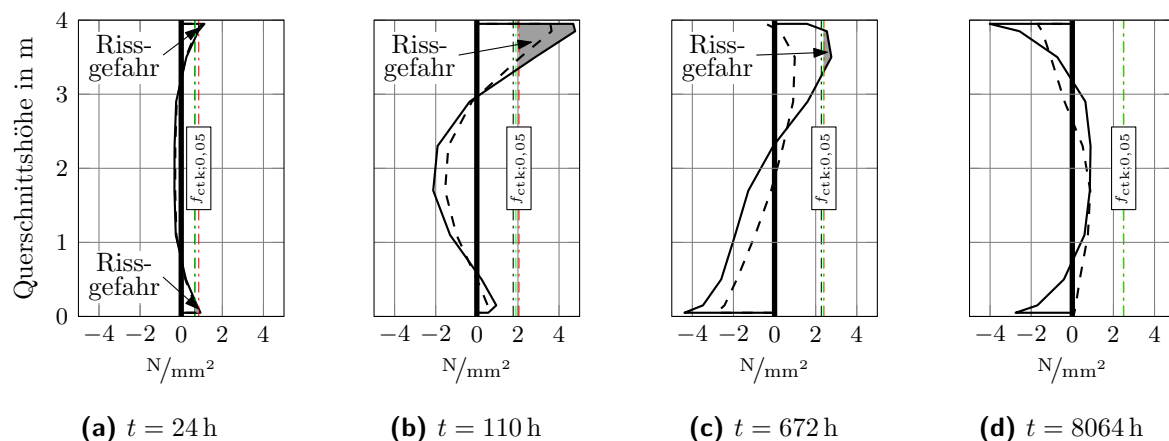


Abbildung 8.5: Spannungsverteilung mit und ohne Viskoelastizität in lokaler x -Richtung in Bodenplattenmitte über die Höhe zu ausgewählten Zeitpunkten sowie Zugfestigkeit

ohne Berücksichtigung der Viskoelastizität wieder. Demgegenüber stehen die strichliert schwarz eingetragenen Ergebnisse, bei denen Viskoelastizität mit dem vorgestellten Materialmodell berücksichtigt wurde und woraus ihr Einfluss sehr deutlich wird. Beide Ergebnisgrößen werden jeweils dem in der entsprechenden Höhenlage zum Betrachtungszeitpunkt herrschenden 5%-Fraktilwert der Zugfestigkeit $f_{ctk;0,05}$ (strichpunktierte vertikale Linien) gegenübergestellt. Zunächst zeigen sich sowohl mit als auch ohne Viskoelastizität ausgeprägte Zugspannungen an der Bauteilober- und in geringerem Maße auch an der Unterseite. Diesen stehen Druckspannungen im Kernbereich gegenüber. Mit fortschreitender Erhärtung kehrt sich jedoch dieser Zustand um, sodass am Ende der Betrachtung schließlich Druckspannungen an der Bauteiloberseite verbleiben und im Kern (geringe) Zugspannungen auftreten. Die Plattenunterseite ist am Ende des Betrachtungszeitraumes (Spannungen mit Viskoelastizität) nahezu spannungsfrei.

8.1.4 Interpretation

Bisher wurde die Gesamtspannungen in jeweiligen Materialpunkt betrachtet. Zur Beurteilung der generellen Rissgefahr muss nach [Schlicke, 2014] diese Spannung mit dem 5 %-Fraktilwert der Zugfestigkeit verglichen werden, wie dies in Abb. 8.4b bzw. auch Abb. 8.5 geschieht. Deutlich ist zu erkennen, dass bereits im frühen Alter der Fraktilwert der Zugfestigkeit an der Oberseite der Bodenplatte stark überschritten und an der Unterseite zumindest erreicht wird. Damit kann eine Rissbildung grundsätzlich nicht ausgeschlossen werden. Da allerdings bereits Mikrorisse ausreichen um den darin vorhandenen Eigenspannungsanteil abzubauen, wird zur Bewertung der Anriss- bzw. Trennrissgefahr die Betrachtung des auftretenden Biegezwanganteils bzw. Anteils aus zentrischem Zwang erforderlich.

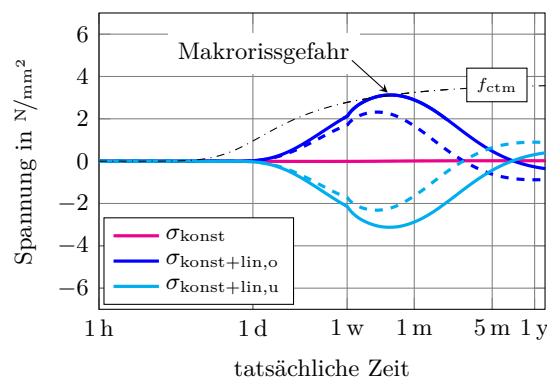


Abbildung 8.6: Um Eigenspannungen bereinigte Spannungsanteile

Hierzu kann ähnlich wie beim Temperaturfeld auch das betrachtete Spannungsfeld in seine idealtypischen Anteile zerlegt werden. Dies ist in Abb. 8.6 dargestellt. Darin ist der Anteil aus zentrischem Zwang (magenta) mit dem Anteil aus Biegezwang überlagert (hell- bzw. dunkelblau) dargestellt, da diese nur gemeinsam auftreten. Obwohl der konstante Temperaturanteil einen ebensogroßen konstanten zentrischen Zwanganteil vermuten ließe, fällt dieser vernachlässigbar gering aus. Der Grund liegt in der vollständigen Verformungsfreiheit der Lagerfuge, sodass letztlich der Biegezwanganteil die dominierende Beanspruchung ist. Dieser wird durch die linearen Temperaturanteile hervorgerufen, die eine Verkrümmung der Platte bewirken. Infolge des aktivierten Eigengewichts wird diese allerdings nahezu vollständig behindert und entsprechende Spannungen sind die Folge. Damit Anrisse oder Trennrisse sicher ausgeschlossen werden können, darf der jeweilige Spannungsanteil die mittlere Bauteilzugfestigkeit f_{ctm} nicht überschreiten. Dies ist im hier gezeigten Beispiel für die viskoelastische Berechnung der Fall.

Die Gegenüberstellung mit den linear-elastischen Ergebnissen macht erneut den Einfluss der Viskoelastizität deutlich: Hier kann anschaulich gezeigt werden, dass bei einer rein linear-elastischen Berechnung das Auftreten von Biegerissen nicht ausgeschlossen werden kann, wogegen die Berücksichtigung eines realitätsnahen Materialverhaltens zeigt, dass diesbezüglich keine Gefahr besteht und keine weiteren Maßnahmen getroffen werden müssen.

Vergleichsrechnungen haben für den Fall der 4 m dicken Bodenplatte allerdings auch gezeigt, dass zwar die Berücksichtigung der Viskoelastizität das Rissrisiko vermindern kann, wobei jedoch auch Spannungszustände in der Platte hervorgerufen werden können, die das Risiko des Auftretens von Makrorissen signifikant erhöhen. Dies ist für die hier betrachtete Konfiguration aber nur der Fall, wenn eine (sehr) hohe horizontale Bodensteifigkeit angesetzt wird, die nicht nur zu einer Erhöhung des zentrischen Spannungsanteils führt sondern auch den Biegespannungsanteil deutlich beeinflusst: Die kritische Spannung wird dann an der Bauteilunterseite ($\sigma_{\text{konst}} + \sigma_{\text{lin,u}} \geq f_{\text{ctm}}$) erreicht, lange nachdem die maximale Bauteiltemperatur überschritten wurde und sich die Bodenplatte bereits längere Zeit in der Abkühlungsphase befindet, vgl. hierzu ähnliche Ergebnisse von [Schlicke, 2014].

8.2 Massives Brückenfundament

Als weiteres Anwendungsbeispiel wird ein massives Brückenfundament betrachtet. Dabei handelt es sich um eine Fachwerkbrücke mit zwei Brückenfeldern. Jedes Brückenfeld weist eine Spannweite von 93 m und eine Fahrbahnbreite von 49 m auf. Die Brücke ist in Abb. 8.7 skizziert. Hier wird nun exemplarisch der Unterwasserbetonabschnitt des mittleren Piers untersucht, d. h.

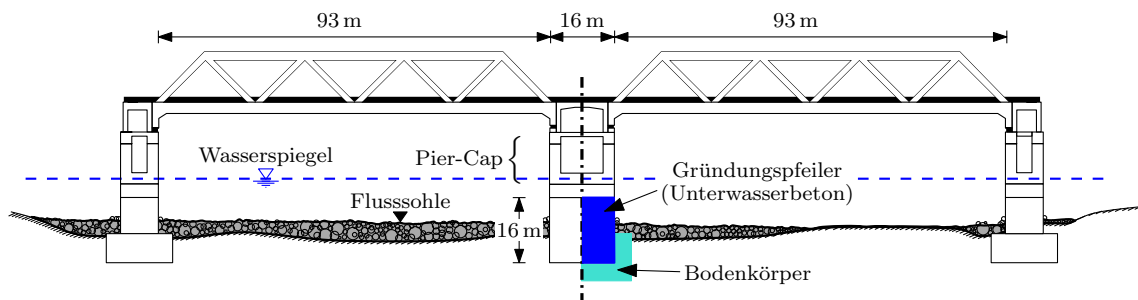


Abbildung 8.7: Skizze der Brücke und Markierung des betrachteten Pfeilers

jener Bauabschnitt auf dem später die so genannten Pier Caps errichtet werden. Der UWB-Abschnitt befindet sich zur Gänze unterhalb der Wassermarke und ist zudem bis zur halben Pfeilerhöhe in die Flusssohle eingebunden, wie Abb. 8.7 entnommen werden kann. Aus herstellungstechnischer Sicht ist es sinnvoll diesen Pfeiler unbewehrt auszuführen, was gleichzeitig die wirtschaftlichste Lösung darstellt.

Nach Eurocode 2 gilt ein Bauwerk als unbewehrt, wenn die enthaltene Bewehrungsmenge geringer als die Mindestbewehrung ist. D. h., wenn Berechnungen diese Möglichkeit der Ausführung bestätigen, würde lediglich Bewehrung zur Sicherstellung der Robustheit der Oberflächenebene des Bauteils angeordnet werden müssen. Dass dies möglich ist, soll anhand dieses Beispiels gezeigt werden.

Da der Betonpfeiler wesentlich steifer als der Baugrund ist und weil aufgrund seiner großen Abmessungen Beanspruchungen aus Last unbedeutend werden, kann der überwiegende Teil der Beanspruchungen aus Temperaturänderungen infolge der Hydratationswärmeentwicklung

erwartet werden. Aus diesem Grund soll im Folgenden die Frage beantwortet werden, ob bereits diese alleinigen Temperaturbeanspruchungen zu Spannungszuständen führen, durch die Makrorisse nicht länger ausgeschlossen werden können. In diesem Fall wäre die Variante einer unbewehrten Ausführung zu hinterfragen.

8.2.1 Eingangsgrößen

Der mittlere Brückenpfeiler ist ein massiges Bauteil mit einer Länge von 64 m, einer Breite von 16 m und einer Höhe von 16 m. Mit diesen Abmessungen kann er weder als Platte (L bzw. $B \gg H$) noch als Wand ($L \geq 3 \cdot H$ und $H \geq 4 \cdot B$) eingestuft werden.

Zur Herstellung wird ein typischer Massenbeton der Klasse C 20/25 verwendet. Entsprechend [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] beträgt dessen mittlere Zugfestigkeit $f_{ctm} = 2,20 \text{ N/mm}^2$ bzw. der mittlere Elastizitätsmodul nach 28 Tagen $E_{cm} = 30 \text{ N/mm}^2$. Das maximale Wärmepotential des Betons ist mit $88\,750 \text{ kJ/m}^3$ gegeben. Entsprechend des Hydratationsfortschrittes variiert die Wärmeleitfähigkeit zwischen 3 W/mK (unmittelbar nach Einbau) und $2,10 \text{ W/mK}$. Die spezifische Wärmespeicherkapazität des Betons wird konstant mit $2\,500 \text{ kJ/m}^3\text{K}$ angenommen. Der Verlauf der Hydratationswärmeentwicklung wird durch den Ansatz von Jonasson beschrieben, wofür die bereits in Glg. (7.4) angegebenen Formparameter herangezogen werden, da diese den Hydratationswärmeentwicklungsverlauf eines typischen Massenbetons gut abbilden. Zur Berücksichtigung der viskoelastischen Betoneigenschaften werden die bereits für die zuvor gezeigte Simulation der (massiven) Bodenplatte angesetzten Kriechparameter verwendet, d. h. $h_0 = 2\,000 \text{ mm}$ bzw. $RH = 60\%$. Die entsprechenden Parameter für die KV-Reihe können deshalb Tab. 7.1 für Druck- und Tab. 8.1 für Zugbeanspruchungen entnommen werden. Schwindeinwirkungen bleiben zur Gänze unberücksichtigt, da sie unter den gegebenen Randbedingungen von untergeordneter Bedeutung sind.

Der betrachtete Pfeiler befindet sich bis zur Hälfte in umgebendem Boden, der aufgrund seiner wärmespeichernden und -leitenden Eigenschaften einen maßgeblichen Einfluss auf die Temperaturentwicklung im Bauteil hat. Die Wärmeleitfähigkeit des Bodens wird hier konstant mit $2,10 \text{ W/mK}$ angenommen. Seine Wärmespeicherkapazität wird ebenfalls konstant mit $2\,100 \text{ kJ/m}^3\text{K}$ angesetzt.

Aufgrund der großen Betonkubatur wird der Herstellungsprozess in der Simulation berücksichtigt, d. h. der Pfeiler wird in Schichten von jeweils 1 m Dicke hergestellt. Alle 15 Stunden folgt eine weitere Schicht – dies entspricht einer mittleren Betonierleistung von rund $68 \text{ m}^3/\text{h}$. Da sich der Pfeiler vollständig unter Wasser befindet, ist dieser auch während der Herstellung dem umgebenden Wasser ausgesetzt. Dies wird durch Temperaturrandbedingungen an den Seitenflächen bzw. der im Herstellungsprozess jeweils freiliegenden Oberfläche berücksichtigt. Dabei wird von einem Wärmeübergangskoeffizient zwischen Beton und (langsam fließendem) Wasser von $20 \text{ W/m}^2\text{K}$ ausgegangen. Als Temperatur wird die jeweilige Wassertemperatur angesetzt, die sich im Jahresverlauf ändert und einer sinusförmigen Schwankung zwischen $T_{\min} = 3^\circ\text{C}$ und $T_{\max} = 18^\circ\text{C}$ innerhalb eines Jahres unterliegt.

Insgesamt wird der ungünstige Fall einer Betonage im Sommer betrachtet: Dabei hat der eingebrachte Beton eine Ausgangstemperatur von 25°C und die Wassertemperatur beträgt zunächst 18°C . Der Boden hat zunächst ebenfalls eine Ausgangstemperatur von 18°C .

8.2.2 FE-Modell

Abb. 8.8 zeigt das FE-Modell des Pfeilers. Dabei handelt es sich um ein dreidimensionales Volumenmodell. Die Materialeigenschaften und Rand- bzw. Übergangsbedingungen wurden wie zuvor beschrieben übernommen. Zur Reduktion der Rechenzeit wurde das Modell unter Ausnutzung der Symmetrie erstellt. An den entsprechenden Symmetrieebenen ist das Modell zwangungsfrei über Symmetrielager gehalten und ein Wärmeaustausch ist darin nicht möglich. An

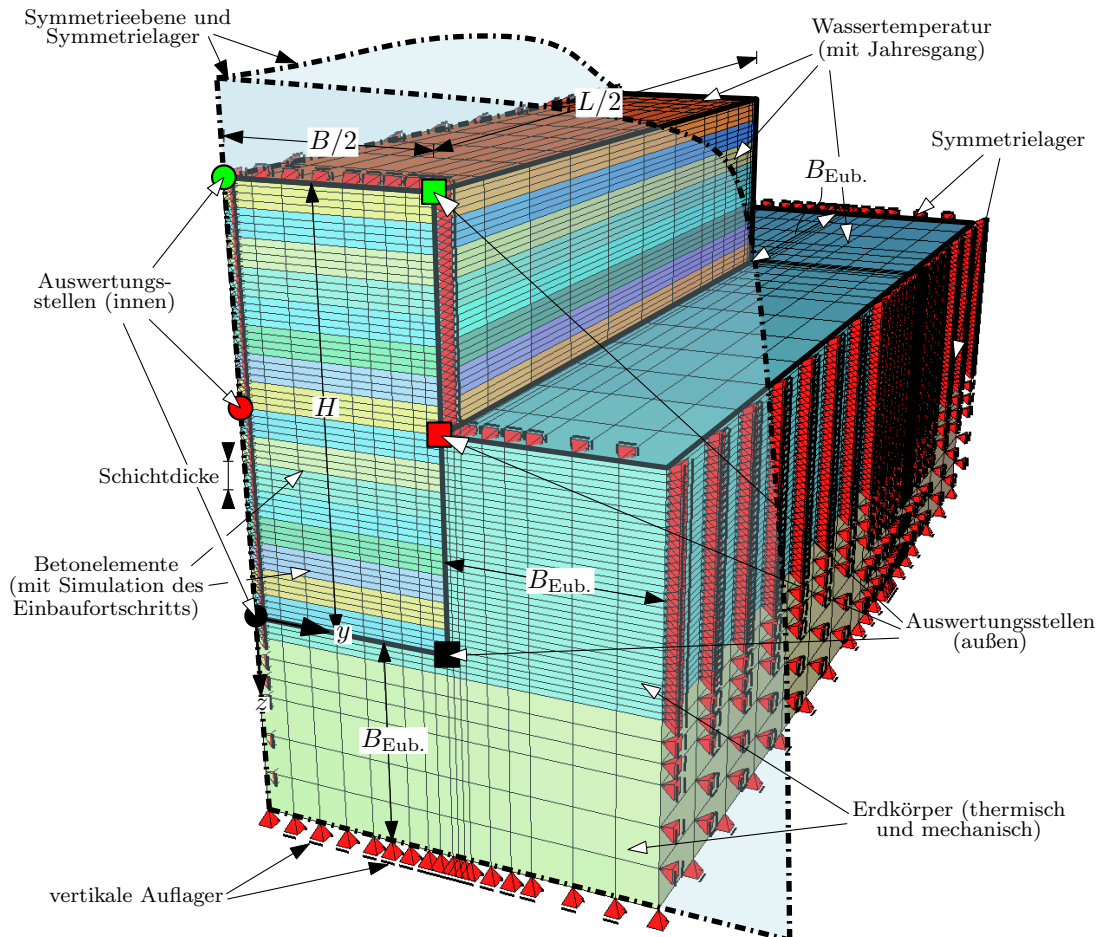


Abbildung 8.8: FE-Modell eines massiven Brückenfundaments

den baugrundseitigen Modellrändern wird ebenfalls kein Wärmeaustausch mit der Umgebung zugelassen, um den lokalen wärmespeichernden Effekt des Baugrundes zu berücksichtigen. Der Boden wird in der gegenständlichen Betrachtung sowohl in der thermischen als auch mechanischen Berechnung berücksichtigt. Dabei weist er einen Überstand von jeweils 8 m auf und gleichzeitig wurde eine vergleichsweise hohe Bodensteifigkeit von 100 MN/m^2 angenommen. Der Bodenkörper selbst liegt ebenfalls zwangungsfrei auf vertikalen Auflagern auf bzw. wird ebenfalls von Symmetrielagern gehalten. Um die ausschließliche Auswirkung der Hydratationswärmeentwicklung erfassen zu können, wird das Volumenmodell als eigengewichtslos betrachtet.

Die Simulation wird über einen Zeitraum von 2 Jahren durchgeführt, wobei zugunsten der Berechnungsdauer die Schrittweiten dieser zeitdiskreten Betrachtung sukzessive zunehmen, da die

Ausprägung der hydratationsbedingten Temperaturänderungen je Zeitintervall mit fortschreitender Zeit abnimmt.

8.2.3 Berechnungsergebnisse

Ausgewertet werden die Berechnungsergebnisse in den beiden Symmetrieebenen. In Abb. 8.8 sind Auswertungspunkte in der yz -Fläche eingetragen. Dies sind jeweils drei Punkte über drei Höhenlagen (unten, mitte, oben) sowohl in der Bauteilinnen- als auch an der -außenseite. Entsprechend der Höhenlage werden die in diesen Punkten ausgelesenen Daten wie auch bei der Bodenplatte farblich unterschieden: unten = schwarz, mitte = rot bzw. oben = grün. Zunächst ist in Abb. 8.9 für jeden Punkt die zeitliche Entwicklung der Temperatur dargestellt, die der Temperatur des umgebenden Wassers gegenübergestellt wird. Die Auswertungspunkte im Bauteilinneren sind durch einen dicken Strichtyp, jene an der Außenseite durch dünne Linien kenntlich gemacht. Zur Verdeutlichung des im Bauteil auftretenden Temperaturfeldes ist dieses

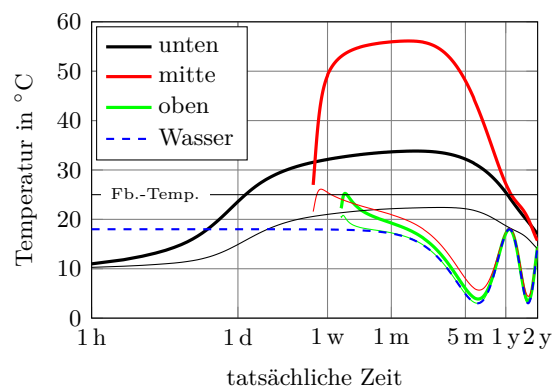


Abbildung 8.9: Temperaturentwicklung im Pfeiler: innen (dick) und außen (dünn) an drei verschiedenen Höhenlagen

für fünf repräsentative Zeitpunkte (1 Woche, 1 Monat, 5 Monate bzw. 1 Jahr und 2 Jahre) in Abb. 8.10 dargestellt, wie es der mit HYDRA durchgeführten Temperaturfeldsimulation entnommen werden kann. Aus diesen Darstellungen wird eine große Temperaturgradienten zwischen

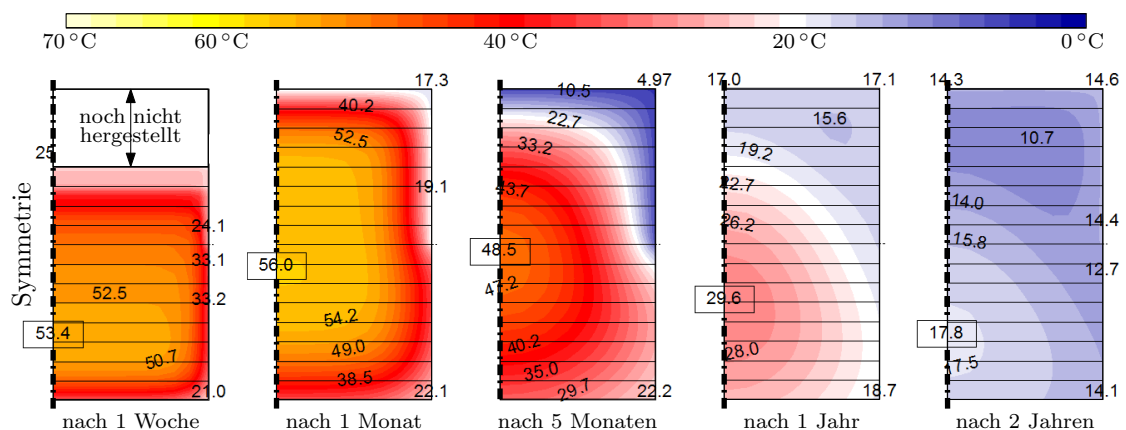


Abbildung 8.10: Temperaturverteilung an ausgewählten Zeitpunkten

Rand- und Kernzone sowohl über die Höhe als auch die Breite des Bauteils deutlich: Jene Punkte die an der Bauteilaußenseite liegen stehen in direktem Kontakt mit der Umgebung, entsprechend gering fallen die dort auftretenden Temperaturen im Vergleich zu den im Kern liegenden Punkten aus. Einhergehend mit dem Einbau- und Hydratationsfortschritt zeigt sich auch die Lage des Temperaturmaximum zunächst im unteren Drittel der hergestellten Bauteilhöhe und mit fortschreitender Zeit nach abgeschlossener Herstellung annähernd auf halber Bauteilhöhe. Später liegt das Temperaturmaximum u. a. bedingt durch die wärmespeichernde Wirkung des Bodens wieder im unteren Bauteildrittel.

Deutlich ist auch der Einfluss des Bodens auf die Geschwindigkeit des Abfließens der Hydratationswärme: so zeigen jene Punkte, die mit dem Boden in direktem Kontakt stehen (schwarze Linien) einen entsprechend langsamen Abbau der – je nach Lage im Bauteil – erreichten Temperatur. Dagegen folgen die Punkte, die in der Randzone des Bauteils liegen und dem umgebenden Wasser ausgesetzt sind nach einer anfänglichen kurzen und schwach ausgeprägten Erwärmungsphase vergleichsweise rasch der Wassertemperatur.

Die Punkte im Kernbereich des Pfeilers zeigen erwartungsgemäß deutlich höhere Temperaturen, da der Austausch mit der Umgebung nur in begrenztem Maße erfolgen kann. Dies wird vor allem beim auf der mittleren Höhenlage gelegenen inneren Punkt des Bauteils deutlich. Hier tritt mit rund 56°C das absolute Temperaturmaximum im Bauteil auf. Ebenfalls relativ hohe Temperaturen stellen sich am inneren Punkt der Bauteilunterseite ein: hier werden etwa 34°C erreicht. Zudem zeigt sich der Einfluss des Bodens deutlich: der Temperaturabfluss erfolgt wesentlich langsamer, als dies in den Punkten der Randzone- und Oberseite der Fall ist. Der Einfluss des Bodens ist vor allem beim nach 5 Monaten vorhandenen Zustand gut erkennbar: Durch seinen Einfluss besteht nicht nur ein großer Temperaturunterschied zwischen – über die Breite betrachtet – Bauteilinnen- und außenseite sondern – über die Höhe betrachtet – auch zwischen Bauteilunter- und -oberseite.

Insgesamt ist das Bauteil aufgrund seiner großen Abmessungen thermisch entsprechend träge, sodass viel Zeit benötigt wird, bis die Hydratationswärme auch im Kern vollständig abgeflissen ist: Dies ist erst nach etwas mehr als nach einem Jahr der Fall – zu einem Zeitpunkt bei dem die Randzone bereits gänzlich vom Jahresgang der Umgebungsbedingungen beeinflusst wird.

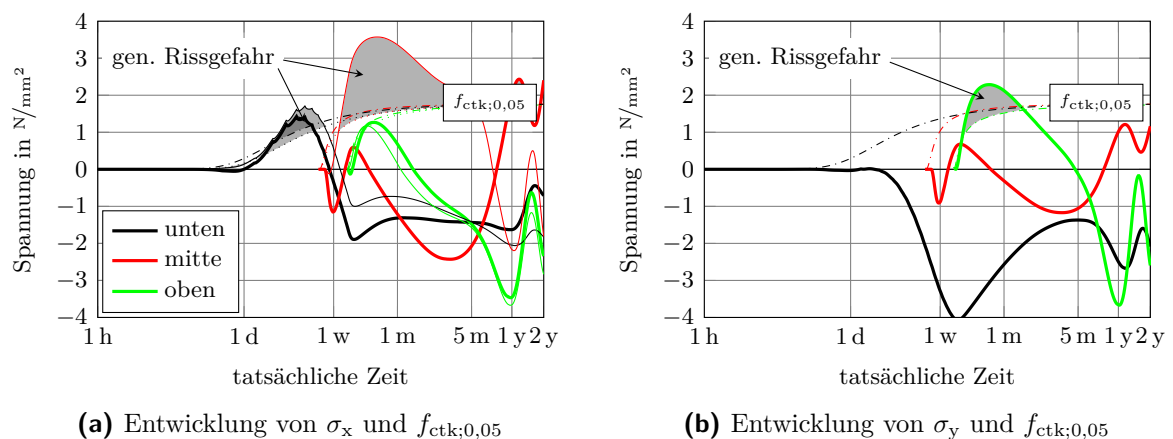


Abbildung 8.11: Entwicklung der lokalen Elementmittenspannungen bzw. der Zugfestigkeit

Abb. 8.14 zeigt nun den Zeitverlauf der resultierenden lokalen Elementmittenspannungen, die sich an den Auswertungsstellen ergeben. Diese wurden sowohl für die x - als auch y -Richtung

dargestellt und sind dem entsprechenden 5%-Fraktilwert der Zugfestigkeit $f_{ctk;0,05}$ gegenübergestellt. Die Spannungen in y -Richtung sind nur an der Bauteilinnenseite ausgewertet worden, da an der Bauteilaußenseite keine nennenswerten Spannungen in diese Richtung entstehen. Ähnlich der Darstellung der Temperaturfelder sind in Abb. 8.12 die Spannungsfelder der resultierenden Elementmittenspannungen in x - und in Abb. 8.13 jene in y -Richtung für die mit den Temperaturfeldern in Abb. 8.10 korrespondierenden Zeitpunkte wiedergegeben. Wie bei der Bodenplatte sind die Spannungen in z -Richtung von untergeordneter Bedeutung und blieben daher unberücksichtigt.

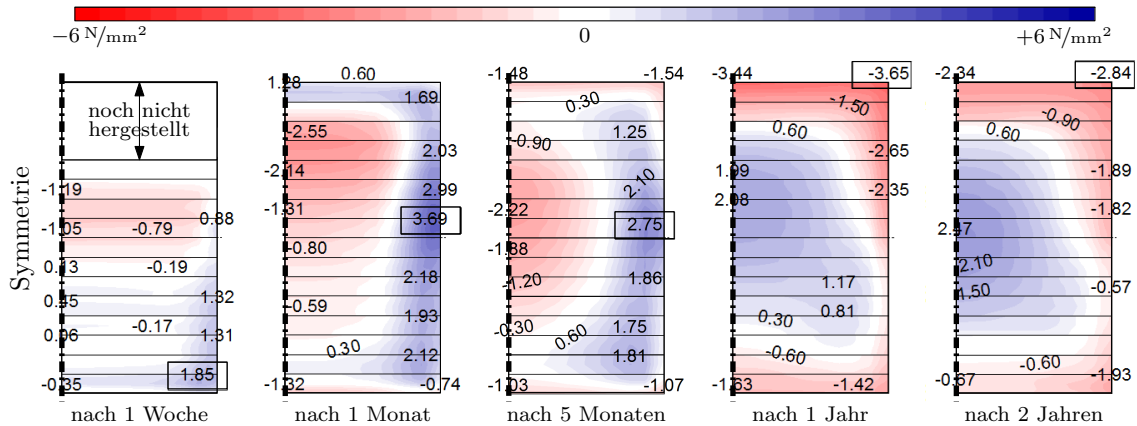


Abbildung 8.12: Elementmittenspannungen in x -Richtung an ausgewählten Zeitpunkten

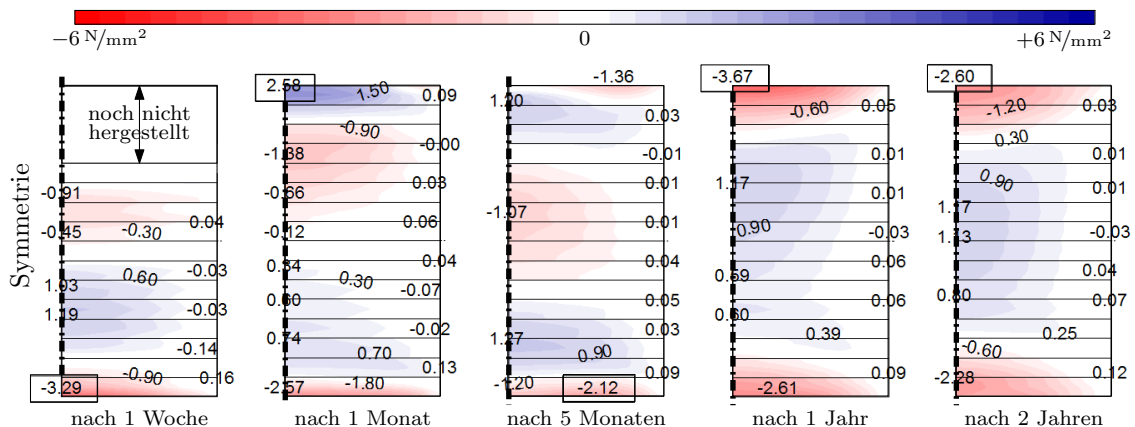


Abbildung 8.13: Elementmittenspannungen in y -Richtung an ausgewählten Zeitpunkten

Betrachtet man zunächst die resultierenden Elementmittenspannungen in x -Richtung, so zeigt sich auch hier eine Spannungsverteilung die deutlich in eine Kern- und Randzone gegliedert ist. Erwartungsgemäß kann im zeitlichen Verlauf festgestellt werden, dass aufgrund der Hydratation zunächst die Kernzone durch die umgebende Randzone behindert wird. Aufgrund der höheren Temperaturen in der Kernzone treten in dieser auch viel größere temperaturinduzierte Dehnungen auf, als es in der Randzone der Fall ist. Aus diesem Grund entstehen im Kern zunächst Druckspannungen und die Randzone ist Zugspannungen ausgesetzt, die überwiegend $f_{ctk;0,05}$ überschreiten. Mit fortschreitender Zeit und damit einhergehender Abkühlung und Festigkeitsentwicklung beginnt sich dieser Zustand jedoch umzukehren: nunmehr steht die

Randzone vollständig unter Druck und in der Kernzone kommt es zur Ausbildung von Zugspannungen, die lokal den 5 %-Fraktilwert der Zugfestigkeit überschreiten.

Ein ähnliches Verhalten kann auch für die resultierenden Spannungen in y -Richtung beobachtet werden, wobei mit Erreichen des Temperatenausgleichs annähernd eine symmetrische Spannungsverteilung über die Bauteilhöhe im Pfeiler verbleibt. Kritische Zugspannungen, die über $f_{ctk;0,05}$ liegen, entstehen für diese Richtung nur an der Bauteiloberseite in den ersten Wochen nach Beendigung der Betonage.

8.2.4 Interpretation

Aus den bisherigen Betrachtungen geht hervor, dass aufgrund der Temperaturbeanspruchung durchaus mit kritischen Spannungen im Bauteil zu rechnen ist. Da in allen Fällen das Zugfestigkeitskriterium $f_{ctk;0,05}$ überschritten wird, können Risse nicht a priori ausgeschlossen werden. Der ausgeprägte Temperaturunterschied zwischen Kern- und Randzone lässt vermuten, dass die resultierenden Spannungen überwiegend aus Eigenspannungen stammen. Aus diesem Grund muss für eine Beurteilung des Risikos des Auftretens von Makrorissen nun wie zuvor eine differenzierte Betrachtung der um die Eigenspannungen bereinigten konstanten bzw. linearen Spannungsanteile folgen.

Zunächst wird für die x -Richtung deutlich, dass die Form der Spannungsverteilung über die Höhe nicht hinreichend durch eine parabolische Näherung beschrieben werden kann. Zudem ist die Spannung auch über die Breite veränderlich. Damit können zur Bestimmung der Anteile Vereinfachungen wie nach [Eierle & Schikora, 2000] nicht länger angewendet werden. Vielmehr muss nun die Spannungsverteilung über den Querschnitt bestmöglich durch eine Funktion genähert werden, welche anschließend auszuwerten ist. Ein entsprechendes Verfahren hierzu wurde in [Heinrich & Schlicke, 2016] bzw. [Heinrich, 2016] gezeigt: Hierbei werden die Knotenspannungen an den Diskretisierungspunkten des Querschnitts in jedem Zeitschritt für die zu untersuchende Richtung ausgelesen und die Parameter eines dieses Feld bestmöglich nähernden zweidimensionalen Polynoms mittels Optimierungsverfahren (z. B. Least-Squares) bestimmt. Dieses Polynom kann anschließend mittels Gauß-Integration numerisch exakt integriert werden, wobei für die Einzelanteile folgende Zusammenhänge gelten:

$$f_{\text{konst}} = \frac{\int_K f \, dK}{A_c} \quad (8.1)$$

$$f_{\text{lin},y} = \frac{I_z \int_K z \cdot f \, dK - I_{yz} \int_K y \cdot f \, dK}{I_z I_y - I_{yz}^2} \cdot z \rightarrow f_{\text{lin},y} = \frac{\int_K f \cdot z \, dK}{I_y} \cdot z \quad (8.2)$$

$$f_{\text{lin},z} = \frac{I_y \int_K y \cdot f \, dK - I_{yz} \int_K z \cdot f \, dK}{I_z I_y - I_{yz}^2} \cdot y \rightarrow f_{\text{lin},z} = 0 \quad (8.3)$$

mit:

- f ... Spannungsfeld als Funktion $f(y, z)$
- A_c ... Fläche des betrachteten Querschnitts
- I_y, I_z ... Flächenträgheitsmomente um jeweilige Achse

Der entsprechende verbleibende Eigenspannungsanteil ergibt sich aus

$$f_{\text{nichtlin}} = f - (f_{\text{konst}} + f_{\text{lin},y} + f_{\text{lin},z}) \quad (8.4)$$

Da der Querschnitt bezüglich der z -Achse symmetrisch ist und zudem durch ein zu dieser Achse symmetrisches Feld $f(y, z) = f(-y, z)$ beansprucht wird, vereinfachen sich diese Gleichungen zu den ihnen nachgestellten Beziehungen. Für den betrachteten Pfeiler werden diese nun sowohl für

die yz - als auch xz -Symmetrieffläche ausgewertet. Die Ergebnisse sind über die Zeit in Abb. 8.14 dargestellt und werden dort dem Mittelwert der Zugfestigkeit f_{ctm} gegenübergestellt.

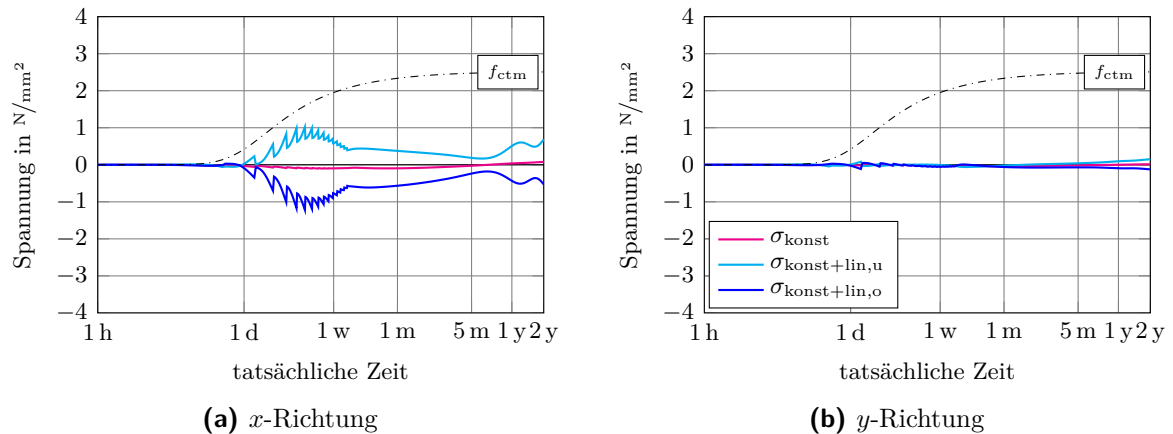


Abbildung 8.14: Entwicklung der Spannungsanteile bzw. deren Überlagerung in x - und y -Richtung

Sowohl für die x - als auch y -Richtung zeigt sich ein sehr geringer zentrischer (konstanter) Anteil. Dieser resultiert erwartungsgemäß aus dem vergleichsweise geringen äußeren Behinderungsgrad, dem das Bauteil unterliegt: Aufgrund der großen Steifigkeit des Pfeilers selbst ist die (horizontale) Steifigkeit des Bodens ihm gegenüber von untergeordneter Bedeutung und entsprechend gering ist die äußere Behinderung. Sehr deutlich ausgeprägt in x -Richtung ist hingegen der lineare Anteil. Er erreicht sein Maximum an der Bauteilunterseite während der Herstellungsphase und resultiert aus dem Längsausdehnungsbestreben jeder neu aufgetragenen Schicht und der damit einhergehenden behinderten Querschnittsverkrümmung. Mit fortschreitender Zeit und Erhärtung nimmt seine Größe langsam ab und folgt letztlich dem Jahresgang der Umgebungsrandbedingungen, wie gut in Abb. 8.14a zu erkennen ist.

Dasselbe Verhalten tritt in y -Richtung auf, allerdings ist der resultierende lineare Spannungsanteil deutlich geringer, was auf die gegenüber der Bauteillänge wesentlich geringere Bauteilbreite und dem entsprechend geringeren Ausdehnungsbestreben in diese Richtung zurückgeführt werden kann.

Grundsätzlich kann festgehalten werden, dass sowohl in x - als auch y -Richtung die Gefahr von Makrorissen ausgeschlossen werden kann, wenngleich durchaus nennenswerte Spannungsanteile in x -Richtung beobachtet werden können. Diese liegen jedoch stets unterhalb des Mittelwerts der Zugfestigkeit. Verglichen mit den in Abb. 8.14 dargestellten Elementmittenspannungen, ist erkennbar dass die Spannungseinzelaufteile auf einem wesentlich geringeren Niveau angesiedelt sind. Daraus wird deutlich, dass die temperaturinduzierten Spannungen im betrachteten Pfeiler mehrheitlich aus Eigenspannungen resultieren. Da Eigenspannungen eine eigene Gleichgewichtsgruppe im Querschnitt bilden, führen sie zwar mit dem Erreichen des Zugfestigkeitskriteriums $f_{ctk;0,05}$ zu Rissen in der Oberflächenzone, werden jedoch damit nach derzeitigem Kenntnisstand abgebaut.

Nach den hier gezeigten Berechnungen sind Oberflächenrisse infolge der Beanspruchung in x -Richtung über die Bauteilhöhe und an der Bauteilunterseite über dessen Breite zu erwarten, wobei deren Abstand nach [Tue et al., 2009] mit dem 1,20-fachen der Risstiefe t abgeschätzt werden kann.

Dagegen kann aus der Beanspruchung in y -Richtung ein einzelner Oberflächenlängsrisse in der Bauteiloberseite erwartet werden. Diese Ergebnisse decken sich gut mit den Beobachtungen, die

an ausgeführten Bauteilen vergleichbarer Abmessungen gemacht werden konnten. Dabei zeigte sich an der Oberseite ein mittiger über die gesamte Bauteillänge reichender größerer (Rissbreite ca. 1 mm), sowie mehrere kleinere (Rissbreite 0,20 mm) Risse in Bauteilquerrichtung. Für den Längsriss ergibt sich in der Simulation eine maximale Zugkeiltiefe von rund 2 m was in der Größenordnung der an Bauteilen festgestellten Risstiefen liegt.

8.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das entwickelte Materialmodell zur Simulation größerer Strukturen eingesetzt. Zunächst wurde eine massive Bodenplatte modelliert und berechnet, wobei an diesem Beispiel anhand der Berechnungsergebnisse und der daraus errechneten Rissgefahr erneut die Wichtigkeit der realistischen Beschreibung der viskoelastischen Betoneigenschaften verdeutlicht werden konnte.

Das zweite Beispiel zeigt die Simulation des UWB-Abschnittes eines Gründungspfeilers einer großen Fachwerkbrücke ausgehend von der Frage ob dessen unbewehrte Ausführung möglich ist. Dabei wurde die Rissgefahr für die im betrachteten Bauteil auftretende Temperaturbeanspruchung beurteilt, wobei die Dominanz von Eigenspannungen bestätigt werden konnte. Einerseits kann gezeigt werden, dass infolge der Temperaturbeanspruchungen mit keinen Trennrissen zu rechnen ist und daher eine unbewehrte Ausführung als Möglichkeit in Frage kommt; zudem kann festgehalten werden, dass sich das auf der Grundlage der Simulation ermittelte Rissbild gut mit Beobachtungen der Praxis deckt.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Die zutreffende Erfassung der viskoelastischen Betoneigenschaften ist heutzutage immer noch eine große Herausforderung. Dies liegt unter anderem daran, als dass die Vorgänge im Material und damit die Ursache von Kriechen bzw. Relaxation in Betonen noch nicht vollständig geklärt sind. Beide Eigenschaften beruhen nach derzeitigem Verständnis auf demselben Materialverhalten und stellen nur eine Ausprägung des Phänomens unter idealen Randbedingungen dar. Demnach muss die Forderung zulässig sein, dass aus Kriechversuchen gewonnene Daten zur Betrachtung von Relaxationsproblemen herangezogen werden können (und umgekehrt). Insbesondere weil Relaxationsversuche aufwändiger als Kriechversuche durchzuführen sind, hat sich die Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens über die Kriecheigenschaft in der Ingenieurpraxis durchgesetzt. Aus diesem Grund existiert auch eine Vielzahl unterschiedlicher Ansätze, in denen das Betonkriechen phänomenologisch erfasst wird. Derartige Ansätze sind als Kriechfunktionen in der aktuellen Normengeneration enthalten oder wurden unabhängig von der Normung durch einzelne Forscher- und -gruppen publiziert.

Mit all diesen phänomenologischen Kriechansätzen gelingt grundsätzlich eine realistische Erfassung des Kriechphänomens, wie unterschiedliche Versuche belegen.

Die Berechnung von komplexen Lastgeschichten erfordert – ein linearer Zusammenhang zwischen Einwirkung und viskoelastischem Verhalten wird dabei vereinfachend vorausgesetzt – grundsätzlich die Anwendung eines Superpositionsprinzips. Dieses führt jedoch vor allem bei größeren zu berechnenden Strukturen zu hoher Speicherauslastung und langen Rechenzeiten. Dies hat zur Folge, dass in der praktischen Bemessung Viskoelastizität manchmal außer Acht gelassen oder mit „Faustformeln“ berücksichtigt wird, was zu unwirtschaftlichen Bemessungsergebnissen oder – schlimmer noch – einer gänzlich unterschätzten Rissgefahr führen kann. Dies konnte u. a. bereits von [Schlicke, 2014] eindrucksvoll gezeigt werden.

Um die hohen Rechenzeiten und Speicherauslastungen zu umgehen wurden bereits früh Anstrengungen unternommen, das viskoelastische Betonverhalten durch eigene Materialgesetze zu beschreiben. Derartige Materialgesetze können durch die Verwendung von so genannten rheologischen Körpern entwickelt werden und stehen dann als Differentialgleichung zur Verfügung. Sämtliche differentielle Formulierungen setzen dabei in der linearen Viskoelastizität die Gültigkeit des Boltzmann-Superpositionsprinzips voraus.

Der Vorteil einer derartigen Vorgehensweise ist nun, dass durch die differentielle Formulierung prinzipiell der Rechen- und Speicheraufwand reduziert werden kann, da jeweils nur der Zustand am Anfang eines Zeitschritts bekannt sein muss, um gemeinsam mit der Einwirkung im Zeitschritt das Materialverhalten zu erfassen: Der Einfluss der bisherigen Einwirkungsgeschichte muss also nicht länger im Speicher vorgehalten werden, sondern steht in Form von Zustandsvariablen zur Verfügung, die entsprechend aktualisiert werden müssen.

Ausgehend von linearen rheologischen Modellen wurden in der Vergangenheit ebenfalls zahlreiche mehr oder weniger komplexe Ansätze erarbeitet um die viskoelastischen Eigenschaften verschiedener Betone phänomenologisch zu erfassen. Dies gelingt für die untersuchten Betone jeweils sehr gut. Sollen die betrachteten Modelle hingegen an aus Normdaten abgeleiteten Kriechkurven kalibriert werden ist dies nur unzureichend möglich: In vielen Fällen reicht der

validierte Gültigkeitsbereich dieser Modelle nicht aus, das in den Normen gegebene Kriechverhalten auch über einen längeren Zeitraum in guter Näherung wiederzugeben. Somit können mit existierenden Modellen nur Aussagen für spezifische Betone getroffen werden und ihre Anwendung auf normativer Grundlage ist nur eingeschränkt möglich.

In jüngster Vergangenheit wurden an der TU Graz Versuche an Zwangrahmen durchgeführt um die Beanspruchung in realen Bauteilen zu simulieren. Dabei hat sich gezeigt, dass die Versuchsnachrechnung unter Berücksichtigung von Viskoelastizität durch Anwendung des Superpositionsprinzips zu unplausiblen Ergebnissen führt. Aus diesem Grund schlägt [Schlicke, 2014] vor, viskoelastisches Verhalten ausgehend von einem „viskoelastischen Potential“ zu betrachten welches an den globalen Spannungszustand des betrachteten Systems gekoppelt ist:

Belastende Inkrementen erhöhen das viskoelastische Potential und durch entlastende Inkremente wird es vermindert. Gegenüber dem Superpositionsprinzip bedeutet das, dass einem entlastenden Inkrement nun nicht länger ein Kriechverhalten mit entgegengesetztem Vorzeichen zugeordnet wird, sondern alle bisher vorhandenen kriechezeugenden Inkremente anteilig reduziert werden. In einem jüngst durchgeführten internationalen Benchmark konnte gezeigt werden, dass dieses Modell sehr gute Ergebnisse liefert, vgl. [Jędrzejewska et al., 2018]. Allerdings ist die Anwendung des Modells mit hohem Rechen- und Speicheraufwand verbunden.

Erklärtes Ziel der vorliegenden Arbeit war es, ein rechen- und speichereffizientes Modell zur realistischen Erfassung der Viskoelastizität in gezwängten Systemen zu entwickeln. Aus diesem Grund wurde zunächst auf einen rheologischen Körper zurückgegriffen. Dabei handelt es sich um eine schon von [Bažant & Wu, 1973] vorgestellte Reihenschaltung mehrerer KV-Einheiten. Ausgehend von der in [Schlicke, 2014] beschriebenen Modellvorstellung zur Unterscheidung von be- und entlastenden Inkrementen wurde ein ähnliches Verfahren entwickelt, das jedoch auf die KV-Reihe angewendet werden kann.

Der Unterschied zur „klassischen“ Betrachtung einer KV-Reihe besteht nun darin, dass zwar nach wie vor die Beiträge einer einzelnen KV-Einheit zum Gesamtverhalten der KV-Reihe addiert werden, allerdings wird jede Einheit individuell und in steter Referenz zum Globalspannungszustand betrachtet. Dieser einfache Ansatz führt einerseits in jeder betrachteten KV-Einheit qualitativ zum selben Verhalten, andererseits können durch die Verknüpfung mit dem Globalspannungszustand etwaige Prognosefehler vermieden werden, die sich z. B. als Spannungsnulldurchgang⁴⁰ in Relaxationsproblemen äußern.

Neben dem Vorteil der Rechen- und Speichereffizienz, den die KV-Reihe bietet, können ihre Parameter auf analytischem Weg bestimmt werden, sodass grundsätzlich jede beliebige stetig differenzierbare Kriechfunktion genähert werden kann. Einerseits entfällt so zeitaufwändiges Kalibrieren des Materialmodells mit Optimierungsverfahren und andererseits wird das Modell vor allem dem praktischen Einsatz gerecht, da es an gängige Kriechmodelle der aktuellen Normengeneration angepasst werden kann. Stehen hingegen ausschließlich Experimentelle Daten zur Verfügung, müssen die Modellparameter durch Methoden der Optimierung gefunden werden – hierbei besteht jedoch noch Forschungsbedarf, ob bzw. bis zu welchem Grad dies vor dem Hintergrund des erarbeiteten Ansatzes möglich ist.

Das Modell wurde zunächst auf Plausibilität geprüft und anschließend anhand der Nachrechnung des zuvor erwähnten Zwangrahmenversuchs auf analytischem Weg verifiziert. Die Funktionsweise wurde schließlich über verschiedene Beispiele verdeutlicht und auch im Vergleich zur „klassischen“ Formulierung auf Basis des Superpositionsprinzips demonstriert. Dass das

⁴⁰Dabei wird mehr Spannung abgebaut, als ursprünglich im zur Relaxation angetreten System aufgebaut wurde – dies ist aus physikalischer Sicht unmöglich.

Modell in numerischen Simulationen verwendet werden kann konnte durch eine Implementierung in die FE-Umgebung SOFiSTiK gezeigt werden. Die Implementierung konnte durch die erneute Nachrechnung des Zwangrahmenversuchs validiert werden. Neben Berechnungsergebnissen, die sich gut mit den Messungen decken, konnte u. a. auch eine hohe Recheneffizienz des neuen Modells bestätigt werden. Abschließend wurde das Modell anhand von (praktischen) Anwendungsbeispielen getestet. Einerseits wurde eine massive Bodenplatte simuliert, wodurch die eingangs erwähnte Notwendigkeit der Berücksichtigung der viskoelastischen Betoneigenschaften erneut aufgezeigt werden konnte. Andererseits wurden die Auswirkungen der hydrationswärmebedingten Temperaturbeanspruchungen auf einen massiven Brückenfundamentpfeiler einer großen Fachwerkbrücke berechnet. Dabei konnten gezeigt werden, dass die Beanspruchung des Pfeilers von Eigenspannungen dominiert ist und sich das rechnerisch bestimmte Rissbild gut mit Beobachtungen der Praxis deckt.

Mit dieser Arbeit kann der Fachwelt eine neue Herangehensweise zur Berücksichtigung der Viskoelastizität in zwangbeanspruchten Systemen mit einem rheologischen Modell in Form einer KV-Reihe präsentiert werden, welche

- effizient im Hinblick auf die Rechenzeit ist,
- das Materialverhalten in steter Referenz zum Globalspannungszustand realistisch erfasst,
- basierend auf der aktuellen Normengeneration zu realistischen Ergebnissen führt und
- vergleichsweise unkompliziert in existierende FE-Lösungen integriert werden kann.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Nachrechnung eines Versuches mit unterschiedlichen Modellen aus [Jędrzejewska et al., 2018]	2
2.1	Schematische Darstellung des Kriechens	6
2.2	Schematische Darstellung der Relaxation	7
2.3	Schematische Darstellung von Kriechkomponenten	7
2.4	Einteilung der Kriechphasen in Abhängigkeit der Kriechrate	8
2.5	Superpositionsprinzip nach Boltzmann	10
2.6	Qualitative Darstellung möglicher Prognosefehler: Kriechkurvendivergenz (a), Vorzeichenwechsel (b) und Zeitpunkt des Vorzeichenwechsels (c) bei Relaxation	11
2.7	Mehrstufiger Zugrelaxationsversuch aus [Gutsch, 1998]	17
2.8	Zyklischer Relaxationsversuch aus [Delsaute, Staquet & Boulay, 2012]	18
2.9	Zwangrahmenversuch der TU Graz: Versuchsaufbau und Messdaten bzw. linear-elastische Berechnung	19
3.1	Verhalten des Hookeschen Federelements	25
3.2	Verhalten des Newtonschen Dämpferelements	26
3.3	Verhalten des Maxwell-Körpers	27
3.4	Verhalten des Kelvin-Körpers	28
4.1	Vergleich unterschiedlicher Modelle aus [Tacke, 2002] zur Nachrechnung eines Versuchs von [Gutsch, 1998]	43
4.2	Vergleich zwischen gemessener und berechneter Kriechdehnungen nach [De Schutter, 1999]	44
4.3	Kalibrierung (exemplarisch) und Versuchsnachrechnung nach [Hermerschmidt, 2016a]	46
4.4	Schematische Vorgehensweise der Superposition im Ansatz von Schlicke	47
5.1	KV-Reihe mit zusätzlicher Einzelfeder	50
5.2	Konstante Materialeigenschaften bei kleinen Zeitschritten	52
5.3	Aus Spektralwerten gebildetes diskretes und kontinuierliches Retardationsspektrum	56
5.4	Approximationen unterschiedlicher Ordnung k des zum Kriechmodells aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] gehörenden Retardationsspektrums ($m = 0,30$ und $\beta_H = 600$)	60
5.5	Verschiedene Approximationen k der Kriechfunktion durch eine Dirichlet-Reihe und relativer Fehler.	61
5.6	Teilweise gezwängter und durch $\Delta\varepsilon_{0,i}$ beanspruchter, Stab	64
5.7	Zeitschrittverfahren: elastische und viskoelastische Spannungsanteile	65
5.8	Exemplarische Entwicklung der Kriechzahl nach [ÖNORM EN 1992-1-1, 2011] sowie Einzelbeiträge der KV-Einheiten und deren Summe	66
5.9	Einstufenkriechversuch: „vollständige“ Lösung über den gesamten Zeitbereich $t - t_0$ und ausgehend von einem definierten Zeitpunkt t^* durch Anfangsbedingungen	67
5.10	Mehrstufenkriechversuch (Belastung) und Einfluss der Alterung	68

5.11	Superposition – Entlastung, schematische Darstellung	69
5.12	Einstufenrelaxationsversuch	70
5.13	Vergleich der resultierenden Dehnungen der KV-Reihe in einem einstufigen Kriech- bzw. Relaxationsversuch	70
5.14	Mehrstufenrelaxation (Belastung – Entlastung)	71
5.15	Vergleich der resultierenden Kriechdehnungen in der KV-Reihe bei einem mehrstufigen Kriech- bzw. Relaxationsversuch (Teilentlastung um 48 %)	72
5.16	Einzelnes KV-Element unter verschiedenen Spannungseinwirkungen	73
5.17	Dehnungsantworten der einzelnen KV-Einheiten bei Gesamtbetrachtung und individueller Betrachtung der Reihenelemente	76
5.18	Exemplarischer mehrstufiger Kriechversuch	77
5.19	Vergleich mit modifiziertem Superpositionsprinzip	78
5.20	Fallunterscheidung bei Zwangsbeanspruchung	79
5.21	Vergleich der Ergebnisse mit neuem Ansatz bzw. „klassischer“ Lösung durch strikte Anwendung des Superpositionsprinzips	80
6.1	Zwangrahmenversuch an der TU Graz	82
6.2	Statisches System des Versuches	83
6.3	Zugrundeliegende Druck- und Zugkriechkurven	85
6.4	Zwangrahmenversuch an der TU Graz – Messergebnisse	86
6.5	Entwicklung von Behinderungsgrad sowie relativem Elastizitätsmodul	87
6.6	Verformungseinwirkungen mit und ohne Schwinden und linear-elastisch berechnete Spannungsentwicklung gegenüber der Messkurve	88
6.7	Spannungsentwicklung mit Berücksichtigung der Viskoelastizität	89
6.8	Berücksichtigung der Viskoelastizität – unterschiedliche Ansätze	90
7.1	Diskretisierung des Gesamtsystems bei FE-Berechnungen	92
7.2	FE-Idealisierung verschieden gelagerter Betonkörper	95
7.3	Vollständige Behinderung – einaxial und mehraxial	96
7.4	Zeitliche Entwicklung von Temperatur und Elastizitätsmodul	97
7.5	Spannungsentwicklung unter vollständiger und teilweiser Verformungsbehinderung	98
7.6	FE-Modell des Zwangrahmenversuchs	99
7.7	Hydratationswärmeentwicklung des Zwangrahmens	100
7.8	Berechnungsergebnisse am Zwangrahmen	100
8.1	FE-Modell einer massigen Bodenplatte	103
8.2	Zustand zum Zeitpunkt der maximalen Kerntemperatur und Temperaturentwicklung in Bodenplattenmitte	104
8.3	Temperaturänderungen in der betrachteten Bodenplatte	105
8.4	Zustand bei maximaler Kerntemperatur sowie Entwicklung der Spannung mit und ohne Viskoelastizität in lokaler x -Richtung in Bodenplattenmitte sowie Zugfestigkeit	106
8.5	Spannungsverteilung mit und ohne Viskoelastizität in lokaler x -Richtung in Bodenplattenmitte über die Höhe zu ausgewählten Zeitpunkten sowie Zugfestigkeit	106
8.6	Um Eigenspannungen bereinigte Spannungsanteile	107
8.7	Skizze der Brücke und Markierung des betrachteten Pfeilers	108
8.8	FE-Modell eines massiven Brückenfundaments	110
8.9	Temperaturentwicklung im Pfeiler: innen (dick) und außen (dünn) an drei verschiedenen Höhenlagen	111
8.10	Temperaturverteilung an ausgewählten Zeitpunkten	111

8.11	Entwicklung der lokalen Elementmittenspannungen bzw. der Zugfestigkeit	112
8.12	Elementmittenspannungen in x -Richtung an ausgewählten Zeitpunkten	113
8.13	Elementmittenspannungen in y -Richtung an ausgewählten Zeitpunkten	113
8.14	Entwicklung der Spannungsanteile bzw. deren Überlagerung in x - und y -Richtung	115

Tabellenverzeichnis

4.1	Anwendungsgrenzen des B4-Modells	39
5.1	Parameter der KV-Reihe für $\beta_H \approx 438$ und $\varphi_0 \approx 4,16$ bzw. $m = 0,30$	66
5.2	Parameter (Zugseite) der KV-Reihe für $\beta_H \approx 438$ und $\varphi_0 \approx 0,30 \cdot 4,16$ bzw. $m = 0,17$	79
6.1	Parameter der Festigkeitsentwicklungsfunktionen	85
7.1	Parameter der KV-Reihe für $\beta_H \approx 1\,353$ und $\varphi_0 \approx 3,14$ bzw. $m = 0,30$	97
7.2	Verwendete Wärmeübergangskoeffizienten	99
7.3	Thermische Eigenschaften der verwendeten Materialien	100
8.1	Parameter der KV-Reihe für $\beta_H \approx 1\,353$ und $\varphi_0 \approx 0,30 \cdot 3,14$ bzw. $m = 0,17$. . .	102

Literatur

- Alda, W. (1978). *Zum Schwingkriechen von Beton* (Dissertation, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, Deutschland).
- Altenbach, H. (2012). *Kontinuumsmechanik* (2. Aufl.). doi:10.1007/978-3-642-24119-2
- Anders, I. (2012). *Stoffgesetz zur Beschreibung des Kriech- und Relaxationsverhaltens junger normal- und hochfester Betone* (Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Karlsruhe, Deutschland).
- Atrushi, D. S. (2003). *Tensile and Compressive Creep of Early Age Concrete: Testing and Modelling* (Dissertation, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norwegen).
- Bartsch, H.-J. (2007). *Taschenbuch mathematischer Formeln* (21. Aufl.). Leipzig, Deutschland: Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag.
- Bathe, K.-J. (2014). *Finite Element Procedures* (2. Aufl.). Watertown, USA: K. J. Bathe.
- Bažant, Z. P. (1971). Numerically Stable Algorithm with Increasing Time Steps for Integral-Type aging Creep. (S. 119–127). Berlin, Deutschland: First International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (Reprint), Vol. 3, Paper H2/3.
- Bažant, Z. P. (1988). *Mathematical modelling of creep and shrinkage of concrete*. New York, USA: John Wiley and Sons.
- Bažant, Z. P., Hauggaard, A. B. & Baweja, S. (1997). Microprestress-Solidification Theory for Concrete Creep. II: Algorithm and Verification. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(11), 1195–1201. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:11(1195)
- Bažant, Z. P., Hauggaard, A. B., Baweja, S. & Ulm, F.-J. (1997). Microprestress-Solidification Theory for Concrete Creep. I: Aging and Drying Effects. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(11), 1188–1194. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:11(1188)
- Bažant, Z. P. & Parsannan, S. (1988). Solidification theory for aging creep. *Cement and Concrete Research*, 18(6), 923–932. doi:10.1016/0008-8846(88)90028-2
- Bažant, Z. P. & Prasannan, S. (1989a). Solidification Theory for Concrete Creep. I: Formulation. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(8), 1691–1703. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:8(1691)
- Bažant, Z. P. & Prasannan, S. (1989b). Solidification Theory for Concrete Creep. II: Verification and Application. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(8), 1704–1725. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:8(1704)
- Bažant, Z. P. & Wu, S. T. (1973). Dirichlet Series Creep Function for Aging Concrete. In *Journal of the Engineering Mechanics Division* (S. 367–387). Reston (Virginia), USA: Proceedings of the American Society of civil Engineers.

- Bažant, Z. P. & Xi, Y. [Yunping]. (1995). Continuous Retardation Spectrum for Solidification Theory of Concrete Creep. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(2), 281–288.
- Bažant, Z. P., Yu, Q. & Li, G.-H. (2012). Excessive Long-Time Deflections of Prestressed Box Girders. *Journal of Structural Engineering*, 676–696.
- Benboudjema, F. (2002). *Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations biaxiales. Application aux enceintes de confinement de bâtiments réacteurs des centrales nucléaires* (Dissertation, Université de Marne-la-Vallée, Marne-la-Vallée, Frankreich).
- Benboudjema, F. & Torrenti, J.-M. (2006). Early Age Behaviour of Concrete Nuclear Containments. In *2nd International Symposium on Advances in Concrete through Science and Engineering*. Quebec, Kanada.
- Boley, B. A. & Weiner, J. H. (1997). *Theory of Thermal Stresses* (1. Aufl.). Malabar (Florida), USA: Dover.
- Bosnjak, D. (2000). *Self-Induced Cracking Problems in Hardening Concrete Structures* (Dissertation, The Norwegian University of Science und Technology Trondheim, Trondheim, Schweden).
- Briffaut, M., Benboudjema, F., Torrenti, J.-M. & Nahas, G. (2012). Concrete early age basic creep: Experiments and test of rheological modelling approaches. *Construction and Building Materials*, 373–380. doi:10.1016/j.conbuildmat.2012.04.101
- Brooks, J. J. & Neville, A. M. [A M]. (1977). A comparison of creep, elasticity and strength of concrete in tension and in compression. *Magazine of Concrete Research*, 29(100), 131–141.
- Budelmann, H. (1989). *Verhalten von Beton bei mäßig erhöhten Betriebstemperaturen*. Berlin, Deutschland: Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 404, Beuth Verlag GmbH.
- CEB Bulletin 199. (1990). *Evaluation of the time dependent behavior of concrete: summary report on the work of General Task Group 9* (H. S. Müller & H. K. Hilsdorf, Hrsg.). Lausanne, Frankreich: Comité Euro-International du Béton.
- CEB-FIP MODEL CODE 2010. (2013). *CEB-FIP MODEL CODE 2010*. Lausanne, Frankreich: Comité Euro-International du Béton.
- CEB-FIP MODEL CODE 90. (1990). *CEB-FIP MODEL CODE 90*. Lausanne, Frankreich: Comité Euro-International du Béton.
- De Schutter, G. (1999). Degree of hydration based Kelvin model for the basic creep of early age concrete. *Materials and Structures*, 32, 260–265. doi:10.1007/BF02479595
- Delsaute, B. (2010). *New approach for Monitoring and Modelling of the Creep an Shrinkage behaviour of Cement Pastes, Mortars and Concretes since Setting Time* (Dissertation, Université Libre de Bruxelles, BATir, Belgium; Université Paris-Est, Ifsttar, France, Bruxelles, Belgien).
- Delsaute, B., Staquet, S. & Boulay, C. (2012). Monitoring of the creep and the relaxation behaviour of concrete since setting time, part 2 : tension. (S. 41). Aix-en-Provence, Frankreich: 1st International Conference on Numerical Modeling Strategies for Sustainable Concrete Structures.
- Dorfmann, E. M. (2017). *Zugkriechen von Beton in Abhängigkeit der Spannungsgeschichte* (Masterarbeit, Technische Universität Graz, Graz, Österreich).

- Dormand, J. R. & Prince, P. J. (1980). A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1), 19–26. doi:10.1016/0771-050X(80)90013-3
- Eierle, B. & Schikora, K. (2000). *Zwang und Rissbildung infolge Hydratationswärme – Grundlagen, Berechnungsmodelle und Tragverhalten* (1. Aufl.). Berlin, Deutschland: Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 512, Beuth Verlag GmbH.
- Forth, J. P. (2013). Predicting the tensile creep of concrete. *Cement & Concrete Composites*, 55, 70–80. doi:10.1016/j.cemconcomp.2014.07.010
- Freiesleben, H., Hansen, P. & Pedersen, E. J. (1977). Måleinstrument til Kontrol af betons hærning. In *Nordisk Beton, No. 1* (S. 21–25). Stockholm, Schweden.
- Glyn, J. (2011). *Advanced Modern Engineering Mathematics* (4. Aufl.). Harlow, Vereinigtes Königreich: Pearson Education Limited.
- Glyn, J. (2015). *Modern Engineering Mathematics* (5. Aufl.). Harlow, Vereinigtes Königreich: Pearson Education Limited.
- Gross, D., Hauger, W. & Wriggers, P. (2009). *Technische Mechanik 4 – Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden* (7. Aufl.). Berlin, Deutschland: Springer Verlag Berlin-Heidelberg.
- Grübl, P., Weigler, H., Karl, S. & Kupfer, H. (2001). *Beton – Arten, Herstellung und Eigenschaften* (2. Aufl.). Berlin, Deutschland: Ernst und Sohn Verlag.
- Gutsch, A.-W. (1998). *Stoffeigenschaften jungen Betons – Versuche und Modelle* (Dissertation, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, Deutschland).
- Hairer, E. & Wanner, G. (1996). *Solving Ordinary Differential Equations II – Stiff and Differential-Algebraic Problems* (2. Aufl.). Berlin, Deutschland: Springer.
- Hauggaard, A. B., Damkilde, L. & Hansen, P. F. (1999). Transitional Thermal Creep of Early Age Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(4), 458–465. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:4(458)
- Heinrich, P. J. (2016). Typen erhärtungsbedingter Rissbildung und deren Bestimmung aus Temperatur- und Spannungsfelder räumlicher Berechnungsmodelle. In *Beton Graz '16 – 3. Grazer Betonkolloquium* (S. 316–317). Graz, Österreich.
- Heinrich, P. J. & Schlicke, D. (2016). Hardening-induced stresses in very thick concrete members – Insights from comprehensive FE-Studies. In *Proceedings of MSSCE2016/Service Life Segment* (S. 249–258). Lyngby, Dänemark.
- Heinrich, P. J., Schlicke, D. & Tue, N. V. (2015). Serviceability and Stability of Unreinforced Mass Concrete Structures – EC 2 Compatible Design Concept Derived from Comprehensive FE-Studies on Real Structural Behaviour. In *Mechanics and Physics of Creep, Shrinkage, and Durability of Concrete and Concrete Structures (CONCREEP-10)*. Wien, Österreich.
- Henrici, P. (1964). *Elements of numerical analysis* (1. Aufl.). USA: John Wiley & Sonst, Inc.
- Hermerschmidt, W. (2016a). *Modelle zur Beschreibung der thermomechanischen Materialeigenschaften jungen Betons* (Dissertation, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, Deutschland).

- Hermerschmidt, W. (2016b). *Modelling of early age concrete creep with rheological modeling approaches*. ENS Cachan Laboratoire de Mécanique et de Technologie. Braunschweig, Deutschland.
- Hermerschmidt, W. & Budelmann, H. (2014). Constitutive Law for the Viscoelastic Behaviour of Early Age Concrete in Massive Structures. In *RILEM International Symposium on Concrete Modelling* (S. 183–189). Peking, China.
- Hermerschmidt, W. & Budelmann, H. (2015). Creep of early age concrete under variable stress. In *Proceedings of CONCREEP-10* (S. 929–937). doi:10.1016/9780784479346.111
- Herrmann, N. (2007). *Höhere Mathematik für Ingenieure, Physiker und Mathematiker* (2. Aufl.). München, Deutschland: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.
- Jędrzejewska, A., Benboudjema, F., Lacarrière, L., Azenha, M., Schlicke, D., dal Pont, S., ... Troyan, V. (2018). COST TU1404 WG2 Benchmark program – Stage 1. Macro-modelling of concrete and concrete structures at early age. *Construction and Building Materials*, 174, 173–189. doi:10.1016/j.conbuildmat.2018.04.088
- Ji, G., Kanstad, T. & Bjøntegaard, N. (2013). Tensile and compressive creep deformations of hardening concrete containing mineral additives. *Materials and Structures*, 46(7), 1167–1182. doi:10.1617/s11527-012-9962-7
- Jirásek, M. & Havlásek, P. (2014). Accurate approximations of concrete creep compliance functions based on continuous retardation spectra. *Computers & Structures*, 135, 155–168. doi:10.1016/j.compstruc.2014.01.024
- Jonasson, J. E. (1984). *Slipform construction – calculation for assessing protection against early freezing*. Stockholm, Sweden: Swedish Cement and Concrete Research Institute, Fo/Research.
- Kara, H. (2005). *Untersuchung des viskoelastisch exzentrischen Knickens von Polymeren* (Dissertation, Technische Universität München, München, Deutschland).
- Kelly, P. A. (2015). Solid Mechanics Part I: An Introduction to Solid Mechanics. http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_I/. [online; Zugriffsdatum 06. Dezember 2016].
- Knoppik-Wróbel, A. & Schlicke, D. (2016). Computational prediction of restraint-induced crack patterns in reinforced concrete walls. In *Proceedings of MSSCE2016/Service Life Segment* (S. 49–58). Lyngby, Dänemark.
- Kordina, K. (1999). Beton unter Langzeit-Zugbeanspruchung. *Bautechnik*, 76(6), 479–488. doi:10.1002/bate.199903250
- Kordina, K., Schubert, L. & Troitzsch, U. (2000). *Kriechen von Beton unter Zugbeanspruchung*. Berlin, Deutschland: Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 498, Beuth Verlag GmbH.
- Kristiawan, S. A. (2006). Strength, Shrinkage and Creep of Concrete in Tension and Compression. *Civil Engineering Dimension*, 8(2), 73–80.
- L’Hermite, R. (1957). Que Savons-Nous de la Déformation Plastique et du Fluage du Béton. *Annales de L’Institute Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, 117.
- Laube, M. (1990). *Werkstoffmodell zur Berechnung von Temperaturspannungen in massigen Betonbauteilen im jungen Alter* (Dissertation, Fachbereich für Bauingenieur- und Ver-

- messungswesen der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, Deutschland).
- Ma, J. (2010). *Faserfreier Ultrahochfester Beton – Entwicklung und Materialeigenschaften* (Dissertation, Universität Leipzig, Leipzig, Deutschland).
- Mase, G. T. & Mase, G. E. (1999). *Continuum Mechanics for Engineers* (2. Aufl.). Florida, USA: CRC Press.
- Mc Henry, D. (1943). A new aspect of creep in concrete and its application to design. *Proceedings ASTM*, 43, 1069–1087.
- Merkel, M. & Öchsner, A. (2010). *Eindimensionale Finite Elemente*. Berlin, Deutschland: Springer Verlag Berlin-Heidelberg.
- Müller, H. S. (1986). *Zur Vorhersage des Kriechens von Konstruktionsbeton* (Dissertation, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, Deutschland).
- Müller, H. S. (2013). Das Kriechen von Beton – eine unendliche Geschichte. In R. Nothnagel & H. Twelmeier (Hrsg.), *Baustoff und Konstruktion* (S. 397–413). doi:10.1007/978-3-642-29573-7_39
- Neville, A. M. [Adam M], Dilger, W. H. & Brooks, J. J. (1983). *Creep of plain and structural concrete*. New York, USA: Construction Press.
- ÖNORM EN 1992-1-1. (2011). *Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken (Ausgabe: 2009-07-01)*. Wien, Österreich: Österreichisches Normungsinstitut.
- Powers, T. C. (1968). Mechanisms of shrinkage and reversible creep of hardened cement paste. In A. E. Brooks & K. Newman (Hrsg.), *The structure of concrete and its behaviour under load*. London, Vereinigtes Königreich: Cement und concrete Association.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. & Flannery, B. P. (2002). *Numerical Recipes in C (Reprint 2002)* (2. Aufl.). Cambridge, Vereinigtes Königreich: Cambridge University Press.
- Ranaivomanana, N., Multon, S. & Turatsinze, A. (2013). Tensile, compressive and flexural basic creep of concrete at different stress levels. *Cement and Concrete Research*, (52), 1–10. doi:10.1016/j.cemconres.2013.05.001
- Reinhardt, H.-W. & Rinder, T. (2006). Tensile Creep of High-Strength Concrete. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 4(2), 277–283.
- RILEM draft recommendation TC-242-MDC. (2015). RILEM draft recommendation: TC-242-MDC multi-decade creep and shrinkage of concrete: material model and structural analysis. *Materials and Structures*, 48(4), 753–770. doi:10.1617/s11527-014-0485-2
- Röhling, S. (2005). *Zwangsspannungen infolge Hydratationswärme* (1. Aufl.). Düsseldorf, Deutschland: Verlag Bau+Technik GmbH.
- Rossi, P., Tailhan, J.-L. & Le Maou, F. (2013). Comparison of concrete creep in tension and in compression: Influence of concrete age at loading and drying conditions. *Cement and Concrete Research*, (51), 78–84. doi:10.1016/j.cemconres.2013.04.001
- Rossi, P., Tailhan, J.-L., Le Maou, F., Gaillent, L. & Martin, E. (2012). Basic creep behavior of concretes investigation of the physical mechanisms by using acoustic emission. *Cement and Concrete Research*, 42(1), 61–73. doi:10.1016/j.cemconres.2011.07.011

- Rottler, S. (1998). *Kriechen von Beton unter veränderlicher Spannung* (Dissertation, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, Deutschland).
- Schlicke, D. (2014). *Mindestbewehrung zwangbeanspruchter Betonbauteile unter Berücksichtigung der erhärtungsbedingten Spannungsgeschichte und der Bauteilgeometrie* (Dissertation, Technische Universität Graz, Graz, Österreich). doi:10.3217/978-3-85125-363-4
- Schlicke, D. & Dorfmann, E. M. (2017). Influence of gradual imposition of tensile stresses on associated viscoelastic behaviour. In S. Staquet & D. Aggelis (Hrsg.), *Proceedings of the 2nd International RILEM/COST Conference on Early Age Cracking and Serviceability in Cement-based Materials and Structures (EAC-02)* (S. 609–614). Bruxelles, Belgien.
- Schlicke, D. & Tue, N. V. (2012). Approach for Consideration of Viscoelasticity in Time Step FEM based Restraint Analyses of Hardening Concrete. Aix-en-Provence, Frankreich.
- Schlicke, D., Turner, K. & Tue, N. V. (2015). Decrease of Tensile Creep Response under Realistic Restraint Conditions in Structures. In *Proceedings of CONCREEP-10* (S. 1333–1339). doi:10.1016/9780784479346.158
- Selna, L. G. (1969). A Concrete Creep, Shrinkage, and Cracking Law for Frame Structures. *ACI Journal of Proceedings*, 66(10), 847–848.
- Shampine, L. F. & Reichelt, M. W. (2006). The MATLAB ODE Suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(1), 1–22. doi:10.1137/S1064827594276424
- Tacke, R. (2002). *Feuchte- und Festigkeitsentwicklung hydratisierenden Betons – Modellierung und numerische Analyse* (Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, Deutschland).
- Tailhan, J.-L., Boulay, C., Rossi, P., Le Maou, F. & Martin, E. (2013). Compressive, tensile and bending basic creep behaviours related to the same concrete. *Structural Concrete*, 14(2), 124–130. doi:10.1002/suco.201200025
- Trost, H. (1967a). Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton. *Beton- und Stahlbetonbau*, 62(10), 230–238.
- Trost, H. (1967b). Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton. *Beton- und Stahlbetonbau*, 63(11), 261–269.
- Tschoegl, N. W. (1989). *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Berlin, Deutschland: Springer-Verlag.
- Tue, N. V., Schlicke, D. & Bödefeld, J. (2007). Beanspruchungen in dicken Bodenplatten infolge des Abfließens der Hydratationswärme. *Bautechnik*, 84(10), 702–710.
- Tue, N. V., Schlicke, D. & Schneider, H. (2009). Zwangbeanspruchung massiver Kraftwerksbodenplatten infolge der Hydratationswärme. *Bautechnik*, 86(3), 142–149.
- Turner, K., Schlicke, D. & Tue, N. V. (2015). Restraint and crack width development during service life regarding hardening caused stresses. Copenhagen, Dänemark: Proceedings of fib-Symposium.
- Wendler, R., Hubler, M. H. & Bažant, Z. P. (2013). The B4 Model for Multi-decade Creep and Shrinkage Prediction. In *Proceedings of 9th International Conference on Creep, Shrinkage and Durability Mechanics (CONCREEP-9)*, Cambridge, Massachusetts, United States (S. 429–436). Massachusetts, USA.

-
- Wesche, K. (1993). *Baustoffe für tragende Bauteile – Band 2: Beton, Mauerwerk (nichtmetallische-anorganische Stoffe)* (3. Aufl.). Berlin, Deutschland: Bauverlag GmbH Wiesbaden und Berlin.
- Wesche, K. & Boes, A. (1973). *Über das Kriechen von Zementstein, Mörtel und Beton*. Opladen, Deutschland: Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 2276, Westdeutscher Verlag.
- Xi, Y. & Bažant, Z. P. (1993). Continuous Retardation Spectrum for Solidification Theory of Concrete Creep. In Z. P. Bažant & I. Carol (Hrsg.), *Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium* (S. 225–230). London, Vereinigtes Königreich: Ernst und Sohn.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. & Zhu, J. Z. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* (6. Aufl.). Oxford, Vereinigtes Königreich: Elsevier Butterworth-Heinemann.
- Zilch, K. & Zehetmaier, G. (2010). *Bemessung im konstruktiven Betonbau* (2. Aufl.). Berlin, Deutschland: Springer-Verlag.
- ZTV-W LB 215. (2004). *Zusätzliche Technische Vertragsbedingungen Wasserbau, Wasserbauwerke aus Beton und Stahlbeton*. Bonn, Deutschland: Bundesminister für Verkehr, Bau und Wohnungswesen.