

Carina Mayer

# Origami mit Prismenpaaren

## DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Mag. rer. nat.

Lehramtstudium Darstellende Geometrie und Mathematik

eingereicht an der

**Technischen Universität Graz**

Betreuer

Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Otto Röschel

Institut für Geometrie

Graz, Juni 2018

## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Diplomarbeit identisch.

---

Datum

---

Unterschrift

# Danksagung

Nun neigt sich meine Studienzeit dem Ende zu. In den letzten Jahren durfte ich sehr viele Bereiche aus der Mathematik und der Darstellenden Geometrie kennenlernen, durchlebte Höhen und Tiefen und lernte viele liebe Menschen kennen, die mich während meines Studiums begleiteten. Es ist nun die Zeit gekommen, um mich bei diesen Menschen zu bedanken:

Bei meinem Betreuer Herrn Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Otto Röschel möchte ich mich für seine Geduld und Unterstützung bedanken. Danke, dass Sie mir immer mit Rat und Tat zur Seite standen, wenn ich diese benötigte.

Weiters möchte ich mich bei meinen Studienkollegen bedanken, mit denen ich oft stundenlang über Übungszetteln zusammengesessen bin. Ihr habt mir nicht nur geholfen so manches Beispiel zu verstehen, sondern seid mir auch sehr ans Herz gewachsen.

Ein besonderer Dank geht an meinen Partner Michael. Danke, dass du meine Launen ertragen hast und mich immer unterstützt, und bei Bedarf wieder aufgebaut hast.

Zu guter Letzt will ich mich noch bei meiner Familie bedanken. Ohne eure Unterstützung und euren Glauben an mich hätte ich mein Studium wahrscheinlich nicht so gemeistert.

Danke!

# Kurzfassung

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es, die Bedingungen für Origami mit Prismenpaaren genauer zu untersuchen und Beispiele für solche Origami zu finden.

Zu Beginn der Arbeit wird die Geschichte des Origami beleuchtet. Man kann sehen, dass Origami nicht nur für tolle Nachbildungen von Tieren verwendet werden kann, sondern auch in der Technik und der Medizin damit viele Fortschritte erzielt wurden. In all diesen Bereichen ist meist die Tatsache von großer Bedeutung, dass man Objekte mit Origami sehr klein zusammenfalten kann, ohne diese zu zerlegen.

Mithilfe der Kenntnisse über die Faltung eines Origami, das aus einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve und zwei Zylindern besteht, die diese Kurve enthalten, werden die Bedingungen für ein Origami mit Prismenpaaren definiert. Dort wird gefordert, dass die Kurve in jedem ihrer Punkte dieselbe geodätische Krümmung aufweist, wie auf den beiden Zylindern in diesen Punkten. Somit sind die Tangenten an die Kurve parallel zu den Erzeugenden eines quadratischen Kegels, welcher kein Drehkegel ist, und durch dessen Brenngeraden die Richtungen der Zylindererzeugenden gegeben sind. Man wird erkennen, dass die Bedingungen für das Origami mit Prismenpaaren dazu äquivalent sind.

Zum Schluss wird noch eine Methode beschrieben, bei der man mithilfe eines quadratischen Kegels, welcher kein Drehkegel ist, einen Polygonzug erzeugen kann, der den Bedingungen solcher Origami mit Prismenpaaren entspricht. Mit den Richtungen der reellen Brenngeraden des quadratische Kegels können die Erzeugendenrichtungen der Prismen gefunden werden, die dann zusammen mit dem Polygonzug ein "PFP-Tripel" bilden. Von den gefundenen Beispielen wurden jeweils deren Polygonzug und das dazugehörige Origami grafisch dargestellt.

# Abstract

This diploma thesis aims to investigate the requirements necessary for Origami with pairs of prisms and to find concrete examples for such Origami.

Starting off, the history of Origami shows that such folding techniques are not only suitable for modelling animals but even revolutionize a wide variety of technical and medical processes. Most of these applications make use of the fact that objects can be folded into incredibly small space without the need of disassembling them.

The requirements for Origami with pairs of prisms are formulated based on existing knowledge about folding Origami using a curve parameterized by arc-length and two cylinders containing that curve. Those require the geodesic curvature in each point on the curve on the two cylinders to be equal in that point. Consequently, the tangents to the curve are parallel to the generators of a quadratic cone of degree 2 (that is not a cone of revolution) whose focal lines define the directions of the cylinders' generators. This work shows that the requirements for Origami with pairs of prisms can be formulated equivalently.

Finally, this thesis describes a method that allows to generate a polygonal line which meets the requirements of Origami with pairs of prisms using a quadratic cone of degree 2 (that is not a cone of revolution). This method uses the directions of the real focal lines of the quadratic cone of degree 2 to determine the directions of the generators of the prisms. In combination with the polygonal line they ultimately form a "PFP-triplet". This work closes with examples for Origami with pairs of prisms that each include the underlying polygonal line and graphical representations of the resulting Origami.

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Einleitung</b>   | <b>8</b>  |
| <b>1 Das Origami</b>  | <b>9</b>  |
| 1.1 Die Geschichte des Origami . . . . .                                    | 9         |
| 1.2 Huzita–Hatori Axiome . . . . .  | 10        |
| 1.3 Anwendungsgebiete . . . . .   | 12        |
| 1.3.1 Miura map fold . . . . .  | 13        |
| 1.3.2 Stents . . . . .  | 15        |
| <b>2 Begriffserklärung</b>  | <b>16</b> |
| 2.1 Lineare Algebra . . . . .   | 16        |
| 2.2 Sphärische Geometrie . . . . .  | 17        |
| 2.2.1 Sphärischer Abstand . . . . .   | 17        |
| 2.2.2 Sphärischer Kegelschnitt . . . . .                                    | 18        |
| 2.2.3 Sphärischer Winkelcosinussatz . . . . .                               | 20        |
| <b>3 Bedingungen für die Origamifaltung mit Zylinderpaaren</b>              | <b>21</b> |
| 3.1 Räumliche Kurven auf Zylindern . . . . .                                | 21        |
| 3.2 Kurven mit derselben geodätischen Krümmung auf zwei Zylindern . . . . . | 22        |
| 3.3 Vom Raum in die Ebene . . . . .   | 25        |
| 3.4 Das diskrete Origami . . . . .  | 28        |
| <b>4 Beispiele für Origamifaltung</b>                                       | <b>30</b> |
| 4.1 Origami aus Polygonzug . . . . .  | 30        |
| 4.2 Origamibeispiele . . . . .  | 33        |
| 4.2.1 Beispiel 1 . . . . .  | 34        |
| 4.2.2 Beispiel 2 . . . . .  | 36        |
| 4.2.3 Beispiel 3 . . . . .  | 38        |
| 4.2.4 Beispiel 4 . . . . .  | 39        |
| 4.2.5 Beispiel 5 . . . . .  | 40        |
| 4.2.6 Beispiel 6 . . . . .  | 41        |
| 4.2.7 Beispiel 7 . . . . .  | 43        |
| 4.2.8 Beispiel 8 . . . . .  | 45        |
| 4.2.9 Beispiel 9 . . . . .  | 46        |

|                              |           |
|------------------------------|-----------|
| 4.2.10 Beispiel 10 . . . . . | 47        |
| 4.2.11 Beispiel 11 . . . . . | 48        |
| 4.2.12 Beispiel 12 . . . . . | 50        |
| <b>5 Schlussfolgerung</b>    | <b>52</b> |

# Einleitung

Im Laufe meines Studiums (Lehramt für die Unterrichtsfächer Mathematik und Darstellende Geometrie) lernte ich sehr viele unterschiedliche Themengebiete kennen. Von all diesen tat ich mir mit dem Verstehen immer leichter, wenn es dazu ein Bild oder ein Modell gab. Wenn man mit jemanden spricht, der in der Mathematik oder der Geometrie nicht so versiert ist, kann man mithilfe eines Bildes oder eines Modells sehr schnell Interesse wecken und folglich mit diesem erreichen, dass das Gegenüber Sachverhalte leichter versteht. Somit bot es sich an, für diese Abschlussarbeit ein Thema zu wählen, bei dem man nicht nur abstrakt “herumrechnet”, sondern auch Beispiele darstellen kann. Schließlich fiel die Wahl auf “Origami mit Prismenpaaren”. Die meisten wissen, dass Origami gleichbedeutend zu Papierfalten ist. In dieser Arbeit werden aber nicht Faltungen beschrieben, aus denen Modelle von Tieren resultieren, sondern man betrachtet zwei, in einer Ebene gegebene, Prismen die untereinander durch ein ebenes Verbindungspolygon gekoppelt sind.

Origami, oder anders gesagt das Papierfalten, gibt es vermutlich schon seit der Erfindung des Papiers. Von da an hat es sich in der ganzen Welt verbreitet und wurde immer wieder weiterentwickelt (siehe [2]). Vor allem in den letzten 30 Jahren hat die mathematische Forschung zu diesem Thema viele interessante Resultate erzielt. Zu Beginn dieser Arbeit werden die Geschichte des Origami und in dieser Folge auch die Huzita-Hatori Axiome, die die möglichen Konstruktionen mithilfe von Origamifaltungen angeben, behandelt. Um die Frage zu klären, wofür Origami verwendet werden kann, werden auch Anwendungsgebiete beschrieben.

Bevor die Bedingungen für Origami mit Prismenpaaren definiert werden, sind noch ein paar grundlegende Begriffe erklärt, um der weiteren Arbeit leichter folgen zu können. In den letzten Jahren haben sich viele Autoren mit “curved folding” beschäftigt (siehe [3], [5], [17]). In dieser Arbeit betrachtet man solches “curved folding” mit Zylinderpaaren, um daraus die diskrete Version mit Prismenpaaren zu definieren. Als Grundlage für diese Überlegungen wird [14] verwendet.

Zum Schluss ist eine Vorgehensweise beschrieben, um Origami mit Prismenpaaren zu finden. Beispiele, die mithilfe dieses Verfahrens gefunden wurden, sind im Anschluss noch angegeben. In dieser Arbeit wurden alle Bilder, falls nicht anders angegeben, mit Cinderella.2 (Version 2.9 von Richter-Gebert und Kotrenkamp), Wolfram Mathematica 11 (von Wolfram Research) oder Gam3d (Version GAMV15 von Podensdorfer) erstellt.



# 1 Das Origami

Unter Origami versteht man im Allgemeinen das Falten von Papier. Viele kennen die interessanten und in den letzten Jahren immer detailgetreueren Faltmodelle von Tieren und anderen Objekten, aber Origami ist noch viel mehr. In diesem Kapitel wird ein Ausblick darüber gegeben, wie sich das Papierfalten im Laufe der Zeit verbreitet hat (siehe [2]): von den vermuteten Anfängen vor ungefähr 2000 Jahren mit der Erfindung des Papiers über die Entwicklung von Faltraditionen in China bis hin zu den heutigen Anwendungsgebieten von Origami. Es werden die sogenannten “Hutiza-Hatori Axiome” behandelt, die Humiaki Huzita 1989 in sechs Axiomen (siehe [2]) formuliert hat.

Um auch einen praktischen Nutzen von Origami zu sehen, werden in diesem Abschnitt auch Beispiele genannt, in denen das Anwenden von Origamifaltungen in der Technik und der Medizin sehr nützlich ist (siehe [12], [20]).

## 1.1 Die Geschichte des Origami

Der folgende Überblick nach [2] zeigt die historische Entwicklung des Origami aus verschiedenen Kulturen dieser Welt.

Das japanische Wort “Origami” wird aus den zwei Wörtern “oru” und “kami” zusammengesetzt, die übersetzt “falten” und “Papier” bedeuten. Man vermutet, dass das Papierfalten kurz nach der Erfindung des Papiers seinen Ursprung hat und von da an seine Verbreitung über die ganze Welt begann.

Durch buddhistische Mönche kam das Papier nach Korea und Japan, gelangte mit den Arabern nach Ägypten und von dort aus verbreitete es sich weiter in den Westen. Nach Europa, genauer gesagt Spanien, gelangte es erstmals durch die Mauren. Diese brachten nicht nur das Papier, sondern auch die Mathematik mit sich. Weiter ging es mit Italien, Frankreich und England, bis das Papier in ganz Europa bekannt war und bald darauf auch nach Nordamerika gelangte. Es ist nicht ganz sicher, wann und wo sich das Origami entwickelt hat, jedoch gibt es zwei Theorien dazu. Allgemein nimmt man an, dass es seine Wurzeln in China, Korea und Japan hat und sich mit der Verbreitung von Papier mit verbreitet hat. Eine der beiden Theorien beinhaltet die Idee, dass nicht nur das Papier, sondern auch Origamimodelle mit den Reisenden von Land zu Land

gelangten. Somit könnte sich die Idee, Papier auch falten zu können, um Objekte darzustellen (nicht nur darauf zu schreiben), als natürliche Tätigkeit eingebürgert haben. Die andere Theorie besagt, dass die Kunst des Papierfaltens unabhängig voneinander an mehreren Orten entdeckt wurde, da es etwas ganz Natürliches ist, Papier zu falten. Ganz egal, welcher der beiden Theorien man mehr Glauben schenkt, sind sich beide einig, dass das Origami in verschiedenen Ländern aufkam - unter anderem in China, Japan, Korea, Spanien, Italien, England und Nordamerika.

Am besten dokumentiert ist die Geschichte des Origami in Japan. Sie reicht von zeremoniellen Faltungen und den ersten Grundmodellen des Origami, die während der Heidan Periode (794-1185) entwickelt wurden, bis zur Etablierung des Origami in den Schulen Japans in der heutigen Zeit. Das neu aufkommende Interesse an Origami im 20. Jahrhundert schreibt man dem Origamikünstler Akira Yoshizawa zu. Dieser hat in [19], aus dem Jahre 1954, die Notation der Faltlinien von Origami geprägt, welche man auch heute noch, nur leicht abgeändert, verwendet. Die erstaunlichen Techniken und künstlerischen Meisterleistungen, die im Bereich von Origami in den letzten dreißig Jahren erreicht wurden, werden unter anderem dem wachsenden mathematischen und rechnerunterstützten Verständnis zugeschrieben.

In der Mathematik spielt beim Origami weniger das Falten von Tierfiguren oder dergleichen eine Rolle, sondern seine innere Geometrie ist ein sehr interessanter Forschungsbereich. Dionysius Lardner (1793-1859) schrieb in [11] aus dem Jahre 1840 das erste Mal über das Papierfalten im Zusammenhang mit Geometrie. In diesem Buch wird erwähnt, dass Origami stellvertretend für Lineal und Zirkel verwendet werden kann. Margherita Piazzolla Beloch (1879-1976) formulierte Axiome für Origami, welche 1936 in [13] veröffentlicht wurden. Wahrscheinlich ist diese Arbeit der erste Beitrag zu "mathematischem Origami". Später folgten die Axiome von Huzita Hatori [2], welche im nächsten Abschnitt genauer beschrieben werden.

## 1.2 Huzita–Hatori Axiome

Welche Konstruktionen mithilfe von Origamifaltungen möglich sind, wurde 1989 von Humiaki Huzita [8] in sechs Axiomen formuliert.

Faltet man ein Blatt Papier, so entstehen Geraden (die Faltlinien) und Punkte (Schnittpunkte von Geraden). Geht man von einem üblichen Blatt Papier aus, so hat man bereits zu Beginn vier Geraden und vier Punkte gegeben, also die Außenkanten und Ecken des Blattes. Die Huzita-Hatori Axiome geben also an, wie weitere Geraden und Punkte mithilfe einer einzigen Faltung entstehen können [2]. In Abbildung 1.1 sind diese Axiome abgebildet.

**A1** Zu zwei gegebenen Punkten  $P$  und  $Q$  kann eine Gerade gefaltet werden, die diese

beiden Punkte verbindet. (Dies ist die Verbindungsgerade der beiden Punkte  $P$  und  $Q$ .)

**A2** Zwei gegebene Punkte  $P$  und  $Q$  können aufeinander gefaltet werden. (Dies liefert die Streckensymmetrale der beiden Punkte  $P$  und  $Q$ .)

**A3** Zwei gegebene Geraden  $g$  und  $h$  können aufeinander gefaltet werden. (Dies ergibt eine der Winkelhalbierenden, falls die gegebenen Geraden  $g$  und  $h$  einen Schnittpunkt miteinander haben.)

**A4** Zu einem gegebenen Punkt  $P$  und einer Geraden  $g$  kann eine Gerade gefaltet werden, die durch  $P$  geht und orthogonal auf  $g$  ist.

**A5** Zu zwei gegebenen Punkten  $P$  und  $Q$  und einer Geraden  $g$  kann eine Gerade gefaltet werden, sodass diese den Punkt  $P$  enthält und der Punkt  $Q$  auf die Gerade  $g$  gefaltet wird.

**A6** Zu zwei gegebenen Punkten  $P$  und  $Q$  und zwei gegebenen Geraden  $g$  und  $h$  kann eine Gerade gefaltet werden, sodass  $P$  auf  $g$  und  $Q$  auf  $h$  gefaltet wird.

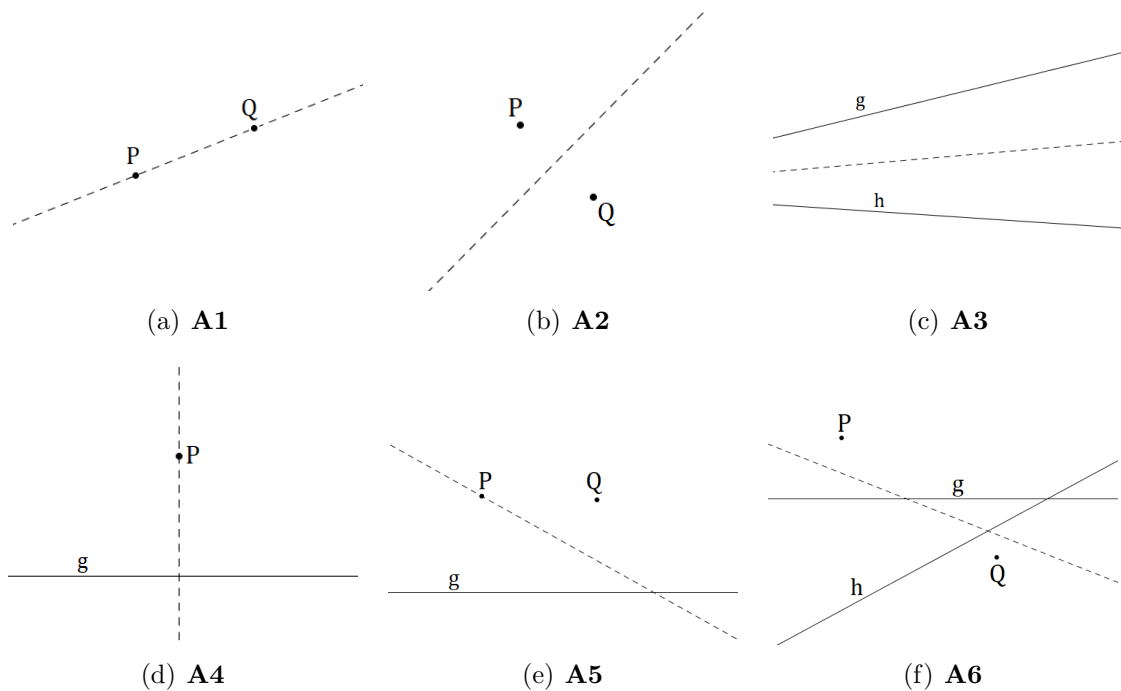


Abbildung 1.1: Huzita-Hatori Axiome

Zu diesen sechs Axiomen gibt es jedoch noch ein siebtes Axiom, welches in Abbildung 1.2 zu sehen ist. Dieses wurde von Koshiro Hatori [7] entdeckt.

**A7** Zu zwei gegebenen Geraden  $g$  und  $h$  und einem Punkt  $P$  kann eine Gerade gefaltet werden, sodass diese orthogonal zu  $h$  ist und  $P$  auf  $g$  gefaltet wird.

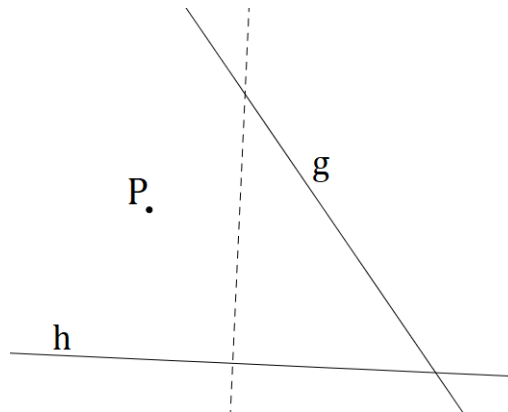


Abbildung 1.2: Siebtes Axiom **A7**

Hier muss noch erwähnt werden, dass die Huzita-Hatori Axiome eigentlich nicht “Axiome” genannt werden dürften. Manche dieser Axiome sind nicht eindeutig, beziehungsweise nicht unabhängig (siehe [6], [10]). Trotzdem werden in dieser Arbeit die Operationen Axiome genannt, da sich diese Bezeichnung über die Jahre eingebürgert hat.

### 1.3 Anwendungsgebiete

Um nicht nur von der Theorie von Origami zu sprechen, werden hier Beispiele angeführt, bei denen Origamifaltungen in der Technik und Medizin eine Anwendung finden.

In diesem Abschnitt werden die beiden Begriffe “Talfalten” und “Bergfalten” verwendet (vergleiche [12]). Talfalten werden als strichlierte Geraden dargestellt und die Faltung kann man sich so vorstellen, dass man ein Blatt Papier vor sich hinlegt und die unteren Ecken auf die oberen beiden Ecken des Blattes faltet. Dieser Vorgang ist in Abbildung 1.3 dargestellt.

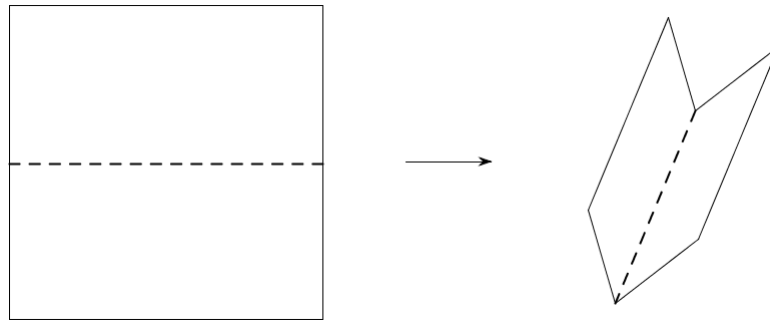


Abbildung 1.3: Faltung einer Talfalte

Bei Bergfalten, die durch durchgezogene Geraden symbolisiert werden, kann man sich die Faltung so vorstellen, dass oberen beiden Ecken des Blattes nach hinten auf die unteren beiden Ecken gefaltet werden, wie in Abbildung 1.4 gezeigt.

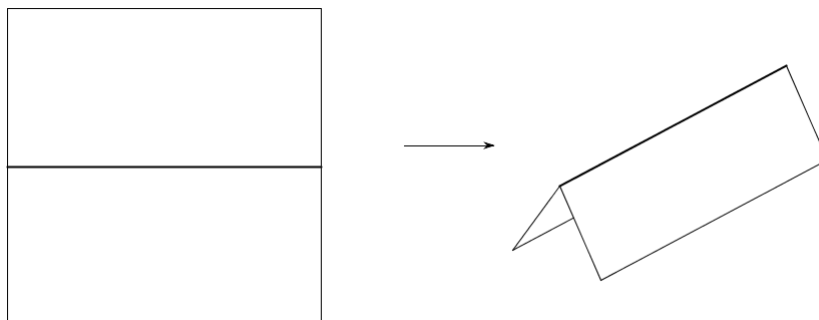


Abbildung 1.4: Faltung einer Bergfalte

### 1.3.1 Miura map fold

Wenn man eine Straßenkarte oder einen Beipackzettel eines Medikaments gelesen hat, steht man oft vor dem gleichen Problem: Wie muss ich die Karte wieder zusammenfalten, um sie zurück in ihre Hülle geben zu können bzw. um den Beipackzettel wieder in die Schachtel zu bekommen? Dieser Abschnitt nach [12] bezieht sich auf solche Faltungen.

Um der folgenden Erklärung leichter folgen zu können, definiert man hier “Schichten” wie folgt: Man zeichne eine Gerade auf ein Blatt Papier, sodass diese Gerade das Blatt in zwei gleich große, deckungsgleiche Teilflächen teilt. Faltet man nun entlang dieser Linie, so liegen die beiden Teilflächen übereinander und man nennt sie Schichten.

Wendet man nochmals eine solche Faltung an, die die Oberfläche dieses Teils halbiert, so entstehen vier Schichten.

Im erstem Moment ist man sich der Komplexität des Problems, ein rechteckiges Blatt flach zusammenzufalten, nicht bewusst. Sieht man einen Faltplan vor sich liegen, erscheint die Lösung nahezu trivial. Versucht man aber selbst, eine eindeutige Lösung zu finden, erkennt man, dass es sehr viele Möglichkeiten gibt, eine Schicht über oder unter eine andere Schicht, beziehungsweise zwischen zwei andere Schichten zu falten. Somit ist es nicht möglich eine eindeutige Lösungsstrategie dafür anzugeben.

Dieses sogenannte “Map Folding” Problem (siehe [12],[16]) ist selbst für eine  $2 \times n$  Karte (zwei Quadrate hoch und  $n$  Quadrate breit) ungelöst. Ein Beispiel für eine  $3 \times 3$  Karte sieht man in Abbildung 1.5.

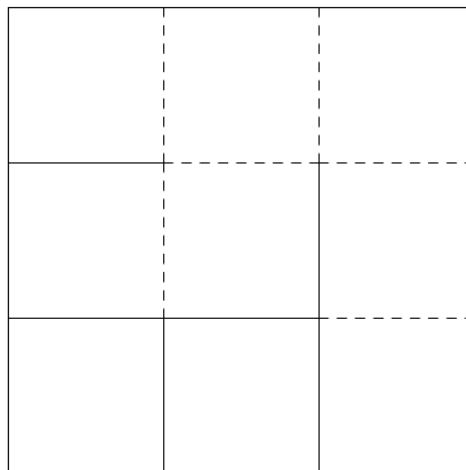


Abbildung 1.5: Ein Map Folding-Beispiel, welches dem Beispiel aus [12] nachempfunden ist.

Eine besondere Faltung für rechteckige Objekte, zum Beispiel ein rechteckiges Blatt Papier, ist die “Miura-Ori”, was übersetzt soviel wie die Faltung nach Miura bedeutet. Koyro Miura, ein japanischer Astrophysiker, entwickelte in den 1970er Jahren eine Faltung, die zum Beispiel bei Satelliten verwendet wird, um deren Sonnenkollektoren zusammenzufalten, ohne sie zerlegen zu müssen. Dies erleichtert den Transport in den Orbit und die folgende Installation ungemein. Eine Besonderheit der Faltung ist, dass das Objekt mit einer kontinuierlichen Bewegung gefaltet und entfaltet werden kann. Faltet man ein rechteckiges Blatt Papier mithilfe der Miura-Faltung (siehe Abbildung 1.6), so kann man das gefaltete Blatt mit einer Bewegung auseinander falten, indem man an zwei gegenüberliegenden Ecken zieht.

Für den interessierten Leser empfehle ich die Arbeit von Stachel Hellmuth [16]. In dieser hat er sich mit Miura-Ori und insbesondere mit dem Faltvorgang eines solchen Origami beschäftigt.

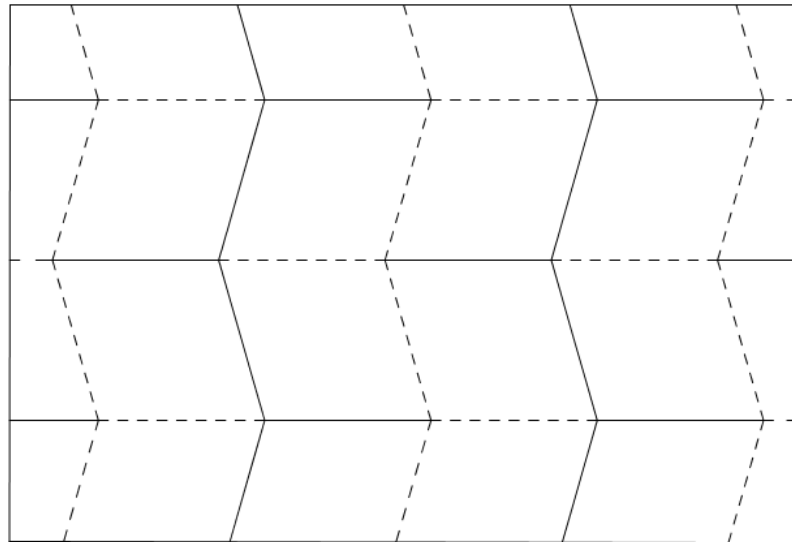


Abbildung 1.6: Ungefaltete Miura-Ori, welche dem Beispiel aus [16] von Stachel H. nachempfunden ist.

### 1.3.2 Stents

In [20] werden sogenannte “Stents” beschrieben, durch deren Erfindung in der Medizin ein großer Fortschritt zur Heilung für verschiedenste Krankheiten erzielt wurde. Diese Stents sind biegbare, röhrenförmige Gebilde, die zusammengefaltet werden können und in dieser Größe endoskopisch in verengte Blutgefäße eingesetzt werden können. An ihrem Bestimmungsort werden diese wieder entfaltet und verhindern, dass das Blutgefäß sich irgendwann verschließt. Erst mithilfe der Origamifaltung wurde die Faltung von röhrenförmigen Stents, wie sie heute existiert, ermöglicht (siehe [20]). Vor allem die Tatsache, dass man diesen Stent so klein zusammenfalten kann, hat das Gesundheitswesen einen entscheidenden Schritt vorgebracht.

Außerdem wird Origami in der Autoindustrie verwendet, um Airbags zusammenzufalten, damit diese sich im entscheidenden Fall richtig entfalten. Auch in der Natur findet man Beispiele für solche Faltungen, wie zum Beispiel die Flügel eines Käfers. Man sieht, dass Origamifaltungen in vielen Fällen angewendet werden können.

## 2 Begriffserklärung

Um diese Arbeit an manchen Stellen leichter zu verstehen, werden in diesem Abschnitt einige Begriffe aus der sphärischen Geometrie (siehe [1], [18]) und der linearen Algebra (siehe [4]) angeführt.

### 2.1 Lineare Algebra

Aus der linearen Algebra wird hier nur die Definition von Winkeln im n-dimensionalen reellen Raum angeführt.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$  ist gegeben durch

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cdot \cos \varphi \quad (2.1)$$

Da man hier den Winkel im Bogenmaß kennen muss, kann man mithilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \quad (2.2)$$

für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$  direkt folgern, dass für  $\alpha, \beta \neq 0$

$$-1 \leq \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \leq 1$$

gilt. In diesem Fall gibt es genau ein  $\varphi \in [0, \pi]$ , sodass

$$\cos \varphi = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \quad (2.3)$$



## 2.2 Sphärische Geometrie

Aus der sphärischen Geometrie interessiert uns der sphärische Abstand und in weiterer Folge die Tatsache, dass es auf der Sphäre nur einen Typ von Kegelschnitten gibt, da man sehen wird, dass jede sphärische Ellipse auch als sphärische Hyperbel zu sehen ist. In dieser Arbeit wird nur auf einige ausgewählte Eigenschaften der sphärischen Geometrie und deren Kegelschnitte eingegangen. Will man sich genauer über sphärische Kegelschnitte informieren, ist die Arbeit [18] von Tranacher H. zu empfehlen. Dieser hat in seiner Arbeit die Eigenschaften solcher Kegelschnitte didaktisch aufbereitet.

### 2.2.1 Sphärischer Abstand

In [1] wurde der sphärische Abstand wie folgt definiert:

Man betrachte eine Kugel  $\kappa$  mit Mitte  $M$  und Radius  $r$ . In der Geometrie versteht man unter dem Abstand zweier Punkte die kürzeste Verbindungsgerade dieser beiden Punkte. Der Abstand zweier Punkte  $A$  und  $B$  ist in der euklidischen Geometrie definiert als die Strecke  $\overline{AB}$ .

Um nun den Abstand  $\widehat{AB}$  auf der Kugel zu bekommen, betrachtet man den Großkreisbogen zwischen den Punkten  $A$  und  $B$ , der in Abbildung 2.1 dargestellt wird. Die Länge dieses Großkreisbogens bezeichnet man als sphärischen Abstand von  $A$  und  $B$  und schreibt  $|\widehat{AB}|$ .

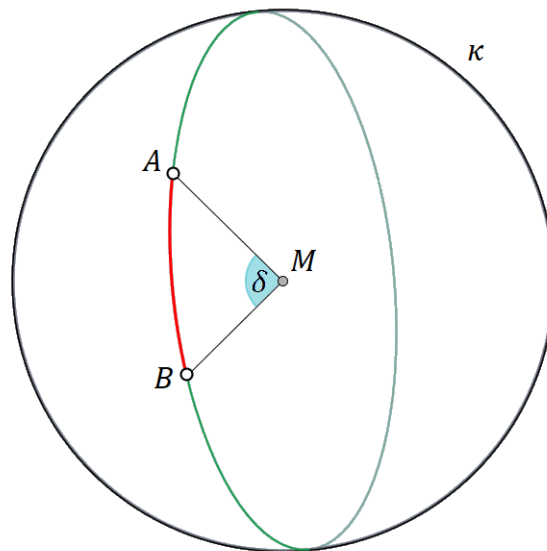


Abbildung 2.1: Sphärischer Abstand zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$

Ein solcher Abstand wird durch den Radius  $r$  und den Mittelpunktswinkel  $\delta = \angle(AMB)$  der Kugel definiert. Da der Großkreis durch die Punkte  $A$  und  $B$ , welche nicht diametral gegenüber liegen, in zwei Großkreisbögen unterteilt wird, gilt für den sphärischen Abstand entweder  $|\widehat{AB}| = \delta$  oder  $|\widehat{AB}| = 360^\circ - \delta$ .

### 2.2.2 Sphärischer Kegelschnitt

Auf der Sphäre gibt es nach [18], [1] zwei mögliche Typen von Kegelschnitten: Ellipse und Hyperbel. Hier wird gezeigt, warum in dieser Arbeit nur von "dem" Kegelschnitt gesprochen wird.

Eine sphärische Hyperbel ist mithilfe ihrer Brennpunkte  $F_{1,2}$  wie folgt definiert: Für einen Punkt  $X$  auf der Hyperbel ist die Abstandsdifferenz von  $\widehat{F_1X}$  und  $\widehat{F_2X}$  konstant.

$$k = \{X \in \kappa \mid |\widehat{F_1X}| - |\widehat{F_2X}| = 2\omega\} \text{ mit } \omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2.4)$$

Eine sphärische Ellipse, wie in Abbildung 2.2, mit den Brennpunkten  $F_{1,2}$  definiert man folgendermaßen:

Für jeden Punkt  $X$  auf der Ellipse ist die Summe der Abstände  $\widehat{F_1X}$  und  $\widehat{F_2X}$  konstant.

$$k = \{X \in \kappa \mid |\widehat{F_1X}| + |\widehat{F_2X}| = 2\omega\} \text{ mit } \omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2.5)$$

Auf der Sphäre bekommt man zu jedem Punkt  $F_1$  noch einen weiteren Punkt  $\overline{F_1}$ , indem man den Großkreis durch  $F_1$  mit der Geraden, welche von  $F_1$  und dem Mittelpunkt der Sphäre aufgespannt wird, schneidet.

Für eine Ellipse mit Brennpunkten  $F_{1,2}$  sei der Abstand  $\widehat{F_1X} = \alpha$  und  $\widehat{F_2X} = \beta$  (siehe Abbildung 2.2).

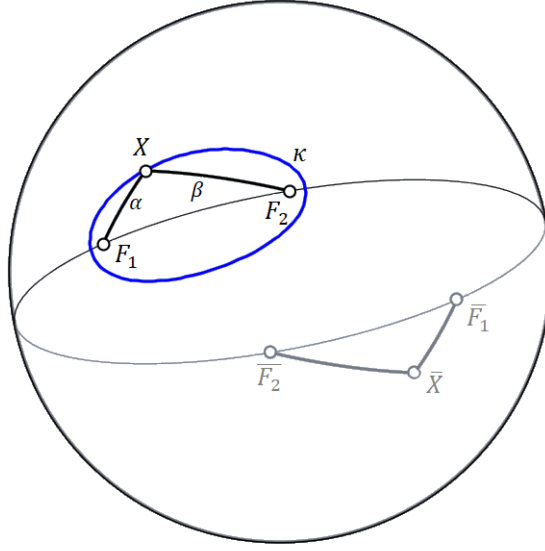


Abbildung 2.2: Sphärischer Kegelschnitt  $\kappa$  mit seinen Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$

Mit  $\overline{F_1}$  ist  $\widehat{X\overline{F_1}} = \pi - \alpha$ . Damit kann man die Gleichung einer sphärischen Ellipse (siehe Gleichung 2.5) auch schreiben als

$$\begin{aligned} |\pi - \widehat{X\overline{F_1}} + \widehat{F_2X}| &= 2\omega \\ |\widehat{X\overline{F_1}} - \widehat{F_2X}| &= \underbrace{2\omega - \pi}_{2\omega^*} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Das ist die Gleichung einer sphärischen Hyperbel. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit immer vom sphärischen Kegelschnitt gesprochen, den man immer als sphärische Ellipse deuten will.

Man kann einen quadratischen Kegel  $\Gamma$  durch einen sphärischen Kegelschnitt wie folgt angeben: Seien  $F_{1,2}$  die Brennpunkte des sphärischen Kegelschnitts und  $M = 0$  der Scheitel des Kegels, also der Mittelpunkt der Kugel auf der der sphärische Kegelschnitt liegt. Wie man weiß, gilt für den sphärischen Kegelschnitt die Gleichung 2.5. Dann ist

$$\cos^2(\widehat{F_1X}) - 2 \cos(\widehat{F_1X}) \cos(\widehat{F_2X}) \cos(2\omega) + \cos^2(\widehat{F_2X}) = \sin^2(2\omega) \quad (2.7)$$

die Gleichung des quadratischen Kegels  $\Gamma$ . Wie man zu dieser Gleichung kommt, sieht man in Abschnitt 3.2.

### 2.2.3 Sphärischer Winkelcosinussatz

Nach [15] sei ein sphärisches Dreieck  $A, B, C$  auf der Einheitskugel (Mittelpunkt  $O$  und Radius  $r = 1$ ), wie in Abbildung 2.3, gegeben. Die Seitenlängen des sphärischen Dreiecks seien  $a, b, c$  und die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ . Für solche Dreiecke gilt:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cos a \quad (2.8)$$

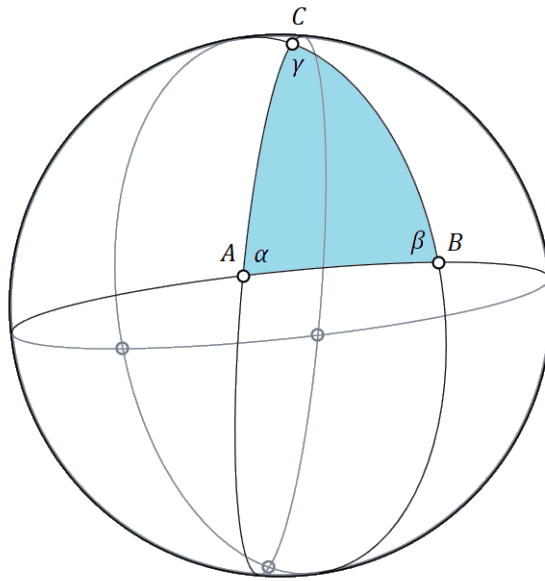


Abbildung 2.3: Sphärisches Dreieck  $A, B, C$

Für den Beweis des sphärischen Winkelcosinussatz siehe [15].

# 3 Bedingungen für die Origamifaltung mit Zylinderpaaren

In diesem Kapitel nach [14] werden die Bedingungen angegeben, damit ein Origami mit Prismenpaaren erst möglich ist. Bevor man die diskrete Version der Faltung definiert, betrachtet man eine Kurve  $c(s) \in C^3$ , die durch ihre Bogenlänge  $s \in I \subset \mathbb{R}$  parametrisiert ist und zwei Zylinder  $\varphi_{1,2}$ , die beide die Kurve  $c(s)$  enthalten mögen.

## 3.1 Räumliche Kurven auf Zylindern

Gegeben sei eine Kurve  $c(s) \in C^3$  im  $\mathbb{R}^3$ , welche durch ihre Bogenlänge  $s \in I \subset \mathbb{R}$  parametrisiert ist, und deren zugehöriges Frenet-Dreibein (siehe [9]) mit  $\{t, h, b\}$  bezeichnet wird. Zusätzlich seien zwei Einheitsvektoren  $e_1$  und  $e_2$  gegeben, die mit  $c(s)$  zwei Zylinder  $f_{1,2}(s, v) := c(s) + ve_{1,2}$ ,  $(s, v) \in I \times J \in \mathbb{R}^2$  erzeugen, wobei  $\{e_i, c'\}$  als linear unabhängig angenommen werden kann für  $s \in I$ .

Um nun die geodätische Krümmung  $\kappa_{g,i}$  der Kurve  $c$ , auf den Zylindern  $f_i, i = 1, 2$ , zu bestimmen, betrachtet man erst den Tangenteneinheitsvektor  $c'$ , die Normalenvektoren  $n_i := \frac{c' \times e_i}{\|c' \times e_i\|}$  der Zylinder und die Seitenvektoren  $s_i := c' \times n_i$ . Der Normalenvektor  $n_i$  ist orthogonal zur Tangentialebene des Zylinders  $f_i$ . Den Vektor  $c''$  zerlegt man in eine tangentielle Komponente, welche parallel zu  $[c', s_i]$  und eine normale Komponente, welche parallel zu  $n_i$  ist.

$$\begin{aligned} c'' &= c''_{t,i} + c''_{n,i} \\ c''_{t,i} &= s_i \langle s_i, c'' \rangle = -\frac{s_i \langle c'', e_i \rangle}{\|c' \times e_i\|} \\ c''_{n,i} &= \langle n_i, c'' \rangle n_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nun kann man die geodätischen Krümmungen  $\kappa_{g,i}$  von  $c(s)$  bezüglich der beiden Zylinder  $f_i$  berechnen:

$$\kappa_{g,i}(s) = -\frac{\langle c'', e_i \rangle}{\|c' \times e_i\|} \quad (3.2)$$

Die Winkel zwischen  $c'$  und  $e_i$  nennt man  $\varphi_i(s) := \angle(c'(s), e_i)$ . Damit bekommt man  $\cos \varphi_i = \langle c', e_i \rangle$  und  $\sin \varphi_i = \|c' \times e_i\|$ . Differentiation von  $\cos \varphi_i = \langle c', e_i \rangle$  ergibt  $\langle c'', e_i \rangle = -\varphi_i' \sin \varphi_i$  und somit folgt

$$\begin{aligned} \kappa_{g,i}(s) &= -\frac{\langle c'', e_i \rangle}{\|c' \times e_i\|} = \frac{-\varphi_i' \sin \varphi_i}{\|c' \times e_i\|} = \frac{\varphi_i' \|c' \times e_i\|}{\|c' \times e_i\|} = \varphi_i'(s) \\ \kappa_{g,i}(s) &= \varphi_i'(s) \end{aligned} \quad (3.3)$$

## 3.2 Kurven mit derselben geodätischen Krümmung auf zwei Zylindern

Nun definiert man die Eigenschaften von Kurven  $c(s)$ , welche dieselbe geodätische Krümmung  $\kappa_{g,i}$  auf  $f_1$  und  $f_2$ , besitzen nach [14].

Mithilfe der Isometrien  $\gamma_{1,2} : f_{1,2} \mapsto \pi$  kann man die beiden Zylinder  $f_1$  und  $f_2$  in eine Ebene  $\pi$  abwickeln. Dadurch wird auch die Kurve  $c(s)$  auf die Kurven  $\gamma_{1,2}(c)$  abgebildet, welche für das “curved folding” durch eine ebene Isometrie  $\beta$  aufeinander abbildbar sind. Da die geodätische Krümmung  $\kappa_{g,i} = \varphi_i'$  gleich der Krümmung der ebenen Kurven  $\gamma_{1,2}(c)$  ist, kann man die räumliche Konfiguration auch durch das Falten eines ebenen Blattes Papier erzeugen, wobei  $\gamma_1(c(s)) = \beta(\gamma_2(c(s))) =: c^*(s)$ . In diesem Fall gilt:  $\kappa_{g,1}(s) \equiv \pm \kappa_{g,2}(s) \forall s \in I$ .

$\Rightarrow$  Die Kurve  $c(s)$  und die zwei Erzeugenden  $e_{1,2}$  der Zylinder bilden ein Tripel. Dieses Tripel nennt man Tripel für “curved folding” mit Zylinder (CFC-Tripel), wenn  $\kappa_{g,1}(s) \equiv \pm \kappa_{g,2}(s) \forall s \in I$  gilt.

Nach Gleichung 3.3 gilt:

$$\kappa_{g,1}(s) \equiv \pm \kappa_{g,2}(s) \forall s \in I \Leftrightarrow$$

$$|\varphi_1(s) \mp \varphi_2(s)| = 2\omega = \text{const.} \forall s \in I \quad (3.4)$$

mit konstantem Winkel  $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Je nach Orientierung der Vektoren  $e_{1,2}$  ist das Vorzeichen in Gleichung 3.4 gegeben, wobei es möglich ist, die Orientierung von  $e_{1,2}$  so zu wählen, dass in Gleichung 3.4 die Summe verwendet werden kann.

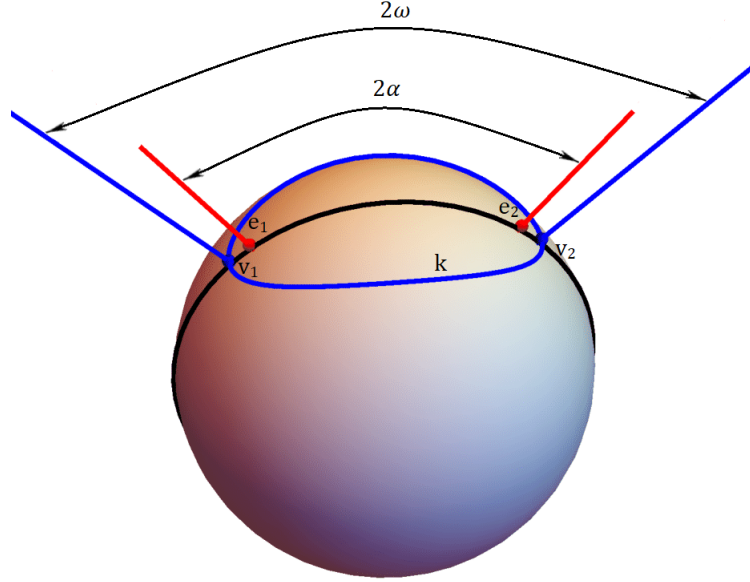


Abbildung 3.1: Sphärischer Kegelschnitt  $k$  mit reellen Brennpunkten  $e_{1,2}$  und Scheitelpunkten  $v_{1,2}$

Die Gleichung 3.4 beschreibt einen sphärischen Kegelschnitt. Um Punkte dieses Kegelschnitts zu ermitteln, betrachtet man das sphärische Bild  $c'(s)$  der Tangenten der Kurve  $c(s)$ . Die Brennpunkte werden durch die Richtungen der Vektoren  $e_{1,2}$  bestimmt, wobei der sphärische Abstand zwischen ihnen durch  $2\alpha$  angegeben werden soll, mit  $0 \leq \alpha \leq \omega$ . Die Hauptscheitellänge des sphärischen Kegelschnitts ist durch den Winkel  $2\omega$  gegeben und die Hauptscheitel bezeichnet man hier mit  $v_{1,2}$ , siehe Abbildung 3.1. Somit hat man

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi_1(s) &= \cos \varphi_2(s) \cos 2\omega \mp \sin \varphi_2(s) \sin 2\omega \quad \forall s \in I & (3.5) \\
 \cos \varphi_1(s) - \cos \varphi_2(s) \cos 2\omega &= \mp \sin \varphi_2(s) \sin 2\omega \\
 (\cos \varphi_1(s) - \cos \varphi_2(s) \cos 2\omega)^2 &= (\mp \sin \varphi_2(s) \sin 2\omega)^2 \\
 (\cos \varphi_1(s) - \cos \varphi_2(s) \cos 2\omega)^2 &= (1 - \cos^2 \varphi_2(s)) \sin^2 2\omega
 \end{aligned}$$

Verwendet man für  $\cos \varphi_i = \langle c', e_i \rangle$ , dann bekommt man

$$(\langle c', e_1 \rangle - \langle c', e_2 \rangle \cos 2\omega)^2 = (1 - \langle c', e_2 \rangle^2) \sin^2 2\omega \quad (3.6)$$

was uns eine Bedingung für den Tangentenvektor  $c'$  liefert. Mit  $\langle c', c' \rangle = 1$ ,  $\forall s \in I$  kann man Gleichung 3.6 umschreiben:

$$\begin{aligned} \langle c', e_1 \rangle^2 - 2\langle c', e_1 \rangle \langle c', e_2 \rangle \cos 2\omega + \langle c', e_2 \rangle^2 \cos^2 2\omega &= \sin^2 2\omega - \langle c', e_2 \rangle^2 \sin^2 2\omega \\ \langle c', e_1 \rangle^2 - 2\langle c', e_1 \rangle \langle c', e_2 \rangle \cos 2\omega + \langle c', e_2 \rangle^2 (\cos^2 2\omega + \sin^2 2\omega) &= \sin^2 2\omega \\ \langle c', e_1 \rangle^2 - 2\langle c', e_1 \rangle \langle c', e_2 \rangle \cos 2\omega + \langle c', e_2 \rangle^2 &= \langle c', c' \rangle \sin^2 2\omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

Das ist die Gleichung eines quadratischen Kegels  $\Gamma$ , welcher kein Drehkegel ist. Außerdem kann man aus dieser quadratischen homogenen Gleichung herauslesen, dass die Tangenten der Kurve  $c(s)$  parallel zu den Erzeugenden des Kegels  $\Gamma$  sein müssen. Wegen Gleichung 3.4 weiß man, dass die zwei Richtungsvektoren  $e_{1,2}$  die reellen Brennpunkte des quadratischen Kegels  $\Gamma$  definieren.

### Bemerkung 3.2.1.

- a) Eine räumliche Kurve  $c(s)$  bestimmt einen sphärischen Kegelschnitt  $k$ , wenn die Tangenten von  $c(s)$  parallel zu einem quadratischen Kegel  $\Gamma$  sind. Dieser Kegelschnitt enthält das sphärische Bild der Tangentenvektoren  $c'(s)$ . Im Allgemeinen hat  $k$  sechs Brennpunkte, von denen zwei reell sind, falls  $k$  kein Kreis ist (siehe [14]). Diese beiden Brennpunkte werden durch die Richtungen von  $e_{1,2}$  bestimmt, welche die Erzeugenden zweier Zylinder  $f_{1,2}$  entlang  $c$  sind. Genau zu jeder Kurve  $c$  mit diesen Eigenschaften gibt es zwei verschiedene Zylinder  $f_{1,2}$ , sodass  $c(s)$  auf beiden Zylindern dieselbe geodätische Krümmung besitzt.
- b) Mit einer regulären affinen Abbildung  $\alpha$  kann man  $\Gamma$  in einen Drehkegel transformieren. Diese Abbildung transformiert also den Kegelschnitt  $k$  in einen Kreis auf der Einheitskugel. Somit ist also unsere Ausgangskurve  $c$  affin äquivalent zu einer Kurve deren Tangenten parallel zu den Erzeugenden eines Drehkegels sind. Für jede Kurve, die affin äquivalent zu einer ebenen Kurve ist, kann man eine Darstellung finden, die äquivalent zu Gleichung 3.7 ist. Das liefert die gewünschte Eigenschaft.

Eine Kurve, deren Tangenten parallel zu den Erzeugenden eines Drehkegels sind, nennt man *Böschungslinie* (vergleiche dazu [9]). Da die Ausgangskurve  $c$  affin äquivalent zu einer solchen Kurve ist, nennt man  $c$  *affin zur Böschungslinie*.

- c) Spannt die räumliche Kurve  $c$  eine Ebene auf, dann ist der sphärische Kegelschnitt, von dem ein Teil durch das sphärische Bild der Tangenten von  $c$  erzeugt wird, ein Großkreis.

Dieser Spezialfall tritt bei  $\omega = \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$  auf:

Hier ist  $\cos(2\omega) = \cos(k\pi) = (-1)^k$  und Gleichung 3.7 reduziert sich auf



$$\begin{aligned} \langle c', e_1 \rangle^2 - 2\langle c', e_1 \rangle \langle c', e_2 \rangle (-1^k) + \langle c', e_2 \rangle^2 &= \langle c', c' \rangle \sin^2(k\pi) \\ \langle c', e_1 \rangle \pm \langle c', e_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Das ist eine homogene lineare Gleichung für den Tangentenvektor  $c'(s)$ . Die zwei Zylinder können durch Spiegelung an der Ebene von  $c(s)$  gewonnen werden.

Da man für die weiteren Überlegungen zwei verschiedene Zylinder benötigt, betrachtet man den Fall, dass die räumliche Kurve  $c$  eine Ebene aufspannt, nicht weiter.

Die folgenden zwei Theoreme fassen die obigen Erkenntnisse zusammen (siehe [14]) :

**Theorem 3.2.1.** *Sei  $c(s)$  eine  $C^2$ -Kurve, die dieselbe geodätische Krümmung bezüglich zwei unterschiedlichen Zylindern  $f_{1,2}$  in jedem ihrer Punkte besitzt. Die Erzeugendenrichtungen der Zylinder seien  $e_1$  und  $e_2$ . Dann sind die Tangenten von  $c(s)$  parallel zu den Erzeugenden eines quadratischen Kegels  $\Gamma$  vom Grad 2, welcher kein Drehkegel ist. Außerdem bestimmen die Richtungen der Erzeugenden die Brennlinsen von  $\Gamma$ . Falls der Kegelschnitt  $k$ , welcher durch den Schnitt des Kegels  $\Gamma$  mit einer Kugel entsteht, ein Großkreis ist, dann ist die Kurve  $c(s)$  eben und die Richtungsvektoren  $e_{1,2}$  sind symmetrisch bezüglich der Ebene, in der die Kurve  $c(s)$  liegt.*

**Theorem 3.2.2.** *Für jede Kurve  $c(s)$ , egal ob diese eben ist oder ihre Tangenten parallel zu einem Kegel  $\Gamma$  (vom Grad 2), welcher kein Drehkegel ist, sind, gibt es zwei unterschiedliche Zylinder  $f_{1,2}$ , auf denen  $c(s)$  in jedem Punkt dieselbe geodätische Krümmung besitzt. Durch die reellen Brennlinsen des Kegels  $\Gamma$  sind die Richtungen der Erzeugenden der beiden Zylinder gegeben. Falls  $c(s)$  eben ist, dann sind alle möglichen Zylinderpaare symmetrisch bezüglich der Ebene, in der  $c(s)$  liegt. Auch ein solches  $c(s)$  hat die gewünschten Eigenschaften. Wenn die Tangenten von  $c(s)$  parallel zu den Erzeugenden von  $\Gamma$  sind, stimmen die Richtungen  $e_{1,2}$  mit den reellen Brennlinsen des Kegels  $\Gamma$  überein und bilden ein CFC-Tripel für ein "curved" Origami mit Zylinderpaaren.*

### 3.3 Vom Raum in die Ebene

Diese Überlegungen finden sich in [14].

Sei  $c(s)$  eine räumliche Kurve, die die obigen Theoreme erfüllt. Die zwei zugehörigen Zylinder  $f_{1,2}$  werden durch Erzeugende parallel zu  $e_{1,2}$  erzeugt. Mithilfe zweier Isometrien  $\gamma_{1,2}(t)$ , die  $f_{1,2}$  in eine Ebene  $\pi$  abbilden, kann man die ebene Situation erzeugen. Sei  $t \in \mathbb{R}$  eine Variable aus dem Intervall  $[0, 1]$ . Lässt man  $t$  von 0 bis

1 laufen, so bekommt man jeden Zwischenschritt der Entfaltung des Origami in die Ebene. Hierbei gilt, dass mit  $t = 0$  die Situation des Origami im Raum und mit  $t = 1$  das Origami in der Ebene  $\pi$  beschrieben wird. Diese Isometrien sollen sogenannte "Minding-Isometrien" sein, welche die Erzeugenden der Zylinder während der Anwendung erhalten. Wendet man diese Isometrien  $\gamma_{1,2}(t)$  auf  $c(s)$  an, so erhält man zwei Bilder  $c_{1,2}(s, t)$  und aus den zwei Erzeugenden  $e_{1,2}$  werden  $e_1(t) := \gamma_1(t)(e_1)$  und  $e_2(t) := \gamma_2(t)(e_2)$ . Existieren zwei Isometrien  $\gamma_{1,2}(t)$ , sodass  $c_1(s, t) = c_2(s, t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ ,  $s \in I$ , dann wählt man diese aus.

In diesem Fall nennt man  $\gamma_{1,2}(t)$  gekoppelte Origamifaltung der räumlichen Konfiguration zweier Zylinder. Hier bilden auch alle Zwischenstufen von  $c_1(s, t) = c_2(s, t)$  ein CFC-Tripel für ein festes  $t$ , wobei die Theoreme 1 und 2 zusätzlich für alle festen  $t \in [0, 1]$  gelten müssen. Da eine Isometrie die Winkel auf einer Fläche nicht ändert, so ist die Gleichung 3.4 für alle  $t \in [0, 1]$  gültig. Allerdings geht der Winkel zwischen  $e_1(t)$  und  $e_2(t)$  vom Ausgangszustand  $2\alpha$  im Raum, in den Winkel  $2\omega$  in der Ebene, über.

Um die erforderlichen Bedingungen für diesen Fall zu finden, geht man wie folgt vor:

In einem kartesischen Koordinatensystem verwendet man ein  $u(t) = (1 - t)\alpha + t\omega$ , welches mit  $t \in [0, 1]$ ,  $u(t) \in [\alpha, \omega]$  ergibt und setzt  $e_{1,2}(t) := (0, \pm \sin u(t), \cos u(t))^T$  und  $c'(s, t) := (x(s, t), y(s, t), z(s, t))^T$ . Dadurch bekommt man aus der Gleichung 3.7 folgende Gleichung für den Kegel 2. Grades:

$$\Gamma(t) \dots 0 = x^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega + (\sin^2 \omega - \sin^2 u)(y^2 \cos^2 \omega - z^2 \sin^2 \omega) \quad (3.9)$$

mit diesem  $u(t) = (1 - t)\alpha + t\omega$ . Die räumliche Anfangskonfiguration des Origami identifiziert man mit  $u(0) = \alpha$ , und das Origami in der Ebene wird bei  $u(1) = \omega$  erreicht. Dadurch bekommt man aus der Gleichung 3.9 ein Bündel von sphärischen Kegelschnitten 2. Grades mit den zwei Scheiteln in Richtung

$$v_{1,2} = (0, \pm \sin \omega, \cos \omega)^T \quad (3.10)$$

**Bemerkung 3.3.1.** *Hier muss man  $e_{1,2}$  und  $\Gamma$  mit  $e_{1,2}(0)$  und  $\Gamma(0)$  identifizieren, da man den Kegel in allen Zwischenschritten der Faltung des Origami betrachten will. Die reellen Brennpunkte von  $\Gamma(t)$  werden durch die Vektoren  $e_{1,2}(t)$  bestimmt und die Erzeugenden des Kegels  $\Gamma(t)$  kann man durch*

$$\begin{aligned} y \sin u + z \cos u &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos v \\ -y \sin u + z \cos u &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos(2\omega - v) \end{aligned} \quad (3.11)$$

mit den Winkeln  $v \in [\omega - \alpha, 2\omega - \alpha]$  von  $e_{1,2}(t)$  und  $c'(s, t)$  parametrisieren, wobei die Werte von  $v$  konstant sind ( $v = \text{const.}$ ).

Aus Gleichung 3.11 bekommt man die homogene Gleichung vom Grad 4 für die Kurven  $\varphi(v)$  von Tangentenvektoren

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)[a(v)z^2 + b(v)y^2] - y^2z^2 &= 0 \text{ mit} \\ a(v) &:= \sin^2 \omega \sin^2(\omega - v), \\ b(v) &:= \cos^2 \omega \cos^2(\omega - v) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Für den Fall der gekoppelten Origamifaltung müssen die Tangentenvektoren der Kurve  $c(s, t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, 1]$  parallel zu den Erzeugenden des Kegelschnitts  $\Gamma(t)$  sein. Da Isometrien die Winkel zwischen den Tangenten  $c'(s, t)$  und den Erzeugenden  $e_{1,2}(t)$  unverändert lassen, kann man in Gleichung 3.11  $v = v(s)$  verwenden, um die entsprechenden Erzeugenden des Kegels  $\Gamma(t)$  während der Faltung zu parametrisieren. In der Abbildung 3.2 sieht man die Schnitte der Kegel  $\Gamma(t)$  und der Kurven  $\Phi(t)$  mit der Kugel, die im Scheitel des Kegels zentriert ist, an einigen Stellen von  $t$  und  $v$  für die Werte  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  und  $\omega = \frac{3\pi}{4}$ .

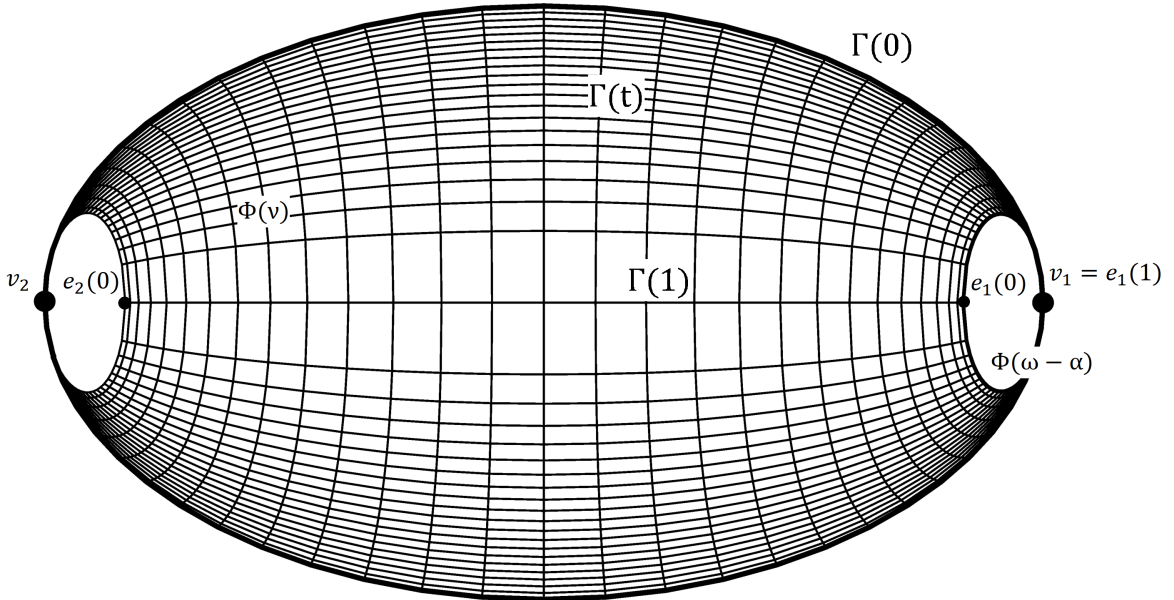


Abbildung 3.2: Schnitt der Änderungen des Kegels  $\Gamma(t)$  für  $t \in [0, 1]$  mit der Kugel, die zentriert in den Scheitel des Kegels ist.

Faltet man nun das Origami vom Raum in die Ebene, so deformiert sich das sphärische Bild  $c'(v(s), t)$  von  $t = 0$  mit  $c'(s) = c'(s, 0)$  zu  $t = 1$  mit  $c'(s, 1)$ . Bei dieser Bewegung verändert sich der Punkt  $v_1$  aus seiner Startkonfiguration bei  $\Gamma(0)$  entlang des möglichen Pfades auf  $\varphi(\omega - \alpha)$ , entweder auf der oberen oder unteren Hälfte von  $\varphi(\omega - \alpha)$ , zu  $e_1(0)$ . Analog gilt dies für die Situation von  $v_2$ , welcher sich nach  $e_2(0)$  bewegt.

Falls  $c'(s)$  einen Teil von  $k \subset \Gamma(0)$  erzeugt, welcher in einem der Bereiche liegt, die durch die zwei Scheitelpunkte  $v_{1,2}(t)$  mit  $t \in [0, 1]$  begrenzt werden, so wird die gekoppelte Origamifaltung zerfallen und eine solche Faltung wird nicht ohne das Zerstören des Origami möglich sein.

**Bemerkung 3.3.2.** Falls ein solches  $c(s)$  vorliegt, bei dem die Positionen  $c'(s^*) = v_1$  oder  $c'(s^*) = v_2$  angenommen werden, so ist das durch  $c''(s^*) \neq 0$  und der Orthogonalität der oskulierenden Ebenen  $[c'(s^*), e_1(0)]$  und  $[c'(s^*), e_2(0)]$  der zwei Zylinder charakterisiert. Hier müssen also die Tangentialebenen der beiden Zylinder  $f_1$  und  $f_2$  in  $c(s^*)$  zusammenfallen.

Insgesamt ergibt das folgende Bedingungen für die Existenz von gekoppelten Origamifaltungen von Paaren von Zylindern:

**Theorem 3.3.1.** Für eine räumliche Kurve  $c(s) \in C^2$ , deren Tangenten parallel zu einem quadratischen Kegel  $\Gamma$ , welcher kein Drehkegel ist, sind, werden die reellen Brennpunkte des Kegels durch die Richtungsvektoren  $e_{1,2}(t)$  bestimmt und bilden zusammen mit der Kurve  $c(s)$  ein CFC-Tripel. Die zwei reellen Scheitel, welche in der Ebene von  $e_{1,2}$  liegen, sollen  $v_{1,2}$  genannt werden. Falls das sphärische Bild von  $c'(s)$  mit Teilen zusammenfällt, die  $v_1$  oder  $v_2$  enthalten, so kann die gekoppelte Faltung nicht ohne eine Deformation durchgeführt werden.

**Bemerkung 3.3.3.** Dies ist aber keine hinreichende Bedingung für die Existenz von solchen gekoppelten Faltungen mit Zylindern von der räumlichen in die ebene Gestalt. Technisch ist eine solche Faltung auf jeden Fall unmöglich, wenn die Konfiguration nicht das Theorem 3.3.1 erfüllt.

## 3.4 Das diskrete Origami

Eine räumliche Kurve  $c(s) \in C^2$  kann man auch durch ein räumliches Polygon  $p := p_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  mit Eckpunkten  $p_j$  ersetzen. Die Zylinder  $f_{1,2}$  ersetzt man dann durch zwei Prismen, deren Erzeugende parallel zu den Einheitsvektoren  $e_{1,2}$  sind. Nun geht also das Problem vom kurvigen Origami mit Paaren von Zylindern in das Problem

vom polygonalen Origami mit Prismenpaaren über.

Existieren also zwei Isometrien  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) von den Prismen  $f_i$  in eine Ebene  $\pi$ , sodass diese ebenen Polygone  $\gamma_1(p)$  und  $\gamma_2(p)$  mithilfe einer ebenen Kongruenztransformation zusammengehängt werden können, so spricht man von einer diskreten Faltung mit Prismenpaaren. Hier besteht das Tripel  $(e_1, e_2, p)$  aus den beiden Einheitsvektoren  $e_{1,2}$  und dem räumlichen Polygon  $p$ . Diese Tripel für polygonale Origamifaltung mit Prismenpaaren nennt man kurz PFP-Tripel.

Auch in diesem Fall bleiben, unter Anwendung der Isometrien  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ), die Winkel  $\varphi_{i,j}$  ( $i = 1, 2; j = 0, \dots, n - 1$ ) zwischen den Polygonsegmenten  $[p_j, p_{j+1}]$  und den Erzeugenden der Prismen (parallel zu den Einheitsvektoren  $e_i$ ) erhalten. Diese zwei Isometrien bilden die Richtungen  $e_i$  auf  $e_i^* := \gamma_i(e_i)$  ab. Für ein gegebenes PFP-Tripel bekommt man in einer Ebene  $\pi$  die Gleichung

$$|\varphi_1(j) \mp \varphi_2(j)| = 2\omega = \text{const.} \quad (3.13)$$

für alle  $j = 0, \dots, n-1$ , was das Gegenstück zu Gleichung 3.4 für den diskreten Fall ist.

Nun kann man die Überlegungen aus dem Vorhergehenden für den Fall einer Kurve mit zwei unterschiedlichen Zylindern einfach in den diskreten Fall umwandeln. Theorem 3.2.1 und Theorem 3.2.2 haben folgendes diskrete Gegenstück:

**Theorem 3.4.1.** *Ein Polygon  $p$  und zwei Richtungsvektoren  $e_{1,2}$ , welche parallel zu den Erzeugenden zweier Prismen entlang des Polygons sind, erzeugen ein PFP-Tripel für ein diskretes Origami mit Prismenpaaren genau in einem der beiden Fälle:*

*Im ersten Fall ist  $p$  ein ebenes Polygon und die Richtungen  $e_{1,2}$  sind bezüglich der Ebene des Polygons symmetrisch.*

*Im zweiten Fall besteht das Polygon  $p$  aus Segmenten  $[p_j, p_{j+1}]$ , die parallel zu den Erzeugenden eines Kegels  $\Gamma$  zweiten Grades sind, welcher kein Drehkegel ist.*

Auch das Theorem 3.3.1 kann auf gleichem Wege für den diskreten Fall verändert werden:

**Theorem 3.4.2.** *Gegeben seien ein Polygon  $p$  und zwei Richtungsvektoren  $e_{1,2}$ , welche zusammen ein PFP-Tripel bilden. Außerdem seien die Segmente  $[p_j, p_{j+1}]$  des Polygons  $p$  parallel zu den Erzeugenden eines Kegels  $\Gamma$  vom Grad 2, der kein Drehkegel ist. Die in der von den beiden reellen Brennpunkten  $e_{1,2}$  aufgespannten Ebene enthaltenen Scheitelerzeugenden sollen  $v_{1,2}$  genannt werden. Faltet man nun ein solches PFP-Tripel, so kann dies nicht ohne Deformation des Origami durchgeführt werden, falls das sphärische Bild der Polygonsegmente  $[p_j, p_{j+1}]$  Punkte annimmt, die  $v_1$  oder  $v_2$  enthalten.*

# 4 Beispiele für Origamifaltung

Man will nun ein Polygon finden, dessen Segmente  $[p_i, p_{i+1}]$  für  $i = 0, \dots, n$  parallel zu den Erzeugenden eines Kegels  $\Gamma_D$  sind, der kein Drehkegel ist, wobei die reellen Brenngeraden dieses Kegels jeweils parallel zu den Erzeugenden der Prismen sind. Solche Polygone werden in diesem Kapitel als diskrete Kurven affin zu einer Böschungslinien erzeugt. Im Anschluss werden einige Beispiele dazu illustriert.

## 4.1 Origami aus Polygonzug

Um eine diskrete Böschungslinie zu erhalten, betrachtet man die Erzeugenden eines Drehkegels  $\Gamma_D$ . Die Erzeugenden haben die Eigenschaft, dass ihr Neigungswinkel  $\beta$  zu einer Achse (in diesem Fall zur  $z$ -Achse) immer derselbe ist. Betrachte dazu Abbildung 4.1.

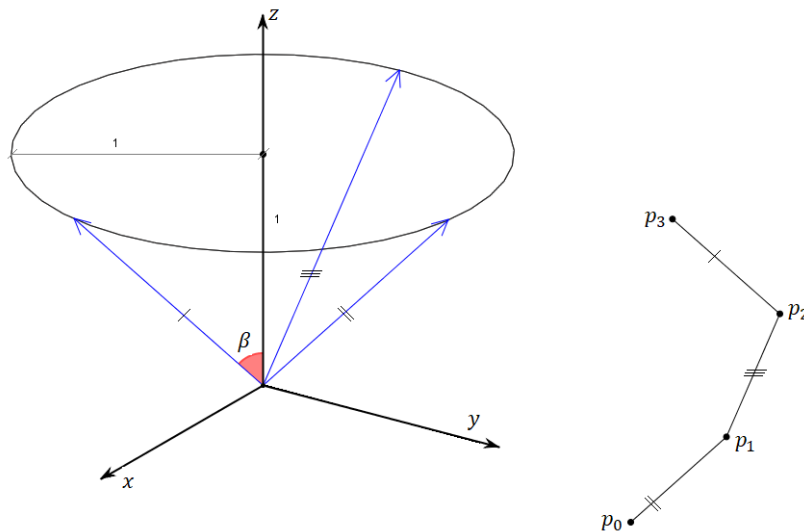


Abbildung 4.1: Drehkegel  $\Gamma_D$  mit seinen Erzeugenden und die daraus erzeugte diskrete Böschungslinie

Da die Bedingungen für das gesuchte Origami fordern, dass der Kegel  $\Gamma$  kein Drehkegel

sein darf, muss man  $\Gamma_D$  noch verzerren, um einen quadratischen Kegel und daraus ein Polygon, affin zur Böschungslinie, zu erhalten. Das erreicht man mit Hilfe der Verzerrungsfaktoren  $v_x, v_y, v_z$ , die jeweils die Verzerrung in  $x$ -,  $y$ -, und  $z$ -Richtung angeben.

Um nun einen Polygonzug  $p_i, i = 0, \dots, n$  für ein PFP-Tripel zu erzeugen, geht man von einer Polygonecke  $p_0$  aus und verschiebt eine Erzeugende des quadratischen Kegels  $\Gamma$ , der kein Drehkegel ist, parallel durch diesen Punkt (siehe Abbildung 4.1). Mithilfe des Faktors  $\lambda_1$  berechnet man sich die Länge des Polygonsegments  $[p_0, p_1]$  und erhält damit eine neue Ecke  $p_1$  des Polygons. Nun verschiebt man eine andere Erzeugende des Kegels  $\Gamma$  parallel durch den neuen Punkt  $p_1$ , und so weiter.

Man parametrisiert den Kegel  $\Gamma$  zweiter Ordnung durch eine Leitkurve mit Scheitel 0:

$$\vec{f}(u, v) = v \begin{pmatrix} v_x \cos(u) \\ v_y \sin(u) \\ v_z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

mit  $(u, v) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ .

Den Polygonzug  $p_i$  berechnet man durch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_i &= \cos(\alpha_i) \cdot v_x \quad ; \quad y_i = \sin(\alpha_i) \cdot v_y \quad ; \quad z_i = v_z \\ q_i &= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad ; \quad p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ p_i &= p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_i \end{aligned} \quad (4.2)$$

für  $i = 1, \dots, n$ .

Hat man nun einen Polygonzug erzeugt, muss man noch die Erzeugendenrichtungen der Prismen finden. Dazu ermittelt man aus der Parameterdarstellung des zugehörigen quadratischen Kegels 2. Ordnung (siehe Gleichung 4.1) die Gleichung

$$\frac{x^2}{v_x^2} + \frac{y^2}{v_y^2} - \frac{z^2}{v_z^2} = 0 \quad (4.3)$$

Um die reellen Brenngeraden des Kegels, beziehungsweise die Brennpunkte des sphärischen Kegelschnitts (siehe Abbildung 4.2), zu finden, berechnet man die Brenngeradenrichtungsvektoren.

$$wa = \sqrt{\frac{1}{v_x^2} \cdot \left(\frac{1}{v_z^2} - \frac{1}{v_y^2}\right)}; \quad wb = \sqrt{\frac{1}{v_y^2} \cdot \left(\frac{1}{v_x^2} - \frac{1}{v_z^2}\right)}; \quad wc = \sqrt{\frac{1}{v_z^2} \cdot \left(\frac{1}{v_y^2} - \frac{1}{v_x^2}\right)}$$

Man betrachtet die so ermittelbaren Richtungsvektoren der Brenngeraden von  $\Gamma$  als Zeilen einer Matrix  $BR$  und erhält

$$BR = \begin{bmatrix} 0 & wc & wb \\ 0 & -wc & wb \\ wc & 0 & wa \\ wc & 0 & -wa \\ wb & wa & 0 \\ -wb & wa & 0 \end{bmatrix}$$

Es gibt nur zwei reelle Richtungen, die somit die reellen Richtungsvektoren der Brenngeraden sind. Diese liefern die Erzeugendenrichtungen der zum Origami gehörenden Prismenmäntel.

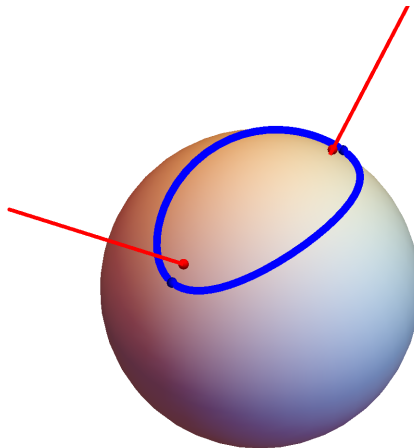


Abbildung 4.2: Sphärischer Kegelschnitt mit zugehörigen Brennstrahlen



## 4.2 Origamispiele

Mithilfe der zuvor beschriebenen Vorgehensweise wurden auch die folgenden Beispiele in Mathematica erzeugt.

Bei manchen Beispielen ist es erforderlich nur einen Teil des Polygons zu verwenden, um die Möglichkeit der Faltung in eine Ebene zu gewährleisten. Oft treten beim Falten Selbstschnitte auf - dann ist das ganze Origami nicht mehr ohne Deformation in die Ebene faltbar.

Will man den, zum Polygon gehörenden, sphärischen Kegelschnitt erzeugen, kann es passieren, dass ein Punkt in den Mittelpunkt der Bildkugel abgebildet wird. Der Fall tritt auf, wenn zwei Punkte des Polygons zusammenfallen, was aber verboten ist. Um den sphärischen Kegelschnitt grafisch darzustellen (siehe Abbildung 4.2), muss man in diesem Fall darauf achten, die erzeugten Teile dementsprechend zu spiegeln, falls nur ein Teil des Polygons zu dessen Erzeugung verwendet wurde.

Bei den nachfolgenden Beispielen werden die Parameter, die zur Erzeugung verwendet wurden, angegeben und der Polygonzug und das zugehörige Origami grafisch dargestellt.

Bei den ersten 5 Beispielen wurden die Faktoren  $\lambda_i$  unterschiedlich gewählt und die verwendeten Erzeugenden des Ausgangskegels in aufsteigender Reihenfolge  $(q_0, q_1, \dots, q_n)$  durchlaufen. In den Beispielen 6-8 wurde die Reihenfolge der Kegelerzeugenden mithilfe des Vektors  $r$ , zufällig gewählt. Um diese Reihenfolge nicht immer statisch wählen zu müssen wurde in den Beispielen 9 und 10 eine sogenannte "Random"-Funktion verwendet, um die Reihenfolge der verwendeten Erzeugenden zu bestimmen. Benutzt man eine solche Funktion zum Erzeugen eines Origami, muss man in Kauf nehmen, dass Selbstschnitte der Prismenteile unvermeidlich scheinen (siehe Abbildung 4.26). Bei den letzten beiden Beispielen wurden die Winkel  $\alpha_i$  verändert, was in Beispiel 11 dazu führte, dass man einen geschlossenen Polygonzug erzeugt hat (siehe Abbildung 4.27).

### 4.2.1 Beispiel 1

$$n = 60$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \sin\left(\frac{4\pi i}{n}\right)$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_i$$

Das Origami aus Abbildung 4.4 ist das Origami eines Viertels des Polygonzugs. Dieser Teil lässt sich ohne Deformation in die Ebene falten. Beim Origami längs des geschlossenen Polygonzugs in Abbildung 4.5 ist das nicht möglich.

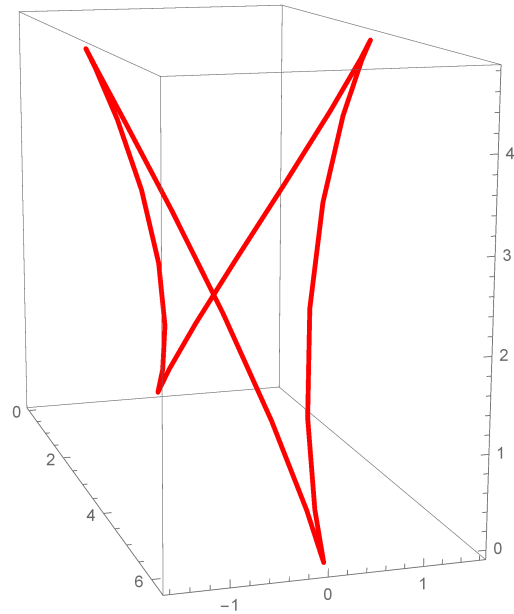


Abbildung 4.3: Polygonzug zu Beispiel 1

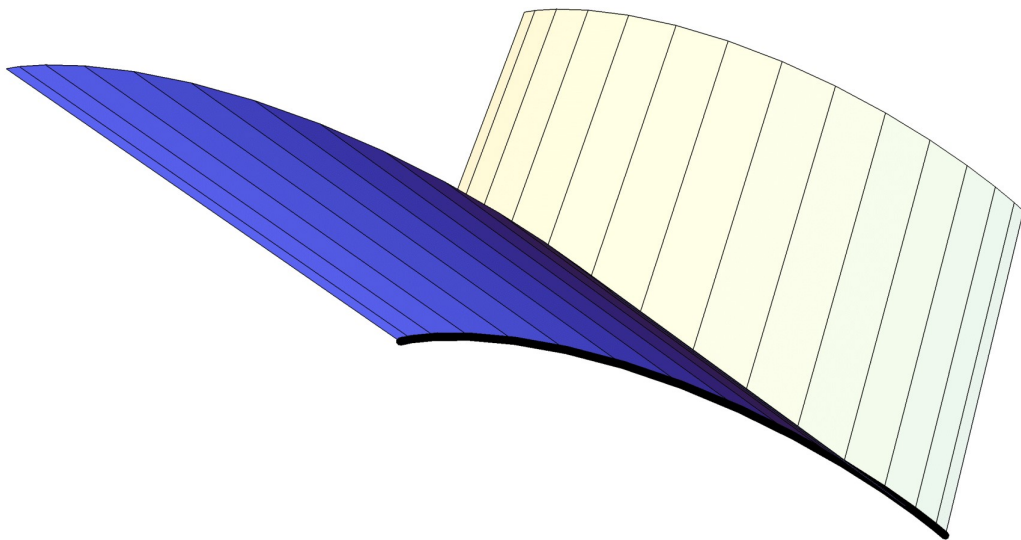


Abbildung 4.4: Teil des Origami zu Beispiel 1

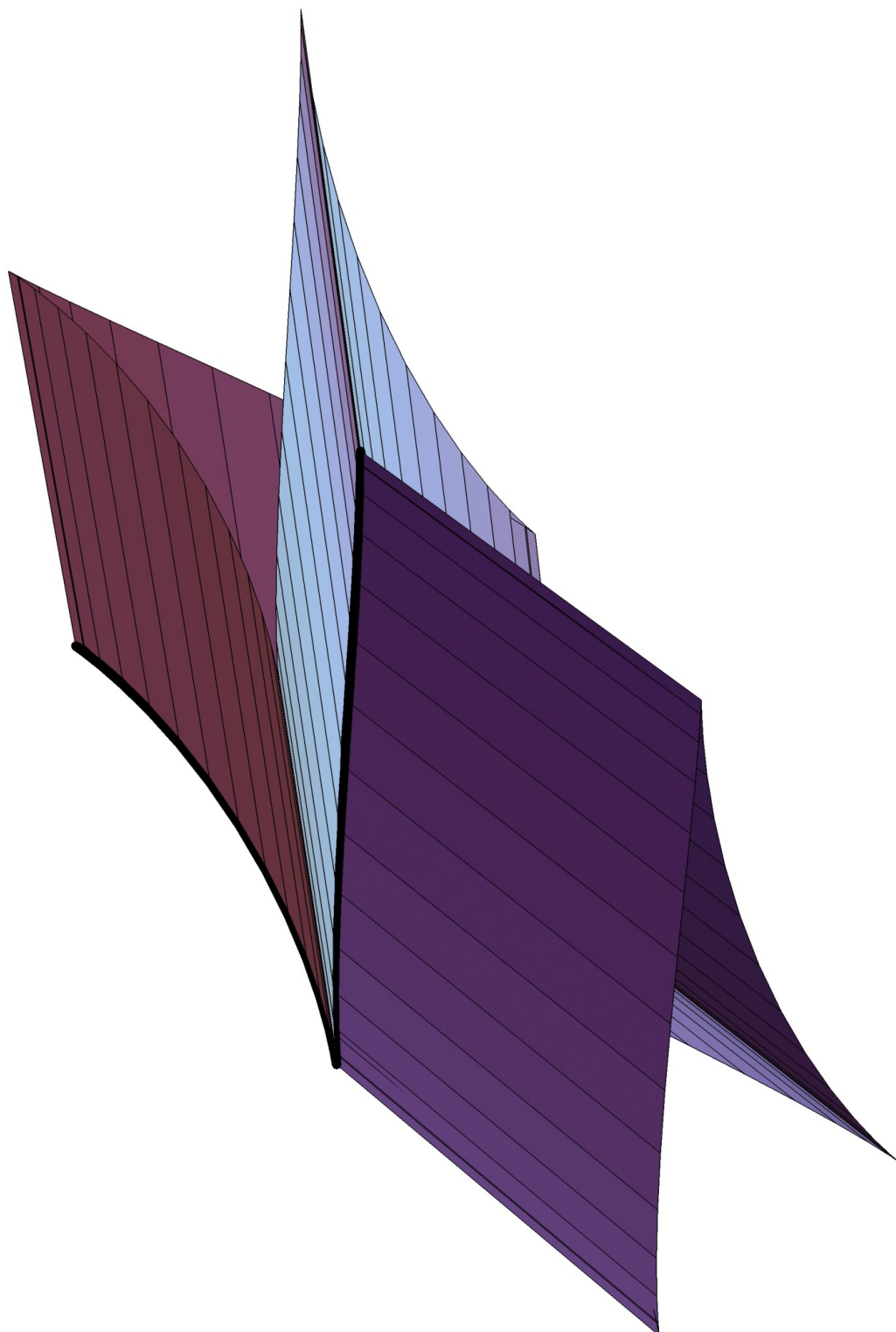


Abbildung 4.5: Origami zu Beispiel 1

## 4.2.2 Beispiel 2

$$n = 60$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_i$$

Das Origami aus Abbildung 4.7 ist das Origami der Hälfte des Polygonzugs. Dieser Teil lässt sich ohne Deformation in die Ebene falten. Beim Origami längs des gesamten Polygonzugs in Abbildung 4.8 ist das nicht möglich.

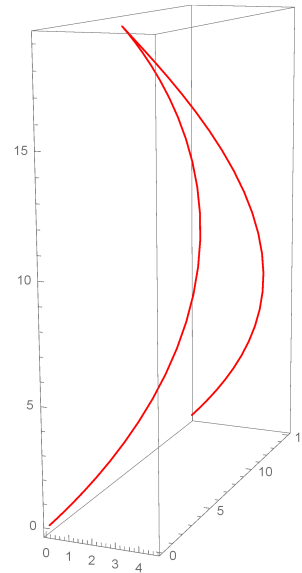


Abbildung 4.6: Polygonzug zu Beispiel 2

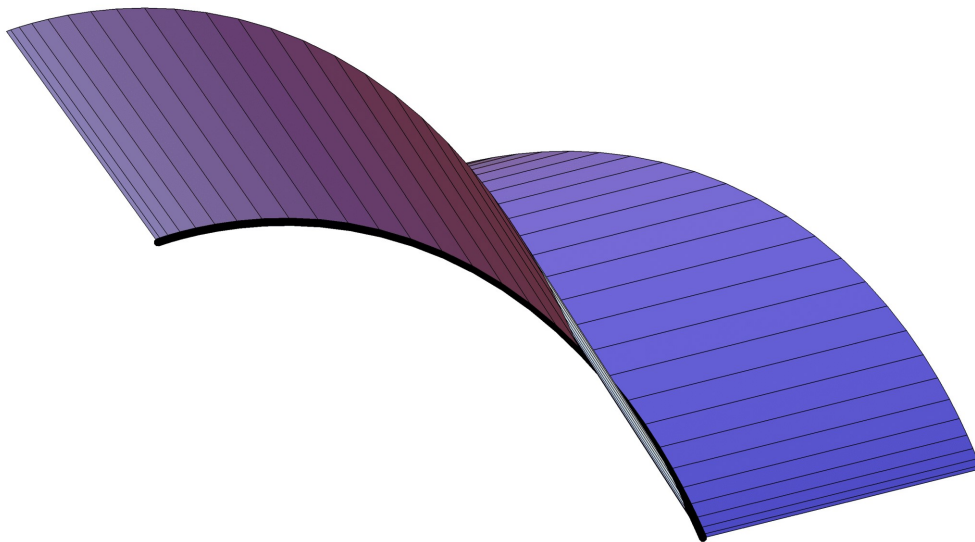


Abbildung 4.7: Teil des Origami zu Beispiel 2

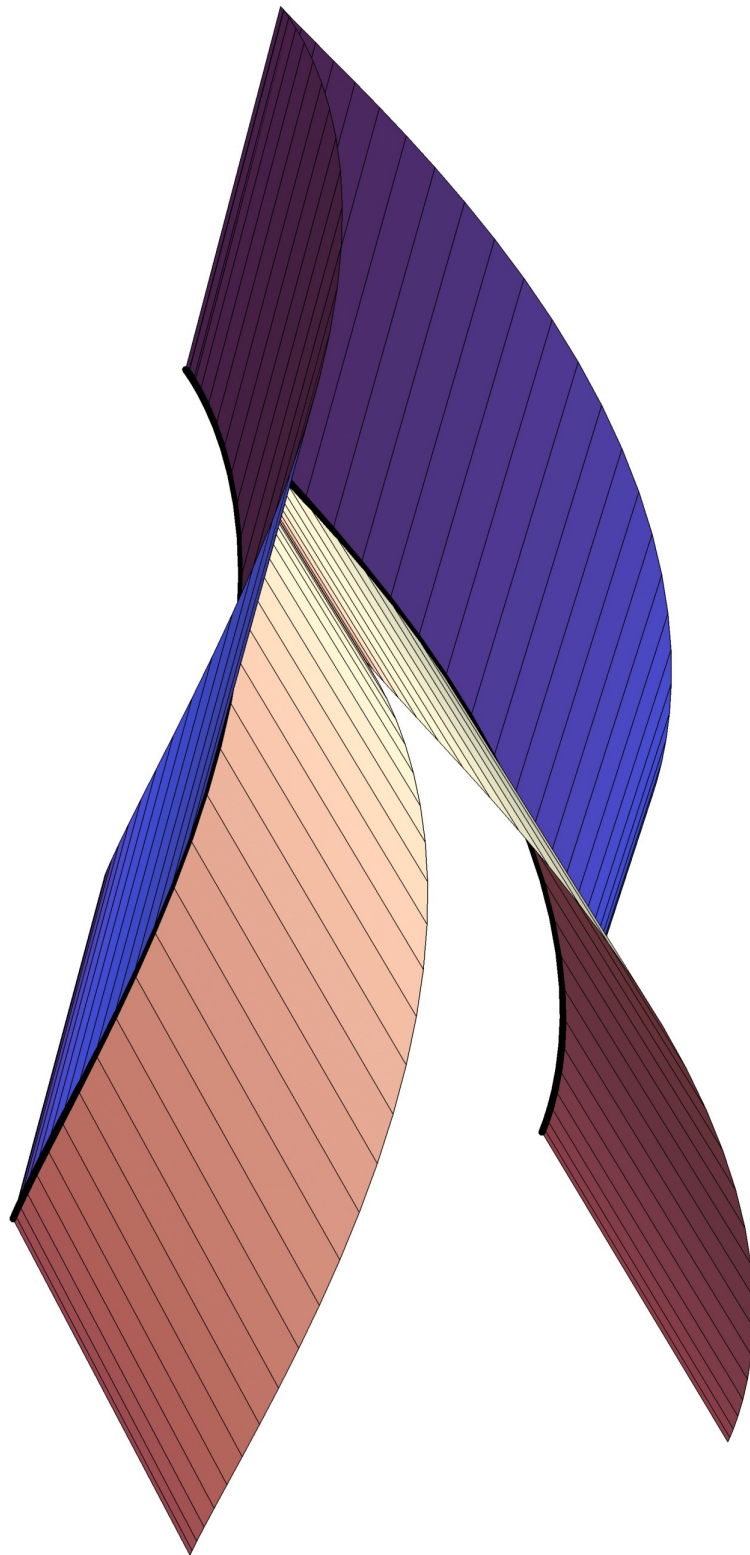


Abbildung 4.8: Origami zu Beispiel 2

### 4.2.3 Beispiel 3

$$n = 60$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \sin\left(\frac{4i}{n}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{n}\right)$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_i$$

Das Origami aus Abbildung 4.10 lässt sich ohne Deformation in die Ebene falten.

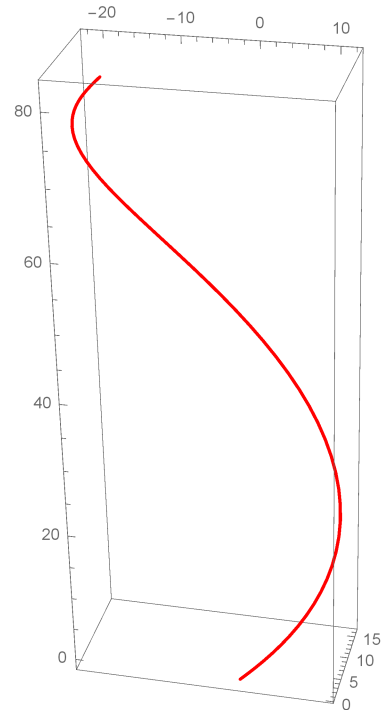


Abbildung 4.9: Polygonzug zu Beispiel 3

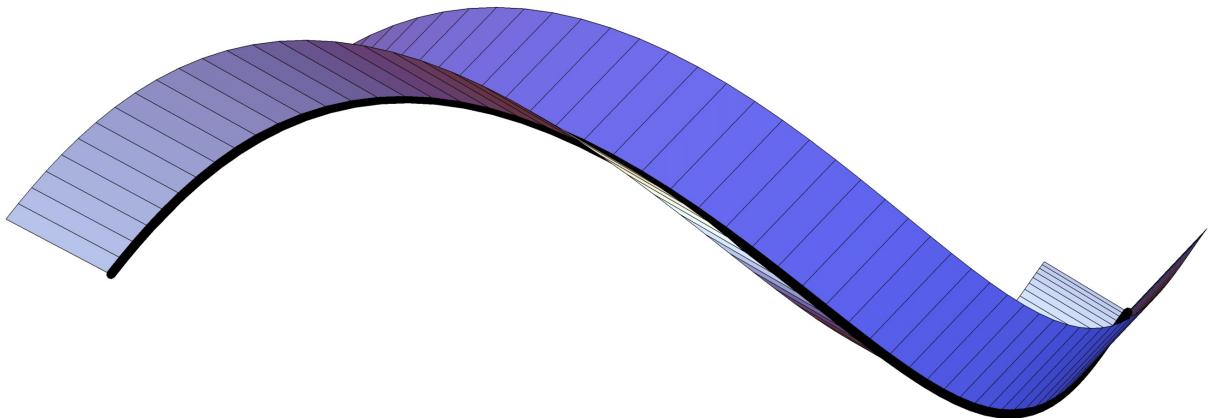


Abbildung 4.10: Origami zu Beispiel 3

#### 4.2.4 Beispiel 4

$$n = 60$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \cosh\left(\frac{\pi i}{n}\right)$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_i$$

Das Origami aus Abbildung 4.12 lässt sich ohne Deformation in die Ebene falten.

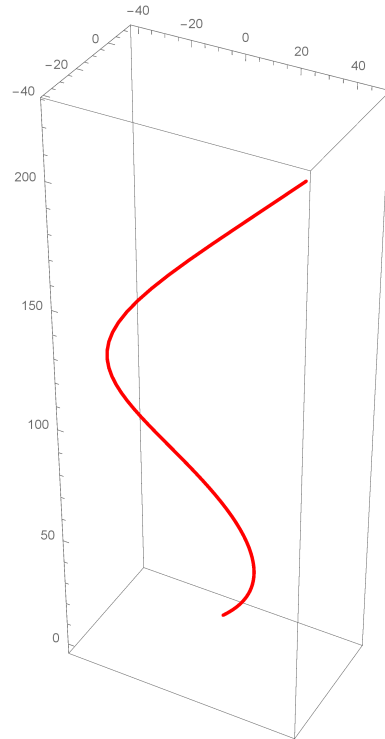


Abbildung 4.11: Polygonzug zu Beispiel 4

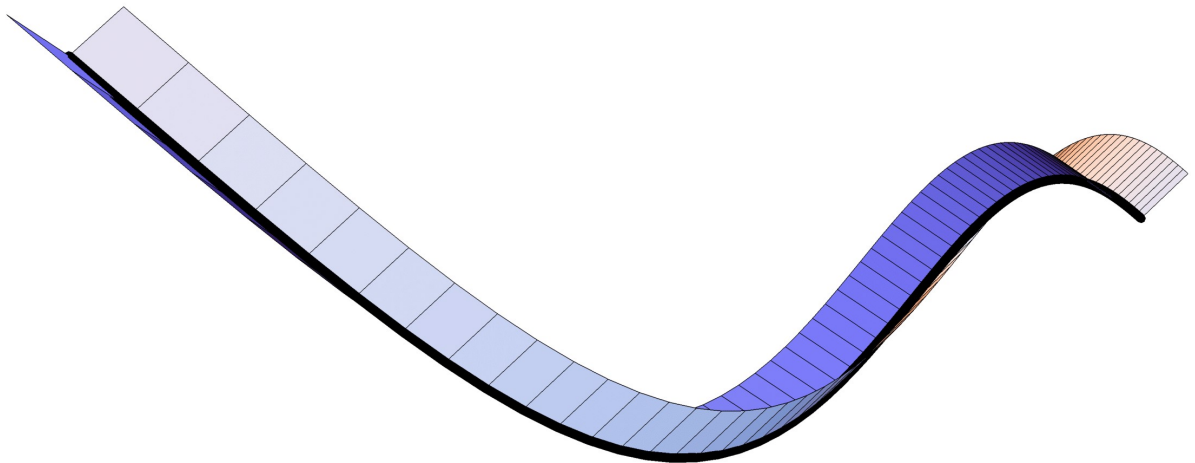


Abbildung 4.12: Origami zu Beispiel 4

## 4.2.5 Beispiel 5

$$n = 40$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi i}{n}\right)$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_i$$

Das Origami aus Abbildung 4.14 ist nicht ohne Deformation in die Ebene faltbar.

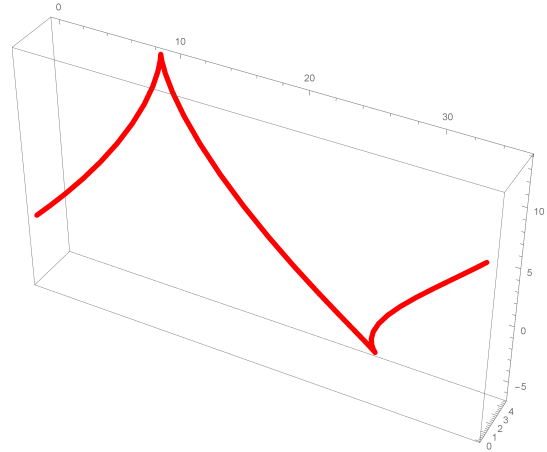


Abbildung 4.13: Polygonzug zu Beispiel 5

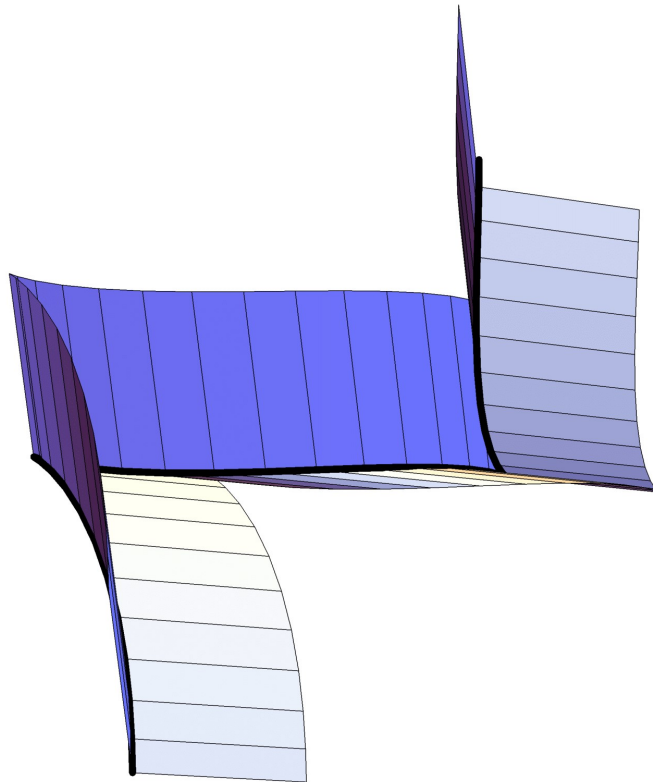


Abbildung 4.14: Origami zu Beispiel 5



## 4.2.6 Beispiel 6

$$n = 40$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \sin\left(\frac{4\pi i}{n}\right)$$

$$r = \{2, 5, 6, 3, 9, 7, 1, 4, 10, 11, \\ 8, 12, 15, 16, 13, 19, 17, 11, 14, 20, \\ 22, 18, 25, 26, 23, 29, 27, 21, 24, 30, 33, \\ 32, 35, 36, 33, 39, 37, 31, 34, 40, 28\}$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_{r_i}$$

Das Origami aus Abbildung 4.16 ist das Origami eines Viertels des Polygonzugs. Dieser Teil lässt sich ohne Deformation in die Ebene falten. Beim Origami längs des gesamten Polygonzugs in Abbildung 4.17 ist das nicht möglich.

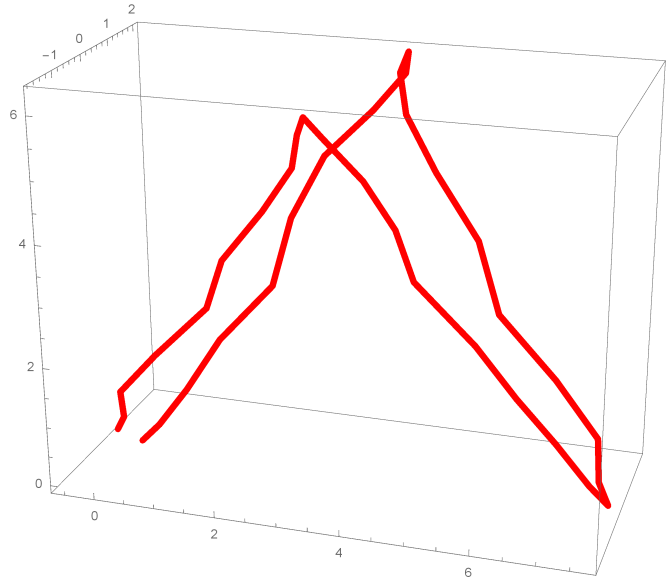


Abbildung 4.15: Polygonzug zu Beispiel 6

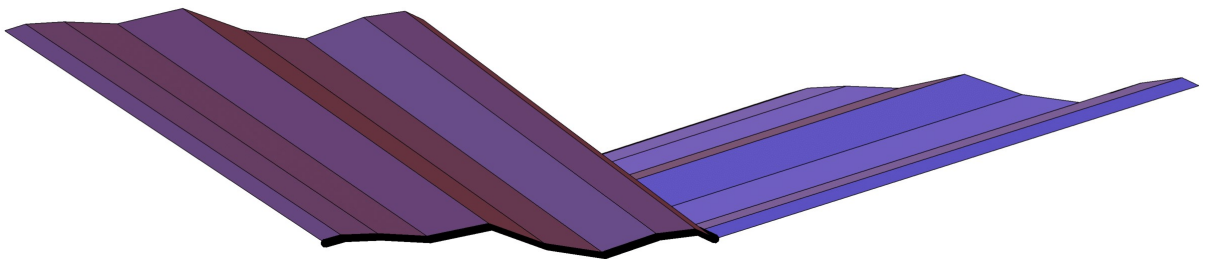


Abbildung 4.16: Teil des Origami zu Beispiel 6

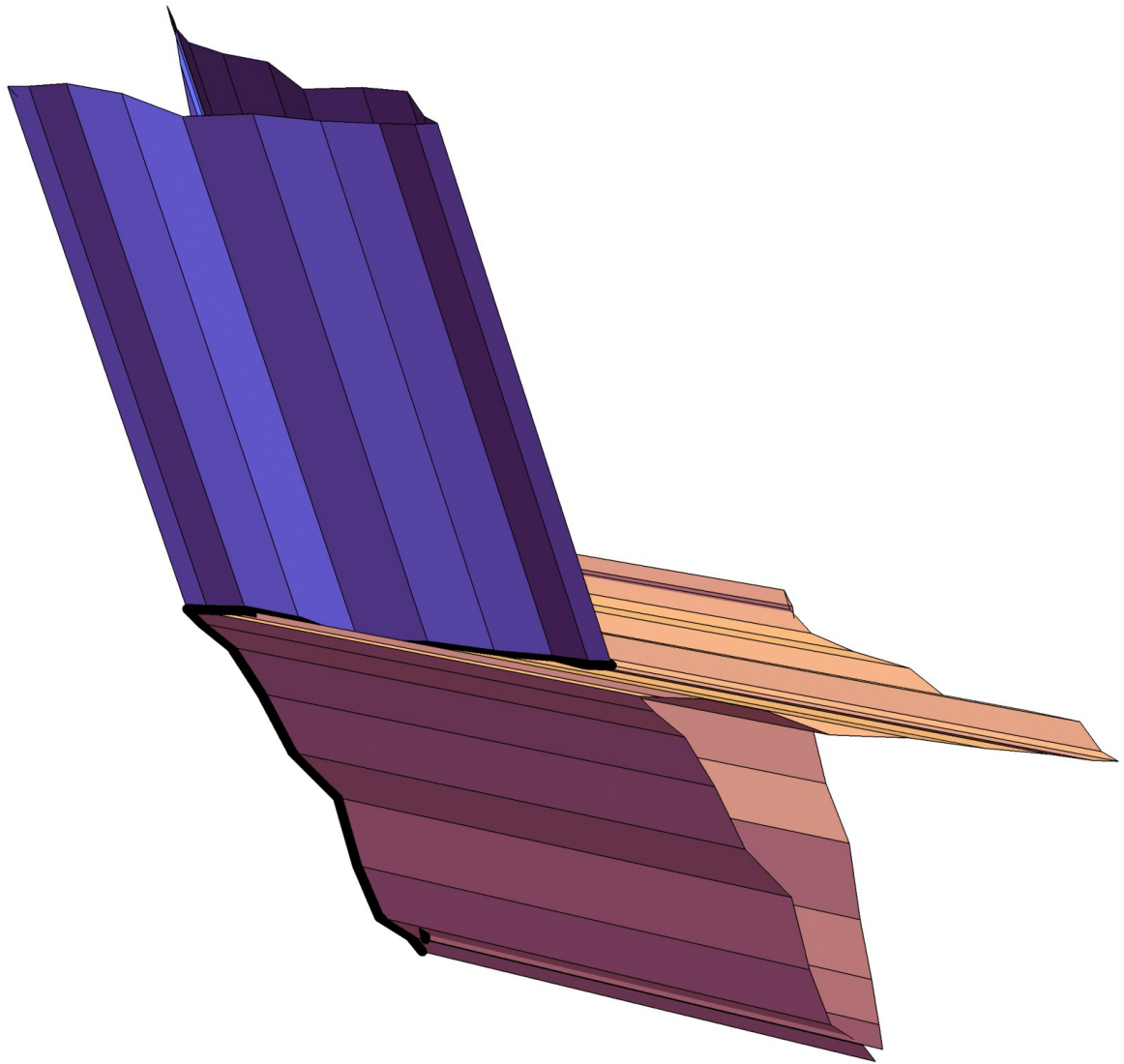


Abbildung 4.17: Origami zu Beispiel 6

### 4.2.7 Beispiel 7

$$n = 40$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$$

$$r = \{1, 11, 2, 12, 3, 13, 4, 14, 5, 15, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10, 20, 22, 18, 25, 26, 23, 29, 27, 21, 24, 30, 33, 32, 35, 36, 33, 39, 37, 31, 34, 40, 28\}$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_{r_i}$$

Das Origami aus Abbildung 4.19 ist das Origami der Hälfte des Polygonzugs. Dieser Teil lässt sich ohne Deformation in die Ebene falten. Beim Origami längs des gesamten Polygonzugs in Abbildung 4.20 ist das nicht möglich.

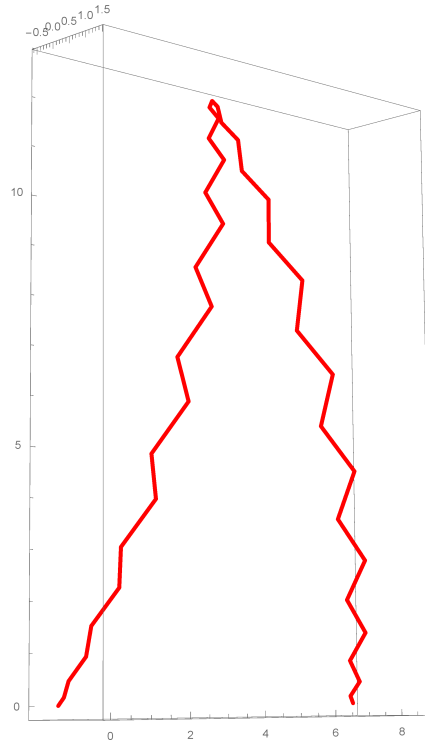


Abbildung 4.18: Polygonzug zu Beispiel 7

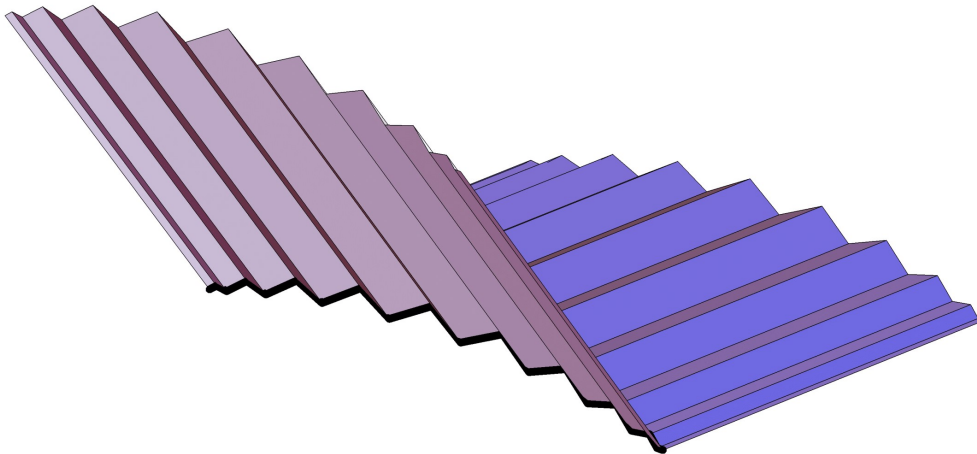


Abbildung 4.19: Teil des Origami zu Beispiel 7

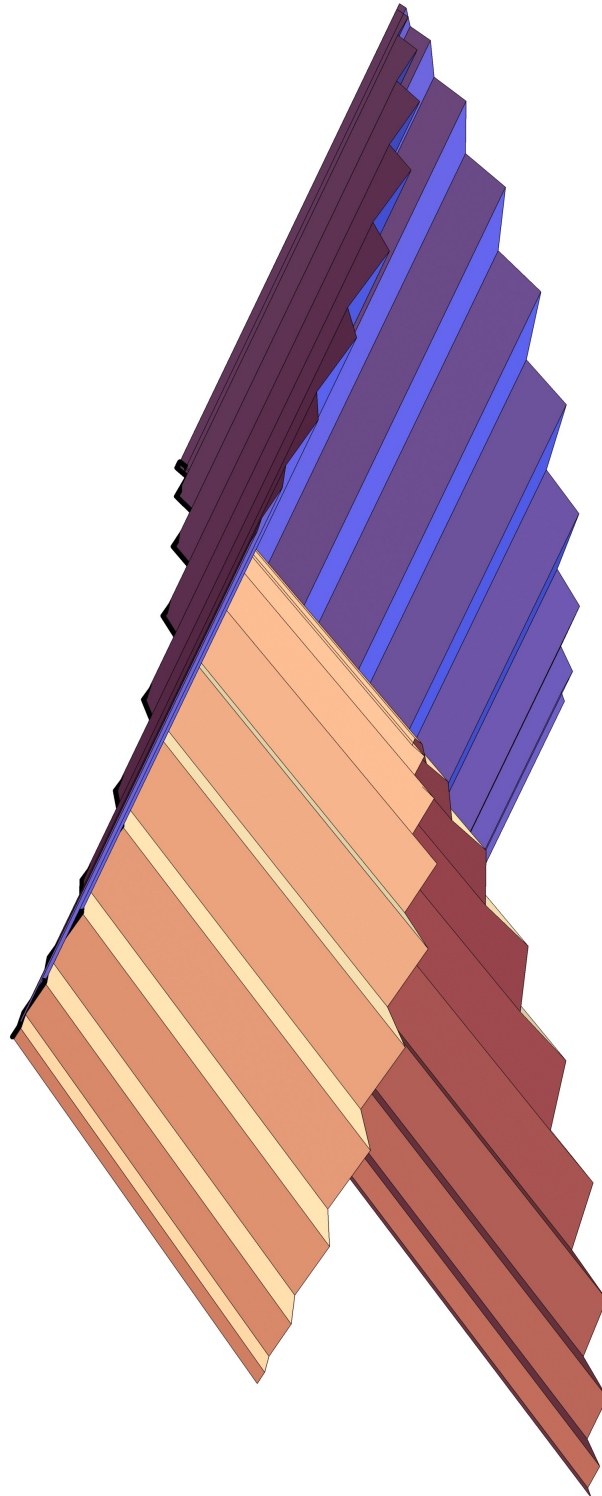


Abbildung 4.20: Origami zu Beispiel 7

## 4.2.8 Beispiel 8

$$n = 30$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \sin\left(\frac{4i}{n}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{n}\right)$$

$$r = \{3, 2, 5, 4, 11, 10, 7, 8, 1, 9, 6, 13, 14, 15, 17, 18, 16, 20, 19, 12\}$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_{r_i}$$

Das Origami aus Abbildung 4.22 lässt sich ohne Deformation in die Ebene falten.

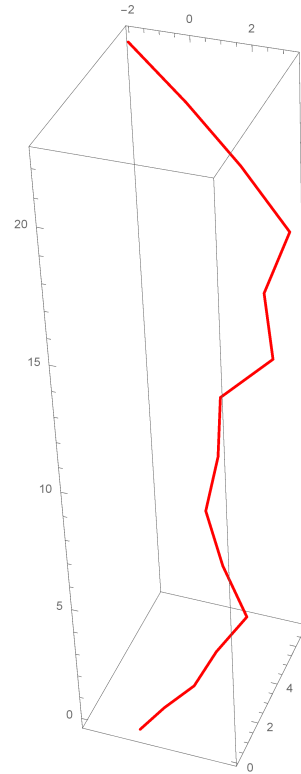


Abbildung 4.21: Polygonzug zu Beispiel 8

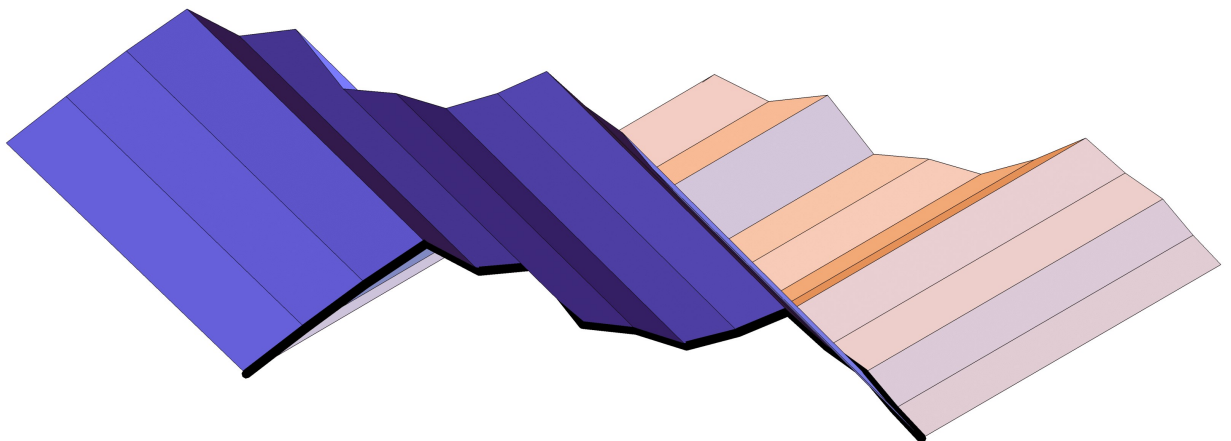


Abbildung 4.22: Origami zu Beispiel 8

### 4.2.9 Beispiel 9

$$n = 30$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right)$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_{Random}$$

Das Origami aus Abbildung 4.24 ist das Origami der Hälfte des Polygonzugs. Dieser Teil lässt sich ohne Deformation in die Ebene falten.

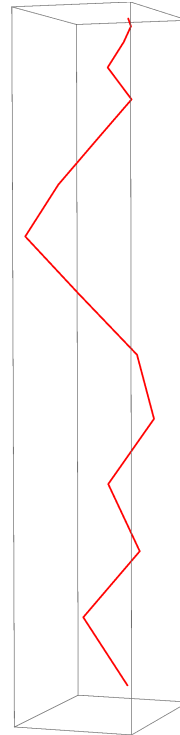


Abbildung 4.23: Polygonzug zu Beispiel 9

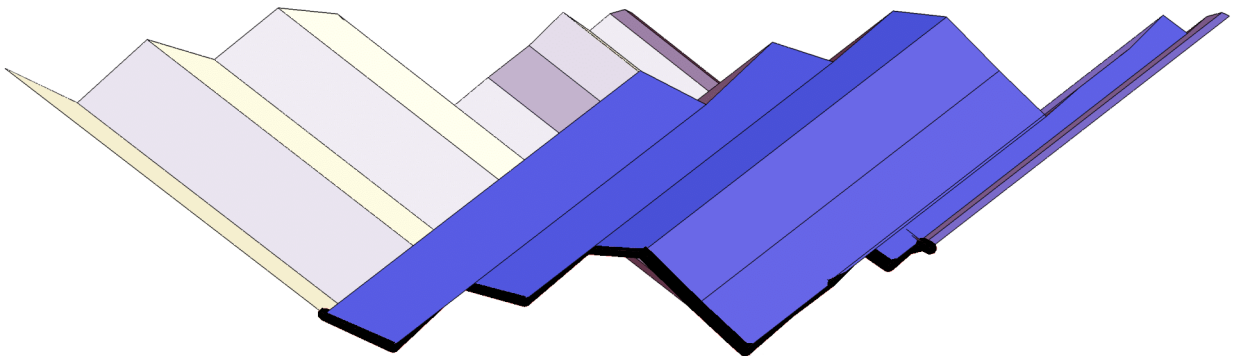


Abbildung 4.24: Origami zu Beispiel 9

### 4.2.10 Beispiel 10

$$n = 15$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 1,5 ; v_z = 0,25$$

$$\lambda_i = \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right)$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_{Random}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass unter Verwendung einer "Random"-Funktion leicht Selbstschnitte resultieren können.

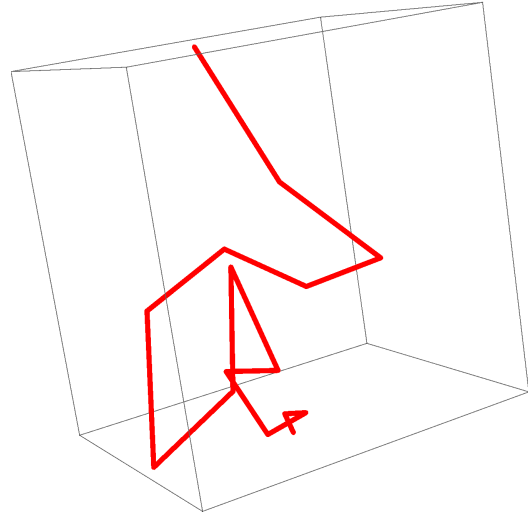


Abbildung 4.25: Polygonzug zu Beispiel 10

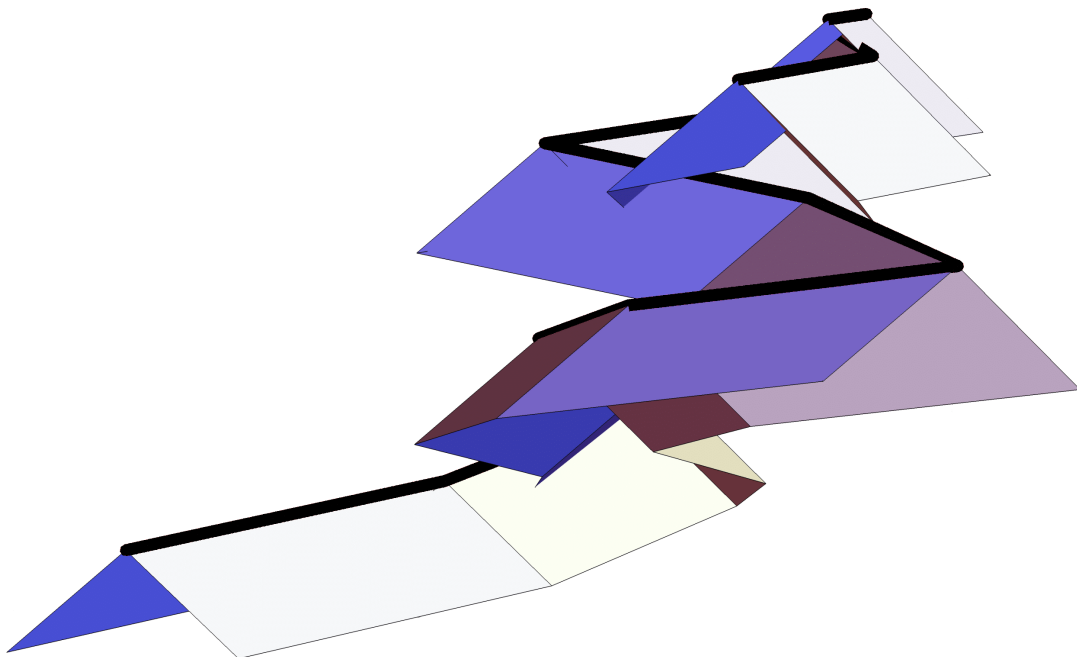


Abbildung 4.26: Origami zu Beispiel 10

### 4.2.11 Beispiel 11

$$n = 60$$

$$\alpha_i = \frac{4\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_i$$

Das Origami aus Abbildung 4.28 ist das Origami der Hälfte des Polygonzugs. Dieser Teil lässt sich ohne Deformation in die Ebene falten. Beim Origami längs des geschlossenen Polygonzugs in Abbildung 4.29 ist das nicht möglich.

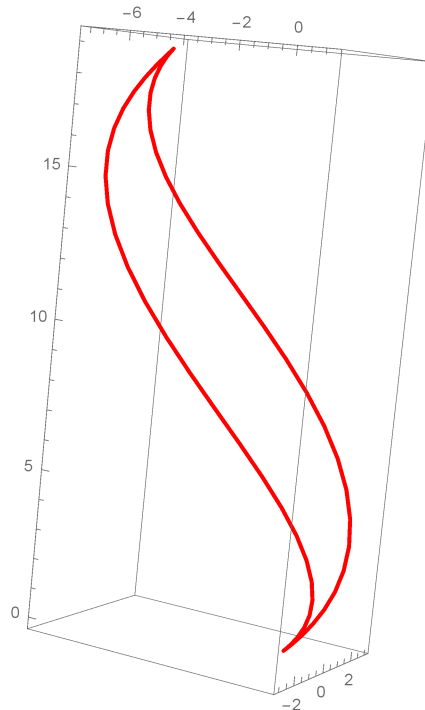


Abbildung 4.27: Polygonzug zu Beispiel 11

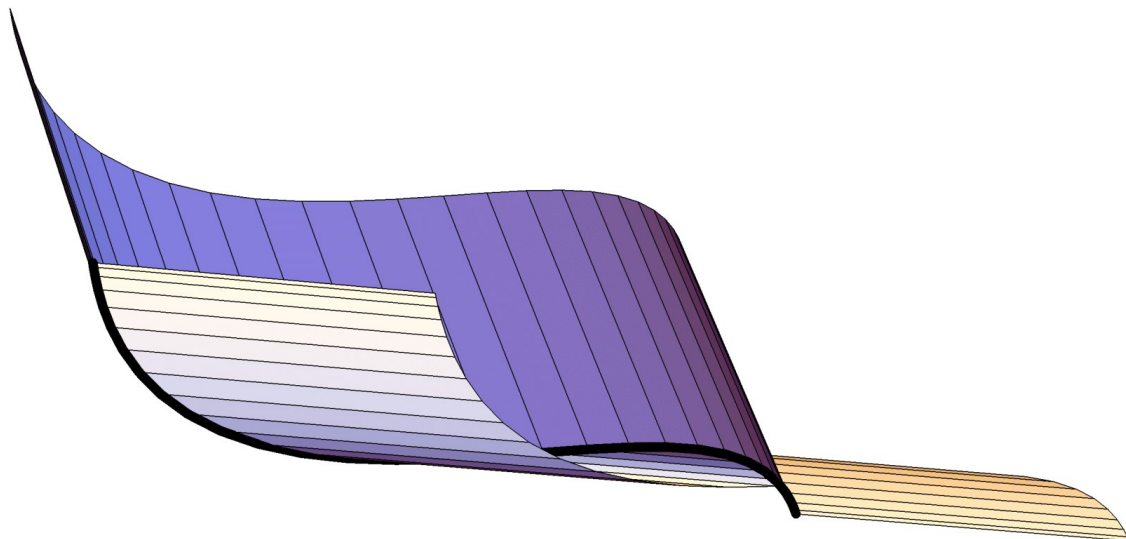


Abbildung 4.28: Teil des Origami zu Beispiel 11



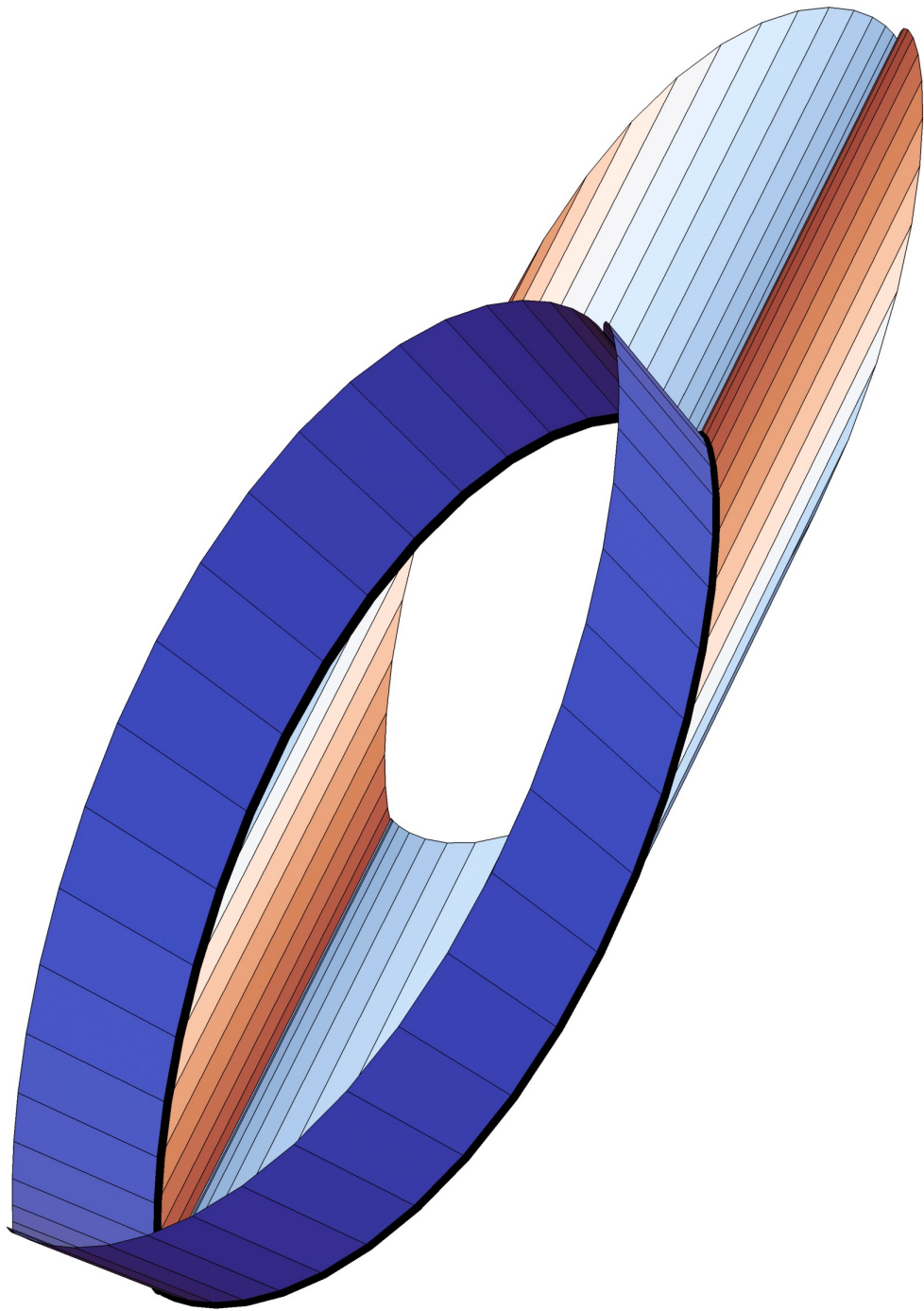


Abbildung 4.29: Origami zu Beispiel 11

## 4.2.12 Beispiel 12

$$n = 60$$

$$\alpha_i = \frac{3\pi i}{n}$$

$$v_x = 1 ; v_y = 0,5 ; v_z = 1$$

$$\lambda_i = \tanh\left(\frac{2\pi i}{n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi i}{n}\right)$$

$$p_i = p_{i-1} + \lambda_i \cdot q_i$$

Das Origami aus Abbildung 4.31 ist das Origami der Hälfte des Polygonzugs. Dieser Teil lässt sich ohne Deformation in die Ebene falten. Beim Origami längs des gesamten Polygonzugs in Abbildung 4.32 ist das nicht möglich. Unter anderem auch deshalb, weil sich die beiden Prismen schneiden.

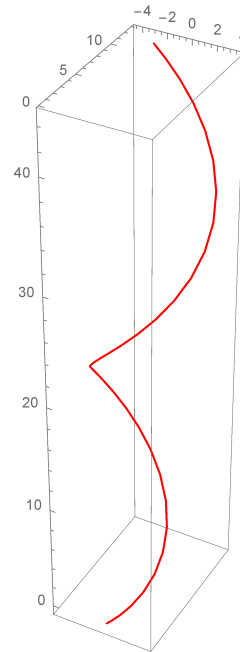


Abbildung 4.30: Polygonzug zu Beispiel 12

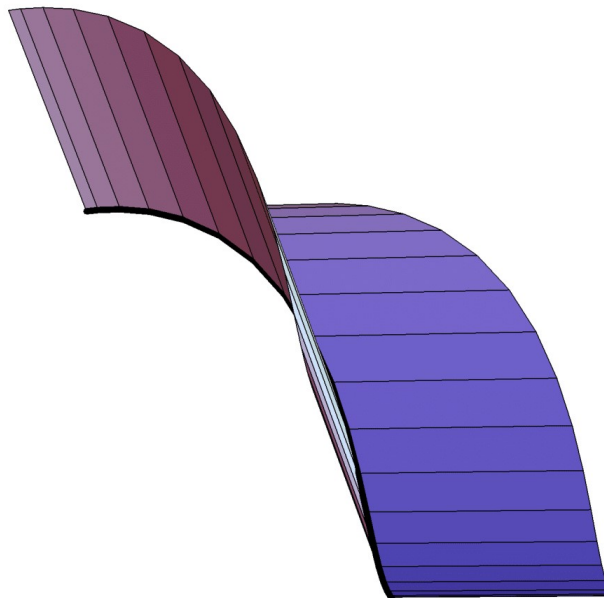


Abbildung 4.31: Teil des Origami zu Beispiel 12

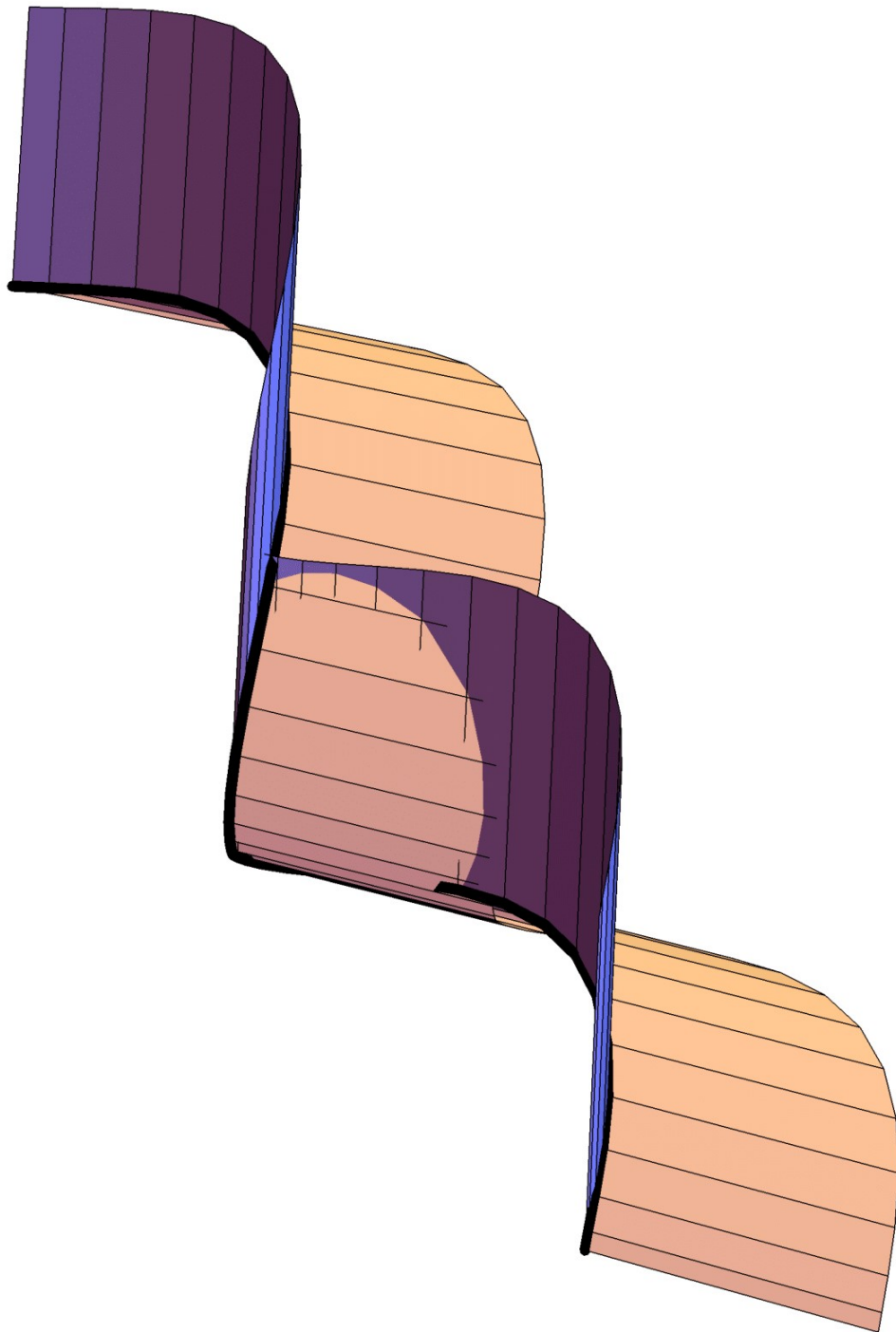


Abbildung 4.32: Origami zu Beispiel 12

## 5 Schlussfolgerung

Zu Beginn der Arbeit konnte man sehen, dass sich Origami nicht nur auf das Falten von Tieren und Figuren beschränkt. Zum Beispiel wurden in der Technik und der Medizin mithilfe von Origami viele Fortschritte erzielt.

Weiters konnte man erkennen, dass die Bedingungen für Origami mit Prismenpaaren aus den Bedingungen von “curved folding” mit Zylinderpaaren resultieren.

Für ein Origami mit Prismenpaaren werden ein Polygon  $p = \{p_0, \dots, p_n\}$  und zwei Richtungsvektoren  $e_{1,2}$  benötigt. Diese Richtungsvektoren müssen parallel zu den Erzeugenden zweier Prismen entlang des Polygons sein, welche ein PFP-Tripel bilden. Weiters seien die Segmente  $[p_i, p_{i+1}]$  für  $i = 0, \dots, n - 1$  des Polygons parallel zu den Erzeugenden eines Kegels  $\Gamma$  zweiten Grades, welcher kein Drehkegel ist. Die Faltung dieses Origami kann aber nur ohne Deformation erfolgen, falls keines der sphärischen Bilder der Polygonsegmente  $[p_i, p_{i+1}]$  mit Teilen zusammenfällt, die die Scheitel  $v_{1,2}$  enthalten.

Um ein solches PFP-Tripel zu finden, wurde im letzten Teil der Arbeit das affine Bild einer diskreten Böschungslinie erzeugt. Die Erzeugendenrichtungen der Prismen bekam man aus den reellen Brenngeradenrichtungen des zugehörigen Kegels zweiter Ordnung, der kein Drehkegel ist.

Zum Erzeugen der Beispiele benutzte ich die Software Mathematica. Unter anderem verwendete ich unterschiedliche Funktionen zum Berechnen der Faktoren  $\lambda_i$ , variierte die Winkel  $\alpha_i$  oder änderte die Verzerrungsfaktoren  $v_x, v_y, v_z$ , um die Beispiele zu erhalten.

# Abbildungsverzeichnis

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Huzita-Hatori Axiome . . . . .  | 11 |
| 1.2  | Siebtes Axiom <b>A7</b> . . . . .   | 12 |
| 1.3  | Faltung einer Talfalte . . . . .  | 13 |
| 1.4  | Faltung einer Bergfalte . . . . .   | 13 |
| 1.5  | Ein Map Folding-Beispiel, welches dem Beispiel aus [12] nachempfunden ist. . . . .  | 14 |
| 1.6  | Ungefaltete Miura-Ori, welche dem Beispiel aus [16] von Stachel H. nachempfunden ist. . . . .   | 15 |
| 2.1  | Sphärischer Abstand zwischen zwei Punkten $A$ und $B$ . . . . .   | 17 |
| 2.2  | Sphärischer Kegelschnitt $\kappa$ mit seinen Brennpunkten $F_1$ und $F_2$ . . . . .   | 19 |
| 2.3  | Sphärisches Dreieck $A, B, C$ . . . . .   | 20 |
| 3.1  | Sphärischer Kegelschnitt $k$ mit reellen Brennpunkten $e_{1,2}$ und Scheitelpunkten $v_{1,2}$ . . . . .                               | 23 |
| 3.2  | Schnitt der Änderungen des Kegels $\Gamma(t)$ für $t \in [0, 1]$ mit der Kugel, die zentriert in den Scheitel des Kegels ist. . . . . | 27 |
| 4.1  | Drehkegel $\Gamma_D$ mit seinen Erzeugenden und die daraus erzeugte diskrete Böschungslinie . . . . .                                 | 30 |
| 4.2  | Sphärischer Kegelschnitt mit zugehörigen Brennstrahlen . . . . .  | 32 |
| 4.3  | Polygonzug zu Beispiel 1 . . . . .  | 34 |
| 4.4  | Teil des Origami zu Beispiel 1 . . . . .  | 34 |
| 4.5  | Origami zu Beispiel 1 . . . . .   | 35 |
| 4.6  | Polygonzug zu Beispiel 2 . . . . .  | 36 |
| 4.7  | Teil des Origami zu Beispiel 2 . . . . .  | 36 |
| 4.8  | Origami zu Beispiel 2 . . . . .   | 37 |
| 4.9  | Polygonzug zu Beispiel 3 . . . . .  | 38 |
| 4.10 | Origami zu Beispiel 3 . . . . .   | 38 |
| 4.11 | Polygonzug zu Beispiel 4 . . . . .  | 39 |
| 4.12 | Origami zu Beispiel 4 . . . . .   | 39 |
| 4.13 | Polygonzug zu Beispiel 5 . . . . .  | 40 |
| 4.14 | Origami zu Beispiel 5 . . . . .   | 40 |
| 4.15 | Polygonzug zu Beispiel 6 . . . . .  | 41 |
| 4.16 | Teil des Origami zu Beispiel 6 . . . . .  | 41 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 4.17 | Origami zu Beispiel 6 . . . . .           | 42 |
| 4.18 | Polygonzug zu Beispiel 7 . . . . .        | 43 |
| 4.19 | Teil des Origami zu Beispiel 7 . . . . .  | 43 |
| 4.20 | Origami zu Beispiel 7 . . . . .           | 44 |
| 4.21 | Polygonzug zu Beispiel 8 . . . . .        | 45 |
| 4.22 | Origami zu Beispiel 8 . . . . .           | 45 |
| 4.23 | Polygonzug zu Beispiel 9 . . . . .        | 46 |
| 4.24 | Origami zu Beispiel 9 . . . . .           | 46 |
| 4.25 | Polygonzug zu Beispiel 10 . . . . .       | 47 |
| 4.26 | Origami zu Beispiel 10 . . . . .          | 47 |
| 4.27 | Polygonzug zu Beispiel 11 . . . . .       | 48 |
| 4.28 | Teil des Origami zu Beispiel 11 . . . . . | 48 |
| 4.29 | Origami zu Beispiel 11 . . . . .          | 49 |
| 4.30 | Polygonzug zu Beispiel 12 . . . . .       | 50 |
| 4.31 | Teil des Origami zu Beispiel 12 . . . . . | 50 |
| 4.32 | Origami zu Beispiel 12 . . . . .          | 51 |

# Literatur

- [1] Hans-Günther Bigalke und H. G. Bigalke. *Kugelgeometrie*. Frankfurt am Main u. a.: O. Salle und Sauerländer, 1984. ISBN: 3793555305.
- [2] Erik D. Demaine und Joseph O'Rourke. *Geometric folding algorithms: Linkages, origami, polyhedra*. Cambridge und New York: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 9780521715225.
- [3] E. Demaine u. a. "Curved Crease Folding: a Review on Art, Design and Mathematics". In: *Proceedings of the IABSE-IASS Symposium* (2011).
- [4] Gerd Fischer. *Lernbuch Lineare Algebra: Das Wichtigste ausführlich für das Lehramts- und Bachelorstudium*. 1. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2011. ISBN: 978-3-8348-0838-7.
- [5] Dmitry Fuchs und Serge Tabachnikov. "More on Paperfolding". In: *The American Mathematical Monthly* 106.1 (1999), S. 27. DOI: 10.2307/2589583.
- [6] Robert Geretschläger. *Geometric origami*. Shipley: Arbelos, 2008. ISBN: 9780955547713.
- [7] Koshiro Hatori. *K's Origami: Origami Construction*. 2015. URL: <https://origami.ousaan.com/library/conste.html>.
- [8] Humiaki Huzita. "A possible example of system expansion in origami geometry". In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami* (1989), S. 53–70.
- [9] Wolfgang Kühnel. *Differentialgeometrie: Kurven – Flächen – Mannigfaltigkeiten*. 3., überarbeitete und erweiterte Auflage. Vieweg studium, Aufbaukurs Mathematik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2005. ISBN: 9783322934222.
- [10] Robert Lang und Roger Alperin. "One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms". In: *Origami 4: Proceedings of the 4th International Meeting of OSME* (2009), S. 371–393. URL: [http://www.langorigami.com/files/articles/o4\\_multifold\\_axioms.pdf](http://www.langorigami.com/files/articles/o4_multifold_axioms.pdf).
- [11] Dionysius Lardner. *A treatise on geometry and its application in the arts*. London: Longman, Orme, Brown, Green, & Longmans and John Taylor, 1840.
- [12] Joseph O'Rourke. *How to Fold It: The Mathematics of Linkages, Origami and Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. ISBN: 9780521767354.

- [13] Margherita Piazzolla Beloch. “Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici, Periodico di Mat.” In: *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari* (1936), S. 93–96.
- [14] Otto Röschel. “Curved folding with pairs of cylinders”. In: *Journal for Geometry and Graphics* 21 (2017), S. 193–200.
- [15] Berthold Schuppar. “Sphärische Trigonometrie”. In: *Geometrie auf der Kugel*. Hrsg. von Berthold Schuppar. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017, S. 63–78. ISBN: 978-3-662-52941-6. DOI: 10.1007/978-3-662-52942-3\_4.
- [16] Hellmuth Stachel. “Remarks on Miura-ori, a Japanese Folding Method”. In: *Acta Technica Napocensis, Ser. Applied Mathematics and Mechanics* 52 (2009), S. 245–248. URL: [http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel/Miura\\_Cluj09.pdf](http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel/Miura_Cluj09.pdf).
- [17] Tomohiro Tachi. “Composite Rigid-Foldable Curved Origami Structure”. In: *Proceedings of Transformables* (2013).
- [18] Harald Tranacher. “Sphärische Kegelschnitte - didaktisch aufbereitet”. Diplomarbeit. Wien: Technische Universität Wien, Februar 2006. URL: [http://www.geometrie.tuwien.ac.at/theses/pdf/diplomarbeit\\_tranacher.pdf](http://www.geometrie.tuwien.ac.at/theses/pdf/diplomarbeit_tranacher.pdf).
- [19] Akira Yoshizawa. *Atarashii origami geijutsu (New Origami Art)*. Origami Geijutsu-Sha, 1954.
- [20] You Zhong und Kuribayashi Kaori. “A novel origami stent”. In: *Proceedings of the 2003 ASME Summer Bioengineering Conference, 25-29 June, Key Biscayne, Florida, USA*. 2003. URL: <http://http://www.organicorigami.com/thrackle/class/hon394/papers/OrigamiStent.pdf>.