

Die vorliegende Arbeit hat sich zwei Ziele gesteckt. Das eine besteht darin, dem Praktiker einfache und kurze Formeln in die Hand zu geben, mit deren Hilfe eine sofortige und direkte Dimensionierung von Eisenbetonkonstruktionen möglich ist und durch welche sowohl das unsichere und zeitraubende Herumtasten nach einer ersten Annahme als auch die Untersuchung mittels der langen genauen Formeln überflüssig gemacht wird.

Das zweite Ziel ist die Beantwortung der Frage, bis zu welcher Grenze sich bei den Plattenbalken die zu beiden Seiten der Rippe sich anschließende Platte an der Lastaufnahme beteiligt.

Für einzelne Konstruktionsarten sind in der allerletzten Zeit Arbeiten von Dr. Ing. Paul Weiske und Dr. Ing. Saliger veröffentlicht worden, die im Gedankengang teilweise mit dem hier eingeschlagenen parallel laufen. Doch sind solche Formeln, soweit mir bekannt ist, noch nirgends in allgemein für Platten und Balken und Plattenbalken mit „schlaffer“ oder „steifer“ Armierung gültiger Form abgeleitet worden und sind insbesondere die Untersuchungen am Ende des I. Teils, die sich auf die rationellsten Dimensionierungsmethoden zur Erreichung des Betonminimums oder Eisenminimums, beziehungsweise zur Erreichung der geringsten Konstruktionshöhe bei gleichzeitiger ökonomischer Ausnützung der Betondruck- und Eisenzugfestigkeit beziehen, nirgends aufgestellt worden. Die zweite Aufgabe ist meines Wissens überhaupt noch nirgends öffentlich in Angriff genommen worden und sie ist es, die im Zusammenhang mit dem I. Teil erst eine endgültige Lösung des Problems der direkten Dimensionierung von Eisenbetonkonstruktionen anbahnt.

Der ganzen Arbeit sind die bekannten Melan'schen Formeln (siehe Österr. Ing.- und Arch.-Kalender zur Untersuchung von Eisenbetonkonstruktionen zugrunde gelegt; Voraussetzungen sind ferner gerade Belastung und reine Biegung (wie in der Praxis bei Platten und Balken fast ausnahmslos vorliegt) und somit Berechnung nach der 2. Phase.

Am Ende der Arbeit sind die wichtigsten Ergebnisse übersichtlich zusammengefaßt.

I. Teil: Dimensionierungsformeln.

Es bezeichnen im Folgenden:

s Die zulässige Inanspruchnahme des Eisens auf Zug.

σ Die zulässige Inanspruchnahme des Betons auf Druck.

ν Das Verhältnis der Elastizitätsmoduli von Eisen und Beton $\frac{E_e}{E_b} = 15$, wie üblich.

1. Platten oder Balken mit „schlaffer“ Armierung.

(Vgl. Taf. I, Fig. I. Ia, 1 b).

Für dieselben sind die Formeln für die direkte Dimensionierung bereits von Prof. Melan entwickelt (vergl. Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst 1904, Heft 51). Sie seien hier nur der Vollständigkeit halber und als Grundlage für die folgenden, für Plattenbalken gültigen Formeln abgeleitet und zwar in etwas veränderter Form gegenüber der oben zitierten Quelle wegen Übereinstimmung mit dem Folgenden.

Bezeichne H die Höhe des Balkens oder der Platte, wobei die unterhalb des Eisens liegende und zur Umbüllung desselben dienende dünne Betonschicht, da sie ohnedies in der 2. Phase in den „unwirksamen“ Querschnittsteil fällt, in die Höhe H nicht mitgerechnet sei, B die Breite des Balkens, beziehungsweise eines beliebig breiten Streifens der Platte (z. B. $B = 1$), wobei dann aber die Eisenfläche F_e und das Angriffsmoment M auf dieselbe Breite zu beziehen sind, x den Abstand der Null-Linie = ideellen Schwerachse von der Eisenachse, so gilt nach Melan

$$x = H + z - \sqrt{z^2 + 2Hz} \dots \dots \dots 1$$

$$\text{wobei } z = \frac{\nu F_e}{B} \text{ und } \nu = \frac{E_e}{E_b}; \dots \dots \dots 2$$

Das Trägheitsmoment des in der zweiten Phase wirksamen Querschnittes ergibt sich mit

$$J = \frac{1}{3} \nu F_e x (2H + x); \dots \dots \dots 3$$

Die größte Druckspannung σ_b im Beton und die größte Zugspannung s_e im Eisen mit

$$\left. \begin{aligned} \sigma_b &= \frac{M}{J} (H - x) \\ s_e &= \nu \frac{M}{J} x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 4$$

Sollen diese beiden Grenzspannungen die zulässigen Werte σ und s gleichzeitig erreichen, so ergeben diese beiden letzten Gleichungen

$$x = \frac{s}{\nu \sigma + s} H \dots \dots \dots 5$$

$$\text{Setzen wir } \alpha = \frac{s}{\nu \sigma + s}, \dots \dots \dots 6$$

so ist $x = \alpha \cdot H \dots \dots \dots 7$

Dies in Gleichung 1 eingeführt liefert:

$$H = \frac{2z\alpha}{(1-\alpha)^2}; \text{ und unter Berücksichtigung von Gleichung 2 ferner}$$

$$\underline{F_e = \frac{(1-\alpha)^2}{2\nu\alpha} BH = CBH \dots \dots \dots I.}$$

Aus Gleichung 3 erhält man mit $x = \alpha H$ und Gleichung I

$$J = \frac{1}{6} B H^3 (1 - \alpha)^2 (2 + \alpha);$$

Nun ergibt sich aber aus einer der beiden Gleichungen 4 unter Benützung von 5 und für $\sigma_b = \sigma, s_e = s,$

$$J = \frac{\nu \alpha}{s} M H \dots \dots \dots 7a$$

Dies oben eingesetzt liefert:

$$H^2 = \frac{6 \nu \alpha}{s (1 - \alpha)^2 (2 + \alpha)} \frac{M}{B} = C' \frac{M}{B} \dots \dots \dots II$$

wobei die Werte von C und C' für variables α einer weiter unten folgenden Tabelle*) zu entnehmen sind.

Bei gegebener Balkenbreite B liefert die Formel II die Höhe, und die Formel I die notwendige Eisenfläche. Bei Platten kann man am einfachsten M und F_e auf die Breite $B = 1$ beziehen; dann fällt B aus den Formeln.

Für den praktisch wichtigen Fall von $s = 1000 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma = 33\frac{1}{3} \text{ „ } , \text{ also } \alpha = \frac{2}{3} \text{ liefern die}$$

Formeln I und II

$$\left. \begin{array}{l} F_e = \frac{B H}{180} \\ \text{oder } F_e \doteq 0.56\% F_b \end{array} \right\} \dots \dots \dots Ia$$

und

$$\left. \begin{array}{l} H^2 \doteq \frac{1}{5} \frac{M}{B} \\ \text{für } B = 1, H^2 \doteq \frac{M}{5} \end{array} \right\} \dots \dots \dots IIa$$

Beispiel: Eine freiaufliegende Platte für das Angriffsmoment $M = 72000 \text{ kgcm}$ pro 1 m Plattenbreite ist zu dimensionieren:

Auf die Breitereinheit 1 cm entfällt

$$M = 720 \text{ kg cm},$$

somit nach Formel II^a

$$H^2 = \frac{M}{5} = 144,$$

$$H = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Eisenfläche pro 1 m Breite nach Formel I}^a: F_e = \frac{1200}{180} = 6\frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

Es ist nach dem Gesagten selbstverständlich, daß die obigen Formeln I und II dieselben Werte ergeben, wie sie Professor Melan an der oben zitierten Stelle fand.

2. Platten mit „steifer“ Armierung.

(Vgl. Tafel I, Fig. 2 a, 2 b).

Bezeichnet h die Höhe der steifen Einlage, H die Höhe der Platte und x den Abstand der ideellen Schwerachse von der Unterkante der Konstruktion (wobei wieder die dünne Betonschichte unterhalb des Eisens nicht in Rechnung

*) Siehe Seite 14.

gezogen sei) so gilt zur Ermittlung der Schwerachse bekanntlich: Summe der statischen Momente aller wirksamen Flächenteile gleich Null:

$$\frac{1}{2} B (H - x)^2 = \nu F_e \left(x - \frac{h}{2} \right) \dots \dots \dots 8$$

wobei F_e die gesammte auf die Breite B entfallende Eisenfläche bedeutet. Setzen wir hierin nach Gleichung 7

$$x = \alpha H \text{ und } h = k H \dots \dots \dots 9$$

so ergibt sich $\frac{1}{2} B H^2 (1 - \alpha)^2 = \nu F_e H \left(\alpha - \frac{k}{2} \right)$ und

$$F_e = \frac{(1 - \alpha)^2}{2 \nu \left(\alpha - \frac{k}{2} \right)} B H; \dots \dots \dots \text{III}$$

Vergleicht man dies mit Gleichung I so findet man, daß Gleichung III für $h = 0$ also $k = 0$ in Gleichung I übergeht.

Hier ist es mitunter zweckmäßiger die Gleichung nach B aufzulösen. Sie lautet dann

$$B = \frac{2 \nu \left(\alpha - \frac{k}{2} \right)}{(1 - \alpha)^2} \frac{F_e}{H} \dots \dots \dots \text{III'}$$

Das Trägheitsmoment des wirksamen Querschnitts ergibt sich mit

$$J = \frac{1}{3} B (H - x)^3 + \nu F_e \left(x - \frac{h}{2} \right)^2 + \nu J_e, \dots \dots \dots 10$$

wobei J_e das Trägheitsmoment der steifen Einlage, bezogen auf die eigene Achse, ist. Diese Formel (10) setzt als Armierung ein Profil voraus, dessen Schwerpunkt in der halben Höhe liegt, ist also für gewalzte I-Träger, für genietete mit horizontaler Symmetrieachse giltig, nicht aber z. B. für Bulbeisen.

Substituiert man in Gleichung 10 für $\nu F_e \left(x - \frac{h}{2} \right)^2$ den aus Gleichung 8 resultierenden Wert

$$\nu F_e \left(x - \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} B (H - x)^2 \left(x - \frac{h}{2} \right) \text{ und führt man auch}$$

Gleichung 7 und 9 ein, so erhält man

$$J = \frac{1}{3} B H^3 (1 - \alpha)^3 + \frac{1}{2} B H^3 (1 - \alpha)^2 \left(\alpha - \frac{k}{2} \right) + \nu J_e \dots \dots 11$$

Aus dieser Gleichung ist zunächst J_e zu eliminieren.

Es ist $J_e = c \cdot F_e h^2$, wobei c bei den reichsdeutschen und österreichischen gewalzten Normal-I-Profilen ziemlich genau gleich $\frac{1}{6}$ ist. Setzt man hierin die Werte für h aus Gleichung 9 und für F_e aus Gleichung III, so erhält man

$$J_e = c \frac{(1 - \alpha)^2}{2 \nu \left(\alpha - \frac{k}{2} \right)} k^2 B H^3$$

$$\text{oder } J_e = \overset{*}{C} \cdot k^2 B H^3, \dots \dots \dots 12$$

und für die gewalzten Normal-I-Profile ist

$$C^* = \frac{(1 - \alpha)^2}{12 \nu \left(\alpha - \frac{k}{2} \right)} \dots \dots \dots 13$$

Führt man nun den Wert von J_e aus Gleichungen 12, und 13 in Gleichung 11 ein und ersetzt J durch den in Gleichung 7 a gefundenen Wert

$$J = \frac{\nu \alpha}{s} MH, \text{ so findet man endlich}$$

$$H^2 = \frac{12 \nu \alpha \left(\alpha - \frac{k}{2} \right)}{s (1 - \alpha)^2 [k^2 + (2 + \alpha - \frac{3}{2} k) (2 \alpha - k)]} \frac{M}{B} \dots \dots \dots \text{IV}$$

Formel IV geht für $k = 0$ in Formel II über.

Die Gleichungen III und IV, die sich zur direkten Dimensionierung von Platten mit steifen Einlagen benützen lassen, schreiben sich auch wie folgt:

$$B = C_1 \frac{F_e}{H} \dots \dots \dots \text{III}$$

$$H^2 = C_2 \frac{M}{B} = C_2 m \dots \dots \dots \text{IV}$$

wobei C_1 und C_2 für die verschiedenen Werte der zulässigen Spannungen und für die verschiedenen Werte von α und k aus nachstehenden Tabellen zu entnehmen sind. m ist das auf die Breitereinheit reduzierte Angriffsmoment.

$$C_1 = \frac{2 \nu \left(\alpha - \frac{k}{2} \right)}{(1 - \alpha)^2} \dots \dots \dots 14$$

Zulässige Eisen-Zugspannung $s \text{ kg/cm}^2$	Zulässiger Betondruck $\sigma \text{ kg/cm}^2$	α	Werte von C_1 für $\nu = 15$ und				
			$k = \frac{1}{2}$	$k = \frac{2}{3}$	$k = \frac{3}{4}$	$k = \frac{4}{5}$	$k = 1$
800	25	0.681	127.062	102.593	90.212	82.842	53.360
	30	0.640	90.278	71.065	61.344	55.556	32.408
	$33\frac{1}{3}$	0.615	73.873	57.076	48.574	43.515	23.276
	40	0.571	52.325	38.795	31.949	27.874	11.573
900	25	0.706	161.948	129.458	117.556	106.205	71.497
	30	0.667	112.818	90.363	78.998	72.235	45.181
	$33\frac{1}{3}$	0.643	92.506	72.970	63.083	57.199	33.661
	40	0.600	65.625	50.062	42.187	37.500	18.750
1000	25	0.727	196.428	158.600	141.690	131.627	91.376
	30	0.690	137.356	111.445	98.335	90.532	59.313
	$33\frac{1}{3}$	0.667	112.818	90.363	78.998	72.235	45.181
	40	0.625	80.000	62.293	53.334	48.000	26.667
1200	25	0.762	277.480	227.205	204.962	191.721	138.758
	30	0.727	196.482	158.600	141.690	131.627	91.376
	$33\frac{1}{3}$	0.706	161.948	129.458	117.556	106.205	71.497
	40	0.667	112.818	90.363	78.998	72.235	45.181

$$C_2 = \frac{12 \nu \alpha \left(\alpha - \frac{k}{2} \right)}{s (1 - \alpha)^2 \left[k^2 + \left(2 + \alpha - \frac{3}{2} k \right) (2 \alpha - k) \right]} \dots *) \dots 15$$

Zu- lässiger Eisenzug s kg/cm ²	Zu- lässiger Beton- druck σ kg/cm ²	α	Werte von C ₂ für ν = 15 und				
			k = 1/2	k = 2/3	k = 3/4	k = 4/5	k = 1
800	25	0.681	0.3390	0.3246	0.3042	0.2874	1.1909
	30	0.640	0.2513	0.2350	0.2156	0.2003	0.1179
	33 1/3	0.615	0.2115	0.1942	0.1754	0.1608	0.0854
	40	0.571	0.1579	0.1394	0.1212	0.1077	0.0430
900	25	0.706	0.3748	0.3549	0.3439	0.3201	0.2253
	30	0.667	0.2714	0.2579	0.2401	0.2257	0.1445
	33 1/3	0.643	0.2282	0.2138	0.1965	0.1828	0.1087
	40	0.600	0.1699	0.1542	0.1376	0.1250	0.0615
1000	25	0.727	0.4012	0.3832	0.3656	0.3505	0.2560
	30	0.690	0.2905	0.2794	0.2629	0.2492	0.1691
	33 1/3	0.667	0.2499	0.2321	0.2161	0.2031	0.1301
	40	0.625	0.1811	0.1676	0.1524	0.1405	0.0781
1200	25	0.762	0.4576	0.4425	0.4268	0.4125	0.3182
	30	0.727	0.3344	0.3193	0.3047	0.2921	0.2133
	33 1/3	0.706	0.2811	0.2661	0.2579	0.2401	0.1690
	40	0.667	0.2035	0.1934	0.1801	0.1693	0.1084

Die Benützung der Formeln geschieht wie folgt:

Aus den zulässigen Spannungen im Eisen und Beton bestimmt sich aus der Tabelle oder aus Gleichung 6 der Wert von α. Der Wert von k wird nach Bedarf angenommen und B wird dann aus der Formel III bestimmt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß sich B umso größer ergeben wird, daß man die Eiseneinlagen umso weiter auseinander rücken dürfen, je größer k gewählt wird.

k = 3/4 bis 4/5 dürfte der geeignetste Wert sein. Eine Änderung in der Annahme von k hat sehr geringen Einfluß auf H und ändert bloß F_e und B.

Man ermittelt H aus Gleichung IV, worin M/B = m das auf die Breiten-
einheit reduzierte Angriffsmoment ist.

Mit H ist aus h = kH auch die Profilvernummer h und somit aus dem Profilbuch F_e gegeben.

Aus Gleichung III ergibt sich dann das B.**)

*) Zur Hilfe bei der Berechnung anderer Werte von C₁ und C₂ als in obiger Tabelle angegeben diene daß $C_2 = C_1 \frac{6 \alpha}{s [k^2 + (2 + \alpha - \frac{3}{2} k) (2 \alpha - k)]}$.

**) Ergibt sich B hieraus größer als etwa 1 m, so ist die Platte zwischen den Traversen für sich zu untersuchen und k eventuell kleiner zu wählen.

Für den in der Praxis wichtigen Fall $s = 1000 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma = 33.3 \text{ kg/cm}^2$
und für $k = \frac{3}{4}$
lauten die beiden Gleichungen III und IV.

$$B = 78.998 \frac{F_e}{H} \dots \dots \dots \text{III}^a$$

$$H^2 = 0.2161 \frac{M}{B} \dots \dots \dots \text{IV}^a$$

Beispiel: Eine Platte mit steifen Einlagen für ein Biegemoment
von 120.000 *kgcm* pro 1 m Plattenbreite zu konstruieren:
zulässig sei $s = 1000 \text{ kg/cm}^2$,

$$\sigma = 33\frac{1}{3} \text{ kg/cm}^2.$$

a) Ich wähle $h = \frac{3}{4} H$, also $k = \frac{3}{4}$.

Die Tabellen liefern hierfür $C_1 = 78.998$

$$C_2 = 0.2161$$

Für 1 cm Breite ist $\frac{M}{B} = 1200 \text{ kgcm}$. Somit nach Gleichung IV^a

$$H^2 = 0.2161 \cdot 1200$$

$$H = 16 \text{ cm}; \text{ somit}$$

$$h = \frac{3}{4} H = 12 \text{ cm}.$$

a) Nach den österreichischen Normalien hat I-Profil Nr. 12 eine Fläche

$$F_e = 16.08 \text{ cm}^2,$$

nach III^a ist
$$B = 78.998 \cdot \frac{16.08}{16} = \text{rund } 80 \text{ cm}.$$

Untersucht man zur Kontrolle die so angenommene Konstruktion hinsichtlich ihrer Spannungen, so erhält man:

$$x = 10.7 \text{ cm}$$

$$J = 15196.5 \text{ cm}^4$$

$$M = 80.1200 = 96.000 \text{ kgcm}$$

$$s = 1010 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma = 33.4 \text{ "}$$

β) Nach den deutschen Normalprofilen hat I-Profil Nr. 12 eine Fläche

$$F_e = 14.2 \text{ cm}^2$$

nach III^a ist
$$B = 78.998 \frac{14.2}{16}; = \text{rund } 70 \text{ cm}.$$

Die Untersuchung ergibt:

$$x = 10.7 \text{ cm}$$

$$J = 13147.39 \text{ cm}^4$$

$$M = 76800 \text{ kgcm}$$

$$s = 937 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma = 31 \text{ "}$$

b) Hätte man $k = \frac{4}{5}$ gewählt, so hätten die beiden Tabellen geliefert

$$C_1 = 72.235$$

$$C_2 = 0.2031 \text{ und nach Formel IV wäre}$$

$$H = 15.5 \text{ cm} \text{ geworden.}$$

Praktisch ausgeführt hätte man auch dann $H = 16\text{ cm}$; daraus erkennt man, wie gering der Einfluß einer Änderung in der Wahl von k ist.

3. Plattenbalken mit schlaffer Armierung.

(Vgl. Tafel I, Fig. 3 a, 3 b, 3 c.)

Mit diesen Konstruktionen, denen heute im Betoneisenhochbau die größte Rolle zugefallen ist, wollen wir uns ausführlich befassen. Es sei zunächst der Vorgang charakterisiert, wie er bei der Projektierung solcher Balkendecken bisher eingehalten wird. Die Dimensionierung wird nach dem Maximalmoment vorgenommen, und es wird dann eine Untersuchung der durch Querkräfte am stärksten beanspruchten Stellen bezüglich der dort auftretenden Schubspannungen durchgeführt. Auf diese Schubspannungen kommen wir im II. Teil der Arbeit noch zurück. Die Dimensionierung selbst beschränkt sich auf die Ermittlung der Randspannungen an der Stelle des Maximalmoments unter Zugrundelegung einer ersten Annahme. Dabei ist d in der Regel schon aus der Untersuchung der Platte für sich als Querkonstruktion zwischen den Rippen gegeben. Für B wird bisher entweder die Rippendistanz oder nach den deutschen Vorschriften $\frac{1}{3}$ der Rippenlänge in Rechnung gestellt. Wie es sich damit verhält, darüber handelt der ganze zweite Teil dieser Arbeit. Für den ersten Teil soll deshalb B als gegeben angesehen werden. Es werden ferner für F_e , b , h erste Annahmen gemacht und man erhält dann die Fläche des ideellen Betonbalkens nach Melan aus

$$F = B d + b h + v F_e \dots\dots\dots 16)$$

ferner aus einer Gleichgewichtsgleichung

$$x = \frac{F}{b} - \sqrt{\left(\frac{F}{b}\right)^2 - (H^2 - h^2) \frac{B}{b}} - h^2 \dots\dots\dots 17)$$

Das Trägheitsmoment des ideellen Betonbalkens auf seine ideale Schwerpunktsachse aus:

$$J = \frac{1}{3} [B (H - x)^3 - (B - b) (h - x)^3] + v F_e x^2 \dots\dots\dots 18)$$

Endlich, wenn M das Maximalmoment der äußeren Kräfte ist, die Grenzspannungen im gefährlichen Querschnitt

$$\text{Betondruck } \sigma_b = \frac{M}{J} (H - x) \dots\dots\dots 19a)$$

$$\text{Eisenzug } s_e = v \frac{M}{J} x \dots\dots\dots 19b)$$

Ergeben sich hieraus zulässige Werte, so ist die Konstruktion ausreichend. Soll sie auch ökonomisch dimensioniert sein, so müssen sich aus 19) die zulässigen Grenzwerte der Inanspruchnahme ergeben.

Die statische Berechnung läuft also auch hier auf eine Untersuchung einer nach dem Gefühl getroffenen ersten Annahme hinaus. Darin und ferner in dem Umstand, daß es aus dem Ergebnis der Formeln 19, sofern es ein ungünstiges ist, nicht ohne weiteres zu erkennen ist, welche Abmessung der Rippenplatte zu ändern ist und in welchem Ausmaß — darin liegen die Hauptschwierigkeiten für den in der Berechnung von Betoneisenkonstruktionen Ungeübten. Verfasser hat als Dozierender der Eisen- und Eisenbetonkonstruktionen

an einer Hochschule Gelegenheit zu beobachten, wie groß diese Schwierigkeit selbst für Hochschüler ist, die das Operieren mit Formeln etc. noch frisch in Übung haben.

Die Ableitung der Näherungsformeln geht daher wieder darauf aus, Schlüssel für die direkte Dimensionierung zu finden, die einfach genug sind um leicht gebraucht zu werden und dabei genau genug um selbst eine nachträgliche Untersuchung der gefundenen Werte überflüssig zu machen. Sie geht wieder von der Voraussetzung ökonomischer Dimensionierung aus. Es sollen gleichzeitig in beiden Materialien die zulässigen Inanspruchnahmen (σ im Beton, s im Eisen) an der Stelle des größten Angriffsmomentes faktisch erreicht werden.

Somit gilt wieder

7) $x = \alpha H$ und

6) $\alpha = \frac{s}{v \sigma + s}$;

Jedem, der in der Dimensionierung von Plattenbalken aus Betoneisen eine gewisse Übung besitzt, ist es bekannt, daß bei richtiger Wahl der Abmessungen die Null-Linie des Querschnitts meistens sehr nahe an die Unterkante der Platte fällt, häufig sogar mit dieser identisch wird.*) Die oben angegebene Formel 18 für J gilt, wie aus ihrem Bau ohne weiters ersichtlich ist, nur bis zu diesem Grenzfall. Liegt die Null-Linie innerhalb der Platte, was, nebenbei bemerkt, immer auf eine unökonomische Formgebung schließen läßt, so tritt Formel 3 an die Stelle der Formel 18.

Das Kriterium für die Giltigkeit der Formel 18 ist also

$h > x$
oder nach (7 . . . $\frac{h}{H} > \alpha$ 20)

Ist $\frac{h}{H} = \alpha$, so fallen Plattenunterkante und Null-Linie zusammen. In jedem Falle wird aber, wie oben bemerkt, bei richtiger Dimensionierung die Distanz der beiden Linien von einander nicht groß sein. (Vgl. Fig. 4 a, 4 b, Tafel I.)

Zum Zwecke der Vereinfachung der Formeln begehen wir die folgende Vernachlässigung: Wir berücksichtigen sowohl bei Ermittlung des ideellen Trägheitsmoments als auch bei der Bestimmung von x vom Beton nur die Platte, vernachlässigen also die rechteckige oder trapezförmige Fläche $abcd$ (Figur 4, Tafel I). Wir wollen uns weiter unten über die mutmaßliche Größe des so entstandenen Fehlers und seine Richtung orientieren.

Die Gleichung 17 ist abgeleitet aus der Beziehung, daß das statische Moment der Fläche, bezogen auf die Schwerpunktsachse Null sein muß. Also aus der Bedingung:

$\frac{1}{2} B (H - x)^2 - \frac{1}{2} (B - b) (h - x)^2 = v F_c x.$

Diese Gleichung vereinfacht sich unter obiger Annahme, die einer Verkleinerung der linken Seite der Gleichung um $\frac{1}{2} b (h - x)^2$ gleichkommt, zu:

$\frac{1}{2} B [(H - x)^2 - (h - x)^2] = v F_c x$ 21

* Wird weiter unten bewiesen. Siehe Seite 15.

Die Gleichung 18 schreibt sich unter derselben Annahme:

$$\frac{1}{3} B [(H - x)^3 - (h - x)^3] + \nu F_e x^2 = J \dots \dots \dots 22$$

wobei die linke Seite um $b (h - x)^3$ zu klein eingesetzt wurde.

Substituiert man nach Gleichung 21

$$\nu F_e x^2 = \frac{1}{2} B \cdot x [(H - x)^2 - (h - x)^2]$$

in Gleichung 22 so erhält man:

$$2 (H - x)^3 - 2 (h - x)^3 + 3 x (H - x)^2 - 3 x (h - x)^2 = \frac{6 J}{B}$$

und nach Auflösung der Klammerausdrücke und Reduktion:

$$2 H^3 - 3 H^2 x - 2 h^3 + 3 h^2 x = \frac{6 J}{B} \dots \dots \dots 23$$

Führen wir hier die Werte

7) $x = \alpha H$

und $h = k H \dots \dots \dots 24$

und endlich den aus einer der beiden Gleichungen 19 unter Berücksichtigung von 7 gefundenen Wert

$$J = \frac{\nu \alpha}{s} M H \dots \dots \dots 25$$

ein, so ergibt sich für die ganze nutzbare Konstruktionshöhe die Gleichung

$$H^2 = \frac{6 \nu \alpha}{s [2 (1 - k^3) - 3 \alpha (1 - k^2)]} \frac{M}{B} \dots \dots \dots V.$$

die auch in der Form geschrieben werden kann

$$H^2 = C_3 \frac{M}{B} \dots \dots \dots V$$

wobei

$$C_3 = \frac{6 \nu \alpha}{s [2 (1 - k^3) - 3 \alpha (1 - k^2)]} \dots \dots \dots 26$$

Ehe wir in die Diskussion dieser Formel eingehen, wollen wir uns über die Größe und vor allem um das Vorzeichen der begangenen Ungenauigkeit kümmern. Dazu gehen wir auf Gleichung 21 zurück.

Der linke Teil dieser Gleichung ist zu klein. Wir substituierten ihn in Gleichung 22. Dort ist die linke Seite ohnedies schon zu klein, wird also umsomehr zu klein.

Die linke Seite der Gleichung 22, die das aus der Figur abgelesene Trägheitsmoment des ideellen Betonbalkens vorstellt, nehmen wir also zu klein, ein Betonbalken von den Abmessungen, wie sie in der Gleichung 22 vorkommen, hat defakto ein größeres Trägheitsmoment. Dieses zu kleine Trägheitsmoment machen wir laut Gleichung 22 gleich J , das ist gleich dem erforderlichen Trägheitsmoment und ermitteln hieraus H . Daraus geht hervor, daß ein Plattenbalken mit der Abmessung H in Wirklichkeit ein größeres als das erforderliche Trägheitsmoment besitzen wird, daß wir also H aus der Gleichung V etwas zu groß erhalten. Der Fehler liegt also dem Vorzeichen nach „auf der sicheren Seite“, das heißt, er vergrößert die Konstruktionssicherheit. Das mußte sich auch ergeben, weil wir H unter Vernachlässigung eines Teiles ($a b c d$) der Betonfläche ermitteln, der in Wirklichkeit

nicht unwirksam sein wird. Die Größe der begangenen Ungenauigkeit erkennt man aus Folgendem: (Vgl. Fig. 5 und 6, Tafel I.)

Der Fehler in Gleichung 21 besteht in der Vernachlässigung des statischen Moments der in Figur 5, Tafel I engschraffierten Fläche f bezogen auf $n - n$ gegenüber der weitschraffierten Fläche F . Nun ist erstens die Fläche f selbst und zweitens ihr Schwerpunktabstand von $n - n$ klein gegenüber den entsprechenden Abmessungen von F , umso mehr deren Produkt, das statische Moment. Oder, da sich die Gleichung 21 auch aus der Bedingung: Summe aller Normalkräfte im Querschnitt gleich Null ableiten läßt, besteht der Fehler in Gleichung 21 in der Vernachlässigung des kleinen dreiseitigen Spannungsprismas p in Figur 6, Tafel I gegenüber dem großen vierseitigen Spannungsprisma P . In den Fällen der Praxis schwankt der Fehler von 0 bis maximal 0·8 %.

Der Fehler in Gleichung 22 besteht in einer Vernachlässigung des Trägheitsmomentes der in Figur 5, Tafel I angedeuteten Fläche f bezüglich $n - n$ gegenüber dem Trägheitsmoment von F bezüglich derselben Achse und in dem obigen Fehler. Hier, wo es sich um die dritten Potenzen der Schwerpunktabstände handelt, ist der Fehler im ersten Glied der Gleichung 22 noch weitaus kleiner, er schwankt in der Praxis zwischen 0 und 0·16 %. Somit ist, da die beiden Glieder der linken Seite in Gleichung 22 bei den Verhältnissen der Praxis rund gleichviel ausgeben, der Fehler in der Ermittlung des Trägheitsmomentes aus der Figur im Maximum 0·5 %. Da hieraus die zweite Potenz von H bestimmt wird, so weicht H vom streng korrekten Wert um maximal 0·7 % ab, was praktisch ohne Belang ist, weil sich dieser Wert stets auf einige Millimeter beschränken wird und so kleine Variationen in den Abmessungen ohnedies nicht ausgeführt werden können, und weil unsere Theorie nicht so genaue Werte liefert.

Wir dürfen also beruhigt H aus Gleichung V ermitteln.

Diskussion der Gleichung V.

Was zunächst den Giltigkeitsbereich der Formel betrifft, so gilt nach Gleichung

$$20) \dots \dots \dots \frac{h}{H} > \alpha$$

$$\text{somit} \quad \alpha \leq k \leq 1 \quad \left. \vphantom{\alpha \leq k \leq 1} \right\} \dots \dots \dots 27$$

$$\text{und} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \left. \vphantom{0 \leq \alpha \leq 1} \right\}$$

Für $\alpha = k$ fällt die Null-Linie in die Plattenunterkante, der Fall ist somit schon identisch mit dem Fall einer rippenlosen Platte mit schlaffer Armierung und Formel V muß daher für $k = \alpha$ in Formel II übergehen.

Für $k = \alpha$ aus V:

$$H^2 = \frac{6 \nu \alpha}{s [2(1 - \alpha^2) - 3\alpha(1 - \alpha^2)]} \frac{M}{B}$$

$$H^2 = \frac{6 \nu \alpha}{s (1 - \alpha)^2 (2 + \alpha)} \cdot \frac{M}{B},$$

was tatsächlich genau mit Formel II übereinstimmt.

Man wird also auch bei Plattenbalken die Formel II anwenden können, wenn sich die Rippe vorraussichtlich relativ niedrig ergeben wird, wenn also

anzunehmen ist, daß die neutrale Achse in die Platte fallen dürfte. Dies ist fast stets bei den sekundären Rippen (sog. Querrippen) der Plattenbalkendecken der Fall. Man wird deshalb bei solchen Querrippen stets die Formel II anwenden. Liefert sie eine Rippenhöhe, für welche $k < \alpha$, so ist der Wert gültig und F_e ist dann logischer Weise aus Gleichung I zu bestimmen; das wird fast stets der Fall sein. Liefert Formel II aber eine Höhe für welche $k > \alpha$, so ist der Wert unrichtig und die Rippenplatte wie eine gewöhnliche zu behandeln, wie weiter unten angegeben ist. (Vgl. das Beisp. 1. St. 22).

Die Werte des Koeffizienten der Formel II.

$$C^v = \frac{6 v \alpha}{s (1 - \alpha)^2 (2 + \alpha)} \text{ und der Formel I } C = \frac{(1 - \alpha)^2}{2 v \alpha}$$

für die verschiedenen Werte von s und α sind der nachstehenden Tabelle zu entnehmen:

bei $v = 15$

Eisen-Zug $s \text{ kg/cm}^2$	Beton- Druck $\sigma \text{ kg/cm}^2$	α	$C^v = \frac{6 v \alpha}{s (1 - \alpha)^2 (2 + \alpha)}$	$C = \frac{(1 - \alpha)^2}{2 v \alpha}$
800	25	0·681	0·2808	0·0050
	30	0·640	0·2104	0·0068
	$33\frac{1}{3}$	0·615	0·1785	0·0080
	40	0·571	0·1358	0·0107
900	25	0·706	0·3018	0·0041
	30	0·667	0·2255	0·0055
	$33\frac{1}{3}$	0·643	0·1909	0·0066
	40	0·600	0·1442	0·0089
1000	25	0·727	0·3219	0·0034
	30	0·690	0·2458	0·0046
	$33\frac{1}{3}$	0·667	0·2030	0·0055
	40	0·625	0·1524	0·0075
1200	25	0·762	0·3653	0·0025
	30	0·727	0·2683	0·0034
	$33\frac{1}{3}$	0·706	0·2264	0·0041
	40	0·667	0·1692	0·0055

Der Unterschied, der im allgemeinen zwischen den Formeln II und V besteht, läßt sich zum Nachweis der oben angeführten Tatsache benutzen, daß bei ökonomischer Dimensionierung Nullachse und Plattenunterkante sehr nahe beisammen liegen oder zusammenfallen:

Die Formeln V und II unterscheiden sich bloß im Nenner und zwar ist der Klammerausdruck im Nenner der Formel V

$$[2 (1 - k^3) - 3 \alpha (1 - k^2)]$$

während er bei Formel II $[(1 - \alpha) (2 + \alpha)]$ ist.

Die Differenz ist

$$\Delta = [2(1 - k^2) - 3\alpha(1 - k^2)] - (1 - \alpha)^2(2 + \alpha) = 3\alpha k^2 - 2k^3 - \alpha^3$$

Durch Transformation des Ausdruckes für Δ erhält man

$$\Delta = \frac{(\alpha - k)(k - \alpha)(2k + \alpha)}{k}$$

Da nun nach (27) $k \geq \alpha$ und sowohl $k > 0$ als auch $\alpha > 0$, so ist im allgemeinen

$$\Delta \leq 0$$

Das heißt: Der Nenner in Formel V ist allgemein kleiner als der in Formel II. Somit H aus Formel V allgemein größer als H aus Formel II.

Der kleinste Wert von H , der sich aus Formel V ergeben kann, ergibt sich für $k = \alpha$, das heißt, wenn Plattenunterkante und Null-Linie zusammenfallen.

Ferner: Nach Obigem ist

$$(\alpha - k)(k - \alpha)(2k + \alpha) = \Delta \leq 0.$$

Bezeichnen wir das Verhältnis $\frac{k}{\alpha} = v$, wobei $v > 1$, so ergibt sich durch Ausführen und Einsetzen nach Division durch α^3

$$\frac{\Delta}{\alpha^3} = -2v^3 + 3v^2 - 1 \leq 0.$$

Dieser Wert und damit Δ wird umso größer, also umso näher 0 werden, je kleiner v ist, weil das negative Glied die höhere Potenz von v hat. Für $v = 1$ wird der Ausdruck im Maximum Null erreichen. Das heißt aber:

Aus Formel V wird sich ein umso sparsamerer Wert von H ergeben je kleiner v ist, das heißt je näher die Null-Linie an der Plattenunterkante liegt.

Dies ist jedoch nicht mißzuverstehen. Die Annahme $k = \alpha$ liefert den geringsten Wert von H bei gleicher Tragfähigkeit, aber sie liefert dicke Platten bei relativ niedrigen Rippen (z. B. für $s = 1000 \text{ kg/cm}^2$ $\sigma = 33\frac{1}{3} \text{ kg/cm}^2$ ergäbe sie die nutzbare Rippenhöhe von der Plattenunterseite bis zur Schwerachse der Eiseneinlagen gleich der zweifachen Plattendicke). Am wenigsten Beton würde man brauchen, wenn das Volumen V ein Minimum würde. Darüber kann hier nicht gesprochen werden, weil da die nutzbare Breite B eine wichtige Rolle spielt, über die noch viel vorher zu sagen ist. (Siehe diesbezüglich im zweiten Teile dieser Arbeit.) Soviel kann auch hier schon gesagt werden, daß sich auch für diese Annahme die Nullachse nahe der Plattenunterkante ergibt.

Nimmt k den anderen Grenzwert 1 an, so liefert die Formel V: $H = \infty$. Das ist auch selbstverständlich, weil dann die Plattendicke $d = 0$ wird, der Rippenteil unter der Platte vernachlässigt, somit der nutzbare Betonquerschnitt Null wird. Die Kurven zeigen den Verlauf der Werte von C_3 bei konstantem α

$$\text{für } \alpha = \frac{4}{7} = 0.571 \quad (\sigma = 40, s = 800)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (\sigma = 25, s = 1200)$$

sowie für den häufigsten Wert

$$\alpha = \frac{2}{3} = 0.667 \quad (\sigma = 33\frac{1}{3}, s = 1000).$$

Die Formel V kann indessen noch nicht zur direkten Dimensionierung dienen, weil sie noch das k enthält, das unbekannt und von H abhängig ist. Bei

der direkten Dimensionierung der Rippenplatten bestimmt man meistens zuerst die Dicke der Platte mit Rücksicht auf Biegung der Platte als Querkonstruktion zwischen den Rippen. Dadurch ist dann das d schon gegeben, wenn man an die Bestimmung von H schreitet. Die Gleichung V muß also so transformiert werden, daß darin das k durch d substituiert wird. Dazu dient die aus 24 $h = kH$ abgeleitete Relation

$$H - h = d$$

$$k = 1 - \frac{d}{H} \dots \dots \dots 28$$

Setzt man dies für k in Gleichung V, so erhält man für H die quadratische Gleichung

$$H^2 - \left(\frac{2 - \alpha}{2(1 - \alpha)} d + \frac{1}{d\sigma} \frac{M}{B} \right) H + \frac{d^2}{3(1 - \alpha)} = 0 \dots \dots \text{VI.}$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei positive Wurzelwerte, deren einer, der kleinere unbrauchbar ist. Durch Eliminierung desselben ergibt sich mit einer Ungenauigkeit von 0 bis im Maximum 0.7%

$$H = \frac{11 - 6\alpha}{12(1 - \alpha)} d + \frac{1}{d\sigma} \cdot \frac{M}{B} \dots \dots \dots \text{VII.}$$

was sich auch in der Form

$$H = C_4 \cdot d + \frac{1}{d\sigma} \frac{M}{B} \dots \dots \dots \text{VII'}$$

schreiben läßt, wobei die Werte von C_4 für veränderliches α der nachstehenden Tabelle zu entnehmen sind.

Zulässiger Eisen-Zug s kg/cm ²	Zulässiger Beton-Druck σ kg/cm ²	α	$C_4 = \frac{11 - 6\alpha}{12(1 - \alpha)}$; für $\nu = 15$
800	25	0.681	1.806
	30	0.640	1.657
	33 $\frac{1}{3}$	0.615	1.582
	40	0.571	1.471
900	25	0.706	1.917
	30	0.667	1.751
	33 $\frac{1}{3}$	0.643	1.667
	40	0.600	1.542
1000	25	0.727	2.026
	30	0.690	1.844
	33 $\frac{1}{3}$	0.667	1.751
	40	0.625	1.611
1200	25	0.762	2.251
	30	0.727	2.026
	33 $\frac{1}{3}$	0.706	1.917
	40	0.667	1.751

Ist H gefunden, so kann zur Ermittlung von F_e die Gleichung 21 benützt werden, über deren Fehler wir bereits orientiert sind. Sie würde bei genau korrektem H die Eisenfläche F_e um maximal 0·8% zu klein liefern. Da nun das H aus obiger Formel VI oder aus Formel VII um maximal 0·7% zu groß resultiert, so werden die beiden Fehler sich teilweise kompensieren. Dies zeigt sich deutlich in den nachfolgenden Beispielen.

Setzt man in Formel 21 für x und h die aus den Gleichungen 7 beziehungsweise 24 hervorgehenden Relationen

$$\begin{aligned} x &= \alpha H, \\ h &= k H, \end{aligned}$$

so erhält man durch Auflösung nach F_e

$$F_e = \frac{(1 - \alpha)^2 - (k - \alpha)^2}{2 \nu \alpha} B H$$

oder

$$F_e = \frac{(1 - k)(1 + k - 2\alpha)}{2 \nu \alpha} B H \quad \dots \dots \dots \text{VIII}$$

Die Formel VIII hat denselben Giltigkeitsbereich, wie Formel V, nämlich

$$27 \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} \alpha &\leq k \leq 1 \\ 0 &\leq \alpha \leq 1 \end{aligned} \right.$$

Für $k = \alpha$, das Zusammenfallen von Null-Linie und Plattenunterkante geht sie, wie natürlich, in Formel I

$$F_e = \frac{(1 - \alpha)}{2 \nu \alpha} B H$$

über. Für $k = 1$ liefert sie $F_e = 0$, was dem obengefundenen Grenzwert $H = \infty$ für denselben Fall entspricht. (Statisches Moment der Eisenfläche $0 \cdot \infty$). Die Formel VIII könnte zwar, da jetzt

$$k = 1 - \frac{d}{H}$$

schon bekannt ist, zur direkten Ermittlung von F_e benützt werden. Um aber die Zwischenrechnungen ersparen zu können, wird auch aus VIII durch Einführen der obigen Relation für k diese Größe eliminiert und man erhält auf diese Weise

$$F_e = \left(\frac{1 - \alpha}{\nu \alpha} - \frac{d}{2 H \nu \alpha} \right) B d \quad \dots \dots \dots \text{IX}$$

oder

$$F_e = \left(C_5 - C_6 \frac{d}{H} \right) B d \quad \dots \dots \dots \text{IX'}$$

wobei C_5 und C_6 nachstehender Tabelle zu entnehmen sind:

Zulässiger Eisen-Zug s kg/cm^2	Zulässiger Beton-Druck σ kg/cm^2	α	$C_5 = \frac{1 - \alpha}{\nu \alpha} = \frac{\sigma}{s}$ für $\nu = 15$	$C_6 = \frac{1}{2 \nu \alpha}$ für $\nu = 15$
800	25	0·681	0·0312	0·0489
	30	0·640	0·0375	0·0521
	$33\frac{1}{3}$	0·615	0·0417	0·0542
	40	0·571	0·0500	0·0584
900	25	0·706	0·0278	0·0472
	30	0·667	0·0333	0·0500
	$33\frac{1}{3}$	0·643	0·0370	0·0518
	40	0·600	0·0444	0·0556
1000	25	0·727	0·0250	0·0459
	30	0·690	0·0300	0·0483
	$33\frac{1}{3}$	0·667	0·0333	0·0500
	40	0·625	0·0400	0·0533
1200	25	0·762	0·0208	0·0437
	30	0·727	0·0250	0·0459
	$33\frac{1}{3}$	0·706	0·0278	0·0472
	40	0·667	0·0333	0·0500

Für die zulässigen Spannungen von 1000 kg/cm^2 Zug im Eisen und $33\frac{1}{3}$ kg/cm^2 Druck im Beton lauten VII und IX:

$$H = 1.75 d + \frac{1}{d \sigma} \cdot \frac{M}{B} \dots \dots \dots VII^a$$

$$F_c = \left(0.0333 - 0.05 \frac{d}{H} \right) B d \dots \dots \dots IX^a$$

Die Breite der Rippe wäre wie bisher mit Rücksicht auf Schubspannungen oder auf die Unterbringung der notwendigen Eisenstärke zu wählen. Auf diesen Punkt wird im zweiten Teil auch nochmals zurückgekommen (Siehe Ste. 32), wie in den folgenden Beispielen auch B wie bisher noch gleich der Rippenabstand, im Maximum jedoch gleich dem dritten Teil der Rippenlänge (nach den deutschen Vorschriften) gesetzt wird und erst im zweiten Teil dieser Arbeit ganz gesondert die Einwände gegen diesen Berechnungsmodus erhoben und Vorschläge zu seiner Abschaffung erstattet werden.

Nicht immer ist jedoch das d gegeben, ehe man H bestimmt.

Im Hochbau ist dies allerdings in der Regel der Fall, nicht so aber im Brückenbau. (Siehe Tafel I, Fig. 8.) Dort liegen oft die Rippen sehr nahe und die freie Länge der Platte $a - b$ ist zu gering, als daß sich aus der Untersuchung derselben als biegungsbeanspruchte Zwischenkonstruktion zwischen den Rippen ein brauchbares Resultat für die Plattenstärke ergeben könnte. Für solche Fälle kann man nach Obigem vorgehen wie folgt:

a) bei begrenzter Konstruktionshöhe.

Man bestimmt die Abmessungen unter der Bedingung, daß die ganze Konstruktionshöhe ein Minimum werden soll. Dafür ergibt sich aus dem oben (Seite 15) Gesagten, daß man $k = \alpha$ zu setzen hat, somit für H statt Formel V die Formel II, und für F_e statt VIII die Formel I anwenden kann. (Siehe nachfolgendes Beispiel 2 c.)

β) bei freier Konstruktionshöhe.

Man bestimmt d aus der Bedingung, daß die Kosten der Konstruktion ein Minimum werden sollen, daß also der geringste Materialaufwand nötig sein soll. *)

Die dem Betonvolumen proportionale Querschnittsfläche f ist

$$f = Bd + b h.$$

Hierin für $h = H - d$ eingesetzt gibt

$$f = (B - b) d + b H;$$

Substituiert man hierin H durch den Wert aus Gleichung VII so ergibt sich

$$f = (B - b) d + C_4 b d + \frac{M}{\sigma} \frac{b}{B} \frac{1}{d}$$

Hierin ist f als Funktion der unabhängigen Variablen d anzusehen und ist nach d zu einem Minimum zu machen.

$$\text{Aus } \frac{df}{dd} = 0$$

$$\text{erhält man } d^2 = \frac{b}{B} \frac{M}{\sigma} \frac{1}{(B - b) + b C_4} \dots \dots \dots X$$

Nach dieser Formel ist d zu bestimmen und dann verfährt man wie oben, ermittelt H aus Gleichung VII und F_e aus Gleichung IX. (Siehe unten Beispiel 2 b.) Wendet man dieses Verfahren auf Hochbaukonstruktionen an, so findet man, solange für B der oben genannte Wert (Rippendistanz bis maximal ein Drittel Rippenlänge) gesetzt wird, Werte von d , die praktisch unausführbar, weil viel zu klein, sind. Dort ist es auch nicht notwendig d auf diese Weise zu ermitteln, weil ja das d dort schon aus der Biegungsbeanspruchung der Platte quer zu den Rippen gegeben ist. Für Brückentafeln aber, wo $\frac{b}{B}$ und M größere Werte haben, erhält man hier brauchbare Ergebnisse.

Führt man die analoge Untersuchung für das Minimum an Eisenaufwand durch, so findet man aus

$$\text{IX } \dots \dots \dots F_e = \left(\frac{1 - \alpha}{v \alpha} - \frac{1}{2 v \alpha} \frac{d}{H} \right) B d$$

durch Substitution von

$$\text{VII } \dots \dots \dots H = \frac{11 - 6 \alpha}{12 (1 - \alpha)} d + \frac{M}{B \sigma} \frac{1}{d}$$

$$\text{und aus } \dots \dots \dots \frac{dF_e}{dd} = 0$$

Die Gleichung für d :

$$d^4 - C_7 \frac{M}{B} d^2 + C_8 \frac{M^2}{B^2} = 0, \dots \dots \dots XI$$

*) Verf. behält sich vor, auf diesen Punkt demnächst näher zu sprechen zu kommen.

wobei
$$C_7 = \frac{144 (1 - \alpha) (3 \alpha - 1)}{3 \sigma (55 - 96 \alpha + 36 \alpha^2)}$$

und
$$C_8 = \frac{144 (1 - \alpha)^2}{\sigma^2 (55 - 96 \alpha + 36 \alpha^2)}$$

Die Werte dieser Koeffizienten für die wichtigsten Verhältnisse von σ und s sind der nachstehenden Tabelle zu entnehmen.

Setzt man diese Koeffizienten ein, so ist die Gleichung leicht nach d^2 und damit nach d aufgelöst.

Aus dem Bau der Gleichung XI erkennt man:

$$d^2 = \frac{1}{2} C_7 \frac{M}{B} \pm \frac{M}{B} \sqrt{\frac{1}{4} C_7^2 - C_8};$$

Der Wurzelwert ist jedenfalls kleiner als der Ausdruck vor der Wurzel. Es werden sich also für d^2 und d reelle und positive Wurzeln ergeben, wenn

$$\frac{1}{4} C_7^2 \geq C_8;$$

Mit obigen Werten liefert das die Bedingung

$$\frac{\alpha \geq \frac{17}{24}}{s \geq 36 \cdot 43 \sigma}$$

oder

Das heißt: Das Eisenminimum wird bei gleichzeitiger ökonomischer Dimensionierung auf Betondruck sich nur bei Verhältnissen der zulässigen Spannungen $\frac{s}{\sigma} \geq 36 \cdot 43$ überhaupt erreichen lassen. *) Für kleinere Werte erhält man komplexe Lösungen obiger Gleichung. Wird $\alpha > \frac{5}{6}$, so erhält man für d^2 zwar reelle aber negative, somit für d imaginäre Wurzelwerte. Es gilt somit hier

$$\frac{17}{24} \leq \alpha \leq \frac{5}{6}$$

Das Intervall ist gleichzeitig ohnedies so ziemlich das Intervall der Praxis. Nur an der unteren Grenze ist es etwas knapp. Für Werte unter $\frac{17}{24}$ (wie z. B. für den häufigen Wert $\alpha = \frac{2}{3}$ bei $s = 1000 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma = 33\frac{1}{3} \text{ kg/cm}^2$) muß man nach dem Minimum der Betonfläche dimensionieren.

Aus Gleichung XI ergibt sich

$$d = p \sqrt{\frac{M}{B}} \dots \dots \dots \text{. XII}$$

wobei die Werte von p gleichfalls nachstehender Tabelle zu entnehmen sind:

*) Nicht mißzuverstehen. Verzichtet man auf die Ausnützung der Betondruckfestigkeit, so kann man die notwendige Eisenfläche noch weiter reduzieren. Wie weit man da aus praktischen Gründen gehen kann, um die Summe der Kosten von Beton und Eisen zu einem Minimum zu machen, darauf zurückzukommen behält Verf. sich vor.

Zug im Eisen $s \text{ kg/cm}^2$	Druck im Beton $\sigma \text{ kg/cm}^2$	α	C_7	C_8	p
1000	20	0.769	0.2940	0.00779	0.171
	22	0.751	0.2123	0.00578	0.185
	25	0.727	0.1462	0.00406	0.193
	Grenze 27.4	0.708	0.1132	0.00322	0.237
1200	20	0.800	0.5419	0.01161	0.149
	25	0.762	0.1974	0.00474	0.167
	30	0.727	0.1218	0.00282	0.176
	Grenze 32.9	0.708	0.0943	0.00223	0.217

Somit lautet die Gleichung beispielsweise für

$$s = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma = 25 \text{ kg/cm}^2$$

$$d^4 - 0.1462 \frac{M}{B} d^2 + 0.00406 \frac{M^2}{B^2} = 0 \dots \dots \dots \text{XI}$$

Sie liefert die Wurzel

$$d^2 = (0.0731 \pm \sqrt{0.0731^2 - 0.00406}) \frac{M}{B}$$

Von den zwei Vorzeichen der Wurzel ist nur das negative zu gebrauchen. Das positive liefert Werte von d , für die Formel V nicht mehr gilt.

$$d = 0.193 \sqrt{\frac{M}{B}} \dots \dots \dots \text{XII}^a$$

Die Dimensionierung der Platte hinsichtlich des Eisenminimums liefert in der Regel stärkere Platten als jene hinsichtlich des Betonminimums.

Die Gleichungen XI und XII dürfen, wie aus dem Obigen folgt, nur für Werte von α zwischen $\frac{1}{4}$ u. $\frac{5}{8}$ angewendet werden. Befolgt man dies nicht, so zeigt sich dies darin, daß man aus Formel XII einen Wert für d erhält, größer als bei geringster Konstruktionshöhe und für k einen Wert, größer als α , wofür ja alle Plattenbalkenformeln ungültig sind. (Vgl. Beispiel 3^a).

Dann ist das erreichbare Eisenminimum bei gleichzeitiger Betonausnutzung in dem speziellen Fall identisch mit dem Fall des Betonminimums. Man kann sich leicht davon überzeugen, ob es so ist. Man ermittelt d aus XII, dann H aus VII. Ergibt sich

$$\frac{d}{H} < 1 - \alpha, \text{ d. h. } k > \alpha,$$

so gilt der gefundene Wert. Sonst ist er ungültig und die Dimensionierung muß mit Rücksicht auf Betonminimum oder minimale Höhe erfolgen. (Beispiel 3^a)

Im allgemeinen zeigt sich, daß man das Eisenminimum nur bei niedriger zulässiger Betoninanspruchnahme erreichen kann. (Vgl. d. Beispiele.)*

Beispiele.

Beispiel 1. Für einen Raum von 6.6 m lichter Weite und einer Distanz der Fensterpfeiler von 3.8 m ist eine Plattenbalkendecke für 350 kg/m² Nutzlast zu projektieren: (Vgl. Tafel I, Fig. 9, 10, 11, 12)

Zulässig wären $s = 1000 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma = 33.3$ „ , also $\alpha = \frac{2}{3}$

Dimensionierung.

a) Die Platte.

Eigengewicht (mit Schutt und Fußboden) zirka 340 kg/m²

Nutzlast	350	„
Zusammen	690	kg/m ²

Dimensionierung mit Rücksicht auf das größte positive Moment im Endfeld der als kontinuierlicher Träger auf n Stützen angesehenen Platte.

pro 1 m Breite $M = \frac{1}{16} p l^2 = \frac{1}{16} \cdot 6.9 \cdot 380^2 = 62272.5 \text{ kgcm}$

Auf 1 cm Breite entfällt $\frac{M}{B} = 622.725 \text{ kg cm.}$

Nach Formel II^a . . . $H^2 \doteq \frac{1}{5} \frac{M}{B}$

Hieraus $H \doteq 11 \text{ cm.}$

Aus I^a ergibt sich $F_e = \frac{B H}{180}$ und für $B = 100$

$F_e = 6.81 \text{ cm}^2$

Eine nutzbare Dicke der Platte von 11 cm (von der Schwerachse der Eiseneinlage bis zur Oberkante) entspricht eine Totaldicke von etwa 14 cm, was unökonomisch wäre. Deshalb wird es zweckmäßiger sein Querrippen einzuschalten. Die Platte hat jetzt bloß eine Freilage von 2.2 m, das maßgebende Moment ist pro Plattenbreite

$\frac{M}{B} = 278.30 \text{ kg cm}$

Somit nach Formel II^a . . . $H_1 = 7.5 \text{ cm}$ nutzbare Plattendicke, was einer Totalstärke von 10 cm entspricht. (Vgl. Tafel I, Fig. 10.)

Nach I^a $F_e = \frac{B H}{180}$ somit auf 1 m Breite $F_e = 4.17 \text{ cm}^2$

b) Die Querrippenplatte.

Als Breite B würde nach den bisherigen Gepflogenheiten die Rippendistanz, keinesfalls aber mehr als $\frac{1}{3}$ der Länge der Rippe gesetzt werden, hier also rund $B = 120 \text{ cm.}$ (Tafel I, Fig. 11.)

*) Das erreichbare oder nicht erreichbare Eisenminimum, von dem oben die Rede ist, ist das mathematische Minimum, für welches $\frac{dF_e}{dd} = 0$ die Horizontalstelle der Kurve,

welche den Verlauf des F_e als Funktion von d anzeigt. Ein numerischer Minimalwert von F_e ist natürlich immer zu erreichen und dieser wird im Falle, wo das mathematische Minimum nicht zu erreichen ist, mit dem Falle des Betonminimums zusammenfallen. Eine graphische Darstellung dieser Verhältnisse behält sich Verf. vor.

Es ergibt sich $M = 137180 \text{ kg cm}$

und $\frac{M}{B} = 1143.2 \text{ kg cm.}$

Da sich voraussichtlich für die kleine Spannweite des Plattenbalkens von 3.8 m bei der Plattendicke von 10 cm eine relativ niedrige Rippe herausstellen wird, so dürfte die neutrale Achse innerhalb der Platte liegen, somit kann auch hier Formel II angewendet werden. (Vgl. Ste. 14.)

Nach Formel II für $\alpha = \frac{2}{3}$

$$H_1^2 = \frac{1}{5} \frac{M}{B_1}$$

ergibt $H_1 = 15 \text{ cm}$

also $k = \frac{1}{3}$ was tatsächlich kleiner als $\alpha = \frac{2}{3}$. Somit gilt der Wert.

Nach I. $F_e = \frac{B H_1}{180} = 10 \text{ cm}^2$

c) Die Hauptrippenplatte. (Tafel I, Fig. 12.)

$$B = \frac{1}{3} L = 220 \text{ cm}$$

Eigengewicht zirka 400 kg/m²

Nutzlast	350	n
Zusammen	750	kg/m ²

Auf 1 cm Rippenlänge entfallen $p = 3.8 \cdot 7.5 = 28.5 \text{ kg}$

$$M = \frac{1}{8} p L^2 = 1551825 \text{ kgcm};$$

$$\frac{M}{B} = 7054 \text{ kgcm.}$$

Nach Formel VII' mit C_4 aus der Tabelle für $\alpha = \frac{2}{3}$:

$$H = 1.75 d + \frac{1}{d \sigma} \cdot \frac{M}{B}$$

$$H = 38.7 \doteq 39 \text{ cm}$$

Ferner aus Gleichung IX mit $C_5 = 0.0333$

$$C_6 = 0.0500$$

$$F_e = \left(0.0333 - 0.05 \frac{d}{H} \right) B d$$

$$F_e = 45 \text{ cm}^2$$

Die Rippenbreite b wird mit 22 cm angenommen. Damit ist die Dimensionierung abgeschlossen. Eine genaue Untersuchung der gefundenen Werte ist in der Praxis vollkommen überflüssig. Hier seien zur Illustration für die erreichte Genauigkeit z. B. die für die Hauptrippenplatte gefundenen Werte, mittels der Melanformeln untersucht:

ideelle Fläche $F = 220 \cdot 10 + 22 \cdot 29 + 15 \cdot 45 = 3513 \text{ cm}^2$

$$x = \frac{F}{b} - \sqrt{\frac{F^2}{b^2} - (H^2 - h^2) \frac{B}{b} - h^2} = 26 \text{ cm}$$

Man beachte, daß x sich genau gleich $\alpha H = \frac{2}{3} H$ ergibt.

Trägheitsmoment $J = \frac{1}{3} [B(H - x)^3 - (B - b)(h - x)^3] + \nu F_e x^2 = 615631 \text{ cm}^4.$

Man beachte, wie wenig das in obiger Theorie vernachlässigte Glied $[\frac{1}{3} b (h - x)^3 = 198]$ gegenüber J ausmacht (nicht ganz 0.03%).

$$\begin{aligned} \text{Endlich} \quad \frac{M}{J} &= 2.52 \\ \sigma_b &= 2.52 \cdot 13 = 32.8 \text{ kg/cm}^2 \\ s_e &= 2.52 \cdot 15 \cdot 26 = 983 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Beispiel 2).

Die Fahrbahntafel einer Straßenbrücke von 9.5 m Spannweite für einen Raddruck von 5^t ist als Rippenplatte aus Eisenbeton herzustellen.

Eigengewicht:	Betoneisentafel etwa 900 kg/m ²
	25 cm Schotterdecke 450 „
	Zusammen 1350 kg/m ²

Als Rippendistanz wurde 1 m gewählt: $B = 100 \text{ cm}$

Als Rippenbreite „ 0.25 m „ : $b = 25 \text{ cm}$

Das maximale Angriffsmoment ist

$$M = \frac{1}{8} \cdot 13.5 \cdot 950 \cdot 950 + \frac{1}{4} 5000 \cdot 950 = 2,710.469 \text{ kgcm.}$$

A) Es seien zulässig $\sigma = 22 \text{ kg/cm}^2$

$$s = 1000 \text{ „} \quad \text{also } \alpha = \frac{3}{4}.$$

Da α zwischen $\frac{1}{24}$ und $\frac{5}{6}$ liegt, ist Formel XII anwendbar.

a) Dimensionierung mit Rücksicht auf das Eisenminimum.

Laut Gleichung XII ist $d = p \sqrt{\frac{M}{B}}$.

Für obige Werte von σ und s ergibt sich laut Tabelle Seite 21 $p = 0.185$;

Somit $\underline{d = 32 \text{ cm.}}$

Laut Gleichung VII ist nun $H = C_4 d + \frac{1}{d \sigma} \cdot \frac{M}{B}$.

Hier ist $C_4 = \frac{11 - 6 \alpha}{12 (1 - \alpha)} = 2.17$;

hieraus $\underline{H = 108 \text{ cm.}}$

Somit $h = H - d = 90 \text{ cm}$ und $\frac{d}{H} = \frac{8}{27}$

Nach Gleichung IX ist $F_e = (C_5 - C_6 \frac{d}{H}) B d$.

Hier ist $C_5 = \frac{1 - \alpha}{\nu \alpha} = \frac{1}{4.5}$

$$C_6 = \frac{1}{2 \nu \sigma} = \frac{2}{4.5}$$

Somit $F_e = 25 \text{ cm}^2$

Betonquerschnitt = 5100 cm².

b) Dimensionierung mit Rücksicht auf Erreichung des Betonminimums.

(Dieselben Inanspruchnahmen zulässig).

Laut Formel X ist

$$d^2 = \frac{b}{B} \cdot \frac{M}{\sigma} \cdot \frac{1}{(B-b) + b C_4}$$

Hier ist wieder wie oben

$$C_4 = 2.17$$

Somit $d = 15.55$

rund $d = 16 \text{ cm.}$

Aus Formel VII mit demselben Koeffizienten C_4 wie oben

$$\underline{H = 111 \text{ cm}}$$

$$\underline{h = 95 \text{ cm}}$$

Aus Formel IX $\underline{F_e = 26 \text{ cm}^2}$ Betonquerschnitt 3975 cm^2 .

c) Dimensionierung mit Rücksicht auf Erreichung der geringsten Konstruktionshöhe.

(Dieselben Inanspruchnahmen zulässig).

Nach den Ergebnissen auf Seite 13 geht Formel V für diesen Fall ($k = \alpha$) in Formel II über. Somit

$$H^2 = C' \frac{M}{B} \quad \text{wobei } C' = \frac{6 \nu \alpha}{s (1 - \alpha)^2 (2 + \alpha)}$$

und hier $C' = 0.3927$;

somit $\underline{H = 103 \text{ cm}}$

$$d = (1 - k) H = \frac{H}{4} \doteq 26 \text{ cm.}$$

$$\underline{h = 77 \text{ cm}}$$

Endlich nach I . . $\underline{F_e = \frac{1}{360} B H = 29 \text{ cm}^2}$

Betonquerschnitt = 4500 cm^2 .

Aus einem Vergleiche der drei Ergebnisse sieht man, daß der Eisenaufwand so ziemlich konstant bleibt, daß man also am zweckmäßigsten nach dem Betonminimum dimensioniert. Das Eisenminimum wird ohnedies meistens nicht erreicht. Hätten wir z. B. oben nur um ganz wenig mehr Betondruck zugelassen, also z. B. 25 kg/cm^2 , so hätte die Dimensionierung ergeben:

3. Beispiel. Dieselbe Fahrbahntafel für

$$\sigma = 25 \text{ kg/cm}^2$$

$$s = 1000 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{also } \alpha = \frac{8}{11}$$

a) Dimensionierung auf Eisenminimum.

Nach XII $d = 0.193 \sqrt{\frac{M}{B}}$

$$d = 31.6 \text{ cm}$$

und hiemit laut

$$\text{VII} \dots \dots H = 2d + \frac{1}{d\sigma} \cdot \frac{M}{B}$$

$$H = 98 \text{ cm},$$

somit $h = 66.4 \text{ cm}$

und $k = \frac{66.4}{98} \doteq \frac{7.38}{11} < \frac{8}{11} = \alpha.$

Für $k < \alpha$ gilt aber die Formel VII nicht. Das analytische Eisenminimum ist also hier nicht mehr erreichbar; an die Stelle tritt die

b) Dimensionierung zur Erreichung des Betonminimums.

Es ergibt sich hier

$$d = 15 \text{ cm}$$

$$H = 104 \text{ cm}$$

$$F_e = 27.5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Betonfläche} = 3725 \text{ cm}^2.$$

c) Für kleinste Höhe ergäbe sich hier

$$d = 26 \text{ cm}$$

$$H = 95 \text{ cm}$$

$$F_e = 52.6 \text{ cm}^2$$

$$\text{Betonfläche} = 4325 \text{ cm}^2.$$

Endlich hätte sich bei sehr beschränkter Konstruktionshöhe und bei Inanspruchnahmen von 40 kg/cm^2 , beziehungsweise 1200 kg/cm^2 die Dimensionierung wie folgt ergeben:

$$\text{für } \sigma = 40 \text{ kg/cm}^2$$

$$s = 1200 \text{ kg/cm}^2 \text{ ist } \alpha = \frac{2}{3}$$

und für kleinste Konstruktionshöhe ist $k = \alpha = \frac{2}{3}$.

Nach II^a $H = 74 \text{ cm}$

$$d = \frac{H}{3} \doteq 25 \text{ cm}$$

Nach I^a $F_e = \frac{BH}{180} = 41.11 \text{ cm}^2.$

Als Maßstab für die Genauigkeit diene folgende Untersuchung eines der Beispiele mittels der genauen Formeln:

Z. B. Ad 2 b für

$$\sigma = 22$$

$$s = 1000 \text{ fanden wir}$$

$$H = 111 \text{ cm}$$

$$h = 95 \text{ cm}$$

$$d = 16 \text{ cm}$$

$$B = 100 \text{ cm}$$

$$b = 25 \text{ cm}$$

$$F_e = 26 \text{ cm}^2.$$

Somit ist nach Melan

$$F = Bd + bh + vF_e = 4365 \text{ cm}^2$$

$$x = \frac{F}{b} - \sqrt{\frac{F^2}{b^2} - (H^2 - h^2) \frac{B}{b} - h^2} = 86 \text{ cm}.$$

Man beachte wie nahe gleich αH ($\frac{3}{4} H$)!

$$J = \frac{1}{3} B (H - x)^3 - \frac{1}{3} (B - b) (h - x)^3 + \nu F_e x^3$$

$$J = 3,887000 \text{ cm}^4.$$

Hier liegt die neutrale Achse fast einen vollen Dezimeter unterhalb der Plattenunterkante und doch macht das in obiger Theorie vernachlässigte Glied $\frac{1}{3} b (h - x)^3 = 6075$ nicht ganz 0.02% von J aus.

Die Grenzspannungen sind:

$$\text{Beton } \sigma_b = \frac{M}{J} (H - x) = 20 \text{ kg/cm}^2 \text{ (zulässig 22)}$$

$$\text{Eisen } s_e = \frac{M}{J} x \doteq 1030 \text{ kg/cm}^2.$$

II. Teil: Welche Plattenbreite darf bei Plattenbalken aus Eisen-Beton bei der Tragfähigkeitsberechnung mitgezählt werden?

Wiederholt ist von verschiedenen Seiten darauf hingewiesen worden, daß bei der Tragfähigkeitsuntersuchung der betoneisernen Plattenbalken ein Berechnungsvorgang zum Usus geworden ist, der mit der Theorie in scharfem Widerspruch steht und durch keinerlei praktische Erfahrungen gestützt wird. Derselbe besteht darin, daß man als nutzbare Plattenbreite die volle Distanz \mathcal{A} (Siehe Fig. 13, Taf. I) zweier benachbarter Rippen einsetzt. Es soll also die meistens relativ dünne Platte, welche ohnedies als Querkonstruktion zwischen den Rippen bereits bis an die Zulässigkeitsgrenze auf Biegung beansprucht ist, noch in ihrer Gänze als biegunswiderstehender Querschnittsteil der Plattenbalken angesehen werden. Dagegen sind, wie bemerkt, wiederholt Einwände erhoben worden, und die preußischen Bestimmungen über die Ausführung von Eisenbetonbauten haben diese Mitwirkung der Platte auch insoferne schon begrenzt, als sie normieren, daß nicht mehr als maximal ein Drittel der Spannweite des Balkens als nutzbare Plattenbreite anzusehen sei. Diese bloß aus dem Bestreben nach einer Begrenzung entstandene Angabe ist jedoch durchaus willkürlich, da diese Breite natürlich von einer ganzen Zahl von Faktoren, nicht von der Spannweite allein abhängig sein muß.

Das letzte Wort in dieser Frage, welche Plattenbreite nutzbar mitgerechnet werden darf, wird zweifellos der Versuch sprechen. Doch soll im Folgenden wenigstens einmal ein Anfang gemacht werden und soweit dies der Theorie möglich ist, eine Antwort auf die Frage erteilt werden.

Vorausgeschickt soll nur noch werden, daß dieser Punkt sehr wichtig ist, weil die Plattenbreite bei der Berechnung des nutzbaren Trägheitsmomentes in der 2. Phase sehr ins Gewicht fällt und eine Änderung derselben auf alle anderen Abmessungen, wie Höhe der Rippe, Eisenfläche, von bedeutendem Einfluß ist. Vor allem aber, weil der Fehler, den man usuell mit der obigen Annahme macht, die Konstruktionsicherheit erheblich verringert.

Bei Hochbaukonstruktionen werden die Plattenbalken in der Regel so dimensioniert, daß man die Stärke der Platte mit Rücksicht auf ihre Bean-