



Florian Peycha, BSc

Mathematische Modelle für Kreditrisiko, Marktrisiko und deren Aggregation

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuerin:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Eranda Gragoti-Cela

Institut für Diskrete Mathematik

Graz, April 2018

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Datum/Date

Unterschrift/Signature

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, Abhängigkeiten verschiedener Risikotypen mathematisch zu erklären. Dazu werden verschiedene Kreditrisikomodelle vorgestellt, beginnend mit Firmenwertmodellen, die sich rein auf den Assetwert eines Unternehmens konzentrieren. Dazu zählen das Modell von Merton, eine Weiterentwicklung davon, das KMV Modell, und das Computerprogramm CreditMetrics, das mit Migrationsmatrizen arbeitet. Außerdem werden intensitätsbasierte Kreditrisikomodelle beschrieben. Einerseits das Modell von Jarrow und Turnbull, mit dem man derivative Wertpapiere mit involviertem Kreditrisiko bepreisen kann, andererseits jenes von Jarrow, Lando und Turnbull, welches auf dem erstgenannten aufbaut, aber einen differenzierten Ausfallsprozess, sowie Kreditratings verwendet. Des Weiteren behandelt die Arbeit das Marktrisiko, insbesondere die Darstellbarkeit von Abhängigkeiten von Einzelrisiken. Hier werden eine obere und eine untere Schranke für das Risikomaß „Value at Risk“ für aggregierte Risiken angegeben. Dann werden Kredit- und Marktrisiko gemeinsam betrachtet. Es wird gezeigt, wie man die Abhängigkeit beschreiben kann und außerdem werden Schranken für die Korrelation von Kredit- und Marktrisiko gefunden.

Abstract

The objective of this thesis is to mathematically explain the dependence of different risk types. To this end first some credit risk models are presented. On the one hand we discuss firm value models, such as the Merton-model, the KMV-model and a program, which uses credit rating migrations, namely CreditMetrics. These models concentrate on the asset value of the firm. On the other hand we address reduced form models, such as the model of Jarrow and Turnbull, which describes the pricing of derivative securities with integrated credit risk and the model of Jarrow, Lando and Turnbull, which is a further development of the first one, including credit ratings and a different bankruptcy process. Further this thesis also addresses market risk, especially the presentability of the dependence of risk of single assets. We present a lower bound and an upper bound for the risk measure "Value at Risk" for aggregated risks. Finally it is shown, how to deal with the dependence of credit- and market risk and correlation bounds for credit risk and market risk are presented.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	IV
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Aufbau der Arbeit	2
2 Mathematische Grundlagen	4
3 Firmenwertmodelle	10
3.1 Das Modell von Merton	10
3.2 KMV-Modell	13
3.2.1 Ermittlung des Marktwertes und der Volatilität	13
3.2.2 Berechnung der Distance to Default	14
3.2.3 Berechnung der Ausfallswahrscheinlichkeit aus der DD	15
3.3 Modelle basierend auf Kreditmigration	16
3.3.1 CreditMetrics	18
4 Intensitätsbasierte Kreditrisikomodelle	30
4.1 Das Modell von Jarrow und Turnbull	30
4.1.1 Grundlagen	31
4.1.2 Handel zu diskreten Zeitpunkten	32
4.1.3 Handel bei stetiger Zeit	41
4.2 Das Modell von Jarrow, Lando und Turnbull	48
4.2.1 Handel zu diskreten Zeitpunkten	50
4.2.2 Handel bei stetiger Zeit	55
5 Aggregiertes Risiko	64
5.1 Copulas	65
5.2 Korrelation	68
5.3 Alternative Abhängigkeitsmaße	71
5.4 Schranken für aggregierte Risiken	74
5.4.1 Einleitung und Definitionen	75
5.4.2 Verteilungsschranken	78
5.4.3 Zulässiges Risiko	81
5.4.4 Konvexe Ordnung	85

6	Auswirkungen auf ein Portfolio bei Aggregation von Markt- und Kreditrisiko	95
6.1	Modelle für Kredit- und Marktrisiko	96
6.1.1	Faktormodell für Kreditrisiko	96
6.1.2	Faktormodell für Marktrisiko	99
6.2	Inter-Risiko Korrelation	101
6.2.1	Normal-Faktor Modell	101
6.2.2	Schock Modell	105
6.3	Spezialfall: Ein-Faktor Modell	109
6.3.1	Inter-Risiko Korrelation im Ein-Faktor Modell	110
6.4	Risikoaggregation	113
7	Zusammenfassung und Ausblick	117
	Quellenverzeichnis	119

Abbildungsverzeichnis

1.1	Diese Grafik aus Embrechts, Frey und McNeil (2005) [11] zeigt den Vergleich zweier Verlustverteilungen. Einerseits eine Verlustverteilung mit unabhängigen Verlusten und andererseits eine Korrelation der Verluste von 0.5%.	2
3.1	Übersicht der Schritte bei CreditMetrics zur Ermittlung des Kreditrisikos	19
3.2	normalverteilte Aktienrendite eines BB-Bondes mit Ausfallsschranken Z_s , zugehörigen Schrankenwerten und Übergangswahrscheinlichkeiten	24
4.1	Preisprozess einer ausfallfreien Nullkuponanleihe im 2-Perioden-Modell	33
4.2	Auszahlungsprozess einer risikobehafteten Nullkuponanleihe im 2-Perioden-Modell	34
4.3	Preisentwicklung in XYZ einer risikobehafteten Nullkuponanleihe im 2-Perioden-Modell	35
4.4	Preisentwicklung einer risikobehafteten Nullkuponanleihe in Euro im 2-Perioden-Modell	35
5.1	Darstellung zweier Wahrscheinlichkeitsmodelle mit identischen Randverteilungen und unterschiedlicher Abhängigkeitsstruktur.	64

Tabellenverzeichnis

1	Einjährige Migrationsmatrix von Standard and Poor's	17
2	S&P Matrix für durchschnittliche, kummulierte Ausfallraten mehrerer Jahre	18
3	Übergangswahrscheinlichkeiten für einen BBB-Bond	19
4	Recovery Rates nach Seniorität	20
5	Werte der einjährigen Forward-Zinsstrukturkurve für die je- weilige Ratingstufe in %	21
6	Möglicher Wert eines BBB-Bonds nach einem Jahr	21
7	Zusammengefasste Werte des BBB-Bonds	22
8	Schrankenwerte für einen BB-Bond bei normalverteilter Akti- enrendite	26
9	Schrankenwerte für einen A-Bond bei normalverteilter Akti- enrendite	26
10	Gemeinsame Übergangs- bzw. Ausfallswahrscheinlichkeiten ei- nes BB-Bonds und eines A-Bonds	27
11	Geschätzte Recovery Rates aus den Jahren 1974 - 1991. Übernommen aus Moody's Special Report (1995). Die Angaben sind in US- Dollar Preise	59
12	Einjährige durchschnittliche Migrationsmatrix für die Jahre 1981 - 1991 von Standard and Poor's. Angaben in %	61
13	Modifizierte einjährige durchschnittliche Migrationsmatrix für die Jahre 1981 - 1991 von Standard and Poor's. Angaben in %	62
14	Generatormatrix, die aus den Übergangswahrscheinlichkeiten aus Tabelle 13 geschätzt wurde	62
15	Inter-Risiko Korrelation der LHP Approximation für das Normal- Faktormodell (137) und das Schockmodell mit gemeinsamen Schocks (140) mit $r = 0.2$ und verschiedenen Werten für p und die Assetkorrelation ρ . Die Werte in den Klammern ste- hen für die obere Schranke der Inter-Risiko Korrelation, bei der $r = \sqrt{\rho}$ gilt.	112
16	Die Relation zwischen der Inter-Risiko Korrelation $\text{corr}(L,Z)$ und dem Copula Parameter $\tilde{\gamma}$ aus 146 für $p = 0.002$ und $\rho = 15\%$	114
17	Inter-Risiko Korrelation der LHP Approximation für das Normal- Faktormodell aus (137) und das Schockmodell mit gemeinsa- men Schocks (140) mit $r = 0.2$ und verschiedenen Werten für p und die Assetkorrelation ρ . Die Werte in den Klammern ste- hen für die obere Schranke der Inter-Risiko Korrelation, bei der $r = \sqrt{\rho}$ gilt.	115

1 Einleitung

Das Kreditrisiko eines Portfolios ist ein Thema, mit dem sich unter anderem Finanzinstitute seit jeher beschäftigen. Von Kreditrisiko spricht man, wenn eine Veränderung des Wertes eines Kreditportfolios aufgrund unvorhergesehener Veränderungen der Kreditqualität entsteht. Diese Wertveränderung kann zum Beispiel durch einen Ausfall des Kreditnehmers oder aber durch eine Ratingveränderung des Kreditnehmers entstehen. Je genauer also dieses Risiko beschrieben oder abgeschätzt werden kann, umso besser ist es für ein Finanzunternehmen.

1.1 Motivation

Kredit- und Marktrisiko sind im Grunde genommen eng miteinander verbunden. Der Marktwert des Firmenvermögens beeinflusst die Ausfallswahrscheinlichkeit, also das Kreditrisiko und umgekehrt. Gegenüber dem Marktrisiko hat man beim Kreditrisiko allerdings einige spezielle Aspekte zu beachten. Die wahrscheinlich wichtigsten Gesichtspunkte sind die schlechte öffentliche Information sowie das Nichtvorhandensein ausreichender Daten. Wird ein Kredit vergeben, so tritt meist der Fall ein, dass die beiden Vertragsparteien unterschiedlich gut informiert sind, d.h. ein Kreditnehmer weiß viel besser über seine wirtschaftliche Situation und in weiterer Folge über sein Ausfallrisiko Bescheid als der Kreditgeber. Ein weiteres Problem ist jenes, dass sehr wenig historische Daten über Kreditausfälle vorhanden sind, was die Anwendung statistischer Methoden sehr schwierig macht.

Da ein Kreditportfolio im Laufe der Zeit viele kleine Einnahmen generiert, denen aber wenige hohe Kosten gegenüberstehen, ergibt sich eine rechtsschiefe Verlustverteilung. Um diese vereinzelt hohen Verluste zu kompensieren, muss eine entsprechende Menge an Kapital zurückgehalten werden. Dieses Kapital entspricht dem α -Quantil der Verlustverteilung. Typische Werte für α sind 0.95 oder 0.99.

Ein weiterer Aspekt, der nicht außer Acht gelassen werden darf, sind viele Ausfälle verschiedener Kreditnehmer innerhalb einer Periode. Daraus ergibt sich das Problem der Abhängigkeitsstruktur der Ausfallgründe, was starken Einfluss auf den rechten Tail der Verlustverteilung eines größeren Portfolios hat. Diese Abhängigkeit ergibt sich einerseits durch makroökonomische Faktoren, wie z.B. die Veränderung des ökonomischen Wachstums. Andererseits ergibt sich Abhängigkeit durch direkte ökonomische Verbindungen zwischen den Firmen. In Abbildung 1.1, die aus [11] stammt, sind die Verlustverteilungen von einem Portfolio mit unabhängigen Verlusten und einem Portfolio mit einer Verlustkorrelation von 0.5% dargestellt. In beiden Portfolios befin-

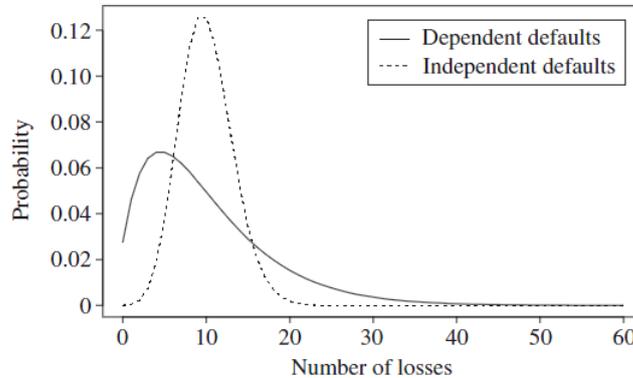


Abbildung 1.1: Diese Grafik aus Embrechts, Frey und McNeil (2005) [11] zeigt den Vergleich zweier Verlustverteilungen. Einerseits eine Verlustverteilung mit unabhängigen Verlusten und andererseits eine Korrelation der Verluste von 0.5%.

den sich 1000 Kredite mit einer Ausfallswahrscheinlichkeit von 1%, d.h., dass über die betrachtete Periode jeweils 10 Ausfälle erwartet werden. Das Portfolio mit der schwachen Abhängigkeit kann als ein realistisches Beispiel für die Verlustverteilung eines homogenen Portfolios mit 1000 Krediten gesehen werden, welche das Standard & Poor's Rating BB besitzen. Es ist deutlich zu sehen, dass die Abhängigkeit eine schiefe Verlustverteilung zur Folge hat. Der Tail der Verlustverteilung des Portfolios mit Abhängigkeit weist einen sogenannten „heavier right“ Tail auf.

In dieser Arbeit soll dargelegt werden, wie man mit dem Problem von abhängigen Risiken umgeht. Dazu werden zuerst einige Kreditrisikomodelle behandelt, dann wird das Marktrisiko betrachtet und abschließend wird mittels der Korrelation bzw. durch die Ermittlung von Korrelationsschranken eines Kreditrisikomodells und eines Marktrisiko-modells vorgestellt, wie man mit Abhängigkeit von Risiken umgehen kann.

1.2 Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit werden nach einem einleitenden Definitionskapitel (Kapitel 2), worin vorab viele für die Arbeit relevante Definitionen angeführt sind, in einem ersten Schritt einige Firmenwertmodelle vorgestellt (Kapitel 3). In Firmenwertmodellen betrachtet man den Anlagewert eines Unternehmens. Ein

Risiko entsteht hier, wenn dieser Anlagewert unter eine vorgegebene Schranke fällt. Das wohl älteste Firmenwertmodell datiert aus dem Jahr 1973 und geht auf Merton zurück ([20]). Dieses Firmenwertmodell gilt aus mehreren Gründen als sehr einfaches Modell, dient aber als Grundlage für viele andere Kreditrisikomodelle, wie man im Zuge dieser Arbeit sehen wird. Eine Erweiterung ist zum Beispiel das KMV-Modell ([7], [8] und [11]), wo man von einer differenzierten Ausfallswahrscheinlichkeit ausgeht. Den Abschluss des Kapitels über Firmenwertmodell bilden jene Modelle, die auf Kreditmigration basieren. Hier gibt es ein zugrundeliegendes Rating der Kreditnehmer und aufgrund dieses Ratings ermittelt man mithilfe von Migrationmatrizen, die auf historischen Daten basieren, die Ausfalls-, bzw. die Ratingveränderungswahrscheinlichkeit, welche ebenfalls eine Wertveränderung des Portfolios zur Folge hat. In dieser Arbeit werden die Grundzüge des Computerprogramms CreditMetrics vorgestellt, welches mit Migrationsmatrizen arbeitet. Gupton, Finger und Bhatai (2007) haben dieses Computerprogramm in [6] beschrieben.

In Kapitel 4 werden die intensitätsbasierten Kreditrisikomodelle von Jarrow und Turnbull (1995) [19] und von Jarrow, Lando und Turnbull (1997) [17] vorgestellt. Intensitätsbasierte Kreditrisikomodelle haben nicht mehr den Firmenwert als Grundlage für die Ausfallswahrscheinlichkeit, sondern nicht-negative Zufallsvariablen, welche jeweils eine eigene Intensität besitzen. Bei den beiden vorgestellten Modellen wird der Zeitpunkt des Ausfalls im Gegensatz zu den Firmenwertmodellen von einem Asset-unabhängigen Prozess beschrieben.

Im daran anschließenden Kapitel 5, „Aggregiertes Risiko“, wird das Marktrisiko betrachtet. Insbesondere wird die Darstellbarkeit der Abhängigkeit von Einzelrisiken untersucht. Deshalb werden hier Copulas beschrieben, aber auch die lineare Korrelation, sowie alternative Abhängigkeitsmaße wie Spearman's ρ und Kendall's τ . Die Literatur hierzu stammt aus [11], [13] und [21]. Weil es oft schwer ist, dass man die gemeinsame Verteilung kennt, werden zum Abschluss von Kapitel 5, wie in [12] beschrieben, anhand des Risikomaßes Value at Risk Schranken für das gemeinsame Risiko ermittelt.

In Kapitel 6 wird ein Modell vorgestellt, dass sowohl Kredit- als auch Marktrisiko berücksichtigt. Grundlage hierzu bildet die Literatur aus [5]. Für das Kreditrisiko wird ein Normal-Faktor Modell im Sinne von Merton gewählt und für das Marktrisiko ein lineares Faktormodell. Für diese beiden Modelle wird die Korrelation der Risikofaktoren ermittelt und Schranken für diese Korrelation angegeben.

Im abschließenden Kapitel 7 wird die Arbeit zusammengefasst und offengebliebene Fragen, bzw. nicht behandelte Themen angesprochen.

2 Mathematische Grundlagen

Dieses Kapitel soll dazu dienen, mathematische Begriffe, die in weiterer Folge benutzt werden, einzuführen und zu definieren. Zu Beginn werden einige grundlegende wahrscheinlichkeitstheoretische Konzepte definiert. Literaturgrundlage sind klassische Lehrbücher wie zum Beispiel „R. Durrett: Probability Theory and Examples (2013)“ [10] oder „P. Billingsley: Probability and Measure (1995)“ [4].

Definition 2.1:

Sei X eine Menge und \mathcal{O} eine Familie von Teilmengen von X . Das Paar (X, \mathcal{O}) heißt **topologischer Raum**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $\emptyset \in \mathcal{O}$,
- $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$,
- $O_n \in \mathcal{O} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n \in \mathcal{O}$.

Die Elemente von \mathcal{O} heißen **offene Mengen**, die Familie \mathcal{O} heißt **Topologie**.

Definition 2.2:

Sei Ω eine nichtleere Menge. \mathcal{A} heißt **σ -Algebra** von Teilmengen von Ω wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Das Paar (Ω, \mathcal{A}) heißt **Messraum**.

Wenn \mathcal{E} ein beliebiges Mengensystem ist (eine Teilmenge von Ω), dann existiert stets die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E})$. Dies ist die kleinste σ -Algebra die \mathcal{E} enthält.

(Ω, \mathcal{O}) sei ein topologischer Raum. Die **Borel σ -Algebra** ist die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Mengen von Ω enthält, insbesondere schreibt man $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{offene Mengen})$, wobei die offenen Mengen in \mathbb{R} die Intervalle (a, b) und deren Vereinigungen sind.

Definition 2.3:

Sei (Ω, \mathcal{A}) ein Messraum. Sei μ so, dass $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$. Dann heißt μ **Maß** auf diesem Messraum wenn gilt

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ ist σ -additiv, das heißt
 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt $\Rightarrow \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann **Maßraum**. Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ mit Maß P , sodass $P(\Omega) = 1$ gilt, heißt **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Definition 2.4:

Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q auf (Ω, \mathcal{A}) heißen **äquivalent**, wenn $P \ll Q$ und $Q \ll P$ gilt (das heißt $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$). Man schreibt $P \sim Q$.

Definition 2.5:

Seien (Ω, \mathcal{A}) und (Ω', \mathcal{A}') zwei Messräume mit σ -Algebren \mathcal{A} und \mathcal{A}' . Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt **messbar**, wenn

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

Definition 2.6:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Ω' -wertige **Zufallsvariable** ist eine messbare Funktion $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$.

Definition 2.7:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ heißen **stochastisch unabhängig**, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Definition 2.8:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (E, \mathcal{E}) ein Messraum. Ein E -wertiger **stochastischer Prozess** ist dann eine Familie $X = (X_t)_{t \geq 0}$ von E -wertigen Zufallsvariablen X_t , die auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ definiert sind.

Definition 2.9:

Eine rechtsstetige Funktion, deren linker Grenzwert existiert, heißt **càdlàg** (continu à droite limité à gauche). Eine linksstetige Funktion, deren rechter Grenzwert existiert, heißt **càglàd** (continu à gauche limité à droite).

Definition 2.10:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (E, \mathcal{E}) ein Messraum. Ein E -wertiger Prozess $(N_t)_{t \geq 0}$ mit càdlàg Pfaden heißt **Poissonprozess** mit Intensität $\lambda > 0$ wenn gilt

- $N_0 = 0$
- Für $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind $N(t_k) - N(t_{k-1})$, $1 \leq k \leq n$, unabhängig.
- $N(t) - N(s)$ ($s < t$) ist poissonverteilt mit Parameter $\lambda(t - s)$.

Definition 2.11:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ eine messbare Abbildung, dann definiert

$$\mu_f(A') := \mu(f^{-1}(A')) \text{ für } A' \in \mathcal{A}'$$

ein Maß auf (Ω', \mathcal{A}') . Dieses heißt das **Bildmaß** von μ unter f .

Definition 2.12:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ eine Ω' -wertige Zufallsvariable. Dann heißt das Bildmaß

$$P_X(A') = P(X^{-1}(A')) = P(X \in A') \text{ für } A' \in \mathcal{A}'$$

die **Verteilung** der Zufallsvariablen X .

Definition 2.13:

Ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dann heißt die durch

$$F(x) := P((-\infty, x]) \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ die **Verteilungsfunktion** von P .
Ist X eine reelle Zufallsvariable, dann heißt die durch

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P(X \leq x)$$

definierte Funktion, die **Verteilungsfunktion** von X .

Definition 2.14:

Eine aufsteigende Familie von Untersigmaalgebren $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ nennt man **Filtration**.

Definition 2.15:

Ein Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt an die Filtration \mathcal{F} **adaptiert**, wenn X_t für alle $t \geq 0$ \mathcal{F}_t -messbar ist.

Definition 2.16:

Der $(d+1)$ -dimensionale **Preisprozess** sei durch $S = (S_n)_{0 \leq n \leq N}$ gegeben, mit $S_n = (S_n^0, \dots, S_n^d)^T$. Hierbei bezeichnet S_n^j den Preis des j -ten Finanzgutes zum Zeitpunkt n . Durch S^0 ist der Preis einer risikolosen Anleihe (Bond) gegeben.

Der Prozess $\tilde{S} = (\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$ mit $\tilde{S}_n := (S_n^0)^{-1} S_n = (1, \tilde{S}_n^1, \dots, \tilde{S}_n^d)^T$ heißt **diskontierter Preisprozess**, mit der Voraussetzung, dass $S_n^0 > 0$ für $0 \leq n \leq N$.

Definition 2.17:

Es sei ein Portfolio $x = (x^0, \dots, x^d)^T$ mit x^0 Einheiten des 0-ten, ..., x^d Einheiten des d -ten Finanzgutes gegeben. Dann ist eine **Handelsstrategie** ein $(d+1)$ -dimensionaler adaptierter Prozess $X = (X_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Definition 2.18:

Der **Entnahmeprozess** $\delta(X) = (\delta_n(X))_{0 \leq n \leq N}$ sei folgendermaßen definiert

$$\delta_n(X) = (X_{n-1} - X_n)^T S_n$$

wobei S_n den $(d+1)$ -dimensionalen Preisprozess angibt.

Definition 2.19:

Eine Handelsstrategie heißt **Arbitrage**, wenn $\delta_n(X) \geq 0$ für $0 \leq n \leq N$ und $P(\delta_n(X) > 0) > 0$ für ein n . Gibt es keine Arbitrage, so spricht man von **Arbitragefreiheit**.

Definition 2.20:

- (i) Eine **Forderung** ist ein adaptierter Prozess $C = (C_n)_{1 \leq n \leq N}$
- (ii) Eine Forderung heißt **absicherbar**, wenn es eine Handelsstrategie X gibt mit $\delta_n(X) = C_n$ für $1 \leq n \leq N$
In diesem Fall heißt X **Hedge** von C
- (iii) Ein Modell heißt **vollständig**, wenn jede Forderung absicherbar ist.

Definition 2.21:

Ein Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt ein **Martingal** bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ wenn $E(|X_t|) < \infty$ und

- X_t ist adaptiert
- $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ P -fast sicher für alle $0 \leq s \leq t$.

Definition 2.22:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, (E, \mathcal{E}) ein Messraum und $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ sei ein E -wertiger stochastischer Prozess. Für ein $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ ein **Pfad** von X .

Definition 2.23:

Einen reellwertigen stochastischen Prozess $B = (B_t)_{t \geq 0}$ nennt man **eindimensionale, standard Brown'sche Bewegung** bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

- $B_0 = 0$
- Für $0 \leq s \leq t$ ist $B_t - B_s$ unabhängig von \mathcal{F}_s und $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$
- B hat stetige Pfade

Definition 2.24:

Wenn B_t eine Standard Brown'sche Bewegung ist, dann ist durch

$$S_t = a \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right]$$

eine **geometrische Brownsche Bewegung** gegeben. Diese ist Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

für $t \geq 0$ und $S_0 = a$.

Definition 2.25:

Sei Q eine $k \times k$ Matrix mit den Einträgen $(Q_{i,j})_{i,j=1,\dots,k}$. Ein (zeitdiskreter) stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit endlichem Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ heißt (**homogene**) **Markovkette mit Übergangsmatrix Q** genau dann wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ und alle $i_0, \dots, i_{n-1} \in \{1, \dots, k\}$ gilt

$$P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, \dots, X_0 = s_{i_0}) = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) = Q_{i,j}$$

Definition 2.26:

Eine $n \times n$ Matrix A heißt **symmetrisch**, wenn sie gleich ihrer Transponierten ist, d.h. $A = A^t$.

Satz 2.1 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung):

Seien x_1, \dots, x_n und y_1, \dots, y_n reelle Zahlen, dann gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \quad (1)$$

3 Firmenwertmodelle

Struktur- oder Firmenwertmodelle sind dadurch charakterisiert, dass eine stochastische Variable, die in vielen Fällen für den Anlagewert des Unternehmens steht, unter eine gewisse Schranke fällt. Meist bedeutet dies, dass der Anlagewert kleiner als der Wert der Verbindlichkeiten ist. Das erste Firmenwertmodell geht auf Merton [20] zurück. Aus diesem sehr einfachen Modell von Merton haben sich in den Jahren weitere Firmenwertmodelle entwickelt. Eines, das als Erweiterung des Merton-Modells bezeichnet werden kann, ist das KMV-Modell aus Crouhy, Galai und Mark [7]. Eine weitere Form der Firmenwertmodelle ist durch Modelle gegeben, die auf Kreditmigrationsmatrizen basieren. Hier ist speziell CreditMetrics [6] zu erwähnen, das in der Praxis sehr häufig Anwendung findet.

3.1 Das Modell von Merton

Dieses Kapitel folgt den Ausarbeitungen in Merton [20] und Embrechts, Frey McNeil [11].

Das Modell von Merton aus dem Jahre 1974 stellt ein sehr einfaches Kreditrisikomodell dar, gilt aber nach wie vor als Grundstein der Firmenwertmodelle. Im Laufe der Jahre wurde das Modell des öfteren erweitert. Im Grundmodell wird angenommen, dass der Anlagewert einer Firma durch einen stochastischen Prozess (V_t) gegeben ist. Außerdem nimmt man an, dass sich die Firma durch Eigen- und Fremdkapital finanziert. Das Fremdkapital bestehe aus einer einzigen Nullkuponanleihe mit Nennwert B und Fälligkeit T . Zum Zeitpunkt t bezeichne S_t den Wert des Eigenkapitals und B_t den Wert des Fremdkapitals. Daraus folgt, unter der Annahme, dass weder Steuern noch Transaktionskosten existieren, dass der Anlagewert der Firma zum Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$ durch $V_t = S_t + B_t$ gegeben ist. Ein Grund für die erwähnte Einfachheit des Modells ist der, dass ein Ausfall nur zur Fälligkeit T eintreten kann. Da, wie zuvor schon erwähnt, ein Ausfall eintritt, wenn die Verbindlichkeiten das Eigenkapital übersteigen, gibt es zum Zeitpunkt T zwei mögliche Szenarien:

1. $V_T > B_T$: In diesem Fall ist alles in Ordnung. Der Anlagewert ist höher als die Verschuldung. Die Gläubiger erhalten B und die Aktionäre $S_T = V_T - B$.
2. $V_T \leq B_T$: Nun ist die Firma nicht mehr im Stande für die Schulden aufzukommen und ein Ausfall tritt ein. In diesem Fall gehen die Aktionäre leer aus und das übrig gebliebene Kapital wird auf die Gläubiger aufgeteilt. Es gilt: $B_T = V_T$ und $S_T = 0$

Fasst man diese beiden Fälle zusammen so ergibt sich für die Endwerte des Eigenkapitals und des Fremdkapitals folgende Beziehung:

$$S_T = \max(V_T - B, 0) = (V_T - B)^+, \quad (2)$$

$$B_T = \min(V_T, B) = B - (B - V_T)^+. \quad (3)$$

Das bedeutet, dass der Endwert des Eigenkapitals dem Payoff einer europäischen Calloption auf V_T entspricht und der Endwert des Fremdkapitals entspricht dem Nominalwert des Fremdkapitals minus dem Payoff einer europäischen Putoption auf V_T . Beide eben genannten Optionen haben Ausübungspreis B .

Eine weitere Annahme im Mertonmodell ist jene, dass V_t unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P durch eine geometrische Brownsche Bewegung gegeben ist, nämlich:

$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t, \quad (4)$$

mit den Konstanten $\mu_V \in \mathbb{R}$, die für den Drift steht, $\sigma_V > 0$, welche die Volatilität bezeichnet, und einer Standard Brownschen Bewegung (W_t). Löst man die Gleichung (4) auf, so erhält man

$$V_T = V_0 \exp\left(\left(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T + \sigma_V W_T\right). \quad (5)$$

Hieraus folgt

$$\ln V_T \sim N\left(\ln V_0 + \left(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T, \sigma_V^2 T\right). \quad (6)$$

Mit dieser Normalverteilung erhält man nun die Ausfallwahrscheinlichkeit des Unternehmens durch

$$P(V_T \leq B) = P(\ln V_T \leq \ln B) = \Phi\left(\frac{\ln(B/V_0) - \left(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T}{\sigma_V \sqrt{T}}\right) \quad (7)$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Abschließend soll hier noch kurz das Preisen mit dem Merton Modell erwähnt werden.

Um zu beginnen, sind folgende drei Annahmen von Nöten:

- Am Markt gibt es keine Steuern und Transaktionskosten und wir haben einen Markt mit stetigem Handel.

- Der risikofreie Zinssatz ist deterministisch und gleich $r \geq 0$.
- Der Vermögenswert-Prozess des Unternehmens (V_t) ist unabhängig davon, wie das Unternehmen finanziert ist. Im Speziellen ist (V_t) unabhängig von der Verschuldung B. Außerdem ist (V_t) ein gehandeltes Wertpapier für das (4) gilt.

Hat man nun eine Forderung mit Laufzeit T auf den Wert eines Unternehmens, mit Payoff $h(V_T)$, wie es hier durch (2) und (3) gegeben ist und gelten obige Annahmen dann gibt es aus finanzmathematischer Sicht zwei Möglichkeiten den fairen Preis $f(t, V_t)$ der Forderung zum Zeitpunkt $t \leq T$ zu berechnen. Das wäre zum Einen mittels der „Black and Scholes“ - partiellen Differentialgleichung

$$f_t(t, V) + \frac{1}{2}\sigma_V^2 V^2 f_{VV}(t, V) + rV f_V(t, V) = r f(t, V), \text{ mit } t \in [0, T). \quad (8)$$

Den fairen Preis $f(t, V)$ von V erhält man, indem man (8) mit Endbedingung $f(T, V) = h(V)$ löst, wobei $f(T, V)$ den fairen Preis von V zum Zeitpunkt T bezeichnet. Die Indizes bei f geben die partiellen Ableitungen an. Eine zweite Möglichkeit $f(t, V_t)$ zu berechnen, ist durch den Erwartungswert des diskontierten Payoff unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q gegeben. Unter dem Maß Q erfüllt (V_t) folgende stochastische Differentialgleichung: $dV_t = rV_t dt + \sigma_V V_t d\tilde{W}_t$. \tilde{W} bezeichnet eine Standard Brownsche Bewegung unter Q. Der risikolose Zinssatz r ersetzt hier μ_V aus (4). Daraus folgt nun

$$f(t, V_t) = E^Q(e^{-r(T-t)} h(V_T) | \mathcal{F}_t), \quad (9)$$

wobei E^Q den Erwartungswert unter dem Maß Q bezeichnet.

Wie zuvor erwähnt, entspricht der Endwert des Eigenkapitals dem Payoff einer europäischen Calloption. Deshalb ist die Lösung der partiellen Differentialgleichung bzw. der bedingten Erwartung für S_t durch den Black and Scholes Preis C^{BS} eines europäischen Calls gegeben:

$$S_t = C^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) := V_t \Phi(d_{t,1}) - B e^{-r(T-t)} \Phi(d_{t,2}) \quad (10)$$

mit

$$d_{t,1} := \frac{\ln V_t - \ln B + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \text{ und } d_{t,2} := d_{t,1} - \sigma_V \sqrt{T-t} \quad (11)$$

Für den Wert des Fremdkapitals erhält man deshalb Ergebnis (12). Da der Preis einer ausfallfreien Nullkuponanleihe mit Laufzeit T durch $p_0(t, T) = \exp(-r(T-t))$ gegeben ist, ergibt sich

$$B_t = B p_0(t, T) - P^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) \quad (12)$$

wobei P^{BS} den Black and Scholes Preis einer europäischen Putoption mit Ausübungspreis B und Laufzeit T bezeichnet. Dieser lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$P^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) = Be^{-r(T-t)}\Phi(-d_{t,2}) - V_t\Phi(-d_{t,1}) \quad (13)$$

mit $d_{t,1}$ und $d_{t,2}$ wie in (11). Fasst man diese beiden Ausdrücke zusammen so ergibt sich für den Wert des Fremdkapitals

$$B_t = p_0(t, T)B\Phi(d_{t,2}) + V_t\Phi(-d_{t,1}) \quad (14)$$

3.2 KMV-Modell

Die Literatur zu diesem Kapitel stammt aus Grouhy, Galai und Mark[7], Embrechts, Frey und McNeil [11] sowie aus Crosbie und Bohn [8].

Das KMV-Modell, eine in der Industrie sehr häufig genutzte Weiterentwicklung des Modells von Merton, benutzt nicht mehr die Ausfallswahrscheinlichkeit im Sinne von Gleichung (7), sondern hier spricht man von der „erwarteten Ausfallshäufigkeit“, der Expected Default Frequency (EDF). Diese kann man als die Wahrscheinlichkeit auffassen, dass unter dem physischen Wahrscheinlichkeitsmaß P ein Unternehmen innerhalb eines Jahres ausfällt. Mit $\Phi(d) = 1 - \Phi(-d)$ erhält man aus Gleichung (7), folgende Darstellung der EDF im Sinne von Merton, mit der Annahme, dass die Laufzeit $T = 1$ beträgt:

$$EDF_{Merton} = 1 - \Phi\left(\frac{\ln V_0 - \ln B + (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)}{\sigma_V}\right) \quad (15)$$

Im KMV Modell hat diese EDF eine etwas andere Darstellung. Die Berechnung der Ausfallswahrscheinlichkeiten erfolgt in diesem Modell mittels folgender drei Schritte. Zuerst wird der Marktwert und die Volatilität des Vermögens des Unternehmens geschätzt, danach berechnet man die Distanz bis zum Ausfall, die so genannte „Distance to Default (DD)“ und abschließend wird mittels vorhandenen Ausfallsdaten die Ausfallswahrscheinlichkeit anhand der DD berechnet. Dies wird im Laufe dieses Kapitels genauer erklärt.

3.2.1 Ermittlung des Marktwertes und der Volatilität

Eine Möglichkeit den Unternehmenswert zu messen, ist mittels des Marktwertes der Vermögenswerte des Unternehmens. In vielen Fällen ist das allerdings nicht möglich, da, anders als bei großen öffentlichen Unternehmen,

nur Teile der Verbindlichkeiten aktiv gehandelt werden. Der Marktwert der Aktivposten des Unternehmens setzt sich aus dem Marktwert des Eigenkapitals und dem Marktwert des Fremdkapitals zusammen. Aus diesem Grund greift man auf das Modell von Merton zurück. Wir haben zuvor gesehen, dass der Wert des Eigenkapitals durch $S_t = C^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T)$ gegeben ist. r bezeichnet den risikolosen Zinssatz und so hat diese Gleichung zu einem bestimmten Zeitpunkt, z.B. $t = 0$, zwei Unbekannte, nämlich V_0 und σ_V . Wie in Crosbie und Bohn [8] beschrieben, erhält man diese beiden Unbekannten durch ein iteratives Verfahren. Zu Beginn nimmt man einen Wert für die Volatilität $\sigma_V^{(0)}$ an und erhält damit einen Asset-Wert. Die Volatilität der resultierenden Asset Returns fungiert wiederum als Input für den nächsten Iterationsschritt. Dadurch erhält man eine neue Menge von Asset-Werten und eine neue Zeitreihe von Asset Returns. Dies führt man solange durch, bis die Iteration konvergiert, was mit einem geeigneten Startwert meist mit fünf bis sechs Iterationsschritten der Fall sein sollte. (Man geht nicht mehr von nur einer Nullkuponanleihe als Fremdkapital aus, sondern das Vermögen des Unternehmens sei folgendermaßen gegeben. Es bestehe aus Eigenkapital, das kurzfristige Fremdkapital sei durch Bargeld gegeben und das langfristige Fremdkapital durch einlösbare Vorzugsaktien und eine ewige Rente.)

3.2.2 Berechnung der Distance to Default

Wie bereits erwähnt, spricht man im Merton Modell von einem Ausfall, wenn der Unternehmenswert geringer als die Höhe der Schulden ist. In der Praxis treten aber Ausfälle nicht nur ein, wenn das Unternehmen insolvent ist. Man spricht auch schon von einem Ausfall, wenn es einer Zahlung nicht nachkommen kann. Das frühere Unternehmen KMV, heute Teil der Moody's Analytics Enterprise Risk Solution, hat deshalb nach einem Test mit mehreren hundert Unternehmen festgestellt, dass ein Ausfall eintritt, wenn sich der Vermögenswert zwischen dem Wert der gesamten Verbindlichkeiten und den kurzfristigen Verbindlichkeiten bewegt. Verwendet man nun als Ausfallswahrscheinlichkeit den Tail der Verteilung, wo sich der Vermögenswert unter dem Wert der gesamten Verbindlichkeiten befindet, steht dies nicht im Einklang mit der Praxis. Ein weiterer Grund dafür, dass diese Definition der Ausfallswahrscheinlichkeit nicht sehr realistisch ist, ist die äußerst einfach angenommene Kapitalstruktur eines Unternehmens. Außerdem können Zahlungen während der Laufzeit eines Kontraktes anfallen und nicht nur, wie angenommen, am Ende der Laufzeit. Aus diesen Gründen hat KMV einen Zwischenschritt vor der Berechnung der Ausfallswahrscheinlichkeit eingeführt, der Berechnung der „Distance to Default“ (DD). Die DD ist die

Anzahl der Standardabweichungen zwischen dem Erwartungswert der Verteilung des Vermögenswertes und einer kritischen Schranke, dem „Ausfallspunkt“. Dieser bildet sich aus den kurzfristigen Verbindlichkeiten und der Hälfte der langfristigen Verbindlichkeiten. Die DD sieht also folgendermaßen aus:

- KVB...kurzfristige Verbindlichkeiten
- LVB...langfristige Verbindlichkeiten
- APT...Ausfallspunkt = KVB + 1/2*LVB
- DD...Distance to Default, die Distanz zwischen dem erwarteten Vermögenswert nach einem Jahr, $E[V_1]$, und dem Ausfallspunkt, ausgedrückt in Standardabweichungen der zukünftigen Asset Returns:

$$DD = \frac{E[V_1] - APT}{\sigma_V}$$

Aufgrund der Lognormal-Verteilung von V , wie in (6) gesehen, folgt für die Distance to Default

$$DD = \frac{\ln(V_0/APT_T) + (\mu - (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (16)$$

wobei V_0 für den aktuellen Marktwert der Assets steht, APT_T ist der Ausfallspunkt für den Zeithorizont T , μ ist der erwartete Nettoertrag der Assets und σ steht für die Asset-Volatilität auf Jahresbasis.

3.2.3 Berechnung der Ausfallswahrscheinlichkeit aus der DD

Wie zuvor schon erwähnt spricht KMV nicht mehr von der Ausfallswahrscheinlichkeit, sondern von der „Expected Default Frequency“ (EDF). Anhand der DD wird mithilfe einer historischen Datenbank, die Daten von sehr vielen Unternehmen, auch solche die ausgefallen sind, enthält, die EDF berechnet. KMV nimmt an, dass Unternehmen mit der selben DD, die selbe EDF besitzen. Aufgrund der DD kann man mithilfe dieser Datenbank für jeden Zeithorizont T die Ausfallsquote der Unternehmen, die nach einem Jahr ausgefallen sind, ermittelt werden. Dazu ein kleines Beispiel:

Beispiel 3.1:

aktueller Marktwert der Assets	$V_0 = 1000$
erwarteter jährlicher Nettozuwachs der Assets	20%
erwarteter Assetwert in einem Jahr	$V_0(1.20) = 1200$
Asset-Volatilität auf Jahresbasis	$\sigma_V = 100$
Ausfallspunkt	800

Mit diesen Angaben ergibt sich

$$DD = \frac{1200-800}{100} = 4$$

Wenn man nun annimmt, dass es in der historischen Datenbank 5000 Firmen mit einer DD von 4 gibt und von diesen 5000 Unternehmen ein Jahr später 20 ausgefallen sind, dann haben wir folgende EDF

$$EDF_1 = \frac{20}{5000} = 0.004 = 0.4\%,$$

also eine „Ausfallswahrscheinlichkeit“ von 0.4%.

3.3 Modelle basierend auf Kreditmigration

In diesem Kapitel werden Modelle behandelt, bei denen die Ausfallswahrscheinlichkeit des Unternehmens oder des Kreditnehmers von deren Rating abhängig ist. Das heißt, dass jedes Unternehmen zu einer fixen Zeit mit einem gewissen Rating eingestuft wird. Je nach Ratingagentur gibt es unterschiedlich viele Ratings und sie unterscheiden sich auch in der Bezeichnung. Standard and Poors (S&P) z.B. arbeitet mit folgenden sieben Ratingstufen: AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC. Des weiteren gibt es auch eine Stufe, die für den Ausfall steht, nämlich D. Die Güte dieser Ratingstufen ist absteigend, das heißt, AAA ist das bestmögliche Rating und CCC das schlechteste für all jene Unternehmen, die noch nicht ausgefallen sind. Manchmal wird auch eine etwas feinere Abstufung verwendet. Basierend auf diesen Ratingstufen, gibt es so genannte, von den Ratingagenturen veröffentlichte, Migrationsmatrizen, die aus historischen Ausfallsdaten resultieren. Sie geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Unternehmen nach einer Periode (meist ein Jahr) in der gleichen Ratingstufe bleibt, sich das Rating ändert oder das Unternehmen ausfällt, also in Stufe D übergeht. In Tabelle 1 ist eine einjährige Migrationsmatrix von S&P dargestellt.

Bei Migrationsmatrizen wird angenommen, dass sie die Ausfallswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ratingstufen darstellen. Die Matrix aus Tabelle 1 wird folgendermaßen gelesen: Für ein Unternehmen mit Rating BB gibt diese Matrix an, dass die Wahrscheinlichkeit nach einem Jahr noch immer mit BB

Ausgangs- rating	Folgerating							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0.00	0.00	0.00
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0.00
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	1.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0.00	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0.00	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

Tabelle 1: Einjährige Migrationsmatrix von Standard and Poor's

gerated zu sein, bei 80.53% liegt und dass das Unternehmen mit einer Wahrscheinlichkeit von 1.06% innerhalb eines Jahres ausfällt. Migrationsmatrizen, die von den großen Ratingagenturen herausgegeben werden, sind nicht für alle Unternehmen einsetzbar, da sie deren Ausfallsverteilung nicht widerspiegeln. Speziell für europäische Unternehmen sind die Migrationswahrscheinlichkeiten nicht eins zu eins übertragbar, da die großen Ratingagenturen bei der Erstellung der Migrationsmatrizen zum Großteil auf historische Daten amerikanischer Firmen zurückgegriffen haben. Deshalb haben viele Unternehmen, vor allem Kreditinstitute, interne Migrationsmatrizen, basierend auf historischen Ausfallsdaten.

Will man weiter in die Zukunft schauen, werden von den großen Ratingagenturen auch mehrjährige Migrationsmatrizen herausgegeben. Es besteht die Möglichkeit, diese direkt zu schätzen. Des weiteren können diese Matrizen mit der Annahme, dass die Kreditmigration einer zeithomogenen Markovkette folgt, mittels Matrixmultiplikation errechnet werden. Will man also eine fünfjährige Ausfallswahrscheinlichkeit berechnen, so potenziert man die einjährige Migrationsmatrix mit 5. Tabelle 2 zeigt eine von S&P herausgegebene mehrjährige Matrix (in diesem Fall eine 15-jährige Matrix), die die durchschnittlichen kumulierten Ausfallraten für die jeweiligen Ratingstufen darstellt.

Das Standardmodell, das solche Migrationsmatrizen als Grundlage verwendet, ist das von der RiskMetrics Group entwickelte Computerprogramm CreditMetrics, welches von Gupton, Finger und Bhatai (2007) in [6] beschrieben wird.

Ausgangs- rating	Jahre							
	1	2	3	4	5	7	10	15
AAA	0.00	0.00	0.07	0.15	0.24	0.66	1.40	1.40
AA	0.00	0.02	0.12	0.25	0.43	0.89	1.29	1.48
A	0.06	0.16	0.27	0.44	0.67	1.12	2.17	3.00
BBB	0.18	0.44	0.72	1.27	1.78	2.99	4.34	4.70
BB	1.06	3.48	6.12	8.68	10.97	14.46	17.73	19.91
B	5.20	11.00	15.95	19.40	21.88	25.14	29.02	30.65
CCC	19.79	26.92	31.63	35.97	40.15	42.64	45.10	45.10

Tabelle 2: Von S&P herausgegebene Matrix, die die durchschnittlichen, kumulierten Ausfallraten für mehrere Jahre darstellt - in diesem Fall bis zu 15 Jahren.

3.3.1 CreditMetrics

Die Bewertung eines Portfolios erfolgt bei CreditMetrics mittels drei Schritten. In weiterer Folge wird immer von einem oder mehreren Bonds die Sprache sein. CreditMetrics ist aber nicht nur für Bonds anwendbar, sondern auch für Bankbürgschaften, Kreditzusagen, Kreditderivate, usw. Deshalb wird im ersten Schritt ermittelt, um welches Finanzinstrument es sich handelt, um dann eine Neubewertung nach einer Ratingveränderung oder einem Ausfall durchzuführen. Im zweiten Schritt wird das Kreditrisiko für einzelne Finanztitel ermittelt. Abschließend wird das Kreditrisiko über ein ganzes Portfolio ermittelt, wobei die auftretenden Korrelationen berücksichtigt werden. Die drei soeben erwähnten Phasen werden in Grafik 3.1 dargestellt und anhand der Beispiele (3.2 - 3.6) veranschaulicht.

Kreditrisiko für Einzelpositionen

Das Kreditrisiko ändert sich immer dann, wenn das Finanzinstrument eine Kreditänderung erfährt oder sogar ein Ausfall eintritt. Deshalb benötigt man neben den Ausfallswahrscheinlichkeiten der einzelnen Ratingstufen auch die Übergangswahrscheinlichkeiten in andere Ratingstufen. Zu diesem Zweck verwendet CreditMetrics Rating-Migrationsmatrizen der großen Ratingagenturen Moodys oder Standard & Poor's. Es besteht aber auch die Möglichkeit mit beliebigen Migrationsmatrizen zu arbeiten. Dies ist speziell dann notwendig, wenn ein hausinternes Ratingsystem verwendet wird.

Folgendes Beispiel wird im Laufe des Kapitels immer erweitert, um die beschriebene Thematik zu veranschaulichen.

Beispiel 3.2:

Ausgehend von einem Zeithorizont von einem Jahr, soll die Migrationsma-

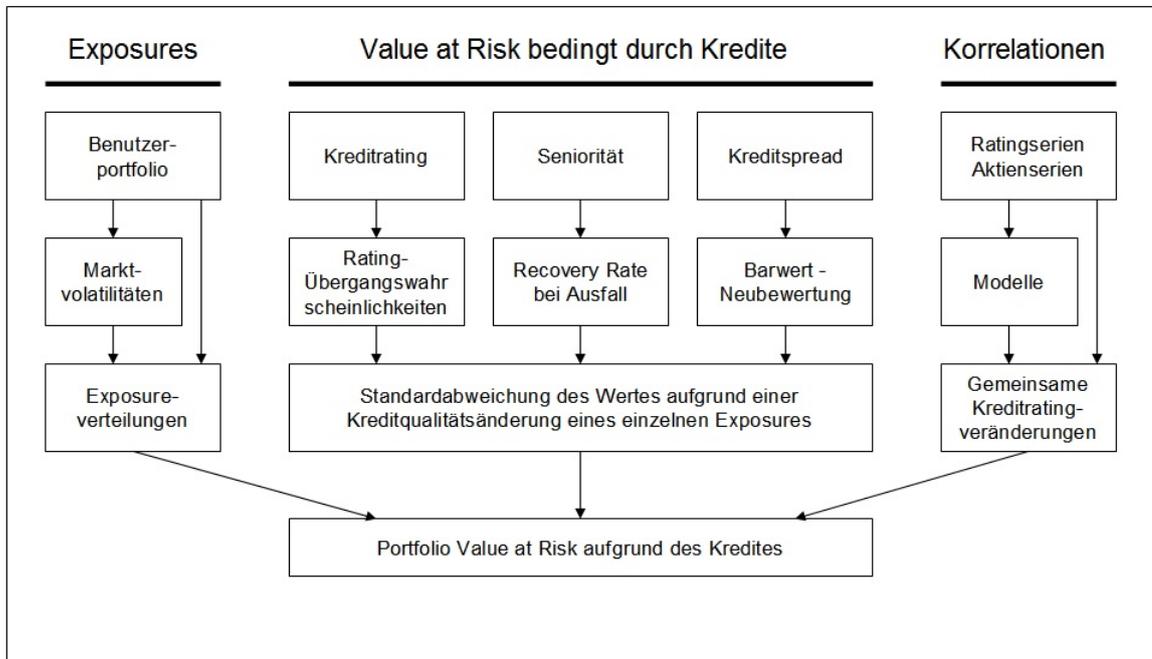


Abbildung 3.1: Übersicht der Schritte bei CreditMetrics zur Ermittlung des Kreditrisikos

trix aus Tabelle 1 als Grundlage dienen. Der betrachtete Bond soll mit BBB gerated sein und in 5 Jahren auslaufen.

Wenn man nun die von S&P bereitgestellte Tabelle 1 verwendet, so ist daraus abzulesen, dass ein BBB-Bond folgende Wahrscheinlichkeiten für eine Ratingänderung bzw. einen Ausfall hat.

Jahresendrating	Wahrscheinlichkeit
AAA	0,02%
AA	0,33%
A	5,95%
BBB	86,93%
BB	5,30%
B	1,17%
CCC	0,12%
Ausfall	0,18%

Tabelle 3: Übergangswahrscheinlichkeiten für einen BBB-Bond

Kennt man die Übergangs- und Ausfallswahrscheinlichkeiten, muss sowohl für jede Ratingklasse als auch für einen möglichen Ausfall das Finanzinstrument neu bewertet werden. Wenn ein Ausfall eintritt, wird der Wert des

Finanzinstrumentes aufgrund dessen Seniorität neu bewertet. Die Recovery Rates seien, wie in Tabelle 4 zu sehen, gegeben. Die Seniorität bedeutet hier, dass im Falle eines Ausfalls die Seniorität entscheidet, welcher Schuldner zuerst Geld zurückbekommt (Senior Secured vor Senior Unsecured vor Senior Subordinated...). Es wird jeweils für die entsprechende Seniorität der Mittelwert der Recovery Rate angegeben.

Rang	Mittelwert(%)
Senior Secured	53,80
Senior Unsecured	51,13
Senior Subordinated	38,52
Subordinated	32,74
Junior Subordinated	17,09

Tabelle 4: Recovery Rates nach Seniorität

Beispiel 3.3 (Fortsetzung von Beispiel 3.2):

Wenn unser BBB-Bond nun Senior Unsecured ist, heißt dies, dass bei einem Ausfall nur 51,13 % des Nominalwerts zurückgezahlt werden. Bei einem Nominalwert von 100 € wären dies also 51,13 €.

Wenn es zu einer Ratingänderung kommt werden die Forward-Zinssätze zur Neubewertung herangezogen, d.h., es wird angenommen, dass die aktuellen Forward-Zinssätze identisch zu den Zinsstrukturkurven in einem Jahr sind. Um eine Verteilung für die Anleihewerte zu erhalten, multipliziert man die Übergangswahrscheinlichkeiten zu anderen Ratingklassen (siehe Tabelle 1) jeweils mit dem entsprechenden Jahresendwert der Anleihe in der zugehörigen Ratingklasse.

Beispiel 3.4 (Fortsetzung von Beispiel 3.3):

Angenommen Tabelle 5 gibt die %-Werte der Zinsstrukturkurve für die jeweiligen Ratingstufen wieder.

Weiters wird angenommen, dass der BBB-Bond einen Nominalwert von 100 € hat und eine jährliche Kuponrate von 6% besitzt. Das bedeutet der Bond zahlt am Ende der nächsten vier Jahre jeweils 6 € aus und am Ende des fünften Jahres den Kupon plus den Nominalwert, also 106 €.

Sollte sich das Rating des Bonds von BBB auf A verbessern, so beträgt der Wert V des Bonds nach einem Jahr mittels Tabelle 5:

$$V = 6 + \frac{6}{(1 + 3,72\%)} + \frac{6}{(1 + 4,32\%)^2} + \frac{6}{(1 + 4,93\%)^3} + \frac{106}{(1 + 5,32\%)^4} = 108,66$$

In Tabelle 6 sieht man alle möglichen Werte des Bonds nach einem Jahr

Rating	Jahr1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4
AAA	3,60	4,17	4,73	5,12
AA	3,65	4,22	4,78	5,17
A	3,72	4,32	4,93	5,32
BBB	4,10	4,67	5,25	5,63
BB	5,55	6,02	6,78	7,27
B	6,05	7,027	8,03	8,52
CCC	15,05	15,02	14,03	13,52

Tabelle 5: Werte der einjährigen Forward-Zinsstrukturkurve für die jeweilige Ratingstufe in %

Jahresendrating	Wert (€)
AAA	109,37
AA	109,19
A	108,66
BBB	107,55
BB	102,02
B	98,10
CCC	83,64
Ausfall	51,13

Tabelle 6: Möglicher Wert eines BBB-Bonds nach einem Jahr

Das Kreditrisiko kann abschließend entweder durch die Standardabweichung oder Perzentilberechnung ermittelt werden. Die Perzentilbetrachtung ist die etwas aussagekräftigere Form der Messung des Kreditrisikos, da bei der Standardabweichung die Annahme der Normalverteilung getroffen wird, die zwar beim Marktrisiko zutrifft, nicht aber beim Kreditrisiko.

Trotzdem sind in folgenden Beispielen beide Varianten angeführt.

Beispiel 3.5 (Fortsetzung von Beispiel 3.4):

Wie in Beispiel 3.4 und Beispiel 3.2 gesehen, haben wir für den BBB-Bond bereits die Übergangswahrscheinlichkeiten sowie den Wert des Bonds nach einem Jahr erhalten. Multipliziert man diese beiden Werte, so erhält man den Wert des Bonds gewichtet mit der Übergangswahrscheinlichkeit. Zusammenfassend sind diese drei Werte in Tabelle 7 zu sehen.

Wenn p_i die Übergangswahrscheinlichkeit zu Rating i bezeichnet und μ_i für den Jahresendwert des Bonds in Ratingklasse i , dann erhält man folgenden

Jahresend- rating	Übergangs- wahrscheinlichkeit (%)	Jahresend- wert(€)	gewichteter Wert(€)
AAA	0,02	109,37	0,02
AA	0,33	109,19	0,36
A	5,95	108,66	6,47
BBB	86,93	107,55	93,49
BB	5,30	102,02	5,41
B	1,17	98,10	1,15
CCC	0,12	83,64	1,10
Ausfall	0,18	51,13	0,09

Tabelle 7: Zusammengefasste Werte des BBB-Bonds

Erwartungswert:

$$\mu = \sum_{i=1}^s p_i \mu_i = \begin{pmatrix} 0,02\% \cdot 109,37+ \\ 0,33\% \cdot 109,19+ \\ 5,95\% \cdot 108,66+ \\ 86,93\% \cdot 107,55+ \\ 5,30\% \cdot 102,02+ \\ 1,17\% \cdot 98,10+ \\ 0,12\% \cdot 83,64+ \\ 0,18\% \cdot 51,13 \end{pmatrix} = 107,09$$

Daraus wiederum ergibt sich folgende Varianz

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^s p_i \mu_i^2 - \mu^2 = \begin{pmatrix} 0,02\% \cdot 109,37^2+ \\ 0,33\% \cdot 109,19^2+ \\ 5,95\% \cdot 108,66^2+ \\ 86,93\% \cdot 107,55^2+ \\ 5,30\% \cdot 102,02^2+ \\ 1,17\% \cdot 98,10^2+ \\ 0,12\% \cdot 83,64^2+ \\ 0,18\% \cdot 51,13^2 \end{pmatrix} - 107,09^2 = 8,95$$

Als Standardabweichung erhält man somit 2,99.

In dieser Berechnung steckt die Annahme, dass bei einem Ausfall immer 51,13 ausgezahlt werden, der Bond also „Senior Unsecured“ ist. Es steckt allerdings eine Unsicherheit bzw. eine Standardabweichung in der Recoveryrate. Wenn die Standardabweichung der Recovery Rate eines Senior Unsecured -

Bonds 25,45 beträgt, dann hat sie folgende Auswirkung auf σ :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^s p_i(\mu_i^2 + \sigma_i^2) - \mu^2 = \begin{pmatrix} 0,02\% \cdot (109,37^2 + 0^2) + \\ 0,33\% \cdot (109,19^2 + 0^2) + \\ 5,95\% \cdot (108,66^2 + 0^2) + \\ 86,93\% \cdot (107,55^2 + 0^2) + \\ 5,30\% \cdot (102,02^2 + 0^2) + \\ 1,17\% \cdot (98,10^2 + 0^2) + \\ 0,12\% \cdot (83,64^2 + 0^2) + \\ 0,18\% \cdot (51,13^2 + 25,45^2) \end{pmatrix} - 107,09^2 = 10,12$$

Dies entspricht einer Standardabweichung von 3,18.

In allen Nicht-Ausfalls-Kategorien, ist es den Entwicklern von CreditMetrics noch nicht gelungen, die Unsicherheit, die aus der Unsicherheit der Credit Spreads innerhalb einer jeden Ratingstufe resultiert, einfließen zu lassen.

Ein weiteres Risikomaß ist, wie erwähnt, die Berechnung des Perzentils. Vor allem bei größeren Portfolios hat die Perzentilberechnung Vorteile gegenüber der Standardabweichung als Risikomaß. Bei Portfolios mit mehr als zwei Assets ist eine Simulation von Nöten, um das Perzentil zu berechnen. Bei unserem einzelnen BBB-Bond funktioniert es folgendermaßen:

Beispiel 3.6 (Fortsetzung von Beispiel 3.5):

Wenn man am 1%-Perzentil interessiert ist, dann betrachtet man die Übergangswahrscheinlichkeiten z.B. aus Tabelle 7 und startet in der letzten Reihe, also bei Ausfall. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt 0,18%, also weniger als 1%. Die Übergangswahrscheinlichkeit zu CCC beträgt 0,12%, was zusammen $0,18\% + 0,12\% = 0,30\%$ ergibt. Addiert man die Übergangswahrscheinlichkeit zu B so erhält man insgesamt 1,47%, was nun größer ist als 1%. Nun liest man den Bondwert nach einem Jahr für das B-Rating ab und somit hat man den Wert für das erste Perzentillevel gefunden. In diesem Fall beträgt er 98,10€, was 8,99€ unter dem Erwartungswert liegt.

CreditMetrics arbeitet standardmäßig mit einem Zeithorizont von einem Jahr. Die Berechnungen können auch mit einem anderen Zeithorizont durchgeführt werden, man muss dann allerdings darauf achten, dass alle zur Berechnung verwendeten Größen (Migrationsmatrizen, Forward-Zinssätze,...) den selben Zeithorizont zur Grundlage haben.

Risikoberechnung in Portfolios

Will man das Kreditrisiko für ein Portfolio ermitteln, so gestaltet sich dies schwieriger als für Einzelpositionen. Sobald mehrere Finanztitel betrachtet werden, sieht man sich dem Problem gegenüber, dass die Finanztitel in fast

allen Fällen eine Korrelation untereinander besitzen. Das heißt, es müssen die gemeinsamen Migrationswahrscheinlichkeiten, in denen die Korrelation enthalten ist, geschätzt werden. Die Verteilung der Anleihewerte erhält man ident zur Berechnung für Einzelpositionen. Hier werden zur Berechnung, anstelle der zuvor verwendeten Übergangs- und Ausfallswahrscheinlichkeiten, die gemeinsamen Migrationswahrscheinlichkeiten verwendet. Um das Kreditrisiko für ein Portfolio mit gegebener Korrelation zu ermitteln, kommen erneut entweder die Standardabweichung oder die Perzentilbetrachtung zur Anwendung. Die noch offen gebliebene Frage ist jene, nach der Schätzung der Ausfalls-Korrelation.

Ab hier folgt die Ausarbeitung [7].

Eine Möglichkeit Korrelationen zu schätzen, baut auf dem oben beschriebenen Modell von Merton auf. Um Ratingänderungen in das Modell einzubauen, kommen zu der Ausfallsschranke weitere Schranken, Z_s , mit $s \in S = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC\}$ hinzu, die Ratingveränderungen signalisieren, wie in Grafik 3.2 zu sehen. Es wird die Verteilung der normalverteilten

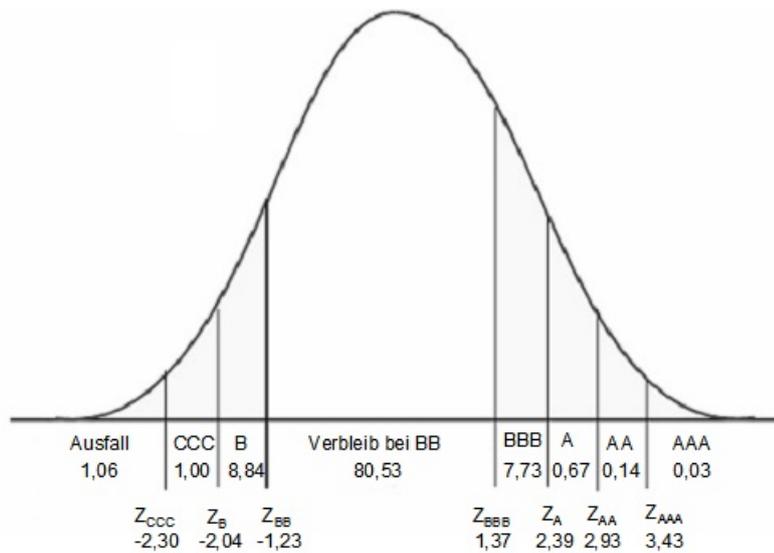


Abbildung 3.2: normalverteilte Aktienrendite eines BB-Bondes mit Ausfallsschranken Z_s , zugehörigen Schrankenwerten und Übergangswahrscheinlichkeiten

Aktienrenditen dargestellt. Die Ratingschranken ergeben sich aus der Migrationstabelle und sind in diesem Fall für eine BB-geratete Anleihe dargestellt. Die Schranken sind folgendermaßen zu verstehen: Der rechte Tail der Verteilung, also der Bereich rechts der Schranke Z_{AAA} stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass sich die Anleihe innerhalb eines Jahres vom Ausgangsrating BB auf AAA verbessert. Diese Wahrscheinlichkeit ist, laut Tabelle 1, 0.03%. Der

Teil zwischen Z_{AAA} und Z_{AA} beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Bond von BB zu AA verbessert usw. Der Bereich links der Schranke Z_{CCC} beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls. Die Schrankenwerte sind in Tabelle 8 einzusehen. Wenn p_{Def} die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass der BB-Bond ausfällt und V_{Def} den kritischen Asset-Wert bezeichnet, ab dem ein Ausfall vorliegt, dann gilt folgende Beziehung:

$$p_{Def} = P[V_t \leq V_{Def}]$$

p_{Def} bezeichnet nun also den Bereich links der Schranke Z_{CCC} in Abbildung 3.2. Da im Modell von Merton der Assetwert durch (5) gegeben ist, tritt ein Ausfall zum Zeitpunkt t ein, wenn Z_t folgendes erfüllt:

$$\begin{aligned} p_{Def} &= P\left(\frac{\ln(V_{Def}/V_0) - (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}} \geq Z_t\right) \\ &= P\left(Z_t \leq -\frac{\ln(V_0/V_{Def}) + (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

mit den normalisierten Renditen

$$\mu = \frac{\ln(V_t/V_0) - (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (18)$$

welche $N(0, 1)$ verteilt sind. Wenn Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet und

$$d_2 := \frac{\ln(V_0/V_{Def}) + (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}}$$

gilt, dann folgt aus (17), dass

$$p_{def} = P\left(Z_t \leq -\frac{\ln(V_0/V_{Def}) + (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \sim \Phi(-d_2).$$

Der kritische Wert V_{Def} , der einen Ausfall zur Folge hat, ist so, dass $Z_{CCC} = -d_2$ wobei man d_2 auch als „Distance to Default“ bezeichnet.

Geht man von normalverteilten Aktienrenditen aus, so berechnet sich die Schranke für einen Ausfall, bei einer Ausfallswahrscheinlichkeit der BB-Anleihe von $\Phi\left(\frac{Z_{CCC}}{\sigma}\right) = 1,06\%$, mit

$$Z_{CCC} = \Phi^{-1}(1,06\%) \cdot \sigma = -2,30\sigma$$

Schranke	Wert
Z_{AAA}	3.43σ
Z_{AA}	2.93σ
Z_A	2.39σ
Z_{BBB}	1.37σ
Z_{BB}	-1.23σ
Z_B	-2.04σ
Z_{CCC}	-2.30σ

Tabelle 8: Schrankenwerte für einen BB-Bond bei normalverteilter Aktienrendite

Die Schrankenwerte für eine BB-geratete Anleihe sind in Tabelle 8 zu sehen. Steht z.B. bei der Schranke Z_A der Wert von $2,39\sigma$, so bedeutet dies, dass die Schranke um das 2,39-fache der Standardabweichung vom Mittelwert entfernt liegt.

Angenommen, das Portfolio beinhaltet eine zweite Anleihe mit Ausgangsrating A. Deren Renditen seien durch μ' gegeben, die Standardabweichung der Renditen durch σ' und die Ratingschranken durch Z'_{AAA} , Z'_{AA} usw. Die Migrationswahrscheinlichkeiten dieser Anleihe sind in Tabelle 1 dargestellt. Die daraus resultierenden Werte der Migrationsschranken sind in Tabelle 9 zu sehen.

Schranke	Wert
Z'_{AAA}	$3.12\sigma'$
Z'_{AA}	$1.98\sigma'$
Z'_A	$-1.51\sigma'$
Z'_{BBB}	$-2.30\sigma'$
Z'_{BB}	$-2.72\sigma'$
Z'_B	$-3.19\sigma'$
Z'_{CCC}	$-3.24\sigma'$

Tabelle 9: Schrankenwerte für einen A-Bond bei normalverteilter Aktienrendite

Nun ist man in der Lage die gemeinsamen Migrationswahrscheinlichkeiten der beiden Anleihen zu berechnen. Dazu nimmt man an, dass die beiden Anleihen korrelieren und eine gesamte Normalverteilung besitzen. Einzig der Korrelationsparameter ρ bleibt noch zu ermitteln. Für die bivariate Normalverteilung ergibt sich folgende Kovarianzmatrix:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma\sigma' \\ \rho\sigma\sigma' & \sigma'^2 \end{pmatrix}$$

Damit kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Anleihen ihr Ausgangsrating behalten, d.h., die Rendite der BB-Anleihe fällt zwischen Z_{BB} und Z_{BBB} und die Rendite der A-Anleihe fällt zwischen Z'_A und Z'_{AA} . Wenn die beiden Anleihen also nicht unabhängig sind, ergibt sich für diese Wahrscheinlichkeit:

$$P(Z_{BB} < R < Z_{BBB}, Z'_A < R' < Z'_{AA}) = \int_{Z_{BB}}^{Z_{BBB}} \int_{Z'_A}^{Z'_{AA}} f(r, r'; \Sigma) dr' dr$$

wobei $f(\mu, \mu'; \Sigma)$ die Dichtefunktion der bivariaten Normalverteilung mit Kovarianzmatrix Σ und Mittelvektor (μ, μ') ist. Nimmt man eine Korrelation von $\rho = 0.20$ an, ergeben sich für ein Portfolio mit einer BB-Anleihe und einer A-Anleihe die 64 gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten einer Ratingänderung, die in Tabelle 10 einzusehen sind.

Rating Anleihe BB	Rating Anleihe A								
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	Total
AAA	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03
AA	0.00	0.01	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14
A	0.00	0.04	0.61	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.67
BBB	0.02	0.35	7.10	0.20	0.02	0.01	0.00	0.00	7.69
BB	0.07	1.79	73.65	4.24	0.56	0.18	0.01	0.04	80.53
B	0.00	0.08	7.80	0.79	0.13	0.05	0.00	0.01	8.87
CCC	0.00	0.01	0.85	0.11	0.02	0.01	0.00	0.00	1.00
D	0.00	0.01	0.90	0.13	0.02	0.01	0.00	0.00	1.07
Total	0.09	2.29	91.06	5.48	0.75	0.26	0.01	0.06	100

Tabelle 10: Gemeinsame Übergangs- bzw. Ausfallwahrscheinlichkeiten eines BB-Bonds und eines A-Bonds

Abschließend soll die Korrelation der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet werden. Dazu bezeichne $P_1 = P(\text{Anleihe 1 fällt aus}) = P(Def_1)$ und $P_2 = P(\text{Anleihe 2 fällt aus}) = P(Def_2)$. Wie zuvor sei deren Anleihenrendite-Korrelation durch ρ gegeben. Die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit sei $P(Def_1, Def_2) = P_{12}$. Damit kann gezeigt werden, dass die Ausfallskorrelation folgendermaßen gegeben ist

Satz 3.1:

Die Ausfallskorrelation ist durch

$$\rho(Def_1, Def_2) = \frac{P(Def_1, Def_2) - P_1 \cdot P_2}{\sqrt{P_1(1 - P_1) \cdot P_2(1 - P_2)}}$$

gegeben.

Beweis

Die Situation eines Ausfalles oder des Überlebens kann mithilfe einer Indikatorfunktion dargestellt werden

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{bei Ausfall} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $i \in 1, 2$ den Kreditnehmer angibt.

Der Ausfall trete mit Wahrscheinlichkeit P ein, kein Ausfall hat die Wahrscheinlichkeit $(1 - P)$. Der Korrelationskoeffizient ρ ist definiert durch

$$\rho(Y_1, Y_2) = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sqrt{Var(Y_1)}\sqrt{Var(Y_2)}} \quad (19)$$

wobei Cov für die Kovarianz steht und Var für die Varianz. Mithilfe des Verschiebungssatzes kann die Kovarianz geschrieben werden als

$$Cov(Y_1, Y_2) = E[Y_1 \cdot Y_2] - E[Y_1] \cdot E[Y_2]$$

und der Erwartungswert und die Varianz sind für binomialverteilte Zufallsvariablen gegeben durch

$$\begin{aligned} E[Y_i] &= P_i \\ Var(Y_i) &= P_i \cdot (1 - P_i) \end{aligned}$$

Damit lässt sich (19) schreiben als

$$\rho(Y_1, Y_2) = \frac{P_{12} - P_1 \cdot P_2}{\sqrt{P_1 \cdot (1 - P_1)}\sqrt{P_2 \cdot (1 - P_2)}}$$

□

Im Sinne von Merton erhält man $P(Def_1, Def_2)$ mittels

$$P(Def_1, Def_2) = P(V_t \leq V_{Def_1}, V_t \leq V_{Def_2}) \quad (20)$$

wobei V_1 und V_2 den Wert der Anleihen zum Zeitpunkt t bezeichnen und V_{Def_1} bzw. V_{Def_2} geben jeweils die Schranke an, die einen Ausfall der zugehörigen Anleihe zur Folge hat. Gleichung (20) kann auch geschrieben werden als

$$P(Def_1, Def_2) = P(\mu_1 \leq -d_2^1, \mu_2 \leq -d_2^2) \sim N_2(-d_2^1, -d_2^2, \rho) \quad (21)$$

wobei μ_1 und μ_2 die normalisierten Anleihenrenditen bezeichnen, die durch (18) gegeben sind und $N_2(x, y, \rho)$ steht für die bivariate Standardnormalverteilung mit Korrelationskoeffizient ρ .

4 Intensitätsbasierte Kreditrisikomodelle

Im Gegensatz zu den firmenwertbasierten Kreditrisikomodellen, bei denen der Ausfall im Zusammenhang mit dem Unternehmenswert steht, sind intensitätsbasierte Kreditrisikomodelle, in der englischsprachigen Literatur als “reduced form models” bezeichnet, dadurch charakterisiert, dass Credit Spreads, Kreditratings oder Bondpreise als Modellvariablen dienen. Diese Modelle werden deshalb als intensitätsbasiert bezeichnet, da die Ausfallswahrscheinlichkeit und die Recovery Rate - Höhe durch nichtnegative Zufallsvariablen modelliert werden, die jeweils eine eigene Intensität besitzen. Bei intensitätsbasierten Modellen ist die Ausfallszeit nicht bekannt.

Wie im vorangegangenen Kapitel schon erwähnt, spricht man bei Firmenwertmodellen von einem Ausfall, wenn mit dem Unternehmenswert die Schulden nicht mehr beglichen werden können, bzw. diese unter eine vordefinierte Schranke fallen. In der Praxis führt dies aber zu Problemen, weil meist nicht alle Assets eines Unternehmens gehandelt werden und im Falle eines Ausfalls die Prioritätenstruktur der Auszahlung an die Gläubiger meist gar nicht oder nur sehr schwer ermittelbar ist. Sollte die Prioritätenstruktur erklärt sein, so wird nach einem Ausfall ein bestimmter Prozentsatz der Verschuldung an die Gläubiger bezahlt. Obwohl diese Modelle die Auszahlungsproblematik umgehen, bleibt das Problem der nichtgehandelten Assets bestehen.

Und dann gibt es Kreditrisikomodelle, zu der die in den Abschnitten 4.1 und 4.2 beschriebenen zwei Modelle gehören, wo im Falle eines Ausfalls auch ein bestimmter Prozentsatz ausgezahlt wird, aber der Zeitpunkt des Ausfalls durch einen Asset-unabhängigen Prozess beschrieben wird. Da die Grundlage dieser Modelle ein Poissonprozess ist, beschreibt der erste Sprung die Ausfallszeit des Unternehmens. Das bedeutet, dass ein Unternehmen im betrachteten Zeitraum zu jedem Zeitpunkt ausfallen kann.

Im folgenden werden zwei intensitätsbasierte Modelle beschrieben. Das erste (von Jarrow und Turnbull) gilt als Ausgangsmodell, auf dessen Struktur weitere Modelle aufbauen. Das zweite Modell (von Jarrow, Lando und Turnbull) ist ein Modell, das Kreditratings berücksichtigt.

4.1 Das Modell von Jarrow und Turnbull

Jarrow und Turnbull haben 1995 ein Modell entwickelt, um derivative Wertpapiere (engl.: derivative securities) mit involviertem Kreditrisiko zu bepreisen. Der erste Teil dieses Kapitels soll dazu dienen, die in weiterer Folge verwendeten Größen zu definieren und die Grundlagen für das Modell von Jarrow und Turnbull darzulegen. Im zweiten Teil wird der Handel bei stetiger Zeit anhand eines 2-Perioden-Modells betrachtet. Dieses Kapitel hat

größtenteils Jarrow und Turnbull (1995) [19] als Grundlage.

4.1.1 Grundlagen

Die nachfolgenden mathematischen Grundlagen bzw. Voraussetzungen stammen aus Harrison und Pliska (1981) [15].

Der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum sei durch $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ gegeben. Des weiteren bezeichne \mathbb{Q} die Menge aller zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße. Wenn in weiterer Folge ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß benötigt wird, dann wird es immer mit Q bezeichnet, wobei $Q \in \mathbb{Q}$.

Definition 4.1:

*Ein Markt wird als **vollständig** bezeichnet, wenn die Wahrscheinlichkeiten, die die diskontierten Preisprozesse zu Martingalen machen eindeutig sind.*

Es wird angenommen, dass der zugrundeliegende Markt friktionslos ist (es existieren weder Steuern noch Transaktionskosten) mit einem Zeithorizont $[0, \tau]$. Jarrow und Turnbull setzen voraus, dass zwei Arten von Nullkuponanleihen gehandelt werden, nämlich ausfallfreie, die zum Zeitpunkt $T \geq t$ einen Euro auszahlen, und risikobehaftete, bei denen die Gefahr eines Ausfalls besteht. Sollte ein Ausfall zu einem Zeitpunkt $t \leq T$ eintreten, so zahlt die Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt T anstelle eines Euros, einen bestimmten Prozentsatz δ aus. Dieser wird als Recovery Rate bezeichnet und es wird angenommen, dass δ konstant ist und für alle Finanzinstrumente innerhalb einer Risikoklasse gleich hoch. Beide Nullkuponanleihen sind über alle Laufzeiten erhältlich. Der Preis zum Zeitpunkt t einer ausfallfreien Nullkuponanleihe, die zum Zeitpunkt T einen Euro auszahlt, wird mit $p_0(t, T)$ bezeichnet, der einer risikobehafteten Nullkuponanleihe mit $v_1(t, T)$. Beide Preise seien strikt positiv, $p_0(t, T) > 0$, $v_1(t, T) > 0$.

Wenn $r(t, T)$ den risikolosen Zinssatz zum Zeitpunkt t für eine Laufzeit bis T bezeichnet, dann ist der Preis zum Zeitpunkt t einer ausfallfreien Nullkuponanleihe durch

$$p_0(t, T) = \frac{1}{r(t, T)} \quad (22)$$

gegeben.

Um den Preis einer risikobehafteten Nullkuponanleihe anzugeben, haben Jarrow und Turnbull eine hilfs- oder hypothetische Nullkuponanleihe konstruiert. Diese Nullkuponanleihe zahlt zum Laufzeitende eine Einheit einer hypothetischen Währung aus. Diese Währung nennen Jarrow und Turnbull XYZ. Der Preis zum Zeitpunkt t dieser hypothetischen Nullkuponanleihe,

die zum Zeitpunkt T ein XYZ auszahlt sei durch $p_1(t, T)$ gegeben. Sollte bis zum Laufzeitende kein Ausfall eingetreten sein, so entspricht eine Einheit an XYZ einem Euro. Ist allerdings ein Ausfall eingetreten, so ist eine XYZ-Einheit weniger wert. Um diesen Preisunterschied zu berücksichtigen, sei durch $e_1(t)$ der Eurowert eines sofort ausgezahlten XYZs gegeben und dieser sei folgendermaßen definiert

$$e_1(t) := v_1(t, t) \quad (23)$$

Die Größe $e_1(t)$ kann also gewissermaßen als Wechselkurs verstanden werden. Sollte kein Ausfall eingetreten sein, so hat $e_1(t)$ den Wert 1, da dann der XYZ- und Euro-Wert identisch sind.

Der Preis zum Zeitpunkt t einer zuvor schon erwähnten hypothetischen Nullkuponanleihe, die zum Zeitpunkt T ein XYZ auszahlt sei definiert durch

$$p_1(t, T) := v_1(t, T)/e_1(t) \quad (24)$$

Wenn man nun Gleichung (24) umschreibt, so ergibt sich für den Wert einer risikobehafteten Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t folgende Darstellung

$$v_1(t, T) = p_1(t, T)e_1(t) \quad (25)$$

4.1.2 Handel zu diskreten Zeitpunkten

Der Einfachheit halber wird hier ein Modell mit zwei Perioden beschrieben. Dieses kann natürlich auf mehrere Perioden erweitert werden. Zuerst liegt der Fokus auf der ausfallfreien Nullkuponanleihe, dann auf der risikobehafteten Nullkuponanleihe. Beide Nullkuponanleihen können zu den Zeitpunkten $t \in \{0, 1, 2\}$ gehandelt werden.

Ausfallfreie Nullkuponanleihe

Jarrow und Turnbull haben angenommen, dass der Preisprozess der Nullkuponanleihe nur vom Kassazinssatz abhängig ist. Dieser einperiodige Kassazinssatz zum Zeitpunkt 0 ist definiert durch

$$r(0) := 1/p_0(0, 1)$$

Dieser Zinssatz kann sich nach einem Zeitschritt in zwei Richtungen entwickeln, laut Jarrow und Turnbull in den „up-Zustand“ (kurz: u) und den „down-Zustand“ (kurz: d). Die Wahrscheinlichkeit unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q , dass sich der Zinssatz in den Zustand u entwickelt sei durch π gegeben, die Wahrscheinlichkeit, dass er Zustand d annimmt

mit Wahrscheinlichkeit $1 - \pi$. In Abbildung 4.1 ist der Preisprozess einer ausfallfreien Nullkuponanleihe dargestellt. In dieser Abbildung gibt $p_0(t, T)_\omega$ mit $\omega \in \{u, d\}$ den Preis zur Zeit t einer ausfallfreien Nullkuponanleihe, die am Laufzeitende einen Euro auszahlt und sich in Zustand ω befindet. In Abbildung 4.1 wird von zwei ausfallfreien Nullkuponanleihen ausgegangen. Die erste hat eine Laufzeit von $T = 1$, hat also zum Zeitpunkt $t = 1$ den Wert 1. Die zweite Nullkuponanleihe hat eine Laufzeit von $T = 2$. Zum Zeitpunkt $t = 1$ hat diese mit Wahrscheinlichkeit π_0 den Preis $p_0(1, 2)_u$ und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \pi_0$ den Preis $p_0(1, 2)_d$. Zum Zeitpunkt $t = 2$ hat auch diese Nullkuponanleihe in beiden Fällen den Wert 1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass $p_0(1, 2)_u < p_0(1, 2)_d$ gilt. Je nach „up“ oder „down-Zustand“ sei der Zinssatz zum Zeitpunkt $t = 1$ durch $r(1)_u$ oder $r(1)_d$ gegeben. Diese sind folgendermaßen definiert

$$r(1)_u := 1/p_0(1, 2)_u \quad (26)$$

$$r(1)_d := 1/p_0(1, 2)_d \quad (27)$$

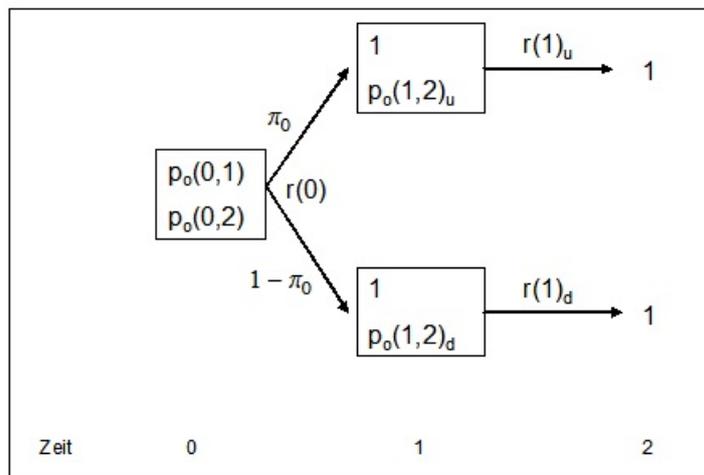
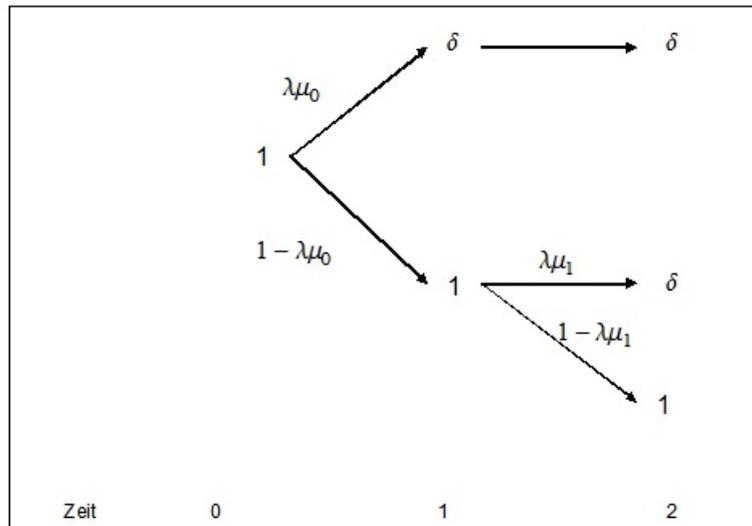


Abbildung 4.1: Preisprozess einer ausfallfreien Nullkuponanleihe im 2-Perioden-Modell

Risikobehaftete Nullkuponanleihe

Bei risikobehafteten Nullkuponanleihen wird am Ende der Laufzeit nicht immer 1 zurückgezahlt, da hier die Möglichkeit eines Ausfalls besteht. $\lambda\mu_0$ gibt die Wahrscheinlichkeit unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q an, dass zum Zeitpunkt $t = 1$ ein Ausfall eintritt. Wie schon zuvor erwähnt,

wird in diesem Fall die Recovery Rate δ ausgezahlt und die risikobehaftete Nullkuponanleihe bleibt in diesem Zustand. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - \lambda\mu_0$ fällt die Anleihe zum Zeitpunkt $t = 1$ nicht aus. Dass die Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt $t = 2$ ausfällt, ist durch die Wahrscheinlichkeit $\lambda\mu_1$ gegeben und $1 - \lambda\mu_1$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Nullkuponanleihe auch zum Zeitpunkt $t = 2$ nicht ausfällt. Damit ergibt ein Auszahlungsdiagramm der risikobehafteten Nullkuponanleihe, welches in Abbildung 4.2 zu sehen ist. Wie auch bei der ausfallfreien Nullkuponanleihe ist in Abbildung 4.3 die



Abbildungung 4.2: Auszahlungsprozess einer risikobehafteten Nullkuponanleihe im 2-Perioden-Modell

Preisentwicklung einer risikobehafteten Nullkuponanleihe in der hypothetischen Währung XYZ zu sehen, kombiniert mit der Zinsentwicklung. Da nun eben die Möglichkeit eines Ausfalls besteht, kommen zu den zwei Zuständen zum Zeitpunkt 1 in Abbildung 4.1 zwei weitere Zustände hinzu. In Abbildung 4.3 gibt $p_1(t, T)_\omega$ den Preis zum Zeitpunkt t einer risikobehafteten Nullkuponanleihe in der hypothetischen Währung XYZ, welche zum Zeitpunkt T ein XYZ auszahlt, an. ω kann zum Zeitpunkt 1 vier Zustände annehmen, nämlich $\omega \in \{ua, uk, da, dk\}$. Hier steht „ua“ für den „up-Zustand“ bei Ausfall, „uk“ für den „up-Zustand“ bei keinem Ausfall, „da“ für den „down-Zustand“ bei Ausfall und „dk“ für den „down-Zustand“ bei keinem Ausfall. $p_1(1, 2)_{uk}$ gibt also beispielsweise den Preis in XYZ einer risikobehafteten Nullkuponanleihe wider, wenn sich der Zinssatz in den „up-Zustand“ entwickelt hat und die Nullkuponanleihe keinen Ausfall erfahren hat. Wenn man nun Abbildung 4.2 und Abbildung 4.3 kombiniert, dann erhält man das Auszahlungsdiagramm einer risikobehafteten Nullkuponanleihe in Euro, wie in Abbildung 4.4 zu se-

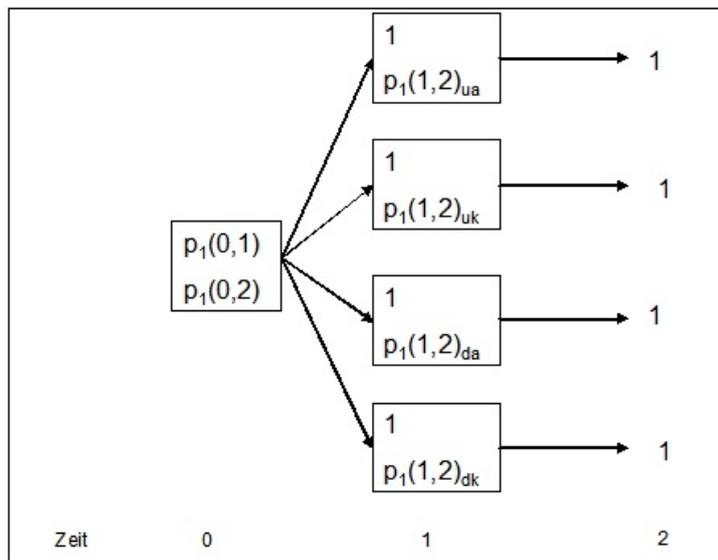


Abbildung 4.3: Preisentwicklung in XYZ einer risikobehafteten Nullkuponanleihe im 2-Perioden-Modell

hen. Alle in Abbildung 4.4 verwendeten Größen sind in obigen Abbildungen schon eingeführt und erklärt worden.

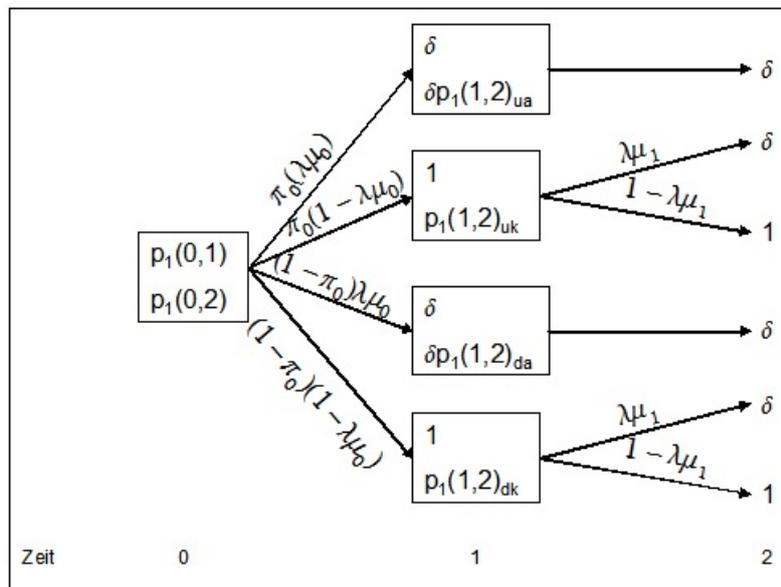


Abbildung 4.4: Preisentwicklung einer risikobehafteten Nullkuponanleihe in Euro im 2-Perioden-Modell

Arbitragefreiheit

In diesem Unterkapitel soll sichergestellt werden, dass das soeben vorgestellte zeitdiskrete Modell arbitragefrei ist.

Im vorangegangenen Kapitel sind unter anderem die Preise $p_0(t, 1)$, $p_0(t, 2)$, $v_1(t, 1)$ und $v_1(t, 2)$ aufgetreten. Harrison und Pliska haben in [15] gezeigt, dass die Arbitragefreiheit des Modells äquivalent zur Existenz von Wahrscheinlichkeiten unter \mathbb{Q} , in diesem Fall π_0 , $\lambda\mu_0$ und $\lambda\mu_1$, ist, sodass die diskontierten Preisprozesse von $p_0(t, 1)$, $p_0(t, 2)$, $v_1(t, 1)$ und $v_1(t, 2)$ Martingale unter \mathbb{Q} sind. In [15] ist durch $S = \{S_t; t = 0, \dots, T\}$ ein $K + 1$ dimensionaler stochastischer Prozess mit Komponenten S^0, S^1, \dots, S^K gegeben. S_t^K wird als Preis zur Zeit t des K -ten Finanzgutes interpretiert. Es sei ein Prozess β durch $\beta_t = (1/S_t^0)$ definiert, wobei $S_t^0 = (1 + r)^t$ mit r dem risikolosen Zinssatz sei. \mathbb{Q} bezeichne die Menge aller äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbb{Q} . Diese sei so, dass der diskontierte Preisprozess βS ein Martingal unter \mathbb{Q} sei. Der für uns wichtige Satz (Theorem 2.7, S. 228 in [15]) lautet: „Das Marktmodell enthält keine Arbitragemöglichkeit, genau dann wenn \mathbb{Q} nicht leer ist“.

Um diese Wahrscheinlichkeiten zu erhalten muss man für π_0 den risikolosen Markt betrachten und für $\lambda\mu_0$, sowie $\lambda\mu_1$ den risikobehafteten Markt. Wie in Abbildung 4.1 dargestellt, erhält man den Preis $p_0(0, 2)$ durch den diskontierten erwarteten Preis zum Zeitpunkt $t = 1$. Dieser hat dann folgende Gestalt:

$$p_0(0, 2) = [\pi_0 p_0(1, 2)_u + (1 - \pi_0) p_0(1, 2)_d] / r(0) \quad (28)$$

Um nun eine Darstellung für die Wahrscheinlichkeit π_0 zu bekommen formt man Gleichung (28) folgendermaßen um:

$$\pi_0 = [p_0(1, 2)_d - r(0)p_0(0, 2)] / [p_0(1, 2)_d - p_0(1, 2)_u] \quad (29)$$

Proposition 4.1:

π_0 existiert, ist eindeutig und stellt eine Wahrscheinlichkeit dar, also $\pi_0 \in (0, 1)$, genau dann wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

$$p_0(1, 2)_u < r(0)p_0(0, 2) < p_0(1, 2)_d \quad (30)$$

Beweis

Zuvor wurde die Annahme getroffen, dass $p_0(1, 2)_u < p_0(1, 2)_d$ gilt. Damit der Zähler in (29) nicht negativ ist, muss $r(0)p_0(0, 2) < p_0(1, 2)_d$ gelten und damit $\pi_0 < 1$ erfüllt ist, muss $r(0)p_0(0, 2) > p_0(1, 2)_u$ erfüllt sein. □

Um eine Darstellung für $\lambda\mu_0$ bzw. $\lambda\mu_1$ zu erhalten muss man, wie schon erwähnt den risikobehafteten Markt betrachten. Da der Preis zum Zeitpunkt $t = 0$ von den Preisen zum Zeitpunkt $t = 1$ abhängig ist, muss zuerst der Markt zum Zeitpunkt 1 betrachtet werden. Dieser legt die Wahrscheinlichkeit $\lambda\mu_1$ fest.

Wenn ein Ausfall eingetreten ist und der Zinssatz sich im „up-Zustand“ befindet, dann entspricht der Preis einer risikobehafteten Nullkuponanleihe in Euro, dem δ -fachen Preis einer risikobehafteten Nullkuponanleihe in XYZ. Der Preis dieser risikobehafteten Nullkuponanleihe in XYZ zum Zeitpunkt $t = 1$ mit Laufzeit $T = 2$ entspricht dem diskontierten erwarteten Preis zum Zeitpunkt $t = 2$. Wie in Abbildung 4.4 zu sehen, ergibt sich daher für diesen Fall folgende Gleichung

$$v_1(1, 2)_{ua} = \delta p_1(1, 2)_{ua} = \delta/r(1)_u \quad (31)$$

Sollte der Zinssatz im „up-Zustand“ und kein Ausfall eingetreten sein, dann hat die Nullkuponanleihe den selben Euro-Wert wie XYZ-Wert. Wie wir schon bei der ausfallfreien Nullkuponanleihe gesehen haben, entspricht dies dem diskontierten erwarteten Wert zum Zeitpunkt $t = 2$, nämlich

$$v_1(1, 2)_{uk} = p_1(1, 2)_{uk} = [\lambda\mu_1\delta + (1 - \lambda\mu_1)]/r(1)_u \quad (32)$$

Die selbe Argumentation gilt für den Fall, wenn sich der Zinssatz im „down-Zustand“ befindet. Hier resultieren folgende zwei Preise

$$v_1(1, 2)_{da} = \delta p_1(1, 2)_{da} = \delta/r(1)_d \quad (33)$$

$$v_1(1, 2)_{dk} = p_1(1, 2)_{dk} = [\lambda\mu_1\delta + (1 - \lambda\mu_1)]/r(1)_d \quad (34)$$

Diese vier Gleichungen (31) - (34) sind auch anhand Abbildung 4.4 nachzuvollziehen.

Aus den beiden Gleichungen (32) und (34) kann nun $\lambda\mu_1$ ausgedrückt werden und man erhält folgende zwei Darstellungen

$$\lambda\mu_1 = \frac{1 - p_1(1, 2)_{uk}r(1)_u}{1 - \delta} = \frac{1 - p_1(1, 2)_{dk}r(1)_d}{1 - \delta} \quad (35)$$

Wie auch schon für π_0 gesehen, gibt es für $\lambda\mu_1$ Bedingungen, damit es existiert, eindeutig ist und eine Wahrscheinlichkeit darstellt.

Proposition 4.2:

$\lambda\mu_1$ existiert, ist eindeutig und erfüllt $0 < \lambda\mu_1 < 1$ genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

$$p_1(1, 2)_{ua} = 1/r(1)_u \quad (36a)$$

$$p_1(1, 2)_{da} = 1/r(1)_d \quad (36b)$$

$$\delta/r(1)_u < p_1(1, 2)_{uk} < 1/r(1)_u \quad (36c)$$

$$\delta/r(1)_d < p_1(1, 2)_{dk} < 1/r(1)_d \quad (36d)$$

$$r(1)_u p_1(1, 2)_{uk} = r(1)_d p_1(1, 2)_{dk} \quad (36e)$$

Beweis

Die beiden Gleichungen (36a) und (36b) ergeben sich aus den Gleichungen (31) und (33), indem man durch δ dividiert.

Wenn man Gleichung 35 betrachtet, dann ist die Bedingung $0 < \lambda\mu_1 < 1$ äquivalent zu

$$0 < \frac{1 - p_1(1, 2)_{uk} r(1)_u}{1 - \delta} < 1$$

Umformen ergibt:

$$0 < 1 - p_1(1, 2)_{uk} r(1)_u < 1 - \delta$$

$$\delta < p_1(1, 2)_{uk} r(1)_u < 1$$

$$\delta/r(1)_u < p_1(1, 2)_{uk} < 1/r(1)_u$$

Somit ist Gleichung (36c) gezeigt. Äquivalentes Vorgehen liefert Gleichung (36d).

Aus der zweiten Gleichheit in Gleichung (35) folgt die letzte Bedingung (36e). \square

Bemerkung 4.1:

Die Gleichungen (36a) und (36b) zeigen, dass sich der Wert einer ausfallfreien Nullkuponanleihe in Euro und der Wert einer risikobehafteten Nullkuponanleihe in XYZ im Falle eines Ausfalls nicht unterscheiden.

Die beiden Gleichungen (36c) und (36d) geben Schranken für die Preise der Nullkuponanleihe an, wenn kein Ausfall eingetreten ist. Der Eurowert der risikobehafteten Nullkuponanleihe muss also kleiner sein als jener einer ausfallfreien Nullkuponanleihe und er muss größer sein als der Wert einer ausfallfreien Nullkuponanleihe, die mit Sicherheit δ auszahlt.

Gleichung (35) zeigt die Unabhängigkeit des Zinssatzes von der Wahrscheinlichkeit $\lambda\mu_1$ auf.

Nun ist man in der Lage die Wahrscheinlichkeit $\lambda\mu_0$ auszudrücken. Dazu betrachtet man den risikobehafteten Markt zum Zeitpunkt $t = 0$. In unserem

vereinfachten Modell gilt es nur zwei Preise zu betrachten, nämlich jenen der risikobehafteten Nullkuponanleihe mit Laufzeit $T = 1$, der mit $v_1(0, 1)$ bezeichnet wird und die risikobehaftete Nullkuponanleihe mit Laufzeit $T = 2$, deren Preis durch $v_1(0, 2)$ gegeben ist. Diese beiden Preise sind aufgrund der Gleichungen (25) und (23) gleich den Preisen der risikobehafteten Nullkuponanleihen, die am Ende XYZ auszahlen. Für die Nullkuponanleihe mit Laufzeit $T = 1$ gibt es zwei Möglichkeiten. Wenn kein Ausfall eintritt, zahlt sie 1 aus, ansonsten δ . Somit ergibt sich für den Preis $v_1(0, 1)$ folgende Darstellung:

$$v_1(0, 1) = p_1(0, 1) = [\lambda\mu_0\delta + (1 - \lambda\mu_0)]/r(0) \quad (37)$$

Für die Nullkuponanleihe mit Laufzeit $T = 2$ gibt es zum Zeitpunkt $t = 1$ vier Möglichkeiten. Die Rede ist hier wieder von den Möglichkeiten Ausfall oder kein Ausfall, wenn sich der Zinssatz im „up-Zustand“ befindet, sowie dieselben Möglichkeiten für den „down-Zustand“. Wie in Abbildung 4.4 zu sehen, ergibt sich für $v_1(0, 2)$ folgende Darstellung

$$\begin{aligned} v_1(0, 2) = p_1(0, 2) = & [\pi_0(\lambda\mu_0)\delta p_1(1, 2)_{ua} + \pi_0(1 - \lambda\mu_0)p_1(1, 2)_{uk} \\ & + (1 - \pi_0)\lambda\mu_0\delta p_1(1, 2)_{da} \\ & + (1 - \pi_0)(1 - \lambda\mu_0)p_1(1, 2)_{dk}]/r(0) \end{aligned} \quad (38)$$

Diese beiden Gleichungen ((37) und (38)) bedeuten, dass der Preis zur Zeit $t = 0$ der erwartete diskontierte Wert zur Zeit 1 ist.

Durch Umformen und Verwendung der Gleichungen (26) und (27), (29), (31) - (34) sowie (35) resultiert folgende Darstellung für $v_1(0, 2)$

$$v_1(0, 2) = p_1(0, 2) = p_0(0, 2)[\lambda\mu_0\delta + (1 - \lambda\mu_0)p_1(1, 2)_{dk}r(1)_d] \quad (39)$$

Anhand der beiden Gleichungen (37) und (39) hat man eine Darstellung für $\lambda\mu_0$, nämlich

$$\lambda\mu_0 = \frac{1 - r(0)p_1(0, 1)}{1 - \delta} = \frac{r(1)_d p_1(1, 2)_{dk} - \frac{p_1(0, 2)}{p_0(0, 2)}}{r(1)_d p_1(1, 2)_{dk} - \delta} \quad (40)$$

Proposition 4.3:

$\lambda\mu_0$ existiert, ist eindeutig und erfüllt $0 < \lambda\mu_0$ genau dann wenn folgendes gilt:

$$\delta/r(0) < p_1(0, 1) < 1/r(0) \quad (41a)$$

$$\delta p_0(0, 2) < p_1(0, 2) < p_0(0, 2)r(1)_d p_1(1, 2)_{dk} \quad (41b)$$

$$\frac{r(1)_d p_1(1, 2)_{dk} - \frac{p_1(0, 2)}{p_0(0, 2)}}{r(1)_d p_1(1, 2)_{dk} - \delta} = \frac{1 - r(0)p_1(0, 1)}{1 - \delta} \quad (41c)$$

Beweis

Um Gleichung (41a) zu zeigen betrachte man die Tatsache, dass $0 < \lambda\mu_0 < 1$ gelten muss. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}0 < \frac{1 - r(0)p_1(0, 1)}{1 - \delta} < 1 \\0 < 1 - r(0)p_1(0, 1) < 1 - \delta \\-1 < -r(0)p_1(0, 1) < -\delta \\ \frac{\delta}{r(0)} < p_1(0, 1) < \frac{1}{r(0)}\end{aligned}$$

Gleichung (41b) erhält man, wenn man in der Bedingung $0 < \lambda\mu_0 < 1$ die zweite Äquivalenz aus Gleichung (40) für $\lambda\mu_0$ einsetzt und folgendermaßen umformt:

$$\begin{aligned}0 < \frac{r(1)_{dP_1}(1, 2)_{dk} - p_1(0, 2)/p_0(0, 2)}{r(1)_{dP_1}(1, 2)_{dk} - \delta} < 1 \\0 < r(1)_{dP_1}(1, 2)_{dk} - p_1(0, 2)/p_0(0, 2) < r(1)_{dP_1}(1, 2)_{dk} - \delta \\-r(1)_{dP_1}(1, 2)_{dk} < -p_1(0, 2)/p_0(0, 2) < -\delta \\\delta p_0(0, 2) < p_1(0, 2) < r(1)_{dP_1}(1, 2)_{dk} p_0(0, 2)\end{aligned}$$

Gleichung (41c) entspricht der zweiten Äquivalenz in Gleichung (40). □

Bemerkung 4.2:

(41a) bedeutet, dass der Eurowert der risikobehafteten Nullkuponanleihe mit einer Laufzeit von $T = 1$ weniger wert ist, als am Ende der Laufzeit mit Sicherheit einen Euro zu bekommen, und mehr wert sein muss, als das δ -fache eines Euros zu erhalten.

(41b) bedeutet, dass eine risikobehaftete Nullkuponanleihe mehr wert sein muss, als mit Sicherheit δ Euro ausbezahlt zu bekommen. Und sie ist weniger wert, als mit Sicherheit $r(1)_{dP_1}(1, 2)_{dk}$ Euro ausbezahlt zu bekommen.

(41c) bedeutet, dass unter den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten der Ausfallsprozess vom ausfallfreien Zinssatzprozess unabhängig ist.

Sind nun die Bedingungen (30), (36a - 36e), sowie (41a - 41c) erfüllt, dann gibt es in diesem Modell keine Arbitragemöglichkeiten und es liegt ein vollständiger Markt vor.

Der soeben erhaltene Preis der risikobehafteten Nullkuponanleihe kann alternativ durch den Erwartungswert unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q des Wechselkurses $e_1(t)$ dargestellt werden. $\tilde{E}_t(e(\cdot))$ bezeichne den erwarteten Wechselkurs zum Zeitpunkt t unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q . In einem 2-Perioden-Modell ergeben sich folgende drei Erwartungswerte:

$$\tilde{E}_1(e(2)) = \begin{cases} \delta, & \text{wenn Ausfall zu ZP 1} \\ \lambda\mu_1\delta + (1 - \lambda\mu_1), & \text{wenn kein Ausfall zu ZP 1} \end{cases} \quad (42a)$$

$$\tilde{E}_0(e(2)) = \lambda\mu_0\delta + (1 - \lambda\mu_0)[\lambda\mu_1\delta + (1 - \lambda\mu_1)] \quad (42b)$$

$$\tilde{E}_0(e(1)) = \lambda\mu_0\delta + (1 - \lambda\mu_0) \quad (42c)$$

Die Aussage von Gleichung (42a) ist folgende: Man betrachtet die Situation zum Zeitpunkt $t = 1$. Sollte zu diesem Zeitpunkt ein Ausfall eingetreten sein, dann entspricht der erwartete Wechselkurs zum Zeitpunkt 2 der Recovery Rate δ . Wenn kein Ausfall eingetreten ist, so beträgt dieser Erwartungswert $\lambda\mu_1\delta + (1 - \lambda\mu_1)$, vergleiche hierzu (31 - 34). Gleichung (42b) gibt den erwarteten Wechselkurs zum Zeitpunkt 2 vom Zeitpunkt 0 aus betrachtet an. Dieser ergibt sich mittels der Linearkombination zum Zeitpunkt 1 auszufallen plus zum Zeitpunkt 1 nicht auszufallen mal dem erwarteten Wechselkurs zum Zeitpunkt 2. Gleichung (42c) gibt den erwarteten Wechselkurs zum Zeitpunkt 1 betrachtet vom Zeitpunkt 0 an. Alle drei Erwartungswerte sind streng kleiner 1.

Mit den Ergebnissen aus (39), (36a - 36e) und (31 - 34) ergibt sich aus (42a - 42c) folgende äquivalente Darstellung der risikobehafteten Nullkuponanleihe

$$v_1(t, T) = p_0(t, T)\tilde{E}_t(e(T)) \quad (43)$$

Gleichung (43) bedeutet, dass man den erwarteten Wechselkurs berechnen kann, wenn man die Preise der risikolosen und risikobehafteten Nullkuponanleihe kennt. Ebenso kann man damit die Wahrscheinlichkeiten $\lambda\mu_0$ und $\lambda\mu_1$ mittels (42a - 42b) berechnen. Eine weitere Erkenntnis aus dieser Darstellung ist, dass der Preis der risikolosen Nullkuponanleihe immer höher ist, als jener der risikobehafteten. Dies folgt, weil der erwartete Wechselkurs streng kleiner 1 ist, $\tilde{E}_t(e(T)) < 1$.

4.1.3 Handel bei stetiger Zeit

Anstelle des 2-Perioden-Modells ist hier ein Handel zu jedem Zeitpunkt im Zeitintervall $[0, \tau]$ möglich. Durch τ^* sei die Ausfallszeit eines Unternehmens

bezeichnet. Jarrow und Turnbull nehmen in [19] an, dass die Ausfallszeit über $[0, \infty)$ exponentialverteilt mit Parameter λ_1 sei. Es folgen nun Notationen, die in weiterer Folge benötigt werden.

Definition 4.2:

Die **ausfallfreie Forward Rate** sei gegeben durch

$$f_0(t, T) := -\partial \log p_0(t, T) / \partial T \quad (44)$$

Unter der Forward Rate versteht man den Zins, der zum Zeitpunkt t für das infinitesimale Intervall $[T, T + dt]$ ausgewählt wird.

Definition 4.3:

Der **ausfallfreie Kassazinssatz** (short rate) sei gegeben durch

$$r_0(t) := f_0(t, t) \quad (45)$$

Dies bezeichnet den Zins für das Intervall $[t, t + dt]$.

Außerdem sei ein ausfallfreies Geldmarktkonto gegeben. Mit diesem Geldmarktkonto kann zu jedem Zeitpunkt Geld zum Zinssatz $r(t)$ angelegt oder abgehoben werden. $B(t)$ sei der Wert zum Zeitpunkt t mit stetiger Verzinsung $r(t)$, wenn zum Zeitpunkt 0 ein Euro angelegt wird. Das ausfallfreie Geldmarktkonto hat damit folgende Darstellung

$$B(t) = \exp \left\{ \int_0^t r_0(s) ds \right\} \quad (46)$$

Liegt ein Ausfallrisiko zugrunde, so sind die Forwardrate und der Kassazinssatz gegeben durch

- $f_1(t, T) := -\partial \log p_1(t, T) / \partial T$
- $r_1(t) := f_1(t, t)$
- $B_1(t) = \exp \left\{ \int_0^t r_1(s) ds \right\}$

In der Darstellung ändert sich also nur der Index von 0 im ausfallfreien Fall zu 1 für den risikobehafteten Fall.

In weiterer Folge wird den Forward-Rates und dem Wechselkurs anhand von drei Annahmen eine stochastische Struktur verliehen.

Definition 4.4:

Ein Prozess $u(t)$ sei \mathcal{L}^1 in t , wenn

$$\int_0^T |u(t)| dt < \infty \text{ } Q\text{-fast sicher.}$$

Annahme 4.1:

Die ausfallfreien Forward-Rates haben folgende Darstellung

$$df_0(t, T) = \alpha_0(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t) \quad (47)$$

wobei $\alpha_0(t, T)$ und $\sigma(t, T)$ \mathcal{L}^1 in t sind. Dieser Drift, $\alpha_0(t, T)$, plus einer Zufallsänderung mit Volatilität $\sigma(t, T)$ steht für die Änderung der ausfallfreien Forward Rate in einem kleinen Zeitintervall.

In Annahme 4.1 wird durch $W(t)$ eine Brownsche Bewegung bezeichnet. $\sigma(t, T)$ sei deterministisch.

Annahme 4.2:

Risikobehaftete Forward Rates haben folgende Darstellung

$$df_1(t, T) = \begin{cases} [\alpha_1(t, T) - \theta_1(t, T)\lambda_1]dt + \sigma(t, T)dW(t) & \text{wenn } t < \tau^* \\ [\alpha_1(t, T) - \theta_1(t, T)\lambda_1]dt + \sigma(t, T)dW(t) + \theta_1(t, T) & \text{wenn } t = \tau^* \\ \alpha_1(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t) & \text{wenn } t > \tau^* \end{cases} \quad (48)$$

$\alpha_1(t, T)$ und $\theta_1(t, T)$ sind \mathcal{L}^1 in t , $\sigma(t, T)$ und $W(t)$ sind wie in Annahme 4.1. Wie auch bei den ausfallfreien Forwardraten sind die Veränderungen der risikobehafteten Forwardraten in einem kleinen Zeitintervall durch einen Drift und eine zufällige Änderung gegeben. Für die Zeit vor einem Ausfall ($t < \tau^*$) wird der Drift um die erwartete Änderung zum Zeitpunkt des Ausfalles ($\theta_1(\tau^*, T)\lambda_1$) korrigiert. Die Darstellung zum Ausfallszeitpunkt ($t = \tau^*$) unterscheidet sich zum Fall $t < \tau^*$ um den Parameter $\theta_1(t, T)$, der die tatsächliche Veränderung zum Ausfallszeitpunkt angibt. Nach dem Ausfallszeitpunkt ($t > \tau^*$) entspricht die Darstellung jener im ausfallfreien Fall (47), abgesehen von den Indizes.

Annahme 4.3:

Der Wechselkurs hat folgende Darstellung

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t < \tau^* \\ \delta & \text{wenn } t \geq \tau^* \end{cases} \quad (49)$$

Wie im diskreten Fall gilt auch hier, wenn noch kein Ausfall eingetreten ist ($t < \tau^*$), dann entspricht der Wert eines XYZ dem Wert von einem Euro. Sollte bereits ein Ausfall eingetreten sein ($t \geq \tau^*$), dann entspricht der Wert eines XYZs dem Bruchteil eines Euros, nämlich δ . Auch hier gilt $0 < \delta < 1$, wobei die Recovery Rate, die eine deterministische Größe ist, von der jeweiligen Seniorität des zugrundeliegenden Finanztitels abhängig ist.

Wie in Jarrow und Madan (1995) [18] bzw. Heath, Jarrow und Morton (1992) [16] gezeigt wurde, können für den Preis einer ausfallfreien Nullkuponanleihe, $p_0(t, T)$ und den Preis einer risikobehafteten Nullkuponanleihe, $v_1(t, T)$ folgende stochastische Prozesse hergeleitet werden.

Für den Preis der risikolosen Nullkuponanleihe ergibt sich folgender stochastischer Prozess

$$dp_0(t, T)/p_0(t, T) = [r_0(t) + \beta_0(t, T)]dt + a(t, T)dW(t) \quad (50)$$

mit

$$\beta_0(t, T) := - \int_t^T \alpha_0(t, u)du + \frac{1}{2}a^2(t, T)$$

wobei

$$a(t, T) := - \int_t^T \sigma(t, u)du$$

Der Return der ausfallfreien Nullkuponanleihe setzt sich also aus dem risikolosen Kassazinssatz $r_0(t)$, einem Risikoparameter $\beta_0(t, T)$ und einer Zufallskomponente mit Volatilität $a(t, T)$, welche am Ende der Laufzeit per Definition verschwindet, zusammen.

Mit der Definition $t- := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (t - \epsilon)$ ergibt sich für den Preis der risikobehaftete Nullkuponanleihe ein stochastischer Prozess folgender Gestalt

$$dv_1(t, T)/v_1(t-, T)$$

$$= \begin{cases} [r_1(t) + \beta(t, T) - \Theta(t, T)\lambda_1]dt + a(t, T)dW(t) & \text{wenn } t < \tau^* \\ [r_1(t) + \beta(t, T) - \Theta(t, T)\lambda_1]dt + a(t, T)dW(t) + (\delta e^{\Theta_1(t, T)} - 1) & \text{wenn } t = \tau^* \\ [r_1(t) + \beta_1(t, T)]dt + a(t, T)dW(t) & \text{wenn } t > \tau^* \end{cases} \quad (51)$$

mit

$$\beta_1(t, T) := - \int_t^T \alpha_1(t, u)du + \frac{1}{2}a^2(t, T)$$

sowie

$$\Theta_1(t, T) := - \int_t^T \theta(t, u) du$$

Beim Return der risikobehafteten Nullkuponanleihe muss zwischen der Zeit vor, zum und nach dem Ausfall unterschieden werden. Nach dem Ausfall ($t > \tau^*$) gleicht die Darstellung jener der ausfallfreien Nullkuponanleihe (50). Für die Zeit vor dem Ausfall ($t < \tau^*$) ändert sich nur der Drift, nämlich um die Veränderung zum Zeitpunkt des Ausfalls ($\Theta_1(t, T)\lambda_1$). Zum Zeitpunkt des Ausfalls ($t = \tau^*$) kommt zur Darstellung vor dem Ausfall die diskrete Änderung $\delta e^{\Theta_1(t, T)} - 1$ hinzu.

Arbitragefreiheit

Wie schon im diskreten Modell müssen, um die Arbitragefreiheit des Modells zu gewährleisten, Bedingungen gefunden werden, damit eine Wahrscheinlichkeit unter Q existiert, sodass die diskontierten Preisprozesse von $p_0(t, T)$ und $v_1(t, T)$ Martingale unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q sind. Um dieses Ergebnis zu erhalten ist eine weitere Annahme notwendig, nämlich:

Annahme 4.4:

$$(\delta e^{\Theta_1(t, T)} - 1) \neq 0 \text{ für alle } t \leq \tau^* \text{ und } T \in [0, \tau]$$

Dies bedeutet, dass sich der Wert des Returns einer risikobehafteten Nullkuponanleihe im Ausfallszeitpunkt tatsächlich verändert, nämlich um den Wert $(\delta e^{\Theta_1(t, T)} - 1)$. Diese Bedingung ist erfüllt, solange sich die Preise einer risikobehafteten Nullkuponanleihe im Ausfallszeitpunkt auch wirklich verändern. Wie in [18] erwähnt, kann gezeigt werden, dass mit Annahme 4.4 das folgende Gleichungssystem ((52a) - (52e)) eine eindeutige Lösung $(\gamma_1(t), \mu_1(t))$ besitzt, welche als Marktpreis des Risikos interpretiert wird.

$$\beta_0(t, T) + \gamma_1(t)a(t, T) = 0 \tag{52a}$$

$$\begin{aligned} r_1(t) - r_0(t) + \beta_1(t, T) + \gamma_1(t)a(t, T) - \Theta_1(t, T)\lambda_1 \\ + (\delta e^{\Theta_1(t, T)} - 1)\lambda_1\mu_1(t) = 0 \text{ wenn } t < \tau^* \end{aligned} \tag{52b}$$

$$r_1(t) - r_0(t) + \beta_1(t, T) + \gamma_1(t)a(t, T) = 0 \text{ wenn } t \geq \tau^* \tag{52c}$$

$$r_1(t) = r_0(t) + (1 - \delta)\lambda_1\mu_1(t) \text{ wenn } t < \tau^* \tag{52d}$$

$$r_1(t) = r_0(t) \text{ wenn } t \geq \tau^* \tag{52e}$$

Gleichung 52a bedeutet, dass der erwartete Return der risikolosen Nullkuponanleihe $\beta_0(t, T)$ proportional zur Volatilität $a(t, T)$ mit Proportionalitätsfaktor $\gamma_1(t)$ (Risikoprämie) ist. Diese Bedingung wird bei [16] als Standard-Arbitragefreiheit-Bedingung für den risikolosen Markt bezeichnet. Analog dazu sind die Bedingungen (52b) und (52c) die Arbitragefreiheit-Bedingungen für den risikobehafteten Markt. Wenn man die Bedingungen (52a) und (52d) verwendet, dann kann man Bedingung (52b) schreiben als

$$\beta_1(t, T) - \Theta_1(t, T)\lambda_1 = \beta_0(t, T) - \delta(e^{\Theta_1(t, T)} - 1)\lambda_1\mu_1(t) \text{ wenn } t < \tau^* \quad (53)$$

und mithilfe der Bedingungen (52a) und (52e) kann (52c) geschrieben werden als

$$\beta_1(t, T) = \beta_0(t, T) \text{ wenn } t \geq \tau^*. \quad (54)$$

Betrachtet man nun (53) so bedeutet dies, dass bevor ein Ausfall eintritt, der erwartete Return der risikobehafteten Nullkuponanleihe $(\beta_1(t, T) - \Theta_1(t, T)\lambda_1)$ gleich dem erwarteten Return der risikolosen Nullkuponanleihe plus einer Anpassung $(-\delta(e^{\Theta_1(t, T)} - 1)\lambda_1\mu_1(t))$ für das Ausfallsrisiko ist. Dieser Anpassungsfaktor ist proportional zur Änderung, die durch den Ausfall eintritt $(\delta(e^{\Theta_1(t, T)} - 1))$, wobei die Risikoprämie $\lambda_1\mu_1(t)$ der Proportionalitätsfaktor ist.

Gleichung 54 bedeutet, dass nach einem Ausfall kein Ausfallsrisiko mehr existiert und deshalb der erwartete Return der risikolosen und risikobehafteten Nullkuponanleihe identisch ist. Eine Folgerung ist, dass nach dem Ausfall der Preis der risikobehafteten Nullkuponanleihe gleich dem δ -fachen Preis der risikolosen Nullkuponanleihe ist, $v_1(t, T) = \delta p_0(t, t)$ für $t > \tau^*$. Wie in [15] gezeigt wurde, folgt aus Annahme 4.4, dass der Markt vollständig ist.

Wie im diskreten Fall strebt man auch im stetigen Fall die Unabhängigkeit des Ausfallsprozesses vom Kassazinssatz-Prozess unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q an. Dazu ist folgende Annahme von Nöten

Annahme 4.5:

Der Poisson-Ausfallsprozess ist unter dem äquivalenten Martingalmaß eine positive Konstante

$$\mu_1(t) \equiv \mu_1 > 0$$

Die Unabhängigkeit folgt, weil mit dieser Annahme die Zeit des Ausfallsprozesses unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda_1\mu_1$, welcher unabhängig vom Kassazinssatz ist.

Definition 4.5:

Die Eventualforderung X sei ein beschränkter zufälliger Cash Flow zum Zeitpunkt $T < \tau$.¹ Dann ist der **arbitragefreie Preis** der Eventualforderung zum Zeitpunkt t , der diskontierte Erwartungswert unter Q , nämlich

$$\tilde{E}_t(X/B(T))B(t) \quad (55)$$

wobei \tilde{E}_t den Erwartungswert zum Zeitpunkt t unter Q angibt und $B(t)$, wie in (46) für das risikolose Geldmarktkonto zum Zeitpunkt t steht.

Wie im diskreten Fall kann nun durch die fünf getroffenen Annahmen die Darstellung des Preises einer risikobehafteten Nullkuponanleihe vereinfacht dargestellt werden.

$$\begin{aligned} v_1(t, T) &= \tilde{E}_t(e(T)/B(T))B(t) = \tilde{E}_1(e(T))p_0(t, T) \\ &= \begin{cases} (e^{-\lambda_1\mu_1(T-t)} + \delta(1 - e^{-\lambda_1\mu_1(T-t)}))p_0(t, T) & \text{wenn } t < \tau^* \\ \delta p_0(t, T) & \text{wenn } t \geq \tau^* \end{cases} \quad (56) \end{aligned}$$

Darstellung (56) ist das zeitstetige Pendant zu Darstellung (43). Um den stochastischen Prozess des Preises einer risikobehafteten Nullkuponanleihe, $v_1(t, T)$, zu berechnen, genügt es, λ_1, μ_1 und δ zu berechnen.

Wie man bei dem Modell von Merton gesehen hat, spricht man von einem Ausfall, wenn der Firmenwert geringer ist als die Verbindlichkeiten. Auch im Merton Modell haben wir eine Darstellung für den Preis einer Nullkuponanleihe erhalten. Die Schwierigkeit besteht aber darin, dass man zur Berechnung den genauen Wert des Vermögens kennen muss, sowie dessen Volatilität. Dies stellt sich meist als sehr schwierig heraus, da die Kapitalstruktur eines Unternehmens nicht nur aus einer einzelnen Nullkuponanleihe besteht, wie im Merton-Modell angenommen. Man hat zwar wie im Modell von Jarrow und Turnbull zwei Unbekannte, allerdings sind diese bei Jarrow und Turnbull wesentlich leichter zu ermitteln, da die Struktur der Zinssätze für die jeweilige Kreditrisikoklasse als gegeben gesehen wird. Probleme, die beim Modell von Jarrow und Turnbull auftreten, sind zum Beispiel, dass alle Nullkuponanleihen dieselbe Ausfallswahrscheinlichkeit haben müssen und dass im Falle eines Ausfalls eine konstante Recovery Rate angenommen wird, deren Höhe allerdings zu ermitteln ist.

¹ Beschränkt in folgendem Sinne: Q sei das äquivalente Martingalmaß und $\tilde{E}(\cdot)$ der Erwartungswert unter Q . Dann sei $\tilde{E}([X/B(t)]^2) < +\infty$.

4.2 Das Modell von Jarrow, Lando und Turnbull

Jarrow, Lando und Turnbull haben im Jahr 1997 erstmals ein Kreditrisikomodell beschrieben, welches Kredit-Ratings berücksichtigt. Das Modell baut auf dem zuvor beschriebenen Modell von Jarrow und Turnbull (kurz: JT) auf und kann einerseits als Erweiterung und andererseits als Vertiefung gesehen werden. Die Grundlage für dieses Kapitel bildet Jarrow, Lando und Turnbull (1997) [17].

Wie bei Jarrow und Turnbull geht man von einem friktionslosen Markt, also ohne Steuern und Transaktionskosten, aus. Der betrachtete Zeithorizont sei durch $[0, \tau]$ gegeben. Die enthaltene Unsicherheit sei durch einen gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, P, \mathcal{F}_\tau, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \tau})$ gegeben. Der Handel kann sowohl diskret als auch stetig sein. Insbesondere werden wie im JT-Modell ausfallfreie Nullkuponanleihen, risikobehaftete Nullkuponanleihen und ein ausfallfreies Geldmarktkonto gehandelt.

Annahme 4.6:

Es existiere ein eindeutiges, äquivalentes Martingalmaß Q , sodass die Preise der ausfallfreien und risikobehafteten Nullkuponanleihen nach Normierung mittels Geldmarktkonto Martingale sind.

Der Preis zur Zeit t einer ausfallfreien Nullkuponanleihe, die zum Zeitpunkt T einen Euro auszahlt, wird durch $p(t, T)$ beschrieben, mit $0 \leq t \leq T \leq \tau$. Um nun eine Darstellung für diesen Preis zu bekommen, benötigt man die Forwardrate und die Spotrate. Die Forwardrate sei im diskreten Fall durch $f(t, T) := -\log(p(t, T+1)/p(t, T))$ gegeben und im stetigen Fall durch $f(t, T) := -\frac{\partial}{\partial T} \log p(t, T)$. Die ausfallfreie Spotrate sei gegeben durch $r(t) := f(t, t)$. Das Geldmarktkonto bestehe aus den Returns der Spotrate und hat somit folgende Darstellung.

- im diskreten Fall

$$B(t) = \exp \left(\sum_{i=0}^{t-1} r(i) \right) \quad (57)$$

- im stetigen Fall

$$B(t) = \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right) \quad (58)$$

Mit der Annahme eines arbitragefreien und vollständigen Marktes können die Preise einer ausfallfreien Nullkuponanleihe nun dargestellt werden als

der diskontierte Erwartungswert eines zum Zeitpunkt T sicher ausbezahlten Euros.

$$p(t, T) = \tilde{E}_t \left(\frac{B(t)}{B(T)} \right), \quad (59)$$

wobei $\tilde{E}_t(\cdot)$ in (59) den Erwartungswert zum Zeitpunkt t unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q darstellt.

Der Preis zum Zeitpunkt t der risikobehafteten Nullkuponanleihe, die zum Zeitpunkt T einen Euro auszahlt, wird mit $v(t, T)$ bezeichnet, wobei $0 \leq t \leq T$. Diese Anleihe zahlt nicht mit Sicherheit einen Euro am Ende der Laufzeit aus, sondern im Falle eines Ausfalls eine durch die Seniorität der Anleihe bestimmte Recovery Rate δ . Diese wird, wie schon im JT-Modell gesehen, als konstant gewählt. Wenn τ^* wie bei JT den Zeitpunkt des Ausfalls bezeichnet, dann hat man für den Preis der risikobehafteten Nullkuponanleihe folgende Darstellung:

$$v(t, T) = \tilde{E}_t \left(\frac{B(t)}{B(T)} (\delta 1_{\{\tau^* \leq T\}} + 1_{\{\tau^* > T\}}) \right)$$

Der Preis $v(t, T)$ entspricht also bei einem vorangegangenen Ausfall dem δ -fachen Preis der ausfallfreien Nullkuponanleihe, oder er entspricht dem Preis der ausfallfreien Nullkuponanleihe, wenn kein Ausfall eingetreten ist. $1_{\{\tau^* \leq T\}}$ bezeichnet die Indikatorfunktion des Ereignisses $\{\tau^* \leq T\}$. Im Falle eines Ausfalls, kann der Preis der risikobehafteten Nullkuponanleihe durch jenen der ausfallfreien Nullkuponanleihe ausgedrückt werden, nämlich $v(t, T) = \delta \tilde{E}_t \left(\frac{B(t)}{B(T)} \right) = \delta p(t, T)$. Dies gilt, weil nach einem Ausfall mit Sicherheit δ ausbezahlt wird.

Mit folgender Annahme, kann $v(t, T)$ unabhängig, ob ein Ausfall eintritt oder nicht, durch $p(t, T)$ ausgedrückt werden.

Annahme 4.7:

Der stochastische Prozess für die ausfallfreien Spotrates $\{r(t)_{0 \leq t \leq \tau}\}$ und der Ausfallprozess, welcher durch τ^ repräsentiert wird, seien unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q statistisch unabhängig.*

Mithilfe von Annahme 4.7 erhalten wir eine alternative Darstellung für den Preis einer risikobehafteten Nullkuponanleihe, nämlich

$$\begin{aligned} v(t, T) &= \tilde{E}_t \left(\frac{B(t)}{B(T)} \right) \tilde{E}_t (\delta 1_{\{\tau^* \leq T\}} + 1_{\{\tau^* > T\}}) \\ &= p(t, T) (\delta + (1 - \delta) Q_t(\tau^* > T)) \end{aligned} \quad (60)$$

wobei $Q_t(\tau^* > T)$ die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß angibt, dass erst nach dem Zeitpunkt T ein Ausfall eintritt.

Das heißt, der Preis der risikobehafteten Nullkuponanleihe ist gegeben, wenn man eine Verteilung für die Ausfallszeit unter dem äquivalenten Martingalmaß findet. In weiterer Folge wird diese Verteilung als der erste Zeitpunkt einer Markovkette modelliert, zu dem sie in den Zustand Ausfall wechselt. Die anderen möglichen Zustände werden durch Ratingklassen repräsentiert.

4.2.1 Handel zu diskreten Zeitpunkten

Sei $S = \{1, \dots, K\}$ ein endlicher Zustandsraum, der $K - 1$ Ratingklassen repräsentiert. 1 steht für die bestmögliche Ratingklasse, $K - 1$ für die schlechteste. Der Zustand eines eingetretenen Ausfalls wird durch K beschrieben. Die Verteilung des Ausfalls wird mittels einer zeithomogenen diskreten Markovkette $\{\eta_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ modelliert, welche durch eine $K \times K$ Übergangsmatrix Q beschrieben wird

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2K} \\ \vdots & & & \\ q_{K-1,1} & q_{K-1,2} & \cdots & q_{K-1,K} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

mit $q_{i,j} \geq 0$ für alle i, j , $i \neq j$ und $q_{ii} := 1 - \sum_{j \neq i}^K q_{ij}$ für alle i . Der Eintrag q_{ij} gibt die Wahrscheinlichkeit an, in einem Schritt von Rating i zu Rating j zu wechseln. Die Darstellung der Übergangsmatrix impliziert die Annahme, dass nach einem Ausfall kein Rating mehr vergeben wird, die Firma oder der Finanztitel also immer im Zustand K bleibt. Dies wird durch die letzte Zeile dargestellt.

Die Wahrscheinlichkeit, in n Schritten von i nach j zu wechseln, welche durch $q_{ij}(0, n)$ bezeichnet wird, erhält man durch eine n -fache Faltung der Übergangsmatrix Q , nämlich $Q_{0,n} = Q^n$. Setzt man nun die Annahme voraus, dass der Markt vollständig und arbitragefrei ist, so ist die Übergangsmatrix vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t+1$ unter dem äquivalenten Martingalmaß

gegeben durch

$$\tilde{Q}_{t,t+1} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_{11}(t, t+1) & \tilde{q}_{12}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{1K}(t, t+1) \\ \tilde{q}_{21}(t, t+1) & \tilde{q}_{22}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{2K}(t, t+1) \\ \vdots & & & \\ \tilde{q}_{K-1,1}(t, t+1) & \tilde{q}_{K-1,2}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{K-1,K}(t, t+1) \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

mit $\tilde{q}_{ij}(t, t+1) \geq 0$ für alle i, j , $i \neq j$ und $\tilde{q}_{ii}(t, t+1) := 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \tilde{q}_{ij}(t, t+1)$ und $\tilde{q}_{ij}(t, t+1) > 0$ genau dann wenn $q_{ij} > 0$ für $0 \leq t \leq \tau - 1$. Diese Übergangswahrscheinlichkeiten können von der gesamten Vergangenheit bis zum Zeitpunkt t abhängig sein. Deshalb ist die Übergangsmatrix unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß (61) nicht unbedingt ein Markovprozess. Um mit diesen Wahrscheinlichkeiten in der Praxis Ergebnisse zu erhalten, haben Jarrow, Lando und Turnbull eine weitere etwas einschränkende Annahme getroffen.

Annahme 4.8:

Die Anpassungen der Risikoprämie seien derart, dass der Ratingprozess unter dem äquivalenten Martingalmaß folgende Bedingungen erfüllt

$$\tilde{q}_{ij}(t, t+1) = \pi_i(t)q_{ij} \text{ für alle } i, j, i \neq j$$

mit

$\pi_i(t)$ sei eine deterministische Funktion der Zeit für $1 \leq i \leq K$

mit $\pi_K(t) = 1$, sodass

$\tilde{q}_{ij}(t, t+1) \geq 0$ für alle $i, j, i \neq j$ und

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \tilde{q}_{ij}(t, t+1) \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, K$$

$\pi_i(t)$ wird als Risikoprämie interpretiert. Die Annahme ist deshalb etwas restriktiv, da die Risikoprämie nur vom Ausgangsrating abhängt. So hat eine Ratingänderung von i zu 1 dieselbe Risikoprämie wie eine Änderung von i zu K .

In Matrixform hat die Bedingung der obigen Annahme folgende Gestalt

$$\tilde{Q}_{t,t+1} - I = \Pi(t)[Q - I] \quad (62)$$

wobei I die $K \times K$ Identitätsmatrix bezeichnet und $\Pi(t) = \text{diag}(\pi_1(t), \dots, \pi_{K-1}(t), 1)$ eine $K \times K$ Diagonalmatrix.

Da man nun eine Möglichkeit hat, die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten in die aktuellen Wahrscheinlichkeiten umzurechnen, ist man in der Lage die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls nach dem Zeitpunkt T unter Q zu berechnen. Dies geschieht mithilfe folgenden Lemmas

Lemma 4.1:

Das Unternehmen befinde sich zum Zeitpunkt t in der Ratingstufe i , was durch $\eta_t = i$ gekennzeichnet wird. $\tau^ = \inf\{s \geq t : \eta_s = K\}$ bezeichne den Zeitpunkt des ersten Ausfalls. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Ausfall nach dem Zeitpunkt T eintritt gegeben durch*

$$Q_t^i(\tau^* > T) = \sum_{j \neq K} \tilde{q}_{ij}(t, T) = 1 - \tilde{q}_{iK}(t, T)$$

Beweis

Durch die getroffene Annahme, dass ein Unternehmen nach einem Ausfall immer den Status K behält, ist das Ereignis $(\tau^* > T)$ äquivalent dazu, dass η_t zum Zeitpunkt T den Wert K nicht annimmt, wenn es zum Zeitpunkt t in i startet. Die Matrix $\tilde{Q}_{t,T} = \tilde{Q}_{t,t+1} \tilde{Q}_{t+1,t+2} \cdots \tilde{Q}_{T-1,T}$ liefert das gewünschte Ergebnis. □

Der Exponent i in obigem Lemma gibt die Abhängigkeit von der Start-Ratingklasse an.

Mithilfe dieses Lemmas kann man den in Gleichung (60) ermittelten Preis einer risikobehafteten Nullkuponanleihe umschreiben. $v^i(t, T)$ bezeichne den Preis zum Zeitpunkt t einer risikobehafteten Nullkuponanleihe, die von einem Unternehmen mit Rating i herausgegeben wurde. Dieser Preis ist gegeben durch

$$v^i(t, T) = p(t, T)(\delta + (1 - \delta)Q_t^i(\tau^* > T)) \tag{63}$$

Die Forwardrate für eine Nullkuponanleihe in Ratingklasse i sei durch

$$f^i(t, T) := -\log(v^i(t, T + 1)/v^i(t, T))$$

gegeben. Damit erhält man den Renditeaufschlag („Spread“) mittels Gleichung (63) folgendermaßen

$$f^i(t, T) = -\log \left(\frac{p(t, T + 1)(\delta + (1 - \delta)\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T + 1))}{p(t, T)(\delta + (1 - \delta)\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T))} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\log\left(\frac{p(t, T+1)}{p(t, T)}\right) - (\log(\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T+1)) - \log(\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T))) \\
&= f(t, T) + 1_{\{\tau^* > t\}} \log\left(\frac{[\delta + (1-\delta)Q_t^i(\tau^* > T)]}{[\delta + (1-\delta)Q_t^i(\tau^* > T+1)]}\right) \\
&\Rightarrow f^i(t, T) - f(t, T) = 1_{\{\tau^* > t\}} \log\left(\frac{[\delta + (1-\delta)Q_t^i(\tau^* > T)]}{[\delta + (1-\delta)Q_t^i(\tau^* > T+1)]}\right) \quad (64)
\end{aligned}$$

Anhand von Gleichung (64) ist zu erkennen, dass die Renditeaufschläge außer bei einem Ausfall immer strikt positiv sind (Es muss gelten: $Q_t^i(\tau^* > T+1) < Q_t^i(\tau^* > T)$, denn je später der Zeitpunkt T gewählt wird, desto unwahrscheinlicher wird es, dass erst nach T ein Ausfall eintritt.). Für $T = t$ erhält man aus Gleichung (64) folgendermaßen die Spotrate

$$f^i(t, t) = f(t, t) + 1_{\{\tau^* > t\}} \log\left(\frac{[\delta + (1-\delta)Q_t^i(\tau^* > t)]}{[\delta + (1-\delta)Q_t^i(\tau^* > t+1)]}\right)$$

mit Lemma 4.1 ($Q_t^i(\tau^* > T) = 1 - \tilde{q}_{iK}(t, T)$) folgt

$$r^i(t) = r(t) + 1_{\{\tau^* > t\}} \log\left(\frac{[\delta + (1-\delta)(1 - \tilde{q}_{iK}(t, t))]}{[\delta + (1-\delta)(1 - \tilde{q}_{iK}(t, t+1))]} \right)$$

Da $\tilde{q}_{iK}(t, t) = 0$ gelten muss, für alle $i \neq K$, ergibt sich für die Spotrate

$$r^i(t) = r(t) + 1_{\{\tau^* > t\}} \log(1/[1 - (1-\delta)\tilde{q}_{iK}(t, t+1)]) \quad (65)$$

Für praktische Anwendungen ist es notwendig, die Ratingveränderungen bei Nullkuponanleihen und Optionen zu hedgen. Dazu sei der zufällige Payoff einer risikobehafteten Forderung zur Zeit T mit C_T bezeichnet, dessen Preis zur Zeit t mittels

$$C_t = \tilde{E}_t(C_T/B(T))B(t) \quad (66)$$

gegeben ist. Wenn man sich als Beispiel eine europäische Call-Option mit Ausübungszeitpunkt T und Ausübungspreis X auf eine risikobehaftete Nullkuponanleihe, die zum Zeitpunkt $M \geq T$ ausläuft, betrachtet, dann hat diese Option den zufälligen Payoff $C_T = \max[v(T, M) - X, 0]$, wobei der Preis zur Zeit t durch die Gleichung (66) gegeben ist. Das bedeutet, dass sich die Bewertung durch eine Erwartungswertberechnung bewerkstelligen lässt.

Um die Veränderungen im Rating zu hedgen, reicht es laut Jarrow, Lando und Turnbull die Entwicklung der Forwardrates für die risikolosen und risikobehafteten Nullkuponanleihen zu betrachten. Dazu sei folgende Hilfsfunktion definiert:

$$\phi(t, T, i) = \begin{cases} \log \left(\frac{[\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_i^i(\tau^* > T)]}{[\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_i^i(\tau^* > T+1)]} \right) & \text{für } i = 1, \dots, K-1 \\ 0 & \text{für } i = K \end{cases}$$

Wenn das betrachtete Unternehmen zum Zeitpunkt t das Rating i besitzt, dann hat die Veränderung der Forwardrate über $[t, t+1]$ mithilfe der Gleichung (64) folgende Gestalt

$$f^{\eta_{t+1}}(t+1, T) - f^i(t, T) = [f(t+1, T) - f(t, T)] + [\phi(t+1, T, \eta_{t+1}) - \phi(t, T, i)]$$

mit $\eta_{t+1} \in \{1, 2, \dots, K\}$ und den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $\tilde{q}_{i\eta_{t+1}}(t, t+1)$. Diese Veränderung setzt sich aus einem Teil, der aus der Veränderung der risikolosen Forwardrates besteht ($f(t+1, T) - f(t, T)$) und einem Teil, der das Risiko der Ratingänderung beinhaltet ($\phi(t+1, T, \eta_{t+1}) - \phi(t, T, i)$), zusammen. Da das Risiko des zweiten Teils maximal K verschiedene Zustände annehmen kann, benötigt man K risikobehaftete Anleihen. Der erste Teil wird laut Jarrow, Lando und Turnbull so gehedged, wie es in der Literatur zu Zinsoptionen beschrieben ist.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird eine Rekursion zur Ermittlung der Risikoprämie $\pi_i(t)$ vorgestellt, sodass die theoretische Bepreisungsformel (63) mit der Struktur der risikobehafteten Nullkuponanleihen zusammenpasst. Wenn man genaue Werte oder Schätzer sowohl für die beiden Preise $v^i(t, T)$ und $p(t, T)$ als auch für die Recovery Rate besitzt, so ist man in der Lage, mithilfe von Gleichung (63) für den Zeitpunkt 0 die Wahrscheinlichkeit $Q_0^i(\tau^* \leq T)$ folgendermaßen zu berechnen

$$Q_0^i(\tau^* \leq T) = \frac{p(0, T) - v^i(0, T)}{p(0, T)(1 - \delta)} \text{ für } i = 1, \dots, K \text{ und } T = 1, 2, \dots, \tau \quad (67)$$

Mit Darstellung (67) kann mittels einer Rekursion die Risikoprämie $\pi_i(t)$, $i = 1, \dots, K-1$ für alle t berechnet werden:

- Mit gegebener Übergangsmatrix Q gilt mittels (62):

$$\tilde{Q}_{0,1} = I + \Pi(0)(Q - I)$$

- Damit und mit Lemma 4.1 gilt

$$Q_0^i(\tau^* \leq 1) = \pi_i(0)q_{iK}$$

$$\text{denn: } Q_0^i(\tau^* \leq 1) = 1 - Q_0^i(\tau^* > 1) = \tilde{q}_{iK}(0, 1) = \pi_i(0)q_{iK}$$

- Dieses Ergebnis eingesetzt in (67) ergibt

$$\pi_i(0) = \frac{p(0, 1) - v^i(0, 1)}{p(0, 1)(1 - \delta)q_{iK}} \quad (68)$$

- Das wiederum ermöglicht die Berechnung von $\tilde{Q}_{0,1}$
- Gegeben Q und $\tilde{Q}_{0,t}$ vom Schritt zuvor bekommt man

$$\tilde{Q}_{0,t+1} = \tilde{Q}_{0,t}[I + \Pi(t)(Q - I)]$$

- Mithilfe von Lemma 4.1 erhält man dadurch

$$Q_0^i(\tau^* \leq t + 1) = \sum_{j=1}^K \tilde{q}_{ij}(0, t)\pi_j(t)q_{jK}$$

- In Matrixform sieht dies mittels Gleichung (67) folgendermaßen aus

$$\tilde{Q}_{0,t} \begin{bmatrix} \pi_1(t)q_{1K} \\ \vdots \\ \pi_K(t)q_{KK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p(0,t+1)-v^1(0,t+1)}{p(0,t+1)(1-\delta)} \\ \vdots \\ \frac{p(0,t+1)-v^K(0,t+1)}{p(0,t+1)(1-\delta)} \end{bmatrix}$$

- Wenn $\tilde{Q}_{0,t}$, deren Einträge $\tilde{q}_{ij}(0, t)$ sind, invertierbar ist, dann ist die Lösung der Matrixgleichung durch folgende Gleichung gegeben und somit eine Berechnung für die Risikoprämie gefunden

$$\pi_i(t) = \sum_{j=1}^K \tilde{q}_{ij}^{-1}(0, t) \frac{p(0, t + 1) - v^i(0, t + 1)}{p(0, t + 1)(1 - \delta)q_{iK}} \quad (69)$$

4.2.2 Handel bei stetiger Zeit

In diesem Kapitel soll die Verteilung des Ausfallszeitpunktes bei Handel in stetiger Zeit ermittelt werden. Wie im diskreten Fall geht man von einer Menge $\{1, \dots, K\}$ verschiedener Ratingklassen aus. Nun kommt aber eine zeithomogene, stetige Markovkette $\{\eta_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ zum Einsatz, welche durch die $K \times K$ Generatormatrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1,K-1} & \lambda_{1K} \\ \lambda_{21} & \lambda_2 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2,K-1} & \lambda_{2K} \\ \vdots & & & & & \\ \lambda_{K-1,1} & \lambda_{K-1,2} & \lambda_{K-1,3} & \cdots & \lambda_{K-1} & \lambda_{K-1,K} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (70)$$

bestimmt ist. Es gilt $\lambda_{ij} \geq 0$ für alle $i, j, i \neq j$ und

$$\lambda_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \lambda_{ij} \text{ für } i = 1, \dots, K$$

Diese Eigenschaft, dass sich die Zeilensumme der Generatormatrix zu 0 summiert, ist bei einem diskreten Zustandsraum immer gegeben. λ_{ij} gibt die Übergangsrate von Ratingstufe i zu Ratingstufe j an. Die Einträge der letzten Zeile sind deshalb 0, weil wir annehmen, dass der Ausfallszustand absorbierend ist, also nach einem Ausfall kein Rating mehr vergeben wird. Mithilfe des Limes aus dem diskreten Fall erhält man aus der Generatormatrix die $K \times K$ Übergangsmatrix für die Markovkette η . Dazu unterteilt man 1 in n gleich große Intervalle der Länge $1/n$. Sei nun $[I + \Lambda/n]$ die Übergangsmatrix eines Teilintervalls. Dann erhält man $Q = [I + \Lambda/n]^n$ und für $n \rightarrow \infty$ erhält man $Q \rightarrow \exp(\Lambda)$. Somit ergibt sich folgende Darstellung der Übergangsmatrix für η

$$Q(t) = \exp(t\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (t\Lambda)^k / k!$$

Aufgrund des Zusammenhanges der Generatormatrix Λ und der Übergangsmatrix Q ergibt sich folgendes Lemma

Lemma 4.2:

Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:

1. $\sum_{j \geq k} q_{ij}(t)$ ist eine nichtfallende Funktion von i für jedes fixe k und t .
2. $\sum_{j \geq k} \lambda_{ij} \leq \sum_{j \geq k} \lambda_{i+1,j}$ für alle i, k sodass $k \neq i + 1$.

Damit ist sichergestellt, dass schlechtere Ratingklassen ein höheres Risiko aufweisen.

Unter dem äquivalenten Martingalmaß sei die Generatormatrix durch

$$\tilde{\Lambda}(t) := U(t)\Lambda$$

gegeben, mit $U(t) = \text{diag}(\mu_1(t), \dots, \mu_{K-1}(t), 1)$, einer $K \times K$ Diagonalmatrix. Die ersten $K-1$ Einträge dieser Diagonalmatrix seien strikt positive deterministische Funktionen von t , die folgende Bedingung erfüllen

$$\int_0^T \mu_i(t) dt < \infty \text{ für } i = 1, \dots, K - 1.$$

Die Einträge der Diagonalmatrix $(\mu_1(t), \dots, \mu_{K-1}(t), 1)$ werden ähnlich wie im diskreten Fall als Risikoprämien interpretiert.

Die Übergangsmatrix von t zu T unter dem äquivalenten Martingalmaß, $\tilde{Q}(t, T)$, ist als Lösung der Kolmogorov Differentialgleichungen gegeben

$$\frac{\partial \tilde{Q}(t, T)}{\partial t} = -\Lambda(t)\tilde{Q}(t, T) \text{ und} \quad (71a)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}(t, T)}{\partial T} = \tilde{Q}(t, T)\tilde{\Lambda}(T) \text{ mit der Anfangsbedingung} \quad (71b)$$

$$\tilde{Q}(t, t) = I. \quad (71c)$$

Wie auch im diskreten Fall gibt es eine Möglichkeit die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, in einer vorgegebenen Ratingklasse erst nach dem Zeitpunkt T auszufallen. Der Beweis des folgenden Lemmas ist äquivalent zu dem im diskreten Fall (Lemma 4.1) und wird hier nicht angegeben.

Lemma 4.3:

Ein Unternehmen befinde sich zum Zeitpunkt t in der Ratingklasse i , gekennzeichnet durch $\eta_t = i$ und es sei $\tau^ = \inf\{s \geq t : \eta_s = K\}$. Dann gilt*

$$\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T) = \sum_{j \neq K} \tilde{q}_{ij}(t, T) = 1 - \tilde{q}_{iK}(t, T)$$

wobei $\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T)$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass ein Unternehmen, das sich in Ratingklasse i befindet, nicht ausfällt, bzw. dass der Ausfall erst nach dem Ende des betrachteten Zeitraums (T) eintritt und $\tilde{q}_{ij}(t, T)$ den (i, j) -ten Eintrag der Matrix $\tilde{Q}(t, T)$ bezeichnet.

Mit Lemma 4.3 ist man in der Lage den Preis der risikobehafteten Nullkuponanleihen wie in (63) anzugeben, nämlich

$$v^i(t, T) = p(t, T)(\delta + (1 - \delta)Q_t^i(\tau^* > T)). \quad (72)$$

Wenn die Forwardrate für die risikobehaftete Nullkuponanleihe durch $f^i(t, T) := \frac{\partial}{\partial T} \log v^i(t, T)$ gegeben ist, dann ergibt sich daraus mit Gleichung (72)

$$f^i(t, T) = f(t, T) - 1_{\{\tau^* > t\}} \left[\frac{(1 - \delta) \frac{\partial}{\partial T} Q_t^i(\tau^* > T)}{\delta + (1 - \delta)Q_t^i(\tau^* > T)} \right]. \quad (73)$$

Für $T \rightarrow t$ erhält man die Spotrate, welche durch

$$r^i(t) = r(t) + (1 - \delta)\lambda_{iK}\mu_i(t)1_{\{\tau^* > t\}}$$

gegeben ist, denn es gilt: $\partial Q_t^i(\tau^* > T)/\partial T = -\partial Q_t^i(\tau^* \leq T)/\partial T = -\lambda_{iK}\mu_i(t)$. Das bedeutet, dass sich die risikobehaftete Spotrate von der risikolosen Spotrate durch einen Kreditrisikospread von $(1-\delta)\lambda_{iK}\mu_i(t)$ unterscheidet. δ bezeichnet wie zuvor die Recovery Rate und $\lambda_{iK}\mu_i(t)$ ist die Ausfallswahrscheinlichkeit unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß.

Ein Ansatz für das Hedgen von Ratingveränderungen wird in [17] beschrieben. Um dieses Kapitel abzuschließen, muss noch die Schätzung der Parameter der Formel (73) behandelt werden. Dazu muss einerseits ein Schätzer für die risikolose Forwardrate ($f(t, T)$) gefunden werden und andererseits ein Schätzer für den Kreditrisiko Spread ($f^i(t, T) - f(t, T)$).

Wie in Amin und Morton (1993) [1] nachzulesen, wird die risikolose Forwardrate mittels zwei Schritten geschätzt. Im ersten Schritt wird die Zinstrukturkurve geschätzt, indem man anhand der Levenberg-Marquardt Prozedur die implizierte Volatilität des Vortages fixiert. Dies ist ein effizientes numerisches Verfahren, um den kleinsten Quadrate-Schätzer zu finden. Im zweiten Schritt werden die aus Schritt 1 erhaltenen Forwardraten fixiert und die implizierte Volatilität wird variiert. Auch hier wird die Levenberg-Marquardt Prozedur verwendet.

Um die Parameter des Ausfallsprozesses zu schätzen, benötigt man einen Schätzer für die Recovery Rate sowie einen Schätzer für die Generatormatrix $\tilde{\Lambda}$.

Der Schätzer der Recovery Rate hängt von der Seniorität ab und kann entweder aus historischen Ausfallsdaten oder implizit geschätzt werden. Bei der impliziten Schätzung wird der theoretische Wert einem Marktpreis einer gehandelten derivativen Sicherheit gleichgesetzt und dann invertiert. In Tabelle 11, die aus [17] stammt und welche Jarrow, Lando und Turnbull aus Moody's Special Report (1995) „Corporate Bond Defaults and Default Rates“ übernommen haben, sind historische Recovery Rates dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass je höher die Seniorität des Schuldners, umso höher ist die Recovery Rate.

Preise in \$	1974 - 91	1991	1990	1989	1988	1987	1986	1985	1984
Senior Secured	67.13	60.81	33.72	74.63	76.29	87.78	64.30	76.04	59.02
Senior Unsecured	46.53	45.50	35.29	43.26	44.57	67.39	33.65	69.97	64.56
Senior Subordinated	32.10	33.68	26.47	40.27	39.85	47.73	28.84	32.87	45.69
Subordinated	26.44	16.58	23.39	25.95	35.03	37.75	21.14	33.93	39.32
Junior Subordinated	17.95	3.63	18.86	17.50	55.00				
gewichteter Durchschnitt	39.22	32.65	28.17	39.11	44.29	72.57	35.76	40.29	48.83
	1983	1982	1981	1980	1979	1978	1977	1976	1975
Senior Secured		72.50					35.08		32.84
Senior Unsecured	67.73	38.98	12.00	44.02		60.00	29.93		25.33
Senior Subordinated		44.19					40.50		
Subordinated	40.18	36.48	40.00	40.63	34.50	67.00	35.00		5.81
Junior Subordinated									
gewichteter Durchschnitt	50.24	39.24	30.49	40.98	34.50	61.88	32.01	27.76	5.81

Tabelle 11: Geschätzte Recovery Rates aus den Jahren 1974 - 1991. Übernommen aus Moody's Special Report (1995). Die Angaben sind in US-Dollar Preise

Wie bei der Recovery Rate kann auch die Generatormatrix $\tilde{\Lambda}$ entweder aus historischen Daten oder implizit geschätzt werden. Eine implizite Schätzung verwendet aktuelle Marktpreise von risikobehafteten Nullkuponanleihen. Wenn davon auszugehen ist, dass historische Ratingveränderungen die aktuelle Situation nicht widerspiegeln, dann ist die implizite Schätzung der historischen Schätzung vorzuziehen. Wie aus der Darstellung (70) zu erkennen ist, benötigt man bei der impliziten Schätzung $(K - 1) \times (K - 1)$ Parameter. Da dies einen sehr großen Aufwand bedeutet, ist eine Möglichkeit die Schätzung zu erleichtern, die Generatormatrix unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß in die empirische Generatormatrix und eine Risikoprämie zu zerlegen. Die historische Schätzung basiert auf den Preisen der Nullkuponanleihen und verwendet die Zerlegung der Generatormatrix unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß in die Generatormatrix Λ und die Risikoprämie $(\mu_1(t), \dots, \mu_{K-1}(t))$. Hat man über die Periode $[0, T]$ im Markovketten Modell die exakten Zeitpunkte der Ratingänderungen und Ausfälle, so kann man aus diesen historischen Beobachtungen die Generatormatrix Λ schätzen. Ein Schätzer für die Nicht-Diagonalelemente von Λ ist gegeben durch

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{N_{ij}(T)}{\int_0^T Y_i(s) ds}$$

wobei $N_{ij}(T)$ die Gesamtanzahl der Ratingänderungen von i zu j über die Periode $[0, T]$ angibt und $Y_i(s)$ die Anzahl der Unternehmen mit Rating i zur Zeit s . Jarrow, Lando und Turnbull haben in [17] nicht die exakten Zeitpunkte der Ratingänderung zur Verfügung, sondern sie verwenden Standard & Poor's Daten. Diese beinhalten die Schätzer der 1-Jahres Übergangswahrscheinlichkeiten. Mit diesen Daten will man dann einen Schätzer für $\hat{Q}(t)$ für jedes t erhalten. Wenn $\hat{Q}(1)$ gegeben ist, dann kann mit der zusätzlichen Annahme, dass ein Unternehmen innerhalb eines Jahres nicht mehr als eine Ratingänderung erfährt, wie in [17] gezeigt werden, dass mit $\lambda_1 \neq 0$ für $i = 1, \dots, K - 1$ gilt:

$$\exp(\Lambda) \approx \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \frac{\lambda_{12}(e^{\lambda_1}-1)}{\lambda_1} & \dots & \frac{\lambda_{1K}(e^{\lambda_1}-1)}{\lambda_1} \\ \frac{\lambda_{21}(e^{\lambda_2}-1)}{\lambda_2} & e^{\lambda_2} & \dots & \frac{\lambda_{2K}(e^{\lambda_2}-1)}{\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\lambda_{K-1,1}(e^{\lambda_{K-1}}-1)}{\lambda_{K-1}} & \frac{\lambda_{K-1,2}(e^{\lambda_{K-1}}-1)}{\lambda_{K-1}} & \dots & \frac{\lambda_{K-1,K}(e^{\lambda_{K-1}}-1)}{\lambda_{K-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Wenn man nun die rechte Seite der Gleichung (74) mit $\hat{Q}(1)$ gleichsetzt so

erhält man

$$\hat{q}_{ii} = e^{\hat{\lambda}_i} \text{ für } i = 1, \dots, K - 1$$

$$\hat{q}_{ij} = \hat{\lambda}_{ij}(e^{\hat{\lambda}_i} - 1)/\hat{\lambda}_i \text{ für } i \neq j \text{ und } i, j = 1, \dots, K - 1$$

Daraus resultiert der Schätzer für Λ , nämlich

$$\hat{\lambda}_i = \log(\hat{q}_{ii}) \text{ für } i = 1, \dots, K - 1$$

$$\hat{\lambda}_{ij} = \hat{q}_{ij} \log(\hat{q}_{ii})/[\hat{q}_{ii} - 1] \text{ für } i \neq j \text{ und } i, j = 1, \dots, K - 1.$$

Jarrow, Lando und Turnbull gehen in [17] von einer einjährigen Übergangsmatrix von Standard & Poor's aus dem Jahre 1993 aus. Diese beinhaltet die durchschnittlichen Übergangsraten aus den Jahren 1981 - 1991.

Ausgangs- rating	Folgerating								
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	NR
AAA	87.46	9.45	0.77	0.19	0.29	0.00	0.00	0.00	1.83
AA	0.84	87.87	7.29	0.97	0.28	0.28	0.00	0.00	2.46
A	0.09	2.82	86.05	6.28	0.98	0.44	0.04	0.09	3.24
BBB	0.06	0.41	6.20	79.68	6.09	1.51	0.17	0.43	5.45
BB	0.04	0.20	0.71	6.49	70.12	9.42	1.15	2.18	9.70
B	0.00	0.17	0.27	0.58	4.51	71.96	3.80	5.98	12.72
CCC	0.00	0.00	1.02	1.02	1.79	6.65	57.29	20.46	11.76

Tabelle 12: Einjährige durchschnittliche Migrationsmatrix für die Jahre 1981 - 1991 von Standard and Poor's. Angaben in %

Das Problem, dem man hier gegenübersteht ist jenes, dass auch alle Schuldner berücksichtigt werden, die im Folgejahr nicht gerated werden (Spalte „NR“). Es gibt keine Information darüber, ob diese in den Folgejahren wieder ein Rating bekommen oder eventuell sogar ausfallen. Deshalb haben Jarrow, Lando und Turnbull die in Tabelle 12 angeführte Migrationsmatrix mittels

$$q_{ij} = \frac{\text{Anzahl der Firmen, die von } i \text{ nach } j \text{ gehen}}{\text{Anzahl der Firmen, die zu einem von NR unterschiedlichen Rating gehen}}$$

modifiziert und daraus resultiert eine Übergangsmatrix, wie in Tabelle 13 dargestellt.

Wendet man nun die oben beschriebene Vorgehensweise an, so erhält man einen Schätzer $\hat{\Lambda}$ für die Generatormatrix. Diese ist in Tabelle 14 dargestellt.

Ausgangs- rating	Folgerating							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	89.10	9.63	0.78	0.19	0.30	0.00	0.00	0.00
AA	0.86	90.10	7.47	0.99	0.29	0.29	0.00	0.00
A	0.09	2.91	88.94	6.49	1.01	0.45	0.00	0.09
BBB	0.06	0.43	6.56	84.27	6.44	1.60	0.18	0.45
BB	0.04	0.22	0.79	7.19	77.64	10.43	1.27	2.41
B	0.00	0.19	0.31	0.66	5.17	82.46	4.35	6.85
CCC	0.00	0.00	1.16	1.16	2.03	7.54	64.93	23.19
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100

Tabelle 13: Modifizierte einjährige durchschnittliche Migrationsmatrix für die Jahre 1981 - 1991 von Standard and Poor's. Angaben in %

Ausgangs- rating	Folgerating							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0.1154	0.1019	0.0083	0.0020	0.0031	0	0	0
AA	0.0091	-0.1043	0.0787	0.0105	0.0030	0.0030	0	0
A	0.0010	0.0309	-0.1172	0.0688	0.0107	0.0048	0	0.0010
BBB	0.0007	0.0047	0.0713	-0.1711	0.0701	0.0174	0.0020	0.0049
BB	0.0005	0.0025	0.0089	0.0813	-0.2530	0.1181	0.0144	0.0273
B	0	0.0021	0.0034	0.0073	0.0568	-0.1929	0.0479	0.0753
CCC	0	0.0000	0.0142	0.0142	0.0250	0.0928	-0.4318	0.2856
D	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 14: Generatormatrix, die aus den Übergangswahrscheinlichkeiten aus Tabelle 13 geschätzt wurde

Abschließend benötigt man noch einen Schätzer für die Risikoprämie $(\mu_1(t), \dots, \mu_{K-1}(t))$. Dieser ergibt sich aus der Darstellung des Preises einer risikobehafteten Nullkuponanleihe (72). Für eine kurze Zeitperiode erhält man aus Gleichung (71b) mittels

$$\left. \frac{\partial \tilde{Q}(t, T)}{\partial T} \right|_{T=t+\Delta t} \approx \frac{[\tilde{Q}(t, t + \Delta t) - I]}{\Delta t}$$

$$\tilde{Q}(t, t + \Delta t) \tilde{\Lambda}(t + \Delta t) \approx \tilde{Q}(t, t) \tilde{\Lambda}(t) = \tilde{\Lambda}(t)$$

folgende Gleichung

$$\tilde{Q}(t, t + \Delta t) \approx I + \tilde{\Lambda}(t) \Delta t = I + U(t) \Lambda \Delta t$$

Mit $\Pi(t) := U(t)$ und $Q - I := \Lambda \Delta t$ in den Gleichungen (68) und (69) erhält man eine Schätzung für die Risikoprämie $U(t)$. Dabei wird angenommen, dass $U(t)$ rechtsstetig über $[t, t + \Delta t)$. Bei dieser Vorgehensweise gleichen die Modellpreise den Preiskurven der risikobehafteten Nullkuponanleihen.

5 Aggregiertes Risiko

Die Literaturgrundlage zu diesem Kapitel bilden [11], [13] und [21].

Sowohl in der Finanzwelt als auch bei Versicherungen ist es meist der Fall, dass man von einem Risikovektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, wobei X_1, \dots, X_n Einzelrisiken sind, die Randverteilungen kennt, die Abhängigkeitsstruktur der Einzelrisiken aber unbekannt ist. Gegen Ende der 90er Jahre des vergangenen Jahrhunderts hat man begonnen, diese Problematik genauer zu beleuchten. Im finanziellen Risikomanagement hat man die Korrelation als Abhängigkeitsmaß verwendet, wobei sich durch die ständige Weiterentwicklung der Finanzprodukte die Korrelation oft als nicht mehr geeignet darstellt. Selbst in der Versicherungsbranche, wo man anfangs immer von unabhängigen Risiken ausgegangen ist, wurde durch die immer komplexer gestalteten Versicherungs- und Rückversicherungsprodukte der Ruf nach einer genaueren Betrachtung der Korrelation und Abhängigkeitsstruktur laut.

Die Korrelation ist ein sehr gutes Abhängigkeitsmaß im Falle einer multivariaten Normalverteilung, oder allgemeiner, im Falle von elliptischen Verteilungen. Die Situation in der Praxis ist aber meist eine andere. Um dies zu veranschaulichen sei Figur 5.1, die aus Embrechts, McNeil und Straumann [13] stammt, angeführt. Hier sieht man zwei Modelle, bei denen X und Y

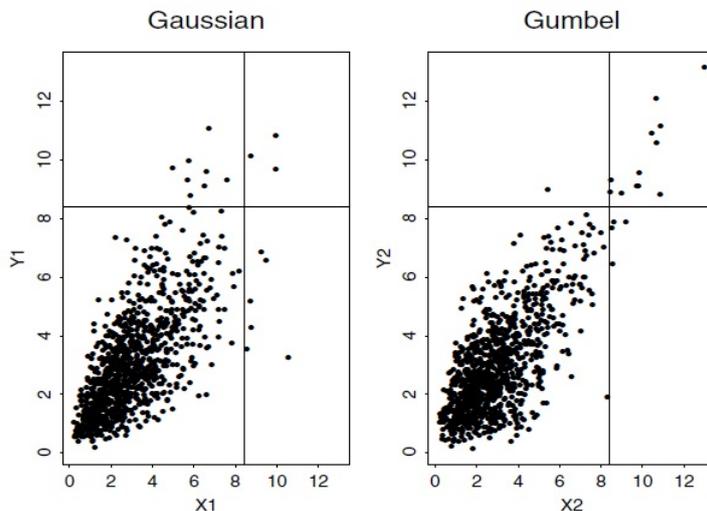


Abbildung 5.1: Darstellung zweier Wahrscheinlichkeitsmodelle mit identischen Randverteilungen und unterschiedlicher Abhängigkeitsstruktur.

jeweils eine identische $\text{Gamma}(3,1)$ - Randverteilung haben. Die Korrelation ist bei beiden Modellen 0.7. Die beiden Modelle unterscheiden sich allerdings

in ihrer Abhängigkeitsstruktur. Das heißt, wenn man von Verlusten eines Versicherungsunternehmens ausgeht, dann ist aus Sicht des Versicherers das zweite Modell wesentlich riskanter, weil es scheint, dass hier die großen Verluste zusammen auftreten.

Ein Werkzeug, mit dem Abhängigkeiten von Zufallsvariablen modelliert werden können, sind Copulas.

5.1 Copulas

Mithilfe der gemeinsamen Verteilungsfunktion von X_1, \dots, X_n

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

kann die Abhängigkeit der einzelnen reellwertigen Zufallsvariablen vollständig beschrieben werden. Die Aufteilung der Verteilungsfunktion F in einen Teil, der die Abhängigkeit beschreibt und einen Teil, der die Randverteilungen beschreibt, führte zum Konzept einer Copula.

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ besitze gleichverteilte Randverteilungen auf dem Intervall $[0, 1]$, $X_i \sim F_i = U(0, 1)$. Es sei folgende Transformation gegeben: $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n)^t \rightarrow (F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))^t$. Damit wird als Copula des Zufallsvektors $(X_1, \dots, X_n)^t$ die gemeinsame Verteilungsfunktion von $(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n))$ definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= P(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_n(X_n) \leq F_n(x_n)) \\ &= C(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n)) \end{aligned} \tag{75}$$

Entweder man definiert also eine Copula als Verteilungsfunktion eines Zufallsvektors in \mathbb{R}^n mit gleichverteilten Randverteilungen im Intervall $[0, 1]$, oder man verwendet die alternative Definition aus [13]:

Definition 5.1 (Copula):

Eine **Copula** ist eine Funktion $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden drei Eigenschaften:

1. $C(x_1, \dots, x_n)$ ist in jeder Komponente steigend.
2. $C(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) = x_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in [0, 1]$
3. Für alle $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ mit $a_i \leq b_i$ gilt:

$$\sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(x_{1i_1}, \dots, x_{ni_n}) \geq 0$$

mit $x_{j1} = a_j$, $x_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Der Vollständigkeit halber sei hier auch der Satz von Sklar aus Embrechts, Frey, McNeil (2005) [11] angegeben, der als der wichtigste Satz im Umgang mit Copulas gesehen werden kann. Dieser Satz zeigt einerseits, dass jede multivariate Verteilungsfunktion eine Copula enthält und andererseits, dass aus einer Copula und den Randverteilungen die multivariate Verteilung bestimmt werden kann. Für den Beweis sei ebenfalls auf [11] verwiesen.

Satz 5.1 (Satz von Sklar):

Sei F eine multivariate Verteilungsfunktion der Randverteilungen F_1, \dots, F_d . Dann existiert eine Copula $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, sodass für alle $x_1, \dots, x_d \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ gilt

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (76)$$

Wenn die Randverteilungen stetig sind, dann ist C eindeutig. Andererseits, wenn C eine Copula ist und F_1, \dots, F_d Verteilungsfunktionen, dann ist die Funktion F aus (76) eine multivariate Verteilungsfunktion der Randverteilungen F_1, \dots, F_d .

Aus dem Satz von Sklar folgt also, dass die in Gleichung (75) definierte Copula C für jede stetige multivariate Verteilung eindeutig ist. Folgende Proposition aus [13] zeigt, dass eine Copula invariant unter wachsender und stetiger Transformationen der Randverteilungen ist.

Proposition 5.1:

Wenn der Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)^t$ Copula C hat und T_1, \dots, T_n wachsende, Funktionen sind und die Randverteilungen $F_i, 1 \leq i \leq n$ des Vektors $(X_1, \dots, X_n)^t$ stetig sind, dann hat $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))^t$ ebenfalls Copula C .

Mit Gleichung (75) und der Invarianz-Eigenschaft aus Proposition 5.1 bezeichnet man die Copula des Risikovektors $(X_1, \dots, X_n)^t$ als die Abhängigkeitsstruktur der Einzelrisiken. Im Falle einer diskreten Verteilung ist die Copula nicht eindeutig und es gibt mehrere Möglichkeiten, die Abhängigkeitsstruktur anzugeben.

Sollten die einzelnen Risikofaktoren unabhängig sein, dann ergibt sich für die Copula die Darstellung

$$C_I := \prod_{i=1}^n u_i, \quad (77)$$

die sogenannte Unabhängigkeits-Copula.

In weiterer Folge werden Beispiele von sehr oft verwendeten Copulas für

abhängige Risikofaktoren (X, Y) , die eine stetige Randverteilung besitzen, vorgestellt.

Gauss Copula

$$C_{\rho}^{Ga}(x, y) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(y)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} ds dt \quad (78)$$

mit $-1 < \rho < 1$ und Φ sei die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Zufallsvariablen, die eine Standardnormalverteilung als Randverteilung besitzen und diese Abhängigkeitsstruktur haben, sind bivariat normalverteilte Zufallsvariablen mit Korrelationskoeffizienten ρ .

Gumbel Copula

$$C_{\beta}^{Gu}(x, y) = \exp\left[-\left\{(-\ln x)^{1/\beta} + (-\ln y)^{1/\beta}\right\}^{\beta}\right] \quad (79)$$

wo $0 < \beta \leq 1$ der Parameter ist, durch den die Abhängigkeit zwischen X und Y erklärt ist. Für $\beta = 1$ ergibt sich beispielsweise die Unabhängigkeits-Copula.

Abschließend soll noch eine Möglichkeit vorgestellt werden, durch eine unterschiedliche Wahl von Funktionen verschiedene Copulae zu konstruieren. Dazu seien $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(y)dy = 0$ und $f(x)g(y) \geq -1$ für alle $x, y \in [0, 1]$. Mit diesen Voraussetzungen ist $h(x, y) = 1 + f(x)g(y)$ eine bivariate Dichtefunktion auf $[0, 1]^2$ und somit ist durch

$$C(x, y) = \int_0^x \int_0^y h(u, v) dudv = xy + \left(\int_0^x f(u)du\right) \left(\int_0^y g(v)dv\right) \quad (80)$$

eine Copula gegeben. Wählt man in (80) beispielsweise $f(x) = \alpha(1 - 2x)$, $g(y) = (1 - 2y)$, $|\alpha| < 1$ dann erhält man, wie in [13] erwähnt

$$\begin{aligned} C(x, y) &= xy + \left(\int_0^x (\alpha - 2\alpha u)du\right) \left(\int_0^y (1 - 2v)dv\right) \\ &= xy + (\alpha u - \alpha u^2)\Big|_0^x (v - v^2)\Big|_0^y \\ &= xy + (\alpha x - \alpha x^2)(y - y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= xy + \alpha xy(1-x)(1-y) \\
&= xy[1 + \alpha(1-x)(1-y)]
\end{aligned}$$

welche als die Farlie-Gumbel-Morgenstern Copula bekannt ist.

5.2 Korrelation

Wie bereits einleitend erwähnt, wurde die Korrelation oft als einziges Abhängigkeitsmaß verwendet. Warum das nicht immer passend ist soll in weiterer Folge erklärt werden. Dazu muss aber erst einmal die Korrelation an sich etwas genauer untersucht werden.

Definition 5.2:

Für zwei Zufallsvariablen X und Y mit endlicher Varianz $\sigma^2(X)$ bzw. $\sigma^2(Y)$ ist der **lineare Korrelationskoeffizient** durch

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}} \quad (81)$$

gegeben, wobei $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ für die Kovarianz von X und Y steht.

Für diesen linearen Korrelationskoeffizienten (81) gilt stets $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$. Im Falle der Unabhängigkeit gilt $\rho(X, Y) = 0$ weil dann die Kovarianz 0 ist und im Falle von perfekter linearer Abhängigkeit (d.h. $Y = aX + b$ fast sicher, bzw. $P(Y = aX + b) = 1$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$) gilt $\rho(X, Y) = \pm 1$. Hat man mehr als nur zwei Zufallsvariablen, von denen man die Korrelation berechnen will, verwendet man die gleiche Vorgehensweise. Dazu seien durch $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$ und $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^t$ zwei Zufallsvektoren in \mathbb{R}^n gegeben. Dann sind die paarweisen Korrelationen durch die $n \times n$ Matrizen $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ und $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ gegeben, die folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{i,j} &:= \text{Cov}(X_i, Y_j) \\
\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{i,j} &:= \rho(X_i, Y_j)
\end{aligned}$$

für $1 \leq i, j \leq n$. Diese beiden Matrizen sind symmetrisch und semidefinit. Einer der Gründe, warum die Korrelation ein so beliebtes Abhängigkeitsmaß ist, ist die Einfachheit der Berechnung. Für sehr viele Verteilungen ist es kein Problem, die ersten beiden Momente (Erwartungswert und Varianz) analytisch zu berechnen. Andere Abhängigkeitsmaße sind dagegen meist viel komplizierter zu berechnen. Verteilungen, für die die Korrelation ein sehr gutes

Abhängigkeitsmaß ist, sind die elliptischen Verteilungen (u.a. Normalverteilung) und die sphärischen Verteilungen. Beide werden etwas später erklärt. Zuerst werden aber ein paar Gründe aufgezeigt, warum die Korrelation nicht immer das perfekte bzw. geeignete Abhängigkeitsmaß ist.

- Damit die Korrelation definiert ist, muss die Varianz endlich sein. Dies ist aber nicht immer der Fall. Wenn man zum Beispiel die Student'sche t - Verteilung betrachtet, dann sieht man, dass für einen bivariaten t_ν verteilten Zufallsvektor die Varianz und Kovarianz für $\nu \geq 2$ nicht definiert ist. Speziell bei heavy-tailed - Verteilungen, die in der Versicherungsmathematik sehr häufig zum Einsatz kommen, ergeben sich dadurch Probleme.
- Das zweite Problem, dass bei der Verwendung der Korrelation auftritt, ist folgendes: Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen bedeutet Korrelation gleich 0, aber es ist nicht gewährleistet, dass aus Korrelation gleich 0 die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen geschlossen werden kann. Wenn man sich die beiden Zufallsvariablen $X \sim N(0, 1)$ und $Y = X^2$ ansieht, dann ist deren Korrelationskoeffizient gleich 0, weil das dritte Moment (Schiefe) einer normalverteilten Zufallsvariable den Wert 0 hat ($E[XY] - E[X]E[Y] = E[X^3] - 0 = 0$). Die beiden Zufallsvariablen X und Y sind aber keinesfalls unabhängig.
- Die lineare Korrelation ist für eine nichtlinear streng wachsende Transformation $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht invariant. Das bedeutet, dass im Allgemeinen

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y)$$

gilt.

Wie schon erwähnt, ist die Korrelation für sphärische und elliptische Verteilungen ein sehr gutes Abhängigkeitsmaß.

Definition 5.3:

Einen Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$ nennt man **sphärisch verteilt**, wenn für jede orthogonale Abbildung $U \in \mathbb{R}^n$ (das heißt: $UU^t = U^tU = I$) gilt:

$$U\mathbf{X} =_d \mathbf{X}.$$

In Definition 5.3 bedeutet $=_d$, dass die beiden Seiten in Verteilung gleich sind.

Eine schöne Eigenschaft der sphärischen Verteilung ist jene, dass die charakteristische Funktion $\phi(\mathbf{t}) = E[\exp(i\mathbf{t}^t \mathbf{X})]$ eine sehr einfache Form annimmt, nämlich $\phi(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}^t \mathbf{t}) = \psi(t_1^2 + \dots + t_n^2)$ für die Funktion $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, die man den *charakteristischen Generator* nennt. Für die n-dimensionale sphärische Verteilung mit charakteristischem Generator ψ schreibt man

$$\mathbf{X} \sim S_n(\psi).$$

Folgendes Beispiel zeigt, dass ein Vektor mit multivariater Standard-Normalverteilung sphärisch ist.

Beispiel 5.1:

Wenn die Zufallsvariable $X \sim N_n(0, I)$ ist, dann gilt

$$\phi_X(t) = E[\exp(i\mathbf{t}^t \mathbf{X})] = \exp(it^t 0 - 1/2t^t I t) = \exp(-1/2t^t I t).$$

Somit ist $X \sim S_n(\psi)$ wobei $\psi = \exp(-x/2)$

Definition 5.4:

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + \mu$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ sei eine affine Abbildung. \mathbf{X} hat eine **elliptische Verteilung**, wenn $\mathbf{X} = T(\mathbf{Y})$ und $\mathbf{Y} \sim S_n(\phi)$.

Somit ergibt sich für die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E[\exp(i\mathbf{t}^t \mathbf{X})] = E[\exp(i\mathbf{t}^t (A\mathbf{Y} + \mu))] \\ &= \exp(i\mathbf{t}^t \mu) E[\exp(i(A^t \mathbf{t})^t \mathbf{Y})] = \exp(i\mathbf{t}^t \mu) \psi(\mathbf{t}^t \Sigma \mathbf{t}) \end{aligned}$$

wobei $\Sigma := AA^t$ Dispensionsparameter heißt. Für die elliptische Verteilung schreibt man

$$\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \psi).$$

Als Beispiel für elliptische Verteilungen sei die multivariate Normalverteilung angegeben, $\mathcal{N}_n(\mu, \Sigma) = E_n(\mu, \Sigma, \psi)$ mit $\psi(t) = \exp(-t^2/2)$. Wie schon erwähnt, ist die Korrelation ein gutes Abhängigkeitsmaß für elliptische Verteilungen. Im folgenden sollen ein paar Gründe dafür angeführt werden.

- Jede Linearkombination von Zufallsvariablen mit elliptischer Verteilung mit gleichem charakteristischen Generator ist wieder elliptisch mit dem selben charakteristischen Generator ψ . Das heißt, dass für $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \psi)$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$

$$B\mathbf{X} + b \sim E_n(B\mu + b, B\Sigma B^t, \psi)$$

gilt.

- Für Zufallsvariablen mit einer gemeinsamen elliptischen Verteilung gilt, dass auch deren Randverteilungen elliptisch sind mit dem selben Generator. Das heißt, dass für $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \sim E_n(\Sigma, \mu, \psi)$ mit $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^q$, $p + q = n$. Es gelte $E[\mathbf{X}] = \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$, $\mu_1 \in \mathbb{R}^p$, $\mu_2 \in \mathbb{R}^q$ und $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$ mit den Dimensionen $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ und $\Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q}$. Dann gilt

$$\mathbf{X}_1 \sim E_p(\mu_1, \Sigma_{11}, \psi), \mathbf{X}_2 \sim E_q(\mu_2, \Sigma_{22}, \psi)$$

Wie soeben gesehen, ist eine elliptische Verteilung durch den Erwartungswert μ , die Dispensionsmatrix Σ und den charakteristischen Generator ψ eindeutig bestimmt. Betrachtet man nun die Copula einer stetigen elliptischen Verteilung, dann sieht man, dass diese durch die Kenntnis der Dispensionsmatrix und Kenntnis des Generators ψ eindeutig bestimmt ist. Für die Copula einer bivariaten t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden und Korrelation ρ gilt

$$C_{\nu, \rho}^t(x, y) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(x)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(y)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{(s^2 - 2\rho st + t^2)}{\nu(1-\rho^2)} \right\}^{-(\nu+2)/2} ds dt,$$

wobei $t_\nu^{-1}(x)$ für die inverse Verteilungsfunktion der univariaten t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden steht. Man sieht, dass diese Copula nur von ρ und ν abhängt.

5.3 Alternative Abhängigkeitsmaße

In diesem Kapitel wird zuerst kurz erwähnt, welche Eigenschaften Abhängigkeitsmaße besitzen sollten und dann werden die Rangkorrelationen von Spearman und Kendall vorgestellt.

Wie in Kapitel 2 von Nelsen ([21]) gezeigt, gelten für jede Copula die Fréchet-Schranken

$$\underbrace{\max\{x_1 + \dots + x_n + 1 - n, 0\}}_{C_l(x_1, \dots, x_n)} \leq C(x_1, \dots, x_n) \leq \underbrace{\min\{x_1, \dots, x_n\}}_{C_u(x_1, \dots, x_n)} \quad (82)$$

$$\forall x_1, \dots, x_n \in I = [0, 1]$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass jede Copula, wie im Unterkapitel über Copulas gesehen, die gemeinsame Verteilungsfunktion von gleichverteilten

Zufallsvariablen ist, $U_i \sim U(0, 1)$. Für den zweidimensionalen Fall sind sowohl C_l als auch C_u Copulas, denn wenn $U \sim U(0, 1)$ dann gilt

$$C_l(x_1, x_2) = \mathbb{P}(U \leq x_1, 1 - U \leq x_2)$$

$$C_u(x_1, x_2) = \mathbb{P}(U \leq x_1, U \leq x_2)$$

denn $\mathbb{P}(U \leq x_1, 1 - U \leq x_2) = \mathbb{P}(1 - x_2 \leq U \leq x_1) = x_1 + x_2 - 1$. Dies entspricht C_l . Die Darstellung für C_u ist trivial. Somit sind C_l und C_u die bivariaten Verteilungsfunktionen der Vektoren $(U, 1 - U)^t$ bzw. $(U, U)^t$. Die Verteilung des Vektors $(U, 1 - U)^t$ hat die komplette Masse auf der Diagonalen von $(0, 1)$ zu $(1, 0)$ und der Vektor $(U, U)^t$ hat seine Masse auf der Diagonalen von $(0, 0)$ zu $(1, 1)$. Deshalb spricht man im Falle von C_l und C_u von perfekter negativer bzw. positiver Abhängigkeit (Anti-Monotonie bzw. Co-Monotonie).

Definition 5.5:

Wenn der Vektor $(X, Y)^t$ die Copula C_u hat, dann nennt man X und Y **komonoton**. Wenn der Vektor die Copula C_l hat, dann nennt man X , Y **antimonoton**.

Wenn man von Abhängigkeitsmaßen spricht, so muss man auch über die Bedingungen sprechen, die diese Maße erfüllen sollen. Ein Abhängigkeitsmaß δ ist eine reelle Zahl, die die Abhängigkeit von reellwertigen Zufallsvariablen X_i angibt. Für die Bedingungen sei der bivariate Fall mit zwei reellen Zufallsvariablen X und Y gegeben. Es wäre wünschenswert, dass ein Abhängigkeitsmaß die folgenden Bedingungen erfüllt

B1 $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$ (Symmetrie)

B2 $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$ (Normierung)

B3 $\delta(X, Y) = 1 \iff X, Y$ komonoton
 $\delta(X, Y) = -1 \iff X, Y$ antimonoton

B4 Für $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton auf dem Bildbereich von X :

$$\delta(T(X), Y) = \begin{cases} \delta(X, Y) & T \text{ steigend} \\ -\delta(X, Y) & T \text{ fallend} \end{cases}$$

Da die lineare Korrelation (81) nur die ersten beiden Punkte erfüllt, seien in weiterer Folge zwei weitere Abhängigkeitsmaße vorgestellt, die im Falle von stetigen Zufallsvariablen X und Y alle vier Punkte erfüllen.

Spearman's ρ und Kendall's τ

Definition 5.6:

Die Zufallsvariable X habe Verteilung F_1 , die Zufallsvariable Y die Verteilung F_2 . Deren gemeinsame Verteilung sei F . Dann ist **Spearman's Rangkorrelation** gegeben durch

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y)) \quad (83)$$

wobei ρ die herkömmliche lineare Korrelation ist.

Definition 5.7:

(X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) seien zwei unabhängige Zufallsvariablenpaare mit Verteilung F . **Kendall's Rangkorrelation** ist dann gegeben durch

$$\rho_\tau(X, Y) = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) \quad (84)$$

In weiterer Folge wird angenommen, dass F_1 und F_2 stetige Verteilungen sind. In Satz 5.2 werden wichtige Eigenschaften der beiden Korrelationen ρ_S und ρ_τ dargestellt. Dieser entspricht Theorem 3 aus [13]. Dort kann auch der Beweis nachgelesen werden.

Satz 5.2:

X und Y seien Zufallsvariablen mit stetiger Verteilung F_1 bzw. F_2 , gemeinsamer Verteilung F und Copula C . Dann gelten folgende Aussagen:

1. $\rho_S(X, Y) = \rho_S(Y, X), \rho_\tau(X, Y) = \rho_\tau(Y, X)$
2. Wenn X und Y unabhängig voneinander sind, dann $\rho_S(X, Y) = \rho_\tau(X, Y) = 0$
3. $-1 \leq \rho_S(X, Y), \rho_\tau(X, Y) \leq 1$
4. $\rho_S(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(x, y) - xy) dx dy$
5. $\rho_\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1$
6. Für $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton auf dem Bildbereich von X erfüllen $\rho_S(X, Y)$ und $\rho_\tau(X, Y)$ Bedingung B4.
7. $\rho_S(X, Y) = \rho_\tau(X, Y) = 1 \iff C = C_u \iff Y = T(X)$ fast sicher mit T steigend
8. $\rho_S(X, Y) = \rho_\tau(X, Y) = -1 \iff C = C_l \iff Y = T(X)$ fast sicher mit T fallend

Mit Satz 5.2 ist gewährleistet, dass die Rangkorrelationen ρ_S und ρ_τ die gewünschten Bedingungen B1 - B4 erfüllen.

Die Rangkorrelation hat gegenüber der linearen Korrelation den großen Vorteil, dass sie invariant unter einer streng monotonen Transformation ist. Ein Nachteil der Rangkorrelation gegenüber der linearen Korrelation ist der, dass für Verteilungen, bei denen die Varianz bzw. Kovarianz nicht so leicht berechnet werden kann, der Rangkorrelationskoeffizient schwerer zu berechnen ist. Deshalb ist im Falle der multivariaten Normalverteilung oder auch der multivariaten t - Verteilung die lineare Korrelation zu favorisieren, wogegen bei Verteilungen, deren Copula eine einfache geschlossene Form besitzen, die Rangkorrelation vorzuziehen ist. Beispiele hierfür wären die Gumbel Copula oder Farlie-Gumbel-Morgenstern Copula.

In [13] wurden Irrtümer aufgezeigt, die im Zusammenhang mit Korrelation und Abhängigkeit auftreten.

- Randverteilungen zusammen mit der Korrelation legen die gemeinsame Verteilung fest.
- Mit gegebenen Randverteilungen F_1 und F_2 für X und Y können alle Korrelationen zwischen -1 und 1 durch geeignete Wahl der gemeinsamen Verteilung erreicht werden.
- Der „worst case“ - Value at Risk für ein lineares Portfolio $X + Y$ tritt auf, wenn $\rho(X, Y)$ maximal ist, also wenn X und Y komonoton sind.

Dieser letzte Irrtum soll nun ein bisschen genauer betrachtet werden. Es gilt zwar, dass die Varianz eines linearen Portfolios, $\sigma^2(X, Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho(X, Y)\sigma(x)\sigma(Y)$, maximal ist, wenn die Korrelation maximal ist. Diese Aussage gilt aber nicht so ohne weiteres für den Value at Risk. Wir werden sehen, dass es bei unbekannter gemeinsamer Verteilung nur möglich ist, den Value at Risk durch bestimmte Grenzen zu beschränken. Dies führt zu folgendem Abschnitt.

5.4 Schranken für aggregierte Risiken

Ab hier folgt die Arbeit der Literatur aus [12].

Aufgrund seiner Einfachheit, aber auch aus regulatorischen Gründen, ist der Value at Risk (kurz: VaR) ein sehr beliebtes Risikomaß.

Definition 5.8:

Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion F. Für $0 \leq \alpha \leq 1$ ist der

Value at Risk zum Wahrscheinlichkeitslevel α von X durch das α -Quantil gegeben, d.h. $VaR_\alpha(X) := F_X^{-1}(\alpha)$.

Es wird angenommen, dass hohe Verluste durch den rechten Tail der Verteilung F_X repräsentiert werden. Deshalb sind 0.95 und 0.99 typische α -Werte. Hat man beispielsweise zwei Risiken, X_1 und X_2 , und will deren gemeinsames Risiko anhand des VaR berechnen, so muss man in der Lage sein, $VaR_\alpha(X_1 + X_2)$ zu berechnen. Das heißt also, dass man das α -Quantil der gemeinsamen Verteilung $F_{X_1+X_2}$ benötigt. Das kann aber nur berechnet werden, wenn man die gemeinsame Verteilung (Copula) kennt, was in den meisten Fällen aber nicht zutrifft. Wie man mit diesem Problem umgeht, soll Inhalt dieses Abschnitts sein.

5.4.1 Einleitung und Definitionen

Wenn in weiterer Folge für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \leq y$ steht, so ist dies komponentenweise gemeint, nämlich $x_i \leq y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. In weiterer Folge wird das generalisierte Inverse definiert. Dazu sei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Außerdem wird folgendes festgelegt: $\inf \emptyset = \sup \emptyset = -\infty$.

Definition 5.9:

Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine steigende Abbildung. Das **generalisierte links- bzw. rechtsstetige Inverse** ist durch die Funktionen $\phi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\phi^\wedge : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gegeben, welche folgendermaßen definiert sind:

$$\phi^{-1}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) \geq y\} \text{ und} \quad (85)$$

$$\phi^\wedge(y) := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) \leq y\} \quad (86)$$

Dazu sei folgendes Lemma aus Embrechts, Höing, Juri (2003) [12] (Lemma 2.1) hier ohne Beweis angegeben.

Lemma 5.1:

- (i) ϕ^{-1} und ϕ^\wedge sind steigende Funktionen
- (ii) ϕ^{-1} und ϕ^\wedge sind links- bzw. rechtsstetig auf \mathbb{R}
- (iii) Wenn ϕ rechtsstetig und $\phi^{-1}(y) > \infty$, dann ist $\phi(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq \phi^{-1}(y)$
- (iv) Wenn ϕ linksstetig und $\phi^\wedge(y) > \infty$, dann ist $\phi(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \phi^\wedge(y)$

Die Copula wurde in Definition 5.1 bereits eingeführt. In weiterer Folge werden die Überlebenscopula und der Dual einer Copula benötigt.

Definition 5.10:

(U_1, \dots, U_n) sei ein n -dimensionaler Vektor mit Gleichverteilung als Randverteilungen und C sei die Gesamtverteilung dieses Vektors. Der **Dual von C** , C^d , ist gegeben durch

$$C^d(u_1, \dots, u_n) := P \left[\bigcup_{i=1}^n \{U_i \leq u_i\} \right]$$

und die Überlebenscopula \hat{C} von C ist die Verteilung des Vektors $(1-U_1, \dots, 1-U_n)$.

Laut Embrechts, Höing und Juri [12] gilt für Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit gemeinsamer Verteilung F , Randverteilungen F_1, \dots, F_n und Copula C

$$C^d(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = P \left[\bigcup_{i=1}^n \{X_i \leq x_i\} \right] \quad (87)$$

$$\hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_n(x_n)) = \bar{F}(x_1, \dots, x_n) \quad (88)$$

wobei $\bar{F}_i(x_i) := 1 - F_i(x_i)$ und $\bar{F}(x_1, \dots, x_n) := P[X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n]$, somit stellt (88) die Aussage des Satzes von Sklar (Satz 5.1) für Überlebensverteilungsfunktionen dar. $C^d(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ ist in jeder Komponente x_1, \dots, x_n steigend und im Gegensatz zu \hat{C} ist C^d keine Copula. Aufgrund von $\hat{C}(1 - u_i) = P[U_i > u_i] = 1 - P[U_i \leq u_i]$ gilt die Beziehung

$$C^d(u_1, \dots, u_n) = 1 - \hat{C}(1 - u_1, \dots, 1 - u_n).$$

Es stellt sich nun die Frage, welche Copula zu einer starken Abhängigkeit führt und welche zu einer schwachen. Ein Ansatz wäre, die Copulae punktweise als Funktionen zu vergleichen und dadurch das Risiko der Abhängigkeit zu definieren. Es sei hier noch einmal daran erinnert, dass für Copulae die Fréchet-Schranken (82) gelten. Nach Embrechts, Höing und Juri [12] spricht man bei einer geeigneten Halbordnung und zwei geordnete Verteilungen von einer riskanteren Abhängigkeit der Randverteilungen bei der „größeren“ Verteilung. Die riskanteste Abhängigkeit liegt vor, wenn die obere Fréchet-Schranke C_u die Abhängigkeitsstruktur ist, das heißt, wenn Komonotonie vorliegt. Komonotonie bedeutet also, dass die beiden Risiken einzig von einer gemeinsamen Zufallsvariable abhängig sind. Deshalb spricht man im Falle der Komonotonie von der stärksten Form positiver Abhängigkeit. Im Falle von Komonotonie gilt für den Value at Risk:

$$VaR(X + Y) = VaR(X) + VaR(Y)$$

Proposition 5.2:

Sei $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ steigend und linksstetig in jedem Argument, $0 \leq \alpha \leq 1$ und X_1, \dots, X_n komonoton. Dann gilt

$$VaR_\alpha(\psi(X_1, \dots, X_n)) = \psi(VaR_\alpha(X_1), \dots, VaR_\alpha(X_n)).$$

sofern die verwendeten Ausdrücke existieren.

Beweis

Sei Z eine reelle Zufallsvariable mit Bildbereich $\text{Im}(Z)$ und angenommen $\phi : \text{Im}(Z) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist steigend und linksstetig. Weiters werde angenommen, dass VaR_α für ein $\alpha \in [0, 1]$ endlich ist. Mit Lemma 5.1 ergibt sich, dass die Verteilungsfunktion von $\phi(Z) = F_{\phi(Z)}(t) = P[\phi(Z) \leq t] = P[Z \leq \phi^\wedge(t)] = F_Z(\phi^\wedge(t))$. Somit ergibt sich wiederum mit Lemma 5.1

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\phi(Z)) &= \inf\{t \in \mathbb{R} | F_{\phi(Z)}(t) \geq \alpha\} = \inf\{t \in \mathbb{R} | F_Z(\phi^\wedge(t)) \geq \alpha\} \\ &= \inf\{t \in \mathbb{R} | \phi^\wedge(t) \geq F_Z^{-1}(\alpha)\} \\ &= \inf\{t \in \mathbb{R} | t \geq \phi(F_Z^{-1}(\alpha))\} = \phi(F_Z^{-1}(\alpha)) = \phi(VaR_\alpha(Z)) \end{aligned} \tag{89}$$

F_1, \dots, F_n seien die Verteilungsfunktionen der komonotonen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n . Man betrachte die steigende, linksstetige Funktion $\phi(a) := \psi(F_1^{-1}(a), \dots, F_n^{-1}(a))$. Für eine beliebige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable U erhält man mit (89)

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\phi(X_1, \dots, X_n)) &= VaR_\alpha(\psi(F_1^{-1}(U), \dots, F_n^{-1}(U))) = VaR_\alpha(\phi(U)) \\ &= \phi(VaR_\alpha(U)) = \phi(\alpha) = \psi(F_1^{-1}(\alpha), \dots, F_n^{-1}(\alpha)) \\ &= \psi(VaR_\alpha(X_1), \dots, VaR_\alpha(X_n)) \end{aligned} \tag{90}$$

□

Neben dem Extremfall der Komonotonie gibt es weitere Abhängigkeitsformen. Angenommen die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n haben Copula C und $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ seien unabhängige Kopien der X_i , $1 \leq i \leq n$ mit der Unabhängigkeits-Copula C_I wie in (77). Wenn nun $C \geq C_I$ erfüllt ist, dann nennt man die X_i **positive lower orthant dependent** (PLOD).

Definition 5.11:

Es seien zwei Vektoren $X = (X_1, \dots, X_n)$ und $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ gegeben, deren Randverteilungen paarweise identisch sind und es sei $\bar{F}_X(x_1, \dots, x_n) := P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)$, $\bar{F}_Y(y_1, \dots, y_n) := P(Y_1 > y_1, \dots, Y_n > y_n)$. Dann ist der Vektor X in der „**upper orthant order**“ kleiner als der Vektor Y , geschrieben als $X \leq_{uo} Y$, wenn $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$. X heißt kleiner als Y in der „**lower orthant order**“, geschrieben als $X \leq_{lo} Y$, wenn $F_X \leq F_Y$.

Definition 5.12:

Wenn \tilde{X}_i eine unabhängige Kopie von X_i , $1 \leq i \leq n$, ist, dann ist $\tilde{X} \leq_{lo} X$ äquivalent zu der Aussage, dass X_1, \dots, X_n PLOD sind. Für $\tilde{X} \leq_{uo} X$ heißen die Zufallsvariablen (X_1, \dots, X_n) **positive upper orthant dependent** (PUOD). Sollte der Fall eintreten, wo sowohl PUOD und PLOD zutreffen, spricht man von **positive orthant dependent** (POD).

PUOD (oder PLOD) bedeutet also, dass Risiken (X_1, \dots, X_n) eher gleichzeitig hohe (bzw. niedrige) Werte annehmen im Vergleich zu deren unabhängigen Kopien.

5.4.2 Verteilungsschranken

Wie zuvor erwähnt, ist man oft daran interessiert, z.B. den VaR einer gemeinsamen Position, $X_1 + X_2$, zu berechnen.

Seien nun X_1, \dots, X_n gegebene Risiken und $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. In weiterer Folge sollen Quantile der Funktion $\psi(X_1, \dots, X_n)$ berechnet werden, also der VaR. Die Funktion ψ kann verschiedenste Darstellungen haben:

- $\psi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. In diesem Fall würde man also den VaR der Position $X_1 + \dots + X_n$ berechnen.
- $\psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - k)^+$, $k \geq 0$. Dieser funktionale Zusammenhang wird z.B. bei einem Schadenexzendentenvertrag einer Rückversicherung benötigt. Hierbei stellen die X_i individuelle Verluste der Versicherung dar.
- $\psi(x_1, \dots, x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i - k)^+$, $k \geq 0$. Dies kommt bei Finanzderivaten oder bei einer Stop-Loss - Rückversicherung zum Einsatz.

Wie schon erwähnt, ist das Problem vor dem man steht, wenn man den $VaR_\alpha(\psi(X_1, \dots, X_n))$ berechnen will, dass man die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n kennen muss. Dies ist aber meist nicht möglich. Deshalb hat man damit begonnen, Schranken zu finden, zwischen denen der VaR liegen muss. Die ersten Ergebnisse in diesem Bereich gehen auf Makarov

(1981) zurück. Frank et al. (1987) haben diese Ergebnisse erweitert. Ebenso haben Demuit et al. (1999) und Cossette et al. (2000) bestehende Ergebnisse erweitert. Embrechts, Höing und Juri haben in [12] die bestehenden Ergebnisse verallgemeinert, indem sie die Stetigkeitsbedingungen von ψ gelockert haben. Deren Ergebnis sei in weiterer Folge erläutert.

Ergebnisse von Embrechts, Höing und Juri

Wie zuvor sei $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Für $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ sei durch $\psi_{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}$ jene Funktion ψ gegeben, deren i_1 -te, ..., i_k -te Variablen fix gehalten werden, sodass diese die Werte x_{i_1}, \dots, x_{i_k} annehmen. Weiters sei für eine Copula C , Randverteilungen F_1, \dots, F_n und eine steigende Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ folgendes definiert:

$$\tau_{C,\psi}(F_1, \dots, F_n)(s) := \sup_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} C(F_1(x_1), \dots, F_{n-1}(x_{n-1}), F_n(\psi_{x_1, \dots, x_{n-1}}^\wedge(s)))$$

$$\sigma_{C,\psi}(F_1, \dots, F_n)(s) := \int_{\{\psi \leq s\}} dC(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

$$\rho_{C,\psi}(F_1, \dots, F_n)(s) := \inf_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} C^d(F_1(x_1), \dots, F_{n-1}(x_{n-1}), F_n(\psi_{x_1, \dots, x_{n-1}}^\wedge(s)))$$

Für die obigen Darstellungen $\tau_{C,\psi}$, $\sigma_{C,\psi}$ und $\rho_{C,\psi}$ sei angemerkt, dass für einen Zufallsvektor (X_1, \dots, X_n) mit Copula C und Randverteilungen F_1, \dots, F_n gilt: $\sigma_{C,\psi}(F_1, \dots, F_n) = F_\psi(X_1, \dots, X_n)$, wobei F_ψ die Verteilungsfunktion von $\psi(X)$ ist. Außerdem sind auch $\tau_{C,\psi}$ und $\rho_{C,\psi}$ Verteilungsfunktionen. Deshalb kann man $\tau_{C,\psi}$, $\sigma_{C,\psi}$ und $\rho_{C,\psi}$ als Operatoren verstehen, welche Δ^n auf Δ abbilden, wobei Δ die Menge der eindimensionalen Verteilungsfunktionen beschreibt.

Mit folgenden zwei Sätzen beschreiben Embrechts, Höing und Juri die Schranken, zwischen denen das gewünschte Risikomaß der Funktion ψ liegt, sowie, wann diese beiden Schranken erreicht werden. Die beiden Sätze werden hier nicht bewiesen. Nachzulesen sind die Beweise im Appendix von [12].

Satz 5.3:

(X_1, \dots, X_n) habe die Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n und $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine steigende und im letzten Argument linksstetige Funktion. Wenn eine Copula C von (X_1, \dots, X_n) folgendes erfüllt: $C \geq C_0$ und $C^d \leq C_1^d$ für gegebene Copulas C_0 und C_1 , dann gilt:

$$\tau_{C_0,\psi}(F_1, \dots, F_n) \leq \sigma_{C,\psi}(F_1, \dots, F_n) \leq \rho_{C_1,\psi}(F_1, \dots, F_n) \quad (91)$$

Formuliert man die obige Ungleichung mit Hilfe des Value at Risk, dann ergibt sich:

$$\rho_{C_1,\psi}(F_1, \dots, F_n)^{-1}(\alpha) \leq \text{VaR}_\alpha(\psi(X_1, \dots, X_n)) \leq \tau_{C_0,\psi}(F_1, \dots, F_n)^{-1}(\alpha)$$

Der folgende Satz sagt aus, dass es Abhängigkeitsstrukturen von (X_1, \dots, X_n) gibt, sodass die Verteilungsfunktion von $\psi(X_1, \dots, X_n)$ die Schranken in zumindest einem Punkt erreichen.

Satz 5.4:

Die Voraussetzungen aus Satz 5.3 seien erfüllt und es sei $\alpha := \tau_{C_0, \psi}(F_1, \dots, F_n)(s) \leq \rho_{C_1, \psi}(F_1, \dots, F_n)(s) := \beta$. Dann gibt es Copulae C^α und C^β sodass

$$\sigma_{C^\alpha, \psi}(F_1, \dots, F_n)(s) = \alpha \text{ und } \sigma_{C^\beta, \psi}(F_1, \dots, F_n)(s) = \beta$$

Zu den soeben erhaltenen Schranken (91) bleibt zu sagen, dass, wie schon erwähnt, sowohl $\tau_{C_0, \psi}(F_1, \dots, F_n)$ als auch $\rho_{C_1, \psi}(F_1, \dots, F_n)$ selbst Verteilungsfunktionen sind. Allerdings ist es im Allgemeinen nicht so, dass diese Schranken Verteilungsfunktionen für eine beliebige Zufallsvariable $\psi(Y_1, \dots, Y_n)$, deren Y_i die Randverteilung F_i haben, sind. Schweizer und Sklar (1974) [22] haben gezeigt, dass es schon im zweidimensionalen Fall für $\psi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ und $C_0, C_1 \neq C_u$ keine Borel-messbare Funktion f gibt, sodass $\tau_{C_0, \psi}(F_1, F_2) = F_{f(X_1, X_2)}$ oder $\rho_{C_1, \psi}(F_1, F_2) = F_{f(X_1, X_2)}$. Das heißt, dass die beiden Operationen $\tau_{C_0, \psi}$ und $\rho_{C_1, \psi}$ nicht von einer beliebigen binären Operation auf den Zufallsvariablen X_1 und X_2 abgeleitet werden können.

Die Forderung, $C \geq C_0$ und $C^d \leq C_1^d$ aus Satz 5.3 soll abschließend genauer betrachtet werden. Wie schon zuvor erwähnt, ist die Abhängigkeitsstruktur und daher auch die Copula C von (X_1, \dots, X_n) meist unbekannt, in manchen Fällen kann es sein, dass C nicht einmal eindeutig ist. Die Bedingungen $C \geq C_0$ und $C^d \leq C_1^d$ zu erfüllen, spielt allerdings nur in der Theorie eine Rolle, weil in der praktischen Anwendung Copulae konstruiert werden, die für die gegebenen Daten passend sind.

Der Einfachheit halber betrachtet man den zweidimensionalen Fall, denn hier ist die Bedingung $C \geq C_0$ äquivalent zu $C^d \leq C_0^d$, denn $C^d(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - C(u_1, u_2)$. Somit wählt man $C_1 = C_0$ und die Bedingungen sind erfüllt. C_l bezeichnet die untere Fréchet-Schranke (82) und somit erfüllt jede Copula $C \geq C_0 = C_l$ und auch $C^d(u_1, u_2) \leq C_1^d(u_1, u_2) = C_l^d(u_1, u_2) = (u_1 + u_2) \wedge 1$, wobei $a \wedge b = \min(a, b)$. Für $n \geq 3$ ist durch C_l keine Copula gegeben. Satz 5.3 bleibt trotzdem richtig, wenn man für C_0 die Copula C_l und für C_1^d die Copula $1 \wedge \sum_{i=1}^n u_i$ einsetzt, da im Beweis zu Satz 5.3 nur die Eigenschaft benötigt wird, dass C_0 und C_1^d in jedem Argument steigend sind. Außerdem erfüllt jede Copula C die Eigenschaft $C^d(u_1, \dots, u_n) \leq 1 \wedge \sum_{i=1}^n u_i$. Die Verwendung dieser Copulae bedeutet, dass keine Abhängigkeitsinformation vorhanden ist.

Wenn man für die Copulae C_0 und C_1 die Copula C_l verwendet, so modelliert

man den Fall in dem die Risiken POD sind. Man wählt diese Copulae für Szenarien, in denen positive Abhängigkeit von Nöten ist.

Aus der Definition von $\tau_{C_0, \psi}$ und $\rho_{C_1, \psi}$, sieht man, dass die erhaltenen Schranken enger werden, wenn man die Bedingungen $C \geq C_0$ und $C^d \leq C_1^d$ verschärft. Das wiederum bedeutet, dass je mehr Abhängigkeitsinformation vorhanden ist, der Bereich in dem der VaR liegt umso enger wird.

Es sei angemerkt, dass Erweiterungen zu den Ergebnissen aus den Sätzen 5.3 und 5.4 möglich sind. So kann man diese beiden Sätze auch für Funktionen ψ modellieren, die nur für k Argumente, $1 \leq k < n$, steigend sind und in den anderen $n-k$ Argumenten fallend. Ebenso muss man nicht immer den VaR verwenden, die Sätze können auch für andere Risikomaße adaptiert werden.

Abschließend werden noch kurz die Situationen Komonotonie und Unabhängigkeit erwähnt. In beiden Fällen kann man den VaR nämlich exakt und relativ einfach berechnen. Der Fall der Komonotonie wurde bereits mit Proposition 5.2 behandelt.

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n kann die Verteilungsfunktion von $\psi(X_1, \dots, X_n)$ und somit der VaR folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned} F_{\psi(X_1, \dots, X_n)}(s) &= P[\psi(X_1, \dots, X_n) \leq s] \\ &= \int dF_n(t_n) P[\psi_{t_n}(X_1, \dots, X_{n-1}) \leq s] \\ &= \int dF_n(t_n) \cdots \int F_1(\psi_{t_2, \dots, t_n}^\wedge(s)) dF_2(t_2) \end{aligned}$$

Für den Fall $n = 2$ ergibt sich $F_{\psi(X_1, X_2)}(s) = \int F_1(\psi_{t_2}^\wedge(s)) dF_2(t_2)$.

5.4.3 Zulässiges Risiko

Dieses Unterkapitel folgt der Ausarbeitung von Bernard, Jiang und Wang (2013) [3].

In weiterer Folge sei ein atomloser Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) gegeben, das heißt, dass für alle $A \subseteq \Omega$ mit $P(A) > 0$ ein $B \subset A$ existiert mit $P(B) > 0$. Im Grunde genommen bedeutet das, dass zumindest eine stetige Zufallsvariable existiert. In solchen Wahrscheinlichkeitsräumen können Folgen unabhängiger Zufallsvariablen mit beliebiger Verteilung konstruiert werden. So sei durch $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die Menge aller Zufallsvariablen gegeben,

die auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) definiert sind.

Wie schon zuvor wird weiterhin das aggregierte Risiko $S = X_1 + \dots + X_n$ von Interesse sein. Es wird angenommen, dass die Verteilung jedes einzelnen X_i 's bekannt sei, allerdings habe man von der gemeinsamen Verteilung der X_i überhaupt keine Information, das heißt, die Copula ist unbekannt.

Definition 5.13:

Die Menge der Zufallsvektoren mit gegebenen Randverteilungen F_1, \dots, F_n heißt **Fréchet-Klasse**, geschrieben

$$\mathcal{F}_n(F_1, \dots, F_n) = \{\mathbf{X} : X_i \sim F_i, i = 1, \dots, n\}$$

mit $X_i \sim F_i$, also $X_i \in L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hat Verteilung F_i .

Sollte etwas über die Abhängigkeitsstruktur bekannt sein, dann gehört das aggregierte Risiko zu einer Teilmenge von $\mathcal{F}_n(F_1, \dots, F_n)$. In weiterer Folge geht man aber davon aus, dass keine Information über die Abhängigkeitsstruktur vorhanden ist. In diesem Fall spricht man von einem zulässigen Risiko.

Definition 5.14:

Ein aggregiertes Risiko S nennt man **zulässiges Risiko** der Randverteilungen F_1, \dots, F_n wenn man es schreiben kann als $S = X_1 + \dots + X_n$ mit $X_i \sim F_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Die **zulässige Risikoklasse** ist definiert durch die Menge von zulässigen Risiken mit gegebenen Randverteilungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n) &= \{\text{zulässiges Risiko der Randverteilungen } F_1, \dots, F_n\} \\ &= \{X_1 + \dots + X_n : X_i \sim F_i, i = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n) = \{\mathbf{X}\mathbf{1}_n : \mathbf{X} \in \mathcal{F}_n(F_1, \dots, F_n)\}$ gilt, wobei $\mathbf{1}_n$ der n -dimensionale 1-Vektor ist, könnte man meinen, dass die zulässige Risikoklasse eine Umformulierung der Fréchet-Klasse ist. Dies ist aber keineswegs der Fall, denn die Struktur der zulässigen Risikoklasse hängt sehr stark von den Randverteilungen ab, wogegen die Fréchet-Klasse gänzlich unabhängig von den Randverteilungen ist.

Die Definition der zulässigen Risiken beinhaltet nur die Verteilung der Zufallsvariablen. Das bedeutet dass für S_1 und S_2 mit der selben Verteilung folgendes gilt: $S_1 \in \mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n) \Leftrightarrow S_2 \in \mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n)$. Deshalb ist die Studie von $\mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n)$ äquivalent zur Studie der *zulässigen Verteilungsklasse*, die wie folgt definiert ist

$$\mathcal{D}_n(F_1, \dots, F_n) = \{\text{Verteilung von } S : S \in \mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n)\}.$$

In weiterer Folge werden einige Eigenschaften der zulässigen Risikoklasse $\mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n)$ bzw. der zulässigen Verteilungsklasse $\mathcal{D}_n(F_1, \dots, F_n)$ angegeben. Dazu sei der Einfachheit halber $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$, $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_n)$, \mathbf{I}_A die Indikatorfunktion der Menge $A \in \mathcal{A}$ und $T_{a,b}$ ein affiner Operator univariater Verteilungen, sodass für $a, b \in \mathbb{R}$

$$T_{a,b}(\text{Verteilung von } X) = \text{Verteilung von } aX + b \text{ gilt.}$$

Außerdem bezeichne $F \otimes G$ die Verteilung von $X + Y$ mit $X \sim F$ und $Y \sim G$ unabhängig. $\stackrel{d}{=}$ und \xrightarrow{d} bezeichnen die Gleichheit bzw. Konvergenz in Verteilung.

Der Beweis des folgenden Satzes ist im Appendix A von [12] zu finden.

Satz 5.5:

Die zulässige Risikoklasse $\mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n)$ hat folgende Eigenschaften:

1. Wenn $S_1 \stackrel{d}{=} S_2$, dann gilt $S_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F}) \Leftrightarrow S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F})$
2. Wenn $S_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F})$, $S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{G})$, dann ist $\mathbf{I}_A S_1 + (1 - \mathbf{I}_A) S_2 \in \mathcal{S}_n(P(A)\mathbf{F} + (1 - P(A))\mathbf{G})$ für $A \in \mathcal{A}$ unabhängig von S_1 und S_2 . Im Speziellen:
 - (a) Wenn $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F})$, dann ist $\mathbf{I}_A S_1 + (1 - \mathbf{I}_A) S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F})$ für $A \in \mathcal{A}$ unabhängig von S_1 und S_2 ;
 - (b) Wenn $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbf{G})$ dann ist $S \in \mathcal{S}_n(\lambda\mathbf{F} + (1 - \lambda)\mathbf{G})$ für $\lambda \in [0, 1]$. Das heißt $\mathcal{S}_n(\mathbf{F}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbf{G}) \subset \mathcal{S}_n(\lambda\mathbf{F} + (1 - \lambda)\mathbf{G})$ für $\lambda \in [0, 1]$.
3. Wenn $S_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F})$ und $S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{G})$ unabhängig sind, dann ist $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n(F_1 \otimes G_1, \dots, F_n \otimes G_n)$.
4. Wenn $S_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F})$ und $S_2 \in \mathcal{S}_m(\mathbf{G})$, dann ist $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_{n+m}(F_1, \dots, F_n, G_1, \dots, G_m)$.
5. $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F}) \Leftrightarrow aS + b \in \mathcal{S}_n(T_{a,b_1}F_1, \dots, T_{a,b_n}F_n)$ für $a, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ und $b = \sum_{i=1}^n b_i$.
6. Sei π eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$, dann gilt $\mathcal{S}_n(\mathbf{F}) = \mathcal{S}_n(\pi(\mathbf{F}))$.
7. Wenn für $k \rightarrow \infty$ und $i = 1, \dots, n$, $F_i^{(k)}$ punktweise gegen F_i konvergiert, $F_i^{(k)} \rightarrow F_i$, dann gilt
 - (a) jedes $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F})$ ist der schwache Grenzwert einer Folge $S_k \in \mathcal{S}_n(F_1^{(k)}, \dots, F_n^{(k)})$;

- (b) jede schwach konvergente Folge $S_k \in \mathcal{S}_n(F_1^{(k)}, \dots, F_n^{(k)})$ hat seinen schwachen Grenzwert $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F})$;
- (c) Wenn $S_k \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F}), k = 1, 2, \dots$, und $S_k \xrightarrow{d} S$, dann ist $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{F})$.

Bemerkung 5.1:

Zusammenfassend kann man sagen, dass die zulässige Risikoklasse $\mathcal{S}_n(\mathbf{F})$ einige schöne Eigenschaften hat, nämlich: die zugehörige Verteilungsklasse $\mathcal{D}_n(\mathbf{F})$ ist eine konvexe Menge (Punkt (2.)); die Summen zulässiger Risiken sind wieder in einer zulässigen Risikoklasse (Punkte (3.) und (4.)); die zulässige Risikoklasse ist affin und Permutations-invariant in Bezug auf Randverteilungen (Punkte (5.) und (6.)); jede zulässige Risikoklasse ist vollständig (Punkt (7. - c)).

Wenn man nun die univariaten Verteilungs-Operationen Addition (+), Skalarmultiplikation (\cdot), Faltung (\otimes), die affine Operation ($T_{a,b}$) und die Konvergenz (\rightarrow) zu der Menge der Verteilungen (elementweise Operationen) erweitert, so können die Punkte (2.), (3.), (5.), (6.) und (7.) aus Satz 5.5 mit Operationen auf Mengen der Form $\mathcal{D}_n(\mathbf{F})$ folgendermaßen geschrieben werden:

2. $\lambda \mathcal{D}_n(\mathbf{F}) + (1 - \lambda) \mathcal{D}_n(\mathbf{G}) \subset \mathcal{D}_n(\lambda \mathbf{F} + (1 - \lambda) \mathbf{G})$ und $\mathcal{D}_n(\mathbf{F}) \cap \mathcal{D}_n(\mathbf{G}) \subset \mathcal{D}_n(\lambda \mathbf{F} + (1 - \lambda) \mathbf{G})$
3. $\mathcal{D}_n(\mathbf{F}) \otimes \mathcal{D}_n(\mathbf{G}) \subset \mathcal{D}_n(F_1 \otimes G_1, \dots, F_n \otimes G_n)$
5. $\mathcal{D}_n(T_{a,b_1} F_1, \dots, T_{a,b_n} F_n) = T_{a,b} \mathcal{D}_n(\mathbf{F})$, mit $b = \sum_{i=1}^n b_i$
6. $\mathcal{D}_n(\mathbf{F}) = \mathcal{D}_n(\pi(\mathbf{F}))$
7. $\mathcal{D}_n(F_1^{(k)}, \dots, F_n^{(k)}) \rightarrow \mathcal{D}_n(\mathbf{F})$ wenn $F_i^{(k)} \rightarrow F_i$

Es bleibt anzumerken, dass die allgemeine Darstellung der zulässigen Risikoklasse ein offenes Problem ist. Die zulässige Risikoklasse wurde aufgrund mehrerer Aspekte genauer betrachtet. Einen äußerst interessanten stellt die Messung eines aggregierten Risikos unter extremen Szenarien dar. Auch wenn die zulässige Risikoklasse nicht allgemein dargestellt werden kann, ist es möglich, sie unter extremen Szenarien mathematisch zu betrachten. Alle zulässigen Risiken von gegebenen Randverteilungen (F_1, \dots, F_n) haben den selben Erwartungswert, sollte er existieren. Somit kann man annehmen, dass es innerhalb der Klasse Variabilität gibt. In weiterer Folge wird diese Variabilität mittels der konvexen Ordnung gemessen. Außerdem werden die extremen Szenarien der Risiken in $\mathcal{S}_n(\mathbf{F})$ im Sinne der konvexen Ordnung behandelt.

5.4.4 Konvexe Ordnung

Definition 5.15:

X und Y seien zwei Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert. X heißt kleiner als Y in **konvexer Ordnung**, $X \prec_{cx} Y$, wenn für jede konvexe Funktion f gilt:

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)].$$

Aus dieser Definition folgt $E[X] = E[Y]$ (wähle hierzu einmal $f = x$ und einmal $f = -x$). Diese Ordnung passt also gut zu der Klasse der zulässigen Risiken, bei der alle Variablen den selben Erwartungswert haben.

Ziel dieses Kapitels wird es sein, Schranken im Sinne der konvexen Ordnung für die Menge $\mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n)$ zu finden. Dazu sei die linksstetige Inverse ϕ^{-1} wie in 85. Es gelte $\phi^{-1}(0) = \inf\{x : \phi(x) > 0\}$.

$\mathbf{X} = (F_1^{-1}(U), \dots, F_n^{-1}(U))$ nennt man komonotones Abhängigkeitsszenario, wobei U eine Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$ sei. Dhane et al. haben in [9] gezeigt (Theorem 8), dass für ein zulässiges aggregiertes Risiko folgende scharfe obere Schranke gilt.

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \prec_{cx} F_1^{-1}(U) + \dots + F_n^{-1}(U) \quad (92)$$

Schwieriger ist die Frage nach einer scharfen unteren Schranke zu beantworten. Die untere Schranke für den Fall $n = 2$ geht auf Hoeffding aus dem Jahre 1940 zurück, wie Tchen (1980) in [23] beschrieben hat und ist mit dem antimonotonen Abhängigkeitsszenario gegeben durch

$$F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(1 - U) \prec_{cx} X_1 + X_2 \quad (93)$$

wobei U wieder eine Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$ ist.

Eine scharfe untere Schranke ist für $n \geq 3$ im Allgemeinen unbekannt. Wang und Wang (2011) haben in [24] eine scharfe untere Schranke für den Fall gefunden, wenn die Randverteilungen ident zu einer monotonen Dichtefunktion sind.

Wenn man sich (93) ansieht, so erkennt man, dass für den Fall $F_1^{-1}(U)$ groß, also U nahe bei 1, $F_2^{-1}(1 - U)$ klein sein muss, also $1 - U$ nahe bei 0. Das bedeutet also, dass die optimale Abhängigkeitsstruktur für eine untere Schranke im Sinne der konvexen Ordnung sehr stark konzentriert sein sollte.

Bevor man eine untere Schranke findet, stellt sich die Frage, ob überhaupt ein minimales Element in einer zulässigen Risikoklasse vorhanden ist. Für $n = 1$ und $n = 2$ existiert für jede Randverteilung, bzw. jedes Paar von Randverteilungen, ein Minimum. Für $n = 3$ wird folgendes Beispiel zeigen, dass ein minimales Element im Sinne der konvexen Ordnung nicht existieren muss.

Beispiel 5.2:

F_1 sei eine diskrete Verteilung auf $\{0, 3, 8\}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit, das heißt für $X \sim F_1$ gilt $P(X = 0) = P(X = 3) = P(X = 8) = 1/3$, F_2 eine diskrete Verteilung auf $\{0, 6, 16\}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit und F_3 sei eine diskrete Verteilung auf $\{0, 7, 13\}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Der Beispielraum $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ sei in drei disjunkte Mengen A_1, A_2, A_3 mit gleicher Wahrscheinlichkeit von $1/3$ aufgeteilt. Es sei $\omega_i \in A_i, i = 1, 2, 3$. Folgende zwei Abhängigkeitsszenarios seien gegeben:

- a)

$$\begin{pmatrix} X_1(\omega_1) & X_2(\omega_1) & X_3(\omega_1) \\ X_1(\omega_2) & X_2(\omega_2) & X_3(\omega_2) \\ X_1(\omega_3) & X_2(\omega_3) & X_3(\omega_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 16 & 0 \\ 0 & 6 & 13 \\ 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- b)

$$\begin{pmatrix} X_1(\omega_1) & X_2(\omega_1) & X_3(\omega_1) \\ X_1(\omega_2) & X_2(\omega_2) & X_3(\omega_2) \\ X_1(\omega_3) & X_2(\omega_3) & X_3(\omega_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 3 & 0 & 13 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

In Beispiel a) ist $X_1 + X_2 + X_3$ auf $\{19, 19, 15\}$ verteilt mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Deshalb gilt $E[(X_1 + X_2 + X_3 - 19)^+] = 0$.

In Beispiel b) ist $X_1 + X_2 + X_3$ auf $\{16, 16, 21\}$ verteilt mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Deshalb gilt $E[(16 - X_1 - X_2 + X_3)^+] = 0$.

Sowohl $g(x) = (x - 19)^+$ als auch $g(x) = (16 - x)^+$ sind konvexe Funktionen und damit es ein minimales Element S im Sinne der konvexen Ordnung in der zulässigen Risikoklasse $\mathcal{S}_3(F_1, F_2, F_3)$ gibt, muss es $E[(S - 19)^+] = 0$ und $E[(16 - S)^+] = 0$ erfüllen. Dasselbe S kann aber diese beiden Erwartungswerte niemals gleichzeitig erfüllen. Somit ist gezeigt, dass ein minimales Element im Sinne der konvexen Ordnung in einer zulässigen Risikoklasse nicht existieren muss.

Es kann gezeigt werden, dass ein minimales Element im Sinne der konvexen Ordnung für eine zulässige Risikoklasse existiert, wenn die Randverteilungen gewisse Bedingungen erfüllen. Zu klären bleibt also, für welche Randverteilungen F_1, \dots, F_n die zulässige Risikoklasse ein minimales Element im Sinne der konvexen Ordnung enthält. Zuerst wird der Fall homogener Risiken betrachtet (also $F_1 = \dots = F_n$) und dann für heterogene Risiken (alle F_i 's sind unterschiedlich).

Untere Schranke im Sinne der konvexen Ordnung für homogene Risiken

F sei eine Verteilungsfunktion auf \mathbb{R}^+ mit endlichem Erwartungswert und n sei eine positive ganze Zahl. In den folgenden beiden Sätzen soll eine untere Schranke im Sinne der konvexen Ordnung für $\mathcal{S}_n(F, \dots, F)$ gefunden werden. Dazu werden diese beiden Funktionen benötigt:

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], H(x) := (n-1)F^{-1}((n-1)x) + F^{-1}(1-x) \quad (94)$$

$$\forall a \in \left[0, \frac{1}{n}\right), D(a) := \frac{n}{1-na} \int_a^{\frac{1}{n}} H(x) dx = n \frac{\int_{(n-1)a}^{1-a} F^{-1}(y) dy}{1-na} \quad (95)$$

Es gelte $D(\frac{1}{n}) = H(\frac{1}{n})$ und $H(0) = +\infty$, wenn der Träger von F unbeschränkt ist. Im Gegensatz zu $H(x)$ ist $D(a)$ immer endlich, denn es gilt $\int_a^{\frac{1}{n}} H(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} H(x) dx = E[X_1]$ und nach Voraussetzung ist der Erwartungswert endlich. Aufgrund der zweiten Gleichheit in 95 kann $D(a)$ auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$D(a) = \sum_{j=1}^n E[X_j | X_j \in [F^{-1}((n-1)a), F^{-1}(1-a)]] \quad (96)$$

denn es gilt $P(X_j \in [F^{-1}((n-1)a), F^{-1}(1-a)]) = 1-na$ und die X_i 's haben alle dieselbe Verteilung.

Somit kann man H als die Summe in einem Szenario sehen, in dem ein großes Risiko mit $n-1$ kleinen Risiken kombiniert ist. D kann wiederum als die Summe in einem Szenario gesehen werden, bei dem die Risiken gemischt sind.

Die Abhängigkeit, um eine untere Schranke im Sinne der konvexen Ordnung zu erhalten, ist so konstruiert, dass für ein großes X_i alle anderen klein sind (das heißt, dass sich alle Komponenten in den Tails befinden) und wenn eines der X_i mittlere Größe hat, wird die durchschnittliche Summe $\sum_i X_i$ wie eine Konstante äquivalent zur bedingten Erwartung (96) behandelt. Für diese Abhängigkeitsstruktur sei der Wahrscheinlichkeitsraum in zwei Teile geteilt, in die Tails (mit Wahrscheinlichkeit na für einen kleinen Wert $a \in [0, \frac{1}{n}]$) und in das Zentrum (mit Wahrscheinlichkeit $1-na$). Somit gibt $H(\cdot)$ die Werte von S in den Tails an und $D(a)$ ist der Wert von S im Zentrum der Verteilung. Dazu sei für $a \in [0, 1/n]$ folgende Zufallsvariable definiert:

$$T_a = H(U/n)I_{\{U \in [0, na]\}} + D(a)I_{\{U \in (na, 1]\}} \quad (97)$$

wobei $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, also eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ ist. In den nächsten beiden Sätzen wird zuerst gezeigt, dass T_a eine untere Schranke im Sinne der konvexen Ordnung ist falls $H(\cdot)$ eine Monotonieeigenschaft

erfüllt. Dann wird die beste untere Schranke gefunden und das schlechteste Abhängigkeitsszenario gezeigt.

Satz 5.6:

Bedingung (A) sei erfüllt:

(A) für ein $a \in [0, \frac{1}{n}]$, ist $H(x)$ nicht steigend auf dem Intervall $[0, a]$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow a^-} H(x) \geq D(a)$, dann gilt

(i) $T_a \prec_{cx} S$ für alle $S \in \mathcal{S}_n(F, \dots, F)$

(ii) $T_u \prec_{cx} T_v$ für alle $0 \leq u \leq v \leq \frac{1}{n}$. Somit ist mittels T_a die präziseste untere Schranke für das größte a das (A) erfüllt gefunden.

Beweis

Da der Beweis für $n = 1$ trivial ist, wird der Fall $n \geq 2$ betrachtet.

Dazu sei folgendes gegeben: $\mathbf{X} \in \mathcal{F}_n(F, \dots, F)$, $S = \mathbf{X}\mathbf{1}_n \in \mathcal{S}_n(F, \dots, F)$ und T_a sei wie in (97). Dann gilt:

$$\begin{aligned} E[T_a] &= \int_0^{na} H(u/n) du + (1 - na)D(a) \\ &\text{mit Substitution } u/n = x \text{ folgt} \\ &= n \int_0^a H(x) dx + n \int_a^{1/n} H(x) dx \\ &= n \int_0^{1/n} ((n-1)F^{-1}((n-1)x) + F^{-1}(1-x)) dx \\ &\stackrel{\text{mit(95)}}{=} n \int_0^1 F^{-1}(x) dx \\ &= E[S]. \end{aligned}$$

Nun seien F_S und F_{T_a} die Verteilungsfunktionen von S bzw. T_a und U_1, \dots, U_n seien $\mathcal{U}[0, 1]$ Zufallsvariablen sodass $F^{-1}(X_i) = U_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Solche Zufallsvariablen existieren stets in einem atomlosen Wahrscheinlichkeitsraum. Wenn gezeigt werden kann, dass

$$\forall c \in [0, 1], \int_c^1 F_{T_a}^{-1}(t) dt \leq \int_c^1 F_S^{-1}(t) dt$$

gilt, dann ist Punkt (i) des Satzes bewiesen. Denn zusammen mit $E[T_a] = E[S]$ folgt dann $T_a \prec_{cx} S$.

Dazu sei $A_S(u) = \bigcup_i \{U_i > 1 - u\}$ und $W(u) = P(A_S(u))$. Daher gilt $u \leq$

$W(u) \leq nu$. Weil alle U_i 's stetig $\mathcal{U}[0, 1]$ verteilt sind und deshalb für $u > s$, $W(u) - W(s) = P(A_S(u) \setminus A_S(s)) \leq n(u - s)$ gilt, ist W stetig und nicht fallend. Für $c \in [0, na]$ sei $u^* = W^{-1}(c)$ und somit gilt $c/n \leq u^* \leq c$ sowie $\{U_i \in [1 - c/n, 1]\} \subset \{U_i \in [1 - u^*, 1]\} \subset A_S(u^*)$. Weil $P(A_S(u^*)) = c$ folgt

$$P(A_S(u^*) \setminus \{U_i \in [1 - c/n, 1]\}) = c - c/n = P(U_i \in [0, (n-1)c/n]) \quad (98)$$

Weil die beiden Mengen in (98) das gleiche Maß haben und $X_i = F^{-1}(U_i)$ nicht steigend in U_i ist, gilt

$$E[I_{\{U_i \in [0, (n-1)c/n]\}} X_i] \leq E[I_{A_S(u^*) \setminus \{U_i \in [1-c/n, 1]\}} X_i] \quad (99)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} E[I_{\{U \leq c\}} T_a] &= E[I_{\{U \leq c\}} H(U/n)] \\ &\stackrel{(a)}{=} n \int_0^{c/n} ((n-1)F^{-1}((n-1)x) + F^{-1}(1-x)) dx \\ &\stackrel{(b)}{=} n \int_0^{\frac{(n-1)c}{n}} F^{-1}(t) dt + n \int_{1-c/n}^1 F^{-1}(t) dt \\ &= nE[(I_{\{U_i \in [0, (n-1)c/n]\}} + I_{\{U_i \in [1-c/n, 1]\}}) X_i] \\ &\leq nE[(I_{A_S(u^*) \setminus \{U_i \in [1-c/n, 1]\}} + I_{\{U_i \in [1-c/n, 1]\}}) X_i] \end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt aus (99). Die Gleichheit (a) folgt mit Substitution $u/n = x$, die Gleichheit (b) folgt mit Substitution $(n-1)x = t$ für das erste Integral und $1-x = t$ für das zweite Integral. Zusammenfassend erhält man $E[I_{\{U \leq c\}} T_a] \leq nE[I_{A_S(u^*)} X_i] = E[I_{A_S(u^*)} S]$, im Endeffekt also

$$E[I_{\{U \leq c\}} T_a] \leq E[I_{A_S(u^*)} S] \quad (100)$$

$H(x)$ ist auf dem Intervall $[0, a]$ nicht steigend und laut Bedingung (A) gilt $\lim_{x \rightarrow a^-} H(x) \geq D(a)$. Deshalb gilt für ein $c \in [0, na]$

$$E[I_{\{U \leq c\}} T_a] = E[I_{\{U \leq c\}} H(U/n)] = \int_{1-c}^1 F_{T_a}^{-1}(t) dt. \quad (101)$$

Weil $P(A_S(u^*)) = c$ gilt außerdem

$$E[I_{A_S(u^*)} S] \leq \int_{1-c}^1 F_S^{-1}(t) dt. \quad (102)$$

Aus (100), (101) und (102) folgt nun für ein beliebiges $c \in [0, na]$

$$\int_{1-c}^1 F_{T_a}^{-1}(t)dt \leq \int_{1-c}^1 F_S^{-1}(t)dt. \quad (103)$$

In weiterer Folge sei für $x \in [0, 1 - na]$ folgende Funktion gegeben: $G(x) = \int_x^1 F_S^{-1}(t)dt - \int_x^1 F_{T_a}^{-1}(t)dt$. Da $\int_x^1 F_S^{-1}(t)dt$ konkav ist und $F_{T_a}^{-1}(t) = D(a)$ für $t \in [0, 1 - na)$ eine Konstante ist, ist $G(x)$ konkav auf dem Intervall $[0, 1 - na)$. Weil G konkav ist, $G(0) = E[S] - E[T_a] = 0$, und $G(1 - na) \geq 0$ aufgrund von (103), gilt $G(x) \geq 0$ auf dem Intervall $[0, 1 - na]$. Daher

$$\int_c^1 F_{T_a}^{-1}(t)dt \leq \int_c^1 F_S^{-1}(t)dt \quad (104)$$

für ein $c \in [0, 1]$. Somit folgt $T_a \prec_{cx} S$ und damit ist (i) gezeigt.

Um Punkt (ii) zu zeigen sei auf das Theorem 2.8 in Bäuerle und Müller (2006) [2] verwiesen. \square

Somit ist gezeigt, dass T_a aus (97) eine untere Schranke im Sinne der konvexen Ordnung für homogene Risiken ist. Punkt (ii) aus Satz 5.6 zeigt, dass die präziseste untere Schranke im Sinne der konvexen Ordnung auf der Menge $\mathcal{S}_n(F, \dots, F)$ durch T_a mit dem größtmöglichen a gegeben ist.

Um zu gewährleisten, dass die Schranke scharf ist, benötigt man den Begriff der vollständigen Mischbarkeit (engl.: „complete mixability“).

Definition 5.16:

Eine Verteilungsfunktion F auf \mathbb{R} heißt ***n-vollständig mischbar***, wenn n Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n existieren, die alle identisch F -verteilt sind, sodass

$$X_1 + \dots + X_n = n\mu$$

gilt, für ein $\mu \in \mathbb{R}$, das man „Zentrum“ von F nennt. Das heißt, die Summe $X_1 + \dots + X_n$ ist eine Konstante. Eine Verteilungsfunktion F auf \mathbb{R} ist ***n-vollständig mischbar auf einem Intervall I*** , wenn die bedingte Verteilung von F auf I *n-vollständig mischbar* ist.

Bemerkung 5.2:

Weil die Verteilung F einen endlichen Erwartungswert hat, wenn F *n-vollständig mischbar* ist, ist das Zentrum μ eindeutig und ident zum Erwartungswert.

Laut Bernard, Jiang und Wang [3] ist F *n-vollständig mischbar* äquivalent zu $nE[X] \in \mathcal{S}_n(F, \dots, F)$ mit $X \sim F$.

Wie in Satz 5.6 gezeigt, will man das größt mögliche a finden, um die beste untere Schranke zu erhalten. Dazu sei c_n folgendermaßen definiert

$$c_n := \inf \left\{ c \in \left[0, \frac{1}{n} \right] : H(c) \leq D(c) \right\} \quad (105)$$

c_n ist das größt mögliche a , das $\lim_{x \rightarrow a^-} H(x) \geq D(a)$ erfüllt. Sollte F eine stetige Verteilung sein, gilt $H(c_n) = D(c_n)$. Andererseits ist c_n genau das kleinst mögliche a , sodass F auf dem Intervall $I = [F^{-1}((n-1)c_n), F^{-1}(1-c_n)]$ die Erwartungswert-Eigenschaft, die für die vollständige Mischbarkeit notwendig ist, erfüllt.

Satz 5.7:

Es sei Bedingung (A') gegeben:

(A') $H(x)$ ist auf dem Intervall $[0, c_n]$ nicht steigend, wobei c_n durch (105) gegeben ist.

Es gilt $T_{c_n} \in \mathcal{S}_n(F, \dots, F)$, das bedeutet, dass die Schranke T_{c_n} scharf ist, wenn Bedingung (B) erfüllt ist:

(B) F ist n -vollständig mischbar auf dem Intervall $I = [F^{-1}((n-1)c_n), F^{-1}(1-c_n)]$.

Ein Beweis für diesen Satz ist in [3] zu finden. Ein weiterer Satz, der hier nicht bewiesen wird, zeigt die Notwendigkeit und Hinlänglichkeit der Bedingung (B).

Satz 5.8:

$H(x)$ sei auf dem Intervall $[0, c_n]$ streng fallend, dann gilt

- (i) $T_{c_n} \in \mathcal{S}_n(F, \dots, F)$ genau dann wenn (B) erfüllt ist.
- (ii) $T_a \notin \mathcal{S}_n(F, \dots, F)$ für alle $a < c_n$.

Zusammenfassend hat man nun folgende zwei scharfe Schranken für ein aggregiertes Risiko $S \in \mathcal{S}_n(F, \dots, F)$:

$$T_{c_n} \prec_{cx} S \prec_{cx} nF^{-1}(U)$$

mit $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$.

Die optimale Struktur für \mathbf{X} um $X_1 + \dots + X_n = T_{c_n}$ zu erhalten wird folgendermaßen beschrieben. Der Wahrscheinlichkeitsraum wird in zwei Teile geteilt und es sei $I = [F^{-1}((n-1)c_n), F^{-1}(1-c_n)]$ für c_n wie in (105):

- $\forall j$: Wenn X_j groß ist, dann ist jedes X_i für $i \neq j$ klein und (X_i, X_j) ist antimonoton. Es sei $A = \{X_i : X_i \text{ liegt im Tail der Verteilung}\} = \{X_i : X_i \notin I\}$. Hierfür gilt $P(A) = nc_n$.

- $\forall j$: Wenn X_j mittlere Größe hat, dann ist jedes X_i für $i \neq j$ auch von mittlerer Größe und die Summe $X_1 + \dots + X_n$ ist eine Konstante. Dazu sei $B = \{X_i : X_i \text{ liegt im Zentrum der Verteilung}\} = \{X_i : X_i \in I\}$. Hierfür gilt $P(B) = 1 - nc_n$.

Die folgende Proposition zeigt, unter welchen Voraussetzungen die Bedingungen der beiden obigen Sätze (5.6 und 5.8) erfüllt sind.

Proposition 5.3:

- (i) Wenn $H(x)$ konvex ist, dann ist es auf dem Intervall $[0, c_n]$ nicht steigend und Bedingung (A') ist erfüllt.
- (ii) Wenn F auf dem Intervall $I = [F^{-1}((n-1)c_n), F^{-1}(1-c_n)]$ eine nicht steigende bedingte Dichte hat, dann ist (B) erfüllt.
- (iii) Wenn F eine nicht steigende Dichte hat, dann sind (A') und (B) erfüllt.
- (iv) Wenn F^{-1} über $[0,1)$ zweimal stetig differenzierbar ist und $\lim_{x \rightarrow 1+} [F^{-1}]'(x) = +\infty$, dann ist $H(x)$ in einer Umgebung von 0 fallend und somit ist (A) für einen kleinen Wert a erfüllt.

Beweis

- (i) $\lim_{x \rightarrow c_n+} H(x)$ ist nicht weniger als das Mittel von $H(x)$ auf dem Intervall $[c_n, \frac{1}{n}]$:
 $\lim_{x \rightarrow c_n+} H(x) = \lim_{x \rightarrow c_n+} [(n-1)F^{-1}((n-1)c_n) + F^{-1}(1-c_n)]$
Mittel von $H(x)$ auf $[c_n, \frac{1}{n}]$: $\frac{1}{1/n-c_n} \int_{c_n}^{1/n} H(x) dx$
für $x = c_n$ gilt $H(c_n) = D(c_n)$ und somit gilt:

$$\frac{n}{1-nx} \int_{c_n}^{1/n} H(x) dx \geq \frac{1}{\frac{1}{n}-c_n} \int_{c_n}^{1/n} H(x) dx, \text{ denn:}$$

$$\frac{n}{1-nx} \geq \frac{1}{\frac{1}{n}-c_n}$$

$$\frac{1}{1-nx} \geq \frac{1}{1-nc_n}$$

Somit ist $H(x)$ in einer linken Umgebung von c_n nicht steigend. Das bedeutet, dass $H(x)$ aufgrund der Konvexität von $H(\cdot)$ auf $[0, c_n]$ nicht steigend ist.

- (ii) Dieser Punkt folgt aus dem Korollar 2.9 in Wang und Wang (2011) [24].

(iii) Wenn F konkav ist, dann ist F^{-1} konvex und somit auch $H(x)$. Die Aussage folgt nun aus den Punkten (i) und (ii).

(iv) Es gilt

$$H'(x) = (n-1)^2[F^{-1}]'((n-1)x) - [F^{-1}]'(1-x)$$

Für $x \rightarrow 0$ strebt $[F^{-1}]'(1-x)$ gegen $+\infty$ und $(n-1)^2[F^{-1}]'((n-1)x)$ ist beschränkt, weil F^{-1} über $[0,1)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Deshalb ist $H'(x) \leq 0$ in einer Umgebung von 0. \square

Beispiel 5.3:

- Obwohl für eine Gleichverteilung F die Funktion $H(x)$ steigend ist, erhält man $c_n = 0$ und somit sind (A') und (B) erfüllt, denn die Dichte von F ist eine nicht steigende Funktion. Somit ist $T_0 = E[S]$ die scharfe untere Schranke im Sinne der konvexen Ordnung über $\mathcal{S}_n(F, \dots, F)$, denn $\mathcal{U}[0, 1]$ ist n -vollständig mischbar.
- Die Pareto- und Gamma-Verteilung (mit Parameter $\alpha \leq 1$) erfüllen (A') und (B), weil sie nicht steigende Dichtefunktionen haben.

Untere Schranke im Sinne der konvexen Ordnung für heterogene Risiken

Um nun eine untere Schranke im Sinne der konvexen Ordnung für heterogene Risiken zu finden, seien n Verteilungen F_1, F_2, \dots, F_n auf \mathbb{R}^+ mit endlichem Erwartungswert gegeben. Man will eine untere Schranke für die heterogene Menge $\mathcal{S}_n(F_1, F_2, \dots, F_n)$ von zulässigen Risiken finden. Dazu sei

$$F = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i$$

$H(\cdot)$ und $D(\cdot)$ seien durch (94) bzw. (95) gegeben. Auch T_a sei wie bei homogenen Risiken durch (97) gegeben. Außerdem wird wie in Satz 5.6 Bedingung (A) verwendet. Somit ergibt sich eine Verallgemeinerung von Satz 5.6:

Satz 5.9:

- (i) Die zulässige Risikoklasse für heterogene Risiken ist eine Teilmenge der zulässigen Risikoklasse für homogene Risiken:
- $$\mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n) \subset \mathcal{S}_n(F, \dots, F)$$

(ii) Bedingung (A) sei erfüllt:

(A) für ein $a \in [0, \frac{1}{n}]$, ist $H(x)$ nicht steigend auf dem Intervall $[0, a]$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow a^-} H(x) \geq D(a)$, dann gilt:

$T_a \prec_{cx} S$ für alle $S \in \mathcal{S}_n(F_1, F_2, \dots, F_n)$

Beweis

(i) Seien $\sigma_k, k = 1, 2, \dots, n!$ alle möglichen Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$. Aufgrund von Satz 5.5 Punkt 2. (b) und 4. gilt

$$\mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n) = \bigcap_{k=1}^{n!} \mathcal{S}_n(\sigma_k((F_1, \dots, F_n))) \subset \mathcal{S}_n \left(\sum_{k=1}^{n!} \lambda_k \sigma(F_1, \dots, F_n) \right)$$

wobei $\lambda_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n!$ und $\sum_{k=1}^{n!} \lambda_k = 1$. Wenn man $\lambda_k = \frac{1}{n!}$ für alle k wählt, erhält man $\mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n) \subset \mathcal{S}_n(F, \dots, F)$.

(ii) Mit Satz 5.6 und (i) gilt $T_a \prec_{cx} S$ für alle $S \in \mathcal{S}_n(F, \dots, F)$ und somit gilt $T_a \prec_{cx} S$ für alle $S \in \mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n)$. \square

Das bedeutet, dass ein Risiko mit den Randverteilungen F_1, \dots, F_n zulässig ist, wenn es mit den Randverteilungen F, \dots, F zulässig ist. Zu zeigen, dass die Schranke scharf ist, ist im Falle von heterogenen Risiken viel schwieriger als bei homogenen Risiken. Im Allgemeinen kann es sein, dass die Menge $\mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n)$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{S}_n(F, \dots, F)$ ist und daher könnte es sein, dass T_{c_n} zu $\mathcal{S}_n(F, \dots, F)$ gehört, aber nicht zu $\mathcal{S}_n(F_1, \dots, F_n)$. Numerische Auswertungen in [3] zeigen, dass die Schranke präziser wird, wenn die Randverteilungen F_1, F_2, \dots, F_n ähnlich sind.

6 Auswirkungen auf ein Portfolio bei Aggregation von Markt- und Kreditrisiko

Bislang wurden in dieser Arbeit Kredit- und Marktrisiko stets separat behandelt. Dieses abschließende Kapitel soll dazu dienen, zu untersuchen, wie das Kreditrisiko und das Marktrisiko einander beeinflussen. Böcker und Hillebrand (2007) [5] haben dies anhand von einem Faktormodell im Sinne von Merton für das Kreditrisiko und einem linearen Faktormodell für das Marktrisiko untersucht. Sie haben die Korrelation der Risikofaktoren und Schranken für diese Korrelation ermittelt.

Wie schon erwähnt, ist es im Risikomanagement von großer Wichtigkeit, zu ermitteln, wieviel Kapital für alle potentiellen Verluste bereitgestellt werden muss. Böcker und Hillebrand haben nicht nur das aggregierte Risiko eines Risikotyps (Kreditrisiko) untersucht, sondern einen zweiten Risikotyp, das Marktrisiko, hinzugenommen. Die Aggregation der beiden Risikotypen geschieht in drei Schritten.

Zuerst wird jedes individuelle Risiko einem Risikotyp zugeordnet. Im zweiten Schritt wird ein aggregiertes Risikomaß für jeden Risikotyp berechnet. Abschließend werden die voraggregierten Risikozahlen kombiniert und so erhält man eine übergreifende Zahl, das sogenannte aggregierte Risikokapital.

Die einfachste Möglichkeit, das aggregierte Risikokapital zu erhalten, ist die Summierung aller voraggregierten Risikomaße. Banken und Versicherungen sind aber meist daran interessiert, dieses Risikokapital möglichst klein zu halten. Deshalb wurden Methoden zur Berechnung dieses Risikokapitals entwickelt, die die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Risiken berücksichtigen. Wie schon erwähnt, haben Böcker und Hillebrand in [5] ein Merton-ähnliches Faktormodell für das Kreditrisiko und ein lineares Faktormodell für das Marktrisiko kombiniert. Beide Modelle arbeiten mit einer Menge Y makroökonomischer Faktoren, $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$, deren Faktorgewichte auch 0 sein dürfen, sodass ein Risikotyp nur von einer Teilmenge von Y beeinflusst wird.

Böcker und Hillebrand untersuchen zuerst die lineare Korrelation zwischen den beiden Risikotypen, die sogenannte „Inter-Risiko Korrelation“. Im Falle von normalverteilten und heavy-tailed Risikofaktoren ist es ihnen gelungen Ergebnisse in geschlossener Form zu erhalten. Sie geben obere Schranken für die Inter-Risiko Korrelation an, die nur von Parametern abhängig sind, die für Kreditportfolios charakteristisch sind (Assetkorrelation oder Ratingstruktur).

Risikoaggregation kann auch durch das Konzept der Copulas sehr gut behandelt werden. Böcker und Hillebrand zeigen, dass ihr Modell im Falle eines großen homogenen Portfolios zu einer Gauss'schen Copula führt.

6.1 Modelle für Kredit- und Marktrisiko

Die weitere Ausarbeitung folgt Böcker und Hillebrand (2007) [5].

6.1.1 Faktormodell für Kreditrisiko

Als Grundlage zur Beschreibung des Kreditportfolioverlustes verwenden Böcker und Hillebrand ein Modell, bei dem die Kreditqualität, bzw. das Ausfallverhalten des Schuldners durch einen Asset-Wert Prozess beschrieben wird. Wenn man nun annimmt, dass im Portfolio n Kreditnehmer sind, dann wird der Ausfall des Schuldners i durch eine Bernoulli-Zufallsvariable, $L_i, i = 1, \dots, n$, beschrieben. Es gilt $P(L_i = 1) = p_i$ und $P(L_i = 0) = 1 - p_i$. Somit bezeichnet p_i die Ausfallswahrscheinlichkeit des Schuldners i . Wie im Merton-Modell gesehen, spricht man von einem Ausfall, wenn der Assetwert Log-Return A_i unter eine bestimmte Schranke D_i fällt. Deshalb gilt:

$$L_i = 1_{\{A_i < D_i\}}, i = 1, \dots, n \quad (106)$$

Für den Portfolioverlust gilt daher:

$$L^{(n)} = \sum_{i=1}^n e_i L_i. \quad (107)$$

wobei e_i das Exposure bei Ausfall von Schuldner i angibt. Das bedeutet, dass bei einem Kreditportfolio mit n Krediten der Gesamtportfolioverlust durch n Realisationen des Asset Wertes A_i gesteuert wird. Da ein Kreditportfolio in der Regel sehr groß ist, hat man Interesse daran, die Dimension zu reduzieren. Dies wird in [5] mithilfe eines Faktor-Modells bewerkstelligt, das in Finanzinstituten weit verbreitet ist und auch in Softwarepaketen für Kreditrisiko implementiert ist.

Definition 6.1 (Normal-Faktor-Modell für Kreditrisiko):

Sei $Y = (Y_1, \dots, Y_K)$ ein K -dimensionaler Zufallsvektor von K makroökonomischen Faktoren mit multivariater Standardnormalverteilung. Es wird angenommen, dass jedes $A_i, i = 1, \dots, n$, linear von $Y_k, k = 1, \dots, K$, und von einem standardnormalverteilten Faktor (noise term) ϵ_i , der unabhängig von

allen Y_k ist, abhängt:

$$A_i = \sum_{k=1}^K \beta_{ik} Y_k + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2} \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (108)$$

wobei die Faktorladungen $R_i^2 := \sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2 \in [0, 1]$ erfüllen. R_i^2 ist der Teil der Varianz der A_i , der durch die Faktoren Y_k erklärt wird.

In den folgenden Anmerkungen werden einige Eigenschaften des Normal-Faktor-Modells präsentiert, die in weiterer Folge benötigt werden.

Bemerkung 6.1:

i) Aus (108) folgt, dass die Log>Returns (A_1, \dots, A_n) standardnormalverteilt sind mit Korrelation

$$\rho_{i,j} := \text{corr}(A_i, A_j) = \sum_{k=1}^K \beta_{ik} \beta_{jk}, \quad i = 1, \dots, n \quad (109)$$

$\rho_{i,j}$ wird als Assetkorrelation zwischen A_i und A_j bezeichnet.

ii) Der Ausfallspunkt D_i für den Schuldner i ist folgendermaßen mit der Ausfallswahrscheinlichkeit p_i verbunden

$$D_i = \Phi^{-1}(p_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

iii) Die gemeinsame Ausfallswahrscheinlichkeit zweier Schuldner i und j ist gegeben durch

$$p_{i,j} := P(L_i = 1, L_j = 1) = P(A_i \leq D_i, A_j \leq D_j) = \begin{cases} \Phi_{\rho_{ij}}(D_i, D_j), & i \neq j \\ p_i, & i = j \end{cases} \quad (110)$$

wobei $\Phi_{\rho_{ij}}$ die Verteilungsfunktion der bivariaten Standardnormalverteilung mit Korrelation ρ_{ij} wie in (109) ist. Die Ausfallskorrelation zweier Schuldner i und j ist gegeben durch

$$\text{corr}(L_i, L_j) = \frac{p_{ij} - p_i p_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)}}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

iv) Bedingt auf eine Realisation $y = (y_1, \dots, y_K)$ der Faktoren Y , sind die Ausfälle verschiedener Schuldner unabhängig. Die bedingte Auffallswahrscheinlichkeit ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 p_i(y) &= P(L_i = 1 | Y = y) \\
 &= P\left(\sum_{k=1}^K \beta_{ik} y_k + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2} \epsilon_i \leq D_i\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{D_i - \sum_{k=1}^K \beta_{ik} y_k}{\sqrt{1 - \sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2}}\right)
 \end{aligned} \tag{111}$$

Die Annahme, dass die Faktoren Y_k , $k = 1, \dots, K$ multivariat normalverteilt sind und somit auch die Asset Werte A_i , ist insofern gefährlich, weil die Normalverteilung light tails hat und somit starke Veränderungen der makroökonomischen Faktoren unterschätzt und in Folge dessen das gesamte Risiko. „Normal variance Mischverteilungen“ lassen heavier tails zu. Bei diesen Modellen ist die Kovarianzstruktur der A_i durch eine positive Mischvariable W gestört. Folgendes Modell ist diesbezüglich beim Kreditrisiko sehr interessant.

Definition 6.2 (Schockmodell für Kreditrisiko):

$Y = (Y_1, \dots, Y_K)$ sei ein K -dimensionaler Zufallsvektor makroökonomischer Faktoren mit multivariater Standardnormalverteilung. Die Annahme im Schockmodell ist dann, dass jeder standardisierte Assetwert Log-Return \hat{A}_i , $i = 1, \dots, n$ geschrieben werden kann als

$$\hat{A}_i = W_L \cdot \sum_{k=1}^K \beta_{ik} Y_k + W_L \cdot \sqrt{1 - \sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2} \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{112}$$

mit $W_L = \sqrt{\nu_L / S_{\nu_L}}$ wobei S_{ν_L} eine $\chi_{\nu_L}^2$ verteilte Zufallsvariable mit ν_L Freiheitsgraden, die unabhängig von allen Y_k sowie von ϵ_i ist.

In obiger Definition kann W_L als globaler Schock interpretiert werden, der die Varianzen aller Faktoren steuert.

Bemerkung 6.2:

i) Wenn (X_1, \dots, X_n) ein standardisierter multinormaler Vektor mit Kovarianzmatrix R ist und S_{ν_L} eine χ^2 -Zufallsvariable mit ν_L Freiheitsgraden ist, dann hat $(X_1, \dots, X_n) / \sqrt{S_{\nu_L} / \nu_L}$ eine multivariate t -Verteilung mit Korrelationsmatrix R und ν_L Freiheitsgraden. Somit folgt aus

(108) und (112), dass der Vektor der standardisierten Assetwert Log>Returns $(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n)$ t -verteilt mit ν_L Freiheitsgraden ist und dieser die selbe Korrelation $\rho_{i,j}$ wie das Normal-Faktor Modell in (109) hat.

ii) Der Ausfallspunkt \hat{D}_i für den Schuldner i ist folgendermaßen mit der Ausfallswahrscheinlichkeit p_i verbunden

$$\hat{D}_i = t_{\nu_L}^{-1}(p_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (113)$$

wobei t_{ν_L} für die Verteilungsfunktion der Student'schen t -Verteilung mit ν_L Freiheitsgraden steht.

iii) Die gemeinsame Ausfallswahrscheinlichkeit zweier Schuldner i und j ist gegeben durch

$$\hat{p}_{i,j} = t_{\nu_L; \rho_{i,j}}(\hat{D}_i, \hat{D}_j), \quad i = 1, \dots, n \quad (114)$$

wobei $t_{\nu_L; \rho_{i,j}}$ für die Standard bivariate Student'sche t -Verteilungsfunktion mit Korrelation $\rho_{i,j}$ aus (109) und ν_L Freiheitsgraden steht.

6.1.2 Faktormodell für Marktrisiko

Ganz allgemein versteht man unter Marktrisiko den potentiellen Verlust, der durch Aktivitäten des Handelns am Finanzmarkt zustande kommt. Dabei ist man unter anderem dem Zinsrisiko, dem Risiko im Devisenhandel oder Änderungen der Equity Preise ausgesetzt.

Böcker und Hillebrand nehmen an, dass das Marktrisiko voraggregiert ist und der Gesamtverlust somit durch eine eindimensionale Zufallsvariable Z , bzw. \hat{Z} angegeben werden kann. Diese Zufallsvariable kann als bankweite aggregierte Gewinn- und Verlustverteilung, die sich aufgrund von Änderungen zuvor genannter Marktvariablen ergibt, angesehen werden.

Wie beim Kreditrisiko sollen auch hier die Änderungen durch die Faktoren Y_k , $k = 1, \dots, K$, erklärt werden. Wenn die voraggregierte Gewinn- und Verlustverteilung durch eine Normalverteilung beschrieben werden kann, dann ist folgendes Faktormodell eine gute Wahl und kann für die Risikoaggregation verwendet werden.

Definition 6.3 (Normal-Faktor-Modell für Marktrisiko):

Z sei eine Zufallsvariable, die den voraggregierten Gewinn und Verlust aufgrund des Marktrisikos beschreibt. Dann ist das lineare Faktormodell gegeben durch

$$Z = -\sigma \left(\sum_{k=1}^K \gamma_k Y_k + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^K \gamma_k^2 \eta} \right), \quad (115)$$

mit $\sum_{k=1}^K \gamma_k^2 \in [0, 1]$. Die makroökonomischen Faktoren $Y_k, k = 1, \dots, K$ sind die gleichen wie in Definition 6.1. η ist ein standardnormal-verteilter, idiosynkratischer Faktor, der sowohl von Y_k als auch von $\epsilon_i, i = 1, \dots, n$, aus (108) unabhängig ist und σ ist die Standardabweichung von Z .

Wie schon einleitend erwähnt, dürfen die Faktorgewichte β_{ik} im Kreditrisiko Modell und γ_k im Marktrisiko Modell den Wert 0 annehmen.

Definition 6.4 (Gemeinsames Normal-Faktor-Modell für Kredit- und Marktrisiko):

$Y = (Y_1, \dots, Y_K)$ sei ein Zufallsvektor makroökonomischer Faktoren mit multivariater Standardnormalverteilung. Der Kreditportfolioverlust $L^{(n)}$ sei gegeben durch (107) und die Assetwert Log>Returns $A_i, i = 1, \dots, n$, seien wie in (108). Z sei der voraggregierte Gewinn und Verlust aufgrund des Marktrisikos, welcher durch (115) modelliert wird. Wenn die Faktoren ϵ_i für $i = 1, \dots, n$ des Kreditmodells unabhängig von η sind, dann nennt man $(L^{(n)}, Z)$ das **gemeinsame Normalfaktormodell für Kredit- und Marktrisiko**.

Wie schon beim Kreditrisiko, soll auch im Falle des Marktrisikos das Schock-Modell vorgestellt werden, das heavy tails bei der Markt - Gewinn- und Verlustverteilung zulässt.

Definition 6.5 (Schock-Modell für Marktrisiko):

\hat{Z} sei eine Zufallsvariable, die den Gewinn- und Verlust aufgrund des Marktrisikos beschreibt. Dann ist das Schock-Modell gegeben durch

$$\hat{Z} = -\sigma \left(W_Z \cdot \sum_{k=1}^K \gamma_k Y_k + W_Z \cdot \sqrt{1 - \sum_{k=1}^K \gamma_k^2} \eta \right), \quad (116)$$

mit $W_Z = \sqrt{\nu_Z / S_{\nu_Z}}$ und S_{ν_Z} ist eine $\chi_{\nu_Z}^2$ verteilte Zufallsvariable mit ν_Z Freiheitsgraden, die unabhängig von allen Y_k sowie von η ist.

Definition 6.6 (Gemeinsames Schock-Modell für Kredit- und Marktrisiko):

$Y = (Y_1, \dots, Y_K)$ sei ein K -dimensionaler Zufallsvektor makroökonomischer Faktoren mit multivariater Standardnormalverteilung. Der Kreditportfolioverlust sei gegeben durch (107), welcher nun durch $\hat{L}^{(n)}$ bezeichnet wird und die Assetwert Log>Returns \hat{A}_i für $i = 1, \dots, n$ seien durch das Schockmodell (112) modelliert mit der Schockvariable W_L . Des weiteren sei \hat{Z} der voraggregierte Gewinn und Verlust aufgrund des Marktrisikos modelliert durch (116) mit Schockvariable W_Z .

- *Unabhängige Schocks*

Wenn die idiosynkratischen Faktoren $\epsilon_i, i = 1, \dots, n$ des Kreditmo-

dells unabhängig von η sind und W_L unabhängig von W_Z , dann nennt man $(\hat{L}^{(n)}, \hat{Z})$ das **unabhängige Schockmodell für Kredit- und Marktrisiko**.

- *Gemeinsame Schocks*

Wenn die idiosynkratischen Faktoren ϵ_i , $i = 1, \dots, n$ des Kreditmodells unabhängig von η sind und man fordert

$$W_L \equiv W_Z =: W$$

dann nennt man $(\hat{L}^{(n)}, \hat{Z})$ das **gemeinsame Schockmodell für Kredit- und Marktrisiko**.

6.2 Inter-Risiko Korrelation

6.2.1 Normal-Faktor Modell

In diesem Abschnitt soll nun die Abhängigkeit zwischen dem Kreditrisiko $L^{(n)}$ und dem Marktrisiko Z bezüglich der makroökonomischen Faktoren $Y = Y_1, \dots, Y_k$ untersucht werden. Wie schon zuvor in dieser Arbeit erwähnt, ist die lineare Korrelation ein sehr beliebtes Abhängigkeitsmaß. Diese sei hier noch einmal definiert:

$$\text{corr}(L^{(n)}, Z) = \frac{\text{cov}(L^{(n)}, Z)}{\sqrt{\text{Var}(L^{(n)})} \sqrt{\text{Var}(Z)}}$$

Wenn man in der Lage ist, die lineare Korrelation in geschlossener Form auszudrücken, so kann man auch die lineare Abhängigkeitsstruktur zwischen Markt- und Kreditrisiko analytisch untersuchen.

Zuerst soll die lineare Korrelation für die Normal-Faktor-Modelle betrachtet werden.

Satz 6.1:

Der Verlust des Kreditportfolios $L^{(n)}$ und das Marktrisiko Z seien wie in den Definitionen 6.1 und 6.3 für die Normal-Faktor-Modelle gegeben. Dann ist die lineare Korrelation zwischen $L^{(n)}$ und Z gegeben durch

$$\text{corr}(L^{(n)}, Z) = \frac{\sum_{i=1}^n r_i e_i \exp(-\frac{1}{2} D_i^2)}{\sqrt{2\pi \text{Var}(L^{(n)})}} \quad (117)$$

mit

$$r_i := \text{corr}(A_i, Z) = \sum_{k=1}^K \beta_{ik} \gamma_k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (118)$$

und

$$\text{Var}(L^{(n)}) = \sum_{i,j=1}^n e_i e_j (p_{ij} - p_i p_j) \quad (119)$$

wodurch die Varianz des Kreditportfolios gegeben ist.

Beweis

Um die Korrelation $\text{corr}(L^{(n)}, Z)$ auszudrücken, betrachte man zuerst die Kovarianz zwischen $L^{(n)}$ und Z . Mit $E(Z) = 0$, Gleichung (107) und der Tatsache, dass η in (115) unabhängig von Y_k , $k = 1, \dots, K$, und somit auch unabhängig von L_i ist, kann man für die Kovarianz folgendes schreiben:

$$\text{cov}(L^{(n)}, Z) = E(ZL^{(n)}) = \sum_{i=1}^n e_i E(ZL_i) = -\sigma \sum_{i=1}^n e_i \sum_{k=1}^K \gamma_k E(Y_k L_i). \quad (120)$$

Nun soll der Erwartungswert $E(Y_k L_i)$ berechnet werden. Wenn man auf $Y_k = y_k$ bedingt und das Gesetz der iterierten Erwartung ($E(Y) = E_X(Y|X)$) anwendet, dann erhält man

$$\begin{aligned} E(Y_k L_i) &= E(Y_k L_i(Y_1, \dots, Y_K)) \\ &= E(E(Y_k L_i(Y_1, \dots, Y_K) | Y_k)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(Y_k L_i(Y_1, \dots, Y_K) | Y_k = y_k) d\Phi(y_k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(y_k L_i(Y_1, \dots, y_k, \dots, Y_K)) d\Phi(y_k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_k E(L_i(Y_1, \dots, y_k, \dots, Y_K)) d\Phi(y_k) \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Mit $E(L_i) = P(L_i = 1)$ folgt

$$\begin{aligned} E(Y_k L_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_k P(L_i(Y_1, \dots, y_k, \dots, Y_K) = 1) d\Phi(y_k) \\ &\stackrel{(111)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y_k P\left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K \beta_{il} Y_l + \beta_{ik} y_k + \sqrt{1 - \sum_{j=1}^K \beta_{ij}^2} \epsilon_i \leq D_i\right) d\Phi(y_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} y_k P \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K \beta_{il} Y_l + \sqrt{1 - \sum_{j=1}^K \beta_{ij}^2} \epsilon_i \leq D_i - \beta_{ik} y_k \right) d\Phi(y_k) \\
&=: \int_{-\infty}^{\infty} y_k P(X \leq D_i - \beta_{ik} y_k) d\Phi(y_k)
\end{aligned}$$

X ist hier normalverteilt mit Varianz $Var(X) = 1 - \beta_{ik}^2$. Daher folgt

$$E(Y_k L_i) = \int_{-\infty}^{\infty} y_k \Phi \left(\frac{D_i - \beta_{ik} y_k}{\sqrt{1 - \beta_{ik}^2}} \right) d\Phi(y_k),$$

weil die Ableitung der Dichtefunktion ϕ der Standardnormalverteilung gegeben ist durch $\phi'(y) = -y\phi(y)$ folgt für das Integral mittels partieller Integration

$$E(Y_k L_i) = -\frac{\beta_{ik}}{\sqrt{1 - \beta_{ik}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} y_k \phi \left(\frac{D_i - \beta_{ik} y_k}{\sqrt{1 - \beta_{ik}^2}} \right) \phi(y_k) d\phi(y_k)$$

wobei die rechte Seite das $-\beta_{ik}$ -fache der Dichte einer Zufallsvariable $\Psi = \sqrt{1 - \beta_{ik}^2} X + \beta_{ik} Y_k$ ist, für standard normal, unabhängig und identisch verteilte X, sowie Y_k am Punkt D_i . Somit ist Ψ wieder standard normalverteilt und man erhält

$$E(Y_k L_i) = -\beta_{ik} \phi(D_i) = -\frac{\beta_{ik}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{D_i^2}{2}} \quad (121)$$

Dieses Ergebnis hat zusammen mit (120) zu Folge, dass

$$\begin{aligned}
cov(L^{(n)}, Z) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K e_i \gamma_k \beta_{ik} e^{-\frac{D_i^2}{2}} \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n e_i r_i e^{-\frac{D_i^2}{2}}
\end{aligned}$$

weil, wie eingeführt $r_i = corr(A_i, Z) = \sum_{k=1}^K \beta_{ik} \gamma_k$. Mit $\sqrt{Var(Z)} = \sigma$ und

$$Var(L^{(n)}) = \sum_{i,j=1}^n e_i e_j cov(L_i, L_j)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^n e_i e_j (E(L_i L_j) - E(L_i) E(L_j)) \\
&= \sum_{i,j=1}^n e_i e_j (p_{ij} - p_i p_j)
\end{aligned} \tag{122}$$

wobei p_{ij} die gemeinsame Ausfallswahrscheinlichkeit wie in (110) ist. \square

Bemerkung 6.3:

Im Falle von unterschiedlichen Vorzeichen der Faktorgewichte β_{ik} und γ_k wird r_i negativ und somit kann es in diesem Modell zu negativer Inter-Risiko Korrelation kommen.

Der Term $e_i e^{-D_i^2/2}$ kann als Rating-abhängiges Exposure verstanden werden. Das bedeutet, dass im Falle von gleichem Exposure e_i zweier Schuldner, jener Schuldner weniger Einfluss auf die Inter-Risiko Korrelation hat, welcher das bessere Rating besitzt. Denn eine geringe Ausfallswahrscheinlichkeit bedeutet einen geringen Wert des Faktors $e^{-D_i^2/2}$.

Weil $\text{corr}(L^{(n)}, Z)$ linear von der Korrelation r_i abhängt und somit von γ_k , ergeben sich folgende Schranken für die Inter-Risiko Korrelation.

Proposition 6.1 (Schranken für die Inter-Risiko Korrelation im Normal-Faktor Modell):

$L^{(n)}$ und Z seien wieder wie in den Definitionen 6.1 und 6.3, mit unbekanntem Faktorgewichten $\gamma_k, k = 1, \dots, K$. Dann ist die Inter-Risiko Korrelation beschränkt durch

$$|\text{corr}(L^{(n)}, Z)| \leq \frac{\sum_{i=1}^n e_i \sqrt{\sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2 \exp(-\frac{1}{2} D_i^2)}}{\sqrt{2\pi \text{Var}(L^{(n)})}} \tag{123}$$

Beweis

Sinnvollerweise nimmt man an, dass das Exposure von Schuldner i nicht negativ ist, $e_i \geq 0$. Somit folgt mittels (117)

$$|\text{corr}(L^{(n)}, Z)| \leq \frac{\sum_i e_i |r_i| \exp(-\frac{1}{2} D_i^2)}{\sqrt{2\pi \sum_{ij} e_i e_j (p_{ij} - p_i p_j)}}$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (1) folgt zusammen mit $\sum_{k=1}^K \gamma_k^2 \leq 1$, dass

$$|r_i| = \left| \sum_{k=1}^K \beta_{ik} \gamma_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^K \gamma_k^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2 \right)^{1/2} \leq 1$$

womit alles gezeigt ist. \square

Diese Schranke ist für alle Marktrisiko Portfolios wie in Definition 6.3 definiert gültig. Weil $R_i^2 = \sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2$ jener Teil der Varianz der A_i ist, welcher durch die Faktoren Y_k erklärt wird, folgt aus (123), dass die Inter-Risiko Korrelationsschranken linear mit R_i steigen.

6.2.2 Schock Modell

Wie auch für das Normal-Faktor Modell sollen nun für das Schock-Modell die Inter-Risiko Korrelation und Schranken dafür berechnet werden. Es wird jeweils zwischen unabhängigen Schocks und gemeinsamen Schocks unterschieden.

Satz 6.2:

Der Verlust des Kreditportfolios $\hat{L}^{(n)}$ und das Marktrisiko \hat{Z} seien durch das Schockmodell aus Definition 6.6 gegeben.

- *Unabhängige Schocks*

Wenn die Schocks für das Kredit- und Marktrisiko durch unterschiedliche unabhängige Schockvariablen W_L und W_Z mit $\nu_L > 0$ und $\nu_Z > 2$ Freiheitsgraden resultieren, dann ist die lineare Korrelation zwischen $\hat{L}^{(n)}$ und \hat{Z} gegeben durch

$$\text{corr}(\hat{L}^{(n)}, \hat{Z}) = \sqrt{\frac{\nu_Z - 2}{2} \frac{\Gamma(\frac{\nu_Z - 1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_Z}{2})} \frac{\sum_{i=1}^n r_i e_i \left(1 + \frac{\hat{D}_i^2}{\nu_L}\right)^{-\frac{\nu_L}{2}}}{\sqrt{2\pi \text{Var}(\hat{L}^{(n)})}}} \quad (124)$$

- *gemeinsamer Schock*

Die Schocks für Kredit- und Marktrisiko seien nun durch die selbe Schockvariable $W := W_L = W_Z$ mit $\nu := \nu_L = \nu_Z$ Freiheitsgraden getrieben. Dann ergibt sich für die lineare Korrelation zwischen $L^{(n)}$ und Z

$$\text{corr}(\hat{L}^{(n)}, \hat{Z}) = \sqrt{\frac{\nu - 2}{2} \frac{\Gamma(\frac{\nu - 1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \frac{\sum_{i=1}^n r_i e_i \left(1 + \frac{\hat{D}_i^2}{\nu}\right)^{\frac{1-\nu}{2}}}{\sqrt{2\pi \text{Var}(\hat{L}^{(n)})}}} \quad (125)$$

In beiden Fällen ist r_i wie in (118) und $\text{Var}(\hat{L}^{(n)})$ wie in (119). \hat{D}_i und \hat{p}_{ij} seien gegeben durch (113) und (114).

Beweis

Mit (107) und dem Gesetz der iterierten Erwartung erhält man für die Kovarianz

$$\text{cov}(\hat{L}^{(n)}, \hat{Z}) = \sum_{i=1}^n e_i E(\hat{Z}\hat{L}_i) = \sum_{i=1}^n e_i E(E(\hat{Z}\hat{L}_i|W_L, W_Z)). \quad (126)$$

Aus der Definition des Schockmodells für Kreditrisiko (Definition 6.2) folgt, dass für jede Zufallsvariable L_i gilt:

$$\begin{aligned} P(\hat{L}_i = 1) &= P\left(W_L \sum_{k=1}^K \beta_{ik} Y_k + W_L \sqrt{1 - \sum_{j=1}^K \beta_{ij}^2} \epsilon_i \leq \hat{D}_i\right) \\ &= P\left(\sum_{k=1}^K \beta_{ik} Y_k + \sqrt{1 - \sum_{j=1}^K \beta_{ij}^2} \epsilon_i \leq \frac{\hat{D}_i}{W_L}\right) \end{aligned}$$

Somit ist das Schockmodell bedingt auf die Zufallsvariable W_L äquivalent zu einem Normal-Faktor Modell mit angepasstem Ausfallspunkt $\tilde{D}_i := \hat{D}_i/W_L$. Somit ergibt sich mit (121)

$$\begin{aligned} E(\hat{Z}\hat{L}_i|W_L, W_Z) &= -\sigma \sum_{k=1}^K \gamma_k W_Z E(Y_k \hat{L}_i|W_L) \\ &= -\sigma \sum_{k=1}^K \gamma_k W_Z \left(-\frac{\beta_{ik}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tilde{D}_i^2}{2}}\right) \\ &= \frac{\sigma r_i}{\sqrt{2\pi}} W_Z e^{-\frac{\tilde{D}_i^2}{2}} \end{aligned}$$

mit $r_i = \sum_{k=1}^K \beta_{ik} \gamma_k$ für $i = 1, \dots, n$. Integration über W_L und W_Z ergibt

$$E(E(\hat{Z}\hat{L}_i|W_L, W_Z)) = \frac{\sigma r_i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty W_Z dF_{\nu_Z}(s) \int_0^\infty e^{-\frac{\tilde{D}_i^2}{2}} dF_{\nu_L}(s) \quad (127)$$

$$= \frac{\sigma r_i}{\sqrt{2\pi}} E(W_Z) \int_0^\infty e^{-\frac{\hat{D}_i^2}{2\nu_L} s} f_{\nu_L}(s) ds$$

wobei F_ν die Verteilungsfunktion einer χ_ν^2 -verteilten Zufallsvariable ist mit Dichtefunktion $f_\nu(s)$. Durch Substitution kann man für $\nu_L > 0$ integrieren:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\frac{\hat{D}_i^2}{2\nu_L} s} f_{\nu_L}(s) ds &= \int_0^\infty \frac{2^{-\nu/2} s^{\nu/2-1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \exp\left[-\left(1 + \frac{\hat{D}_i^2}{\nu_L}\right) \frac{s}{2}\right] ds \\ &= \left(1 + \frac{\hat{D}_i^2}{\nu_L}\right)^{-\frac{\nu_L}{2}} \int_0^\infty \frac{2^{-\nu/2} e^{-s/2} s^{\nu/2-1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} ds \\ &= \left(1 + \frac{\hat{D}_i^2}{\nu_L}\right)^{-\frac{\nu_L}{2}} \end{aligned}$$

Zusammen mit

$$E(W_Z) = \sqrt{\frac{\nu_Z}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu_Z-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_Z}{2})}$$

hat man also für $\nu_Z > 1$

$$E(E(\hat{Z}\hat{L}_i|W_L, W_Z)) = \frac{\sigma r_i}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\nu_Z}{2}} \left(1 + \frac{\hat{D}_i^2}{\nu_L}\right)^{-\frac{\nu_L}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu_Z-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_Z}{2})}. \quad (128)$$

Setzt man (128) nun in (126) ein und verwendet (122), dann erhält man zusammen mit

$$Var(\hat{Z}) = \left(\frac{\nu_Z}{\nu_Z - 2}\right) \sigma^2, \quad \nu_Z > 2$$

folgendes Ergebnis

$$corr(\hat{L}^{(n)}, \hat{Z}) = \sqrt{\frac{\nu_Z - 2}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu_Z-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_Z}{2})} \frac{\sum_{i=1}^n e_i r_i \left(1 + \frac{\hat{D}_i^2}{\nu_L}\right)^{-\frac{\nu_L}{2}}}{\sqrt{2\pi Var(\hat{L}^{(n)})}}$$

womit die Aussage für unabhängige Schocks gezeigt ist.

Um die Aussage für gemeinsame Schocks zu zeigen, bedingt man, ähnlich wie im Beweis für unabhängige Schocks, hier auf die einzige Schockvariable W . Somit erhält man anstelle von (127) mit $\nu > 1$ mittels Substitution:

$$\begin{aligned}
E(E(\hat{Z}\hat{L}_i|W)) &= \frac{\sigma r_i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty W e^{-\frac{\hat{D}_i^2}{2}} dF_\nu(s) \\
&= \frac{\sigma r_i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\hat{D}_i^2}{2\nu}s} f_\nu(s) ds \\
&= \frac{\sigma r_i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{2^{-\nu/2} \nu^{1/2}}{\Gamma(\nu/2)} s^{\frac{\nu-1}{2}-1} \exp\left[-\left(\frac{\hat{D}_i^2}{\nu} + 1\right) \frac{s}{2}\right] ds \\
&= \frac{\sigma r_i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{2^{-\nu/2} \nu^{1/2}}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\hat{D}_i^2}{\nu} + 1\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} s^{\frac{\nu-1}{2}-1} \exp\left[-\frac{s}{2}\right] ds \\
&= \frac{\sigma r_i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\nu^{1/2} 2^{-1/2}}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\hat{D}_i^2}{\nu} + 1\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \int_0^\infty \frac{2^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} s^{\frac{\nu-1}{2}-1} e^{-s/2} ds \\
&= \frac{\sigma r_i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\nu^{\frac{\nu}{2}} (\hat{D}_i^2 + \nu)^{\frac{1-\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu-1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(\frac{\nu}{2})}
\end{aligned}$$

womit auch der Fall gemeinsamer Schocks gezeigt ist. \square

Ebenso wie beim Normal-Faktor Modell können auch hier Schranken für die lineare Korrelation angegeben werden.

Proposition 6.2 (Schranken für die Inter-Risiko Korrelation im Schock Modell):

Der Kreditportfolioverlust $\hat{L}^{(n)}$ sei wie in der Schock-Modell Definition 6.2 und \hat{Z} sei wie in Definition 6.5, mit unbekanntem Faktorgewichten $\gamma_k, k = 1, \dots, K$. Dann ergeben sich folgende Schranken

- *unabhängige Schocks*

$$|corr(\hat{L}^{(n)}, \hat{Z})| \leq \frac{\sqrt{\frac{\nu_Z - 2}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu_Z - 1}{2}\right) \sum_{i=1}^n e_i \sqrt{\sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2} \left(1 + \frac{\hat{D}_i^2}{\nu_L}\right)^{-\frac{\nu_L}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu_Z}{2}\right) \sqrt{2\pi Var(\hat{L}^{(n)})}}$$

- *gemeinsame Schocks*

$$|\text{corr}(\hat{L}^{(n)}, \hat{Z})| \leq \frac{\sqrt{\frac{\nu-2}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \sum_{i=1}^n e_i \sqrt{\sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2} \left(1 + \frac{\hat{D}_i^2}{\nu}\right)^{\frac{1-\nu}{2}}}{\sqrt{2\pi \text{Var}(\hat{L}^{(n)})}}$$

in beiden Fällen ist $R_i = \sqrt{\sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2}$.

Der Beweis dieser Proposition ist analog zum Beweis der Proposition 6.1.

6.3 Spezialfall: Ein-Faktor Modell

Die in den vorangegangenen Abschnitten präsentierten Ergebnisse, sollen nun anhand von einem Ein-Faktor Modell im Falle eines homogenen Portfolios veranschaulicht werden. Dazu werden folgende Annahmen getroffen:

Es sei ein homogenes Portfolio gegeben, in dem gilt: $e_i = e$, $p_i = p$ sei bekannt und $\beta_{ik} = \beta_k$ für $i = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, K$. Der Assetwert (108) für das Normal-Faktor Modell kann mittels $\rho := \sum_{k=1}^K \beta_k^2$ und $\tilde{Y} := \left(\sum_{k=1}^K \beta_k Y_k\right) / \sqrt{\rho}$ als Ein-Faktor Modell geschrieben werden:

$$A_i = \sqrt{\rho} \tilde{Y} + \sqrt{1-\rho} \epsilon_i. \quad (129)$$

Hierbei ist \tilde{Y} standardnormalverteilt und unabhängig von ϵ_i . ρ ist die Korrelation für alle im Portfolio befindlichen Assets.

Lässt man nun das Portfolio beliebig groß werden ($n \rightarrow \infty$) so erfüllt der relative Portfolioverlust

$$\frac{L^{(n)}}{ne} \xrightarrow{f.s.} \Phi\left(\frac{D - \sqrt{\rho} \tilde{Y}}{\sqrt{1-\rho}}\right), \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (130)$$

wobei $D = \Phi^{-1}(p)$ und ne das Gesamtexposure des Kreditportfolios ist. $L := \Phi\left(\frac{D - \sqrt{\rho} \tilde{Y}}{\sqrt{1-\rho}}\right)$ wird oft als approximative Verlustvariable für große und nahezu homogene Portfolios verwendet. In weiterer Folge wird auch die Varianz von L benötigt, deshalb wird sie an dieser Stelle angegeben

$$\text{Var}(L) = p_{12} - p^2 \quad (131)$$

mit $p_{12} = \Phi_\rho(D, D)$.

Im Falle des Schockmodells ergibt sich für den relativen Portfolioverlust

$$\frac{\hat{L}^{(n)}}{ne} \xrightarrow{f.s.} \Phi\left(\frac{\hat{D}/W_L - \sqrt{\rho} \tilde{Y}}{\sqrt{1-\rho}}\right) =: \hat{L}_{\nu L}, n \rightarrow \infty \quad (132)$$

wobei nun $\hat{D} = t_{\nu_L}^{-1}(p)$ und für die Varianz gilt $Var(\hat{L}) = \hat{p}_{12} - p^2$ mit $\hat{p}_{12} = t_{\nu_L; \rho}(\hat{D}, \hat{D})$.

Bis jetzt wurde nur das Kreditrisiko betrachtet. Um auch das Marktrisiko nur von dem einzelnen Faktor \tilde{Y} abhängig zu machen, sei \tilde{Y} wie schon beim Marktrisiko gegeben durch $\tilde{Y} := \left(\sum_{k=1}^K \beta_k Y_k \right) / \sqrt{\rho}$ und zusätzlich

$$\tilde{\eta} := \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{\gamma}^2}} \left[\sum_{k=1}^K \left(\gamma_k - \frac{\tilde{\gamma}}{\sqrt{\rho}} \beta_k \right) Y_k + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^K \gamma_k^2 \eta} \right] \quad (133)$$

mit

$$\tilde{\gamma} := \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^K \beta_k \gamma_k. \quad (134)$$

Somit ergibt sich für das Normal-Faktor Modell

$$Z = -\sigma \left(\tilde{\gamma} \tilde{Y} + \sqrt{1 - \tilde{\gamma}^2} \tilde{\eta} \right) \quad (135)$$

und für das Schock-Modell

$$\hat{Z} = -\sigma W_Z \left(\tilde{\gamma} \tilde{Y} + \sqrt{1 - \tilde{\gamma}^2} \tilde{\eta} \right) \quad (136)$$

In beiden Fällen ist $\tilde{\eta}$ standardnormalverteilt und unabhängig von \tilde{Y} . In (135) ist Z normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 , wobei \hat{Z} in (136) t-verteilt ist mit ν_Z Freiheitsgraden.

6.3.1 Inter-Risiko Korrelation im Ein-Faktor Modell

Im Falle eines Ein-Faktor Modells vereinfachen sich die zuvor gewonnenen Ergebnisse für die Inter-Risiko Korrelation merklich.

Für das Normal-Faktor Modell tritt anstelle von (117)

$$corr(L_{hom}^{(n)}, Z) = \frac{\sqrt{n} r e^{-D^2/2}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{p_{12}(n-1) + p(1-np)}}$$

mit dem Ausfallspunkt $D = \Phi^{-1}(p)$ und der gemeinsamen Ausfallswahrscheinlichkeit im homogenen Portfolio $p_{12} = \Phi_{\rho}(D, D)$, sowie $r = corr(Z, A_i) = \sqrt{\rho} \tilde{\gamma} = \sum_{k=1}^K \beta_k \gamma_k$. Sollte das Portfolio nicht nur homogen, sondern auch sehr groß sein, dann gilt für die Inter-Risiko Korrelation die LHP-Approximation (LHP steht für „large homogeneous portfolio“)

$$corr(L, Z) = \frac{r e^{-D^2/2}}{\sqrt{2\pi(p_{12} - p^2)}} \quad (137)$$

Mit gegebener einheitlicher Asset Korrelation des Kreditportfolios $\rho = \sum_{k=1}^K \beta_k^2$ folgt aus (134), dass $|\tilde{\gamma}| \leq 1$ und daher $|r| \leq \sqrt{\rho}$, woraus die Schranke

$$|\text{corr}(L, Z)| \leq \frac{\sqrt{\rho} e^{-D^2/2}}{\sqrt{2\pi(p_{12} - p^2)}} =: B_{LHP}(p, \rho) \quad (138)$$

folgt.

Für das Schock-Modell bei unabhängigen Schocks ergibt sich

$$\text{corr}(\hat{L}^{(n)}, \hat{Z}) = \sqrt{\frac{\nu_Z - 2}{2} \frac{\Gamma(\frac{\nu_Z - 1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_Z}{2})} \frac{r \left(1 + \frac{\hat{D}^2}{\nu_L}\right)^{-\frac{\nu_L}{2}}}{\sqrt{2\pi(\hat{p}_{12} - p^2)}} \quad (139)$$

wobei man für das Modell mit gemeinsamen Schock

$$\text{corr}(\hat{L}^{(n)}, \hat{Z}) = \sqrt{\frac{\nu - 2}{2} \frac{\Gamma(\frac{\nu - 1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \frac{r \left(1 + \frac{\hat{D}^2}{\nu}\right)^{\frac{1-\nu}{2}}}{\sqrt{2\pi(\hat{p}_{12} - p^2)}} \quad (140)$$

mit dem Ausfallspunkt $\hat{D} = t_\nu^{-1}(p)$, der gemeinsamen Ausfallswahrscheinlichkeit im homogenen Portfolio $\hat{p}_{12} = t_{\nu, \rho}(\hat{D}, \hat{D})$ und $r = \text{corr}(\hat{Z}, \hat{A}_i) = \sqrt{\rho} \tilde{\gamma}$. Ähnlich wie im Normal-Faktor Modell können auch für das Schockmodell Schranken für die Inter-Risiko Korrelation aus den Gleichungen (139) und (140) mittels $|r| \leq \sqrt{\rho}$ gefunden werden.

Die Inter-Risiko Korrelation des Schockmodells ((139) und (140)) kann mit jener des Normal-Faktor Modells verglichen werden. Böcker und Hillebrand haben dies mit unterschiedlichen Assetkorrelationen und unterschiedlichen Werten für p getan. In Tabelle 15, die aus Böcker und Hillebrand ([5] Seite 14) stammt, sind die Ergebnisse zu sehen. Man erkennt, dass die Inter-Risiko Korrelation für das Normal-Faktor Modell stets höher ist, als für das Schockmodell mit gemeinsamen Schocks. Erst für höhere Assetkorrelation und höhere Werte für ν nähern sich die beiden Modelle an. Für das Schockmodell mit unabhängigen Schocks würde der Unterschied noch deutlicher ausfallen. Dieses Verhalten ist einerseits durch die Gleichungen (137) und (140). Denn für $\nu \rightarrow \infty$ konvergiert der zweite Faktor aus Gleichung (140) gegen die rechte Seite aus Gleichung (137). Für den ersten Faktor aus Gleichung (140) gilt: je höher ν desto höher die Inter-Risiko Korrelation. Andererseits lässt sich dieses Verhalten folgendermaßen erklären. Das Normalfaktormodell und das Schockmodell mit gemeinsamen Schocks unterscheiden sich im Grunde nur durch die Zufallsvariable W . Das bedeutet, dass es im Schockmodell zwei

Einflussgrößen gibt, während es im Normal-Faktor Modell nur eine Einflussgröße ist. Aus der zweiten Einflussgröße resultiert eine höhere Varianz der Markt- und Kredit-Verluste, was wiederum eine geringere Korrelation im Schockmodell mit gemeinsamen Schocks zur Folge hat.

ρ	Normal Modell	gemeinsames Schockmodell		
	$\nu = \infty$	$\nu = 4$	$\nu = 10$	$\nu = 50$
$p = 0.002$				
5%	0.81 (0.90)	0.17 (0.19)	0.22 (0.24)	0.46 (0.51)
10%	0.51 (0.81)	0.16 (0.25)	0.19 (0.30)	0.36 (0.56)
15%	0.38 (0.73)	0.15 (0.28)	0.17 (0.33)	0.29 (0.56)
20%	0.30 (0.66)	0.14 (0.31)	0.15 (0.35)	0.24 (0.53)
$p = 0.02$				
5%	0.85 (0.95)	0.27 (0.31)	0.37 (0.42)	0.62 (0.70)
10%	0.57 (0.90)	0.25 (0.40)	0.33 (0.52)	0.48 (0.76)
15%	0.44 (0.86)	0.24 (0.46)	0.29 (0.57)	0.39 (0.76)
20%	0.37 (0.82)	0.22 (0.50)	0.27 (0.59)	0.33 (0.75)

Tabelle 15: Inter-Risiko Korrelation der LHP Approximation für das Normal-Faktormodell (137) und das Schockmodell mit gemeinsamen Schocks (140) mit $r = 0.2$ und verschiedenen Werten für p und die Assetkorrelation ρ . Die Werte in den Klammern stehen für die obere Schranke der Inter-Risiko Korrelation, bei der $r = \sqrt{\rho}$ gilt.

Kreditportfolios sind in der Praxis größtenteils nicht homogen. Trotzdem kann der LHP Ansatz in der Praxis für die obere Inter-Risiko Korrelationsschranke verwendet werden. Man betrachte dazu das Normal-Faktor Modell aus (138). Wenn μ der erwartete Verlust eines Kreditportfolios, das man z.B. mittels Monte Carlo Simulation erhält, ist, σ die Standardabweichung und e_{tot} das Gesamtexposure, dann erhält man die Schätzer \hat{p} für p und $\hat{\rho}$ für ρ indem man die Varianz des simulierten Portfolios mit der eines LHP vergleicht:

$$\mu = e_{tot}\hat{p} \quad (141)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= e_{tot}^2(p_{12} - \hat{p}^2) \\ &= e_{tot}^2[\Phi_{\hat{\rho}}(\Phi^{-1}(\hat{\rho}), \Phi^{-1}(\hat{\rho})) - \hat{p}^2] \end{aligned} \quad (142)$$

Mit (138) ergibt sich nun folgender Schätzer für die obere Schranke der Inter-Risiko Korrelation

$$\hat{B}_{LHP}(\hat{p}, \hat{\rho}) = \frac{e_{tot}}{\sigma} \frac{\sqrt{\hat{\rho}} \exp[-\frac{1}{2}(\Phi^{-1}(\hat{\rho}))^2]}{\sqrt{2\pi}} \quad (143)$$

6.4 Risikoaggregation

Wie schon erwähnt, spielt die Risikoaggregation, also die Schätzung des Gesamtverlustes aus mehreren Risiken, eine entscheidende Rolle für Finanzinstitute. Das sogenannte ökonomische Kapital wird definiert als der unerwartete Verlust, d.h. dass für einen gegebenen Risikotypen X_i mit streng wachsender und stetiger Verteilungsfunktion $F_i(x) = P(X_i \leq x)$, das ökonomische Kapital zum Konfidenzniveau α gegeben ist durch

$$EC_i(\alpha) = F_i^{-1}(\alpha) - E(X_i). \quad (144)$$

In der Literatur gibt es vier Ansätze für die Schätzung des ökonomischen Kapitals, die am häufigsten verwendet werden. Die einfachste Möglichkeit ist die Summation von voraggregierten Risikozahlen. Dabei wird das Risiko zwar meist überschätzt, diese Methode findet in der Praxis aber dennoch Anwendung.

Die zweite Möglichkeit das aggregierte Risikokapital zu schätzen ist mittels Monte Carlo Simulation der makroökonomischen Faktoren Y_1, \dots, Y_K sowie den beiden Faktoren ϵ_i und η aus (108) und (115).

Die beiden anderen Ansätze werden hier in weiterer Folge etwas genauer betrachtet. Dies wäre zum Einen der Copula Ansatz und zum Anderen der Ansatz der Wurzel-Formel. Böcker und Hillebrand haben sich dazu auf das Normal-Faktormodell aus Definition 6.1 und Definition 6.3 beschränkt.

- Wurzel-Formel Ansatz

Dieser Ansatz ist in der Praxis ein sehr beliebter, weil er ohne Simulation auskommt. Zu erwähnen ist allerdings, dass nur im Falle von elliptischen Verteilungen die mathematische Korrektheit gewährleistet ist. Im bivariaten Fall eines Kreditportfolios $L^{(n)}$ und eines Marktportfolios Z lautet die Wurzel-Formel wie folgt

$$EC_{L^{(n)}+Z}(\alpha) = \sqrt{EC_{L^{(n)}}(\alpha)^2 + EC_Z(\alpha)^2 + 2corr(L^{(n)}, Z)EC_{L^{(n)}}(\alpha)EC_Z(\alpha)} \quad (145)$$

wobei $corr(L^{(n)}, Z)$ die Inter-Risiko Korrelation aus 117 ist.

- Copula Aggregations Ansatz

Wie schon zuvor erwähnt ist für eine gegebene Copula C und Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_d die gemeinsame Verteilung gegeben durch

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Wenn man nun also Randverteilungen mit einer geeigneten Copula hat, dann kann der aggregierte Totalverlust numerisch oder mittels Monte Carlo Simulation ermittelt werden. Unter gewissen Bedingungen ergibt sich hier ein Gauss'sches Copula Modell zwischen Markt- und Kreditrisiko. Dazu sei folgende Proposition angeführt:

Proposition 6.3:

Kredit- und Marktrisiko seien durch (129) und (135) gegeben. Dann gelten folgende beiden Aussagen:

- 1.) *Beide Risikotypen sind durch eine Gauss'sche Copula mit Parameter $\tilde{\gamma}$ aus (134) verbunden.*
- 2.) *Der Copula Parameter $\tilde{\gamma}$ aus (134) und die Inter-Risiko Korrelation $\text{corr}(L, Z)$ sind verbunden durch*

$$\tilde{\gamma} = \frac{\text{corr}(L, Z)}{B_{LHP}} \tag{146}$$

wobei B_{LHP} die LHP-Approximation (138) für die Schranke der Inter-Risiko Korrelation ist und $\text{corr}(L, Z)$ ist wie in (137).

Der Beweis dieser Proposition ist im Anhang von [5] nachzulesen.

Aus (146) folgt, dass die Korrelation zwischen Kredit- und Marktrisiko stets kleiner ist, als der Copula Parameter $\tilde{\gamma}$. In Tabelle 16, die aus Böcker und Hillebrand ([5], Seite 18) übernommen wurde, ist ein numerisches Beispiel für (146) angegeben.

$\tilde{\gamma}$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\text{corr}(L, Z)$	0.0	0.15	0.29	0.44	0.59	0.73

Tabelle 16: Die Relation zwischen der Inter-Risiko Korrelation $\text{corr}(L, Z)$ und dem Copula Parameter $\tilde{\gamma}$ aus 146 für $p = 0.002$ und $\rho = 15\%$

Für praktische Zwecke stellt sich die Frage, wie der Copula Parameter (146) für Kreditportfolios geschätzt werden kann. Hierzu ist Punkt 1.) aus obiger Proposition nicht anwendbar, weil β_k aus (134) nur für homogene Portfolios definiert ist. Um den Schätzer \hat{B}_{LHP} (143) zu erhalten, wurde die LHP Approximation für ein Kreditportfolio verwendet. Wenn man diese Approximation zum gemeinsamen Ein-Faktor Risikomodell aus Kredit- und Marktrisiko durch das Matchen der Inter-Risiko Korrelation erweitert, so kann ein Schätzer für den Copula Parameter aus (146) gefunden werden. Wenn Kredit- und Marktrisiko durch das gemeinsame Normal-Faktor Modell aus Definition 6.4 beschrieben sind, dann kann die Inter-Risiko Korrelation mittels Satz 6.1

berrechnet werden und mit dem Ergebnis aus der LHP Approximation (137) verglichen werden. Wenn man dann Punkt 2.) aus Proposition 6.3 anwendet, so erhält man folgenden Schätzer für den Copula Parameter $\tilde{\gamma}$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\widehat{corr}(L, Z)}{\hat{B}_{LHP}} \quad (147)$$

wobei \hat{B}_{LHP} durch (143) gegeben ist und

$$\widehat{corr}(L, Z) = corr(L^{(n)}, Z) \quad (148)$$

mit $corr(L^{(n)}, Z)$ wie in (117).

Einen alternativen Schätzer erhält man, wenn man anstelle der Verwendung des Ein-Faktor Modells die rechte Seite aus (146) direkt bei einem nicht homogenen Portfolio anwendet. Mit (117) und (123) erhält man

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \beta_{ik} \gamma_k e_i \exp(-\frac{1}{2} D_i^2)}{\sum_{i=1}^n e_i \sqrt{\sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2 \exp(-\frac{1}{2} D_i^2)}} \quad (149)$$

Diese Ergebnisse sollen nun wieder anhand des Testportfolios aus [5] numerisch gezeigt werden. Für die Schätzer (148), (149) und die Inter-Risiko Korrelation (117) ergeben sich die Werte $\hat{\gamma}_1 = 0.32$, $\hat{\gamma}_2 = 0.39$ und $corr(L^{(n)}, Z) = 0.22$.

In Tabelle 17 sieht man das aggregierte ökonomische Kapital für verschiedene Konfidenzniveaus α .

ökonomisches Kapital	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.999$	$\alpha = 0.9998$
Kredit	0.16	0.87	1.91	2.68
Markt	0.23	0.42	0.56	0.64
Summe	0.39	1.29	2.47	3.32
Wurzel Formel ($corr(L^{(n)}, Z) = 0.22$)	0.31	1.04	2.10	2.89
Copula Ansatz ($\tilde{\gamma} = 0.32$)	0.32	1.03	2.20	3.16
Simulations Ansatz	0.32	1.04	2.09	2.89

Tabelle 17: Inter-Risiko Korrelation der LHP Approximation für das Normal-Faktormodell aus (137) und das Schockmodell mit gemeinsamen Schocks (140) mit $r = 0.2$ und verschiedenen Werten für p und die Assetkorrelation ρ . Die Werte in den Klammern stehen für die obere Schranke der Inter-Risiko Korrelation, bei der $r = \sqrt{\rho}$ gilt.

In den ersten beiden Reihen der Tabelle 17 sieht man separat das Kredit- und Marktrisiko aus den Definitionen 6.1 und 6.3. In der Zeile darunter sind diese

beiden aufsummiert. Die Zahlen aus den ersten beiden Reihen wurden direkt für die Wurzel Formel verwendet. Beim Copula Ansatz wurde die Randverteilungsfunktion des Kreditrisikos zuerst durch ein Ein-Faktor Modell mittels (141) und (142) approximiert. Der Copula Parameter wurde mittels $\hat{\gamma}_1$ aus (147) geschätzt.

Wenn man davon ausgeht, dass der Simulations-Ansatz die besten Ergebnisse liefert, so hat es den Anschein, dass die Wurzel Formel für ein hohes Konfidenzniveau in diesem Beispiel gut geeignet ist. Der Copula Ansatz würde das Risiko für hohe Konfidenzniveaus überschätzen, was daran liegen kann, dass der Einfaktor-Ansatz für das Kreditrisiko heavier tailed ist, als die Simulation. Sollte man also hauptsächlich am ökonomischen Kapital für hohe Konfidenzniveaus interessiert sein, muss man sich über eine passendere Verteilungsfunktion für das Kreditrisiko Gedanken machen, also über eine, die das Tail Verhalten des Kreditverlustes besser beschreibt.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Masterarbeit zielt darauf ab, die Abhängigkeit zwischen Kredit- und Marktrisiko mathematisch zu beschreiben. Im Falle des Kreditrisikos bietet die Literatur eine Vielzahl von verschiedenen Modellen. In dieser Arbeit wurden einerseits Firmenwertmodelle und andererseits intensitätsbasierte Kreditrisikomodelle vorgestellt.

Eines der ältesten und einfachsten Firmenwertmodelle ist jenes von Merton, das auf das Jahr 1974 zurückgeht und als Grundstein der Firmenwertmodelle gesehen wird. Dieses Modell ist ein sehr einfaches Modell, weil angenommen wird, dass sich die Passiva des Unternehmens aus Eigen- und Fremdkapital zusammensetzen, wobei das Fremdkapital aus einer einzigen Nullkuponanleihe bestehe. Weiters wird angenommen, dass der Wert der Firma durch eine geometrische Brown'sche Bewegung gegeben ist. Dadurch können Werte sowohl für das Eigenkapital als auch das Fremdkapital angegeben werden.

Das KMV Modell ist ein aus dem Merton Modell resultierendes Kreditrisikomodelle. Anstelle der klassischen Ausfallswahrscheinlichkeit verwendet es eine erwartete Ausfallshäufigkeit, welche mittels der sogenannten „Distance to Default“ ermittelt wird.

Abschließend wurden Kreditrisikomodelle erwähnt, die mit Migrationsmatrizen arbeiten. Im Speziellen wurde CreditMetrics vorgestellt, ein Programm, das zur Bewertung von Bond Portfolios dient.

Intensitätsbasierte Kreditrisikomodelle sind dadurch charakterisiert, dass die Ausfallswahrscheinlichkeit und die Recovery-Rate - Höhe durch nichtnegative Zufallsvariablen beschrieben werden, die eine gewisse Intensität besitzen. In dieser Arbeit wurden zwei intensitätsbasierte Kreditrisikomodelle, nämlich jenes von Jarrow und Turnbull (JT) und jenes von Jarrow, Lando und Turnbull (JLT) beschrieben. Mithilfe des JT-Modells werden sowohl für Handel bei diskreter Zeit als auch für Handel bei stetiger Zeit Preise für eine risikobehaftete Nullkuponanleihe angegeben. Außerdem werden Bedingungen genannt, damit das Modell arbitragefrei ist. Aus dem JT-Modell resultiert im Vergleich zum Modell von Merton ein etwas leichter zu ermittelnder Preis einer Nullkuponanleihe, allerdings nimmt das Modell an, dass alle Nullkuponanleihen dieselbe Ausfallswahrscheinlichkeit besitzen und die Recovery Rate konstant mit einem noch unbekanntem Wert ist.

Das JLT-Modell gilt als Erweiterung des JT-Modells. Auch hier werden anhand von Handel bei diskreter und stetiger Zeit Preise für eine risikobehaftete Nullkuponanleihe ermittelt. Allerdings kommen erstmals Kreditratings zum Einsatz. Die Ratingveränderungen werden durch eine zeithomogene Markovkette modelliert. Ein weiterführendes Modell, das hier nicht behandelt wurde wäre zum Beispiel das Modell von Kijima und Komoribayashi aus dem Jahr

1998, das die Berechnung der Risikoprämie vereinfacht. In den hier behandelten Modellen geht man immer von einer konstanten Recovery Rate aus. Ein intensitätsbasiertes Kreditrisikomodell, das mit einer stochastischen Recovery Rate arbeitet wäre zum Beispiel jenes von Das und Tufano aus dem Jahr 1994.

Im Falle des Marktrisikos wurde untersucht, wie man die Abhängigkeit von Einzelrisiken mathematisch beschreiben kann. Dazu wurden verschiedene Risikomaße, wie die lineare Korrelation, der Spearman'sche Rangkorrelationskoeffizient ρ und der Kendall'sche Rangkorrelationskoeffizient τ erwähnt. Außerdem wurde mithilfe von Copulas gezeigt, wie man die gemeinsame Verteilung von Einzelrisiken mathematisch darstellen kann. Weil es in der Praxis aber oft nicht der Fall ist, dass man die gemeinsame Verteilung von mehreren Einzelrisiken kennt, wurden zum Abschluss dieses Kapitels anhand des Value at Risks sowohl eine obere als auch eine untere Schranke für das gemeinsame Risiko angegeben.

Den Abschluss dieser Arbeit bildet ein Modell von Böcker und Hillebrand, bei dem es ermöglicht wurde, Markt- und Kreditrisiko gemeinsam in einem Modell zu erklären. Für das Kreditrisiko wurde ein Merton-ähnliches Faktormodell verwendet und im Falle von Marktrisiko ein lineares Faktormodell. Es wurde eine Formel für die Korrelation der Risikofaktoren angegeben und abschließend wurde ein Schätzer für den Gesamtverlust eines Portfolios bestehend aus Markt- und Kreditrisiko angegeben. Das von Böcker und Hillebrand entworfene Modell könnte erweitert werden, indem man untersucht, ob die Ergebnisse in geschlossener Form für die Inter-Risiko Korrelation auch für andere Risikotypen wie zum Beispiel das operationelle Risiko angewendet werden können. Außerdem könnte man untersuchen, wie sich die Ergebnisse verändern, wenn man anstelle des hier verwendeten Kreditrisikomodells ein Modell verwendet, das mit Ratingveränderungen arbeitet.

Quellenverzeichnis

- [1] **Amin, K., und M. Morton (1993):** Implied volatility functions in arbitrage-free term structure models, *Journal of Financial Economics*, Volume 35, Issue 2, 141 - 180.
- [2] **Bäuerle, N. und A. Müller (2006):** Stochastic Orders and Risk Measures: Consistency and Bounds, *Insurance: Mathematics and Economics*, Volume 38, Issue 1, 132 - 148.
- [3] **Bernard, C., X. Jiang und R. Wang (2013):** Risk Aggregation with Dependence Uncertainty, *Insurance: Mathematics and Economics*, Volume 54, 93 - 108.
- [4] **Billingsley, P. (1995):** Probability and Measure, *Third Edition*. New York: John Wiley & Sons.
- [5] **Böcker, K. und M. Hillebrand (2009):** Interaction of Market and Credit Risk: An Analysis of Inter-Risk Correlation and Risk Aggregation, *The Journal of Risk*, Volume 11, Issue 4, 3 - 29.
- [6] **Gupton, G. M., C. C. Finger und M. Bhattai (2007):** CreditMetrics™ - Technical Document, *RiskMetrics Group, Incorporated*.
- [7] **Crouhy, M., D. Galai und R. Mark (2000):** A comparative analysis of current credit risk models, *Journal of Banking and Finance*, Volume 24, 59 - 117.
- [8] **Crosbie, P. und J. Bohn (2003):** Modelling Default Risk, *Moody's KMV Company*.
- [9] **Dhaene, J., M. Denuit, M.J. Goovaerts, R- Kass und D.Vyncke (2001):** The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Theory, *Insurance: Mathematics and Economics*, Volume 31, Issue 1, 3 - 33.
- [10] **Durrett, R. (2010):** Probability: Theory and Examples, *Fourth Edition*, Cambridge University Press.
- [11] **Embrechts, P., R. Frey und A. J. McNeil (2005):** Quantitative Risk Management, *Princeton University Press*.

- [12] **Embrechts, P., A. Höing und A. Juri (2003):** Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks, *Finance and Stochastics, Volume 7, Issue 2, Springer*, 145 - 167.
- [13] **Embrechts, P., A. McNeil und D. Straumann (2002):** Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls, *M. Dempster (Ed.), Risk Management: Value at Risk and Beyond*, 176 - 223.
- [14] **Embrechts, P. und G. Puccetti (2006):** Bounds for functions of dependent risks, *Finance and Stochastics, Volume 10, Issue 3, Springer*, 341 - 352.
- [15] **Harrison, J. M., und S. Pliska (1981):** Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochast Processes and their Applications Volume 11, Issue 3*, 215 - 260.
- [16] **Heath D., R. Jarrow und A. Morton (1992):** Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica, Volume 60, Issue 1*, 77 - 105.
- [17] **Jarrow, R. A., D. Lando und S. M. Turnbull (1997):** A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads, *The Review of Financial Studies Volume 10, Issue 2*, 481 - 523.
- [18] **Jarrow, R. A., und D. Madan (1995):** Option pricing using the term structure of interest rate to hedge systematic discontinuities in asset returns, *Mathematical Finance, Volume 5, Issue 4*, 311 - 336.
- [19] **Jarrow, R. A., und S. M. Turnbull (1995):** Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk, *Journal of Finance, Volume 50, Issue 1*, 53 - 85.
- [20] **Merton, R., C. (1974):** On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, *Journal of Finance, Volume 29, Issue 2*, 449 - 470.
- [21] **Nelsen, R. B. (1999):** An introduction to copulas, *Springer, New York*
- [22] **Schweizer, B. und A. Sklar (1974):** Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables, *Studia Mathematica, Volume 52, Issue 1*, 43 - 52.

- [23] **Tchen, A. (1980):** Inequalities for distributions with given marginals, *The Annals of Probability Volume 8, Issue 4*, 814 - 827.
- [24] **Wang, B. und R. Wang (2011):** The complete mixability and convex minimization problems with monotone marginal densities, *Journal of Multivariate Analysis, Volume 102, Issue 10*, 1344 - 1360.