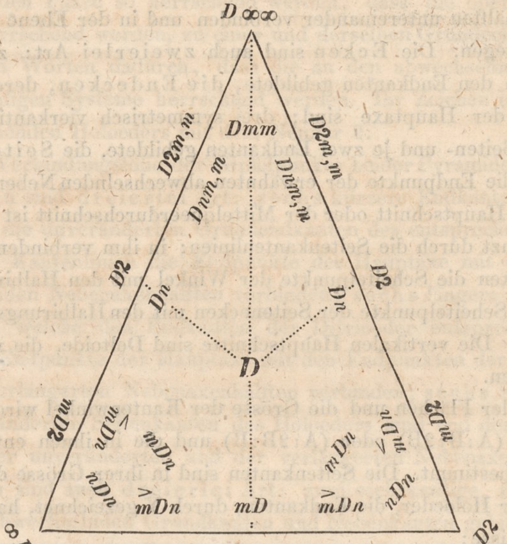
den Endpunkt der Hauptaxe parallel dem Mittelqueerdurchschnitt gelegte Ebene fallen und die Dyoederflächen bilden. Auch für die stumpferen Dioktaeder Dnm,m geht auf gleiche Weise das Dyoeder als Extremgestalt hervor.

Vergleicht man am Schluss, wie es bei den schon erörterten Systemen der Fall war, die verschiedenen Arten einfacher Formen, welche aus einem bestimmten Grundverhältniss abgeleitet werden, so findet man auch hier wieder die verschiedensten Reihen, durch welche die Uebergänge zwischen den einzelnen Arten vermittelt werden. Eine Anschauung dieser Verhältnisse giebt das in Fig. 8 dargestellte Schema, welchem entsprechend die Fig. 9 die Lage der Flächen der abgeleiteten Formen zu der Fläche der Grundform angiebt. Eine nähere Erörterung zum Verständniss dieser beiden Darstellungen ist nicht nothwendig, da eine Vergleichung mit den früheren und namentlich den Darstellungen dieser Verhältnisse im quadratischen Systeme jede nähere Erklärung überflüssig macht.

Fig. 9.



B. Hemiedrische Formen.

a) Mit nicht parallelen Flächen.

1) Die Ditrioeder.

(Syn. Trigonale Pyramiden; Naumann.)

Ein Ditrioeder ist eine von sechs gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Triangeln umschlossene Gestalt, mit neun Kanten und fünf Ecken, deren Flächen in zwei dreizählige Systeme so vertheilt sind, dass jedes derselben bei gemeinschaftlicher Basis eine gleichseitige dreiseitige Pyramide bildet. Sie entstehen durch Hemiedrie der Dihexaeder der Nebenreihe dadurch, dass die an den abwechselnden Seitenkanten liegenden Flächenpaare herrschend werden. Ihr Zeichen ist daher das der genannten Dihexaeder mit dem Nenner 2, also $\frac{D2}{2}$, $\frac{mD2}{2}$, $\frac{D2m,m}{2}$ und die beiden jedesmaligen Gegenhemieder eines Holoeders werden durch den dem D des einen beigefügten Strich unterschieden.

Die gerade Verbindungslinie der Gipfelpunkte beider Pyramiden ist die Hauptaxe. Die Kanten sind zweierlei Art: sechs symmetrische, die Endkanten, deren Kantenlinien zu je drei von einem Endpunkt der Hauptaxe ausgehen und denselben mit den Endpunkten dreier abwechselnden Nebenaxenhälften verbinden; drei regelmässige, die Seitenkanten, deren Kantenlinien die Endpunkte derselben Nebenaxenhälften untereinander verbinden und in der Ebene des Mittelqueerdurchschnittes liegen. Die Ecken sind auch zweierlei Art: zwei regelmässige dreikantige, von den Endkanten gebildete, die Endecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind; drei symmetrisch vierkantige, von je zwei abwechselnden Seiten- und je zwei Endkanten gebildete, die Seitenecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der erwähnten abwechselnden Nebenaxenhälften sind. Der horizontale Hauptschnitt oder der Mittelqueerdurchschnitt ist ein gleichseitiger Triangel, begrenzt durch die Seitenkantenlinien; in ihm verbinden die ungleich getheilten Nebenaxen die Scheitelpunkte der Winkel mit den Halbirungspunkten der Seiten, also die Scheitelpunkte der Seitenecken mit den Halbirungspunkten der Seitenkantenlinien. Die vertikalen Hauptschnitte sind Deltoide, die vertikalen Nebenschnitte Rhomben.

Die Lage der Flächen und die Grösse der Kantenwinkel wird allgemein durch das Verhältniss (A:B:2B) oder (A:2B:B) und die in ihnen enthaltenen Werthe angegeben und bestimmt. Die Seitenkanten sind in ihrer Grösse die unveränderten Seitenkanten der Holoeder, die Endkanten, durch Y gezeichnet, haben nachfolgende Grössenverhältnisse:

$$\cos. Y = \frac{A^2 - 2B^2}{2(A^2 + B^2)}, \quad \cos.\tfrac{1}{2} Y = \frac{A\sqrt{3}}{2\sqrt{(A^2+B^2)}}, \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(A^2+4B^2)}}{A\sqrt{3}};$$

Als Beispiele der Formen dieser Art mögen die aus dem oben erwähnten Grundverhältniss (a:b:b) = 11:10:10 abgeleiteten dienen:

$\frac{D2}{2}$ Endkanten 100° 17′ 45″. Seitenkanten 95° 27′ 9″

$\frac{2D2}{2}$	Endkanten	75^{0}	$55'$	$38''$	Seitenkanten	131^{0}	$6'$	$47''$
$\frac{D4,2}{2}$	„	130	39	53	„	57	37	20.

2) Die Diploditrioeder.

Ein Diploditrioeder ist eine von zwölf gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Triangeln umschlossene Gestalt mit achtzehn symmetrischen Kanten und acht symmetrischen Ecken, deren Flächen entweder nach den Flächen eines Ditrioeders in sechs Flächenpaare oder in zwei sechszählige Systeme so vertheilt sind, dass jedes derselben bei gemeinschaftlicher Basis eine ungleichkantige sechsseitige Pyramide bildet. Sie entstehen durch Hemiedrie aus den Didodekaedern dadurch, dass die an den abwechselnden Grundendkanten liegenden Paare so herrschend werden, dass die oberen und unteren Paare, welche herrschend werden, zu einer und derselben Grundecke gehören, oder auch mit anderen Worten dadurch, dass die an den abwechselnden Grundecken liegenden vierzähligen Systeme herrschend werden. Ihr Zeichen ist demnach auch das des entsprechenden Holoeders mit dem Nenner 2.

Die gerade Verbindungslinie der Gipfelpunkte beider Pyramiden ist die Hauptaxe. Die Kanten sind dreierlei Art: sechs kürzere Endkanten, die Grundkanten, welche die unveränderten Grundendkanten des entsprechenden Holoeders sind, und deren Kantenlinien die Endpunkte der Hauptaxe mit den Endpunkten dreier abwechselnden Nebenaxenhälften verbinden; sechs längere Endkanten, die Nebenkanten, welche den Endkanten der Ditrioeder entsprechen und deren Kantenlinien die Endpunkte der Hauptaxe mit den Endpunkten der drei mit obigen abwechselnden verlängerten Nebenaxenhälften verbinden; sechs Seitenkanten, welche die unveränderten Seitenkanten des Holoeders sind und deren Kantenlinien die Endpunkte der unveränderten und der verlängerten Nebenaxenhälften verbinden. Die Ecken sind auch dreierlei Art: zwei sechskantige, die Endecken, welche von den abwechselnden Grundkanten und Nebenkanten gebildet werden und zu ihren Scheitelpunkten die Endpunkte der Hauptaxe haben; drei vierkantige stumpfere und drei dergleichen spitzere, die Seitenecken, welche demnach zweierlei sind und als Grundecken und Nebenecken unterschieden werden, denn die stumpferen Seitenecken sind die unveränderten Grundecken des entsprechenden Holoeders und führen daher auch hier diesen Namen; ihre Scheitelpunkte sind die Endpunkte der abwechselnden unveränderten Nebenaxenhälften. Die spitzeren Seitenecken, welche im Gegensatz zu jenen Nebenecken genannt werden, haben zu ihren Scheitelpunkten die Endpunkte der verlängerten abwechselnden

Nebenaxenhälften und entsprechen den Seitenecken der Ditrioeder. Der horizontale Hauptschnitt oder der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Sechsseit, gebildet von den Seitenkantenlinien; die vertikalen Hauptschnitte sind Deltoide, gebildet von je zwei kürzeren und je zwei längeren Endkantenlinien; die vertikalen Nebenschnitte sind Rhomben.

Die Lage der Flächen wird durch dasselbe Verhältniss bestimmt, wie in dem entsprechenden Holoeder und es gilt daher im Allgemeinen für die Diploditrioederflächen das Axenverhältniss (A:B:nB) oder (A:nB:B), wo n eine beliebige rationale Grösse grösser als 1 und kleiner als 2 bezeichnet. In Betreff der Kantenwinkel ist es nur nöthig die Nebenkanten zu bestimmen, da die Grundkanten und die Seitenkanten die unveränderten des Holoeders sind. Bezeichnet man die Grundkanten mit X, die Nebenkanten mit Y und die Seitenkanten mit Z, so sind die Funktionen für X und Z dieselben, wie bei den Didodekaedern, für Y aber ergeben sich für obiges Verhältniss folgende Werthe:

$$\cos. Y = -\frac{2A^2(2n-2n^2+1)+3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} Y = \frac{(2n-1)A}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}},$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{(A^2+n^2B^2)}}{(2n-1)A}.$$

Die Diploditrioeder sind an natürlichen Krystallen noch nicht angetroffen worden, jedoch ist die Möglichkeit ihres Vorkommens nicht abzusprechen, da ihnen dasselbe Gesetz der Hemiedrie zu Grunde liegt, wie den Ditrioedern, in die sie auch übergehen, wenn der Werth n zunimmt und endlich $=2$ wird, wodurch je zwei an einer Grundkante liegende Flächen in eine Ebene fallen und eine Ditrioederfläche bilden. Des Beispiels wegen mögen die beiden aus den Didodekaedern $D\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{3}D\frac{4}{3}$ berechneten dienen, denen das obige Grundverhältniss $a:b = 11:10$ zu Grunde liegt:

	Grundkanten.	Nebenkanten	Seitenkanten.
$\frac{D\frac{3}{2}}{2}$	163° 45′ 13″	111° 20′ 44″	96° 29′ 20″
$\frac{\frac{4}{3}D\frac{4}{3}}{2}$	153 10 12	109 5 52	113 32 41.

3) Die Trapezoiddihexaeder.

(Syn. Hexagonale Trapezoeder; Naumann. Dihexagonale Trapezoeder; Breithaupt. Hexagontrapezoeder; v. Glocker. Gleichkantige sechsseitige pyramidenähnliche, durch rechts und links sich von einander unterscheidende Gestalten; Mohs. Diplagieder; Haidinger.)

Ein Trapezoiddihexaeder ist eine von zwölf gleichen und ähnlichen Trapezoiden umschlossene Gestalt, mit vier und zwanzig unregelmässigen Kanten und vierzehn Ecken, deren Flächen in zwei sechszählige Systeme vertheilt sind. Diese Körper entstehen auch durch Hemiedrie der Didodekaeder, aber dadurch, dass die abwechselnden Flächen herrschend werden, und die beiden aus einem jeden Didodekaeder auf diese Weise hervorgehenden Gegenhemieder werden durch die Beinamen rechts und links gewendetes unterschieden. Wenn man nämlich die Vertheilung der Didodekaederflächen nach den ihnen zu Grunde liegenden Dihexaedern der Hauptreihe berücksichtigt, so liegt von jedem der Flächenpaare die eine Fläche rechts, die andere links an der zugehörigen Nebenkante; werden nun in dem einen Falle alle auf gleiche Weise rechts liegenden Flächen herrschend, so entsteht ein rechtsgewendetes Trapezoiddihexaeder, in dem anderen Falle ein linksgewendetes. Dieser Unterschied wird durch ein vorgesetztes r oder l an dem mit dem Nenner 2 versehenen Zeichen des Didodekaeders dargestellt, wodurch gleichzeitig diese Hemieder von den anderen Hemiedern der Didodekaeder unterschieden werden, so sind z. B. r $\frac{mDn}{2}$ und l $\frac{mDn}{2}$ die beiden aus dem Didodekaeder mDn hervorgehenden Trapezoiddihexaeder.

Die Kanten eines jeden Trapezoiddihexaeders sind dreierlei Art: zwölf Endkanten, deren Kantenlinien zu je sechs von den Endpunkten der Hauptaxe ausgehen; sechs kürzere schärfere und sechs längere stumpfere Seitenkanten, welche einzeln mit einander abwechseln und deren Kantenlinien schief (im Zickzack) laufen. Die Ecken sind zweierlei Art: zwei regelmässige sechskantige, von den Endkanten gebildete, die Endecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind; zwölf unregelmässige dreikantige, die Seitenecken, welche von je drei verschiedenen Kanten gebildet werden und deren Scheitelpunkte nicht in einer Ebene, sondern in zwei dem Mittelqueerdurchschnitt parallelen Ebenen so liegen, dass sechs abwechselnde in der einen, die sechs anderen in der anderen liegen. Die Seitenkanten lassen sich durch ihre Beschaffenheit im Allgemeinen nicht in ihrer Lage bestimmen; ihre Kantenlinien werden zunächst durch die Ebene des Mittelqueerdurchschnittes halbirt und in den Halbirungspunkten je sechs gleicher liegen die Endpunkte der Nebenaxen, und in denen der sechs anderen die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen, zufolge welcher Beschaffenheit die ersteren die Grund-, die anderen die Neben-Seitenkanten oder -Kanten genannt werden, analog den beiderlei Ecken der Didodekaeder, durch deren Scheitelpunkte diese Kanten halbirt werden. Wenn man wieder das allgemeine Axenverhältniss (A:B:nB) oder (A:nB:B) zur Bestimmung der Flächenlage wählt, so werden bei den Trapezoiddihexaedern die längeren Seitenkanten die Nebenkanten und die kürzeren die Grundseitenkanten sein, so lange $n < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; ist aber $n > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, so sind die kürzeren Seitenkanten die Nebenseitenkanten und die längeren die

Grundseitenkanten. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Zwölfseit, die vertikalen Haupt- und Nebenschnitte sind Rhomben.

Wenn die Endkanten mit X, die Nebenseitenkanten mit Y und die Grundseitenkanten mit Z bezeichnet werden, so erhält man allgemein für ihre Kantenwinkel die nachfolgenden Werthe:

$$\cos. X = -\frac{2A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2},\ \cos. \tfrac{1}{2}X = \frac{A\sqrt{(n^2-n+1)}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}},$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3}\sqrt{[A^2(n^2-n+1)+n^2B^2]}}{A\sqrt{(n^2-n+1)}};$$

$$\cos. Y = -\frac{2A^2(4n-n^2-1)-3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2},\ \cos. \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{3}\sqrt{[A^2(n-1)^2+n^2B^2]}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}},$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}Y = \frac{A(n+1)}{\sqrt{3}\sqrt{[A^2(n-1)^2+n^2B^2)}};$$

$$\cos. Z = -\frac{2A^2(n^2+2n-2)-3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2},\ \cos. \tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{A^2(2-n)^2+3n^2B^2]}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}},$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}Z = \frac{nA\sqrt{3}}{\sqrt{[A^2(2-n)^2+3n^2B^2]}};$$

Als Beispiele der Trapezoiddihexaeder mögen nachfolgende für das schon oben aufgestellte Grundverhältniss geltende dienen, welche die Hemieder der Didodekaeder $D\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}D\frac{4}{3}$ und $6D\frac{6}{5}$ sind:

	Endkanten.	Grund-	Nebenseitenkanten.
$\frac{D\frac{3}{2}}{2}$	136° 11′ 56″	94° 12′ 4″	89° 38′ 32″
$\frac{\frac{4}{3}D\frac{4}{3}}{2}$	130 33 6	106 58 0	108 35 10
$\frac{6D\frac{6}{5}}{2}$	120 39 2	135 3 19	155 58 24.

4) Die trigonalen Prismen.

(Syn. Gleichkantig dreiseitige oder trigonale Säulen; v. Glocker.)

Hierunter versteht man gleichseitig dreiseitige Prismen, bei denen ein auf die Kanten senkrecht geführter Schnitt ein gleichseitiger Triangel ist. Sie entstehen durch Hemiedrie der hexagonalen Prismen der Nebenreihe durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen und es ist daher das Zeichen eines solchen trigonalen Prisma das Zeichen des Holoeders mit dem Nenner 2, also $\frac{\infty D2}{2}$ und die beiden gleichen nur verschieden gestellten Hemieder eines Holoeders werden durch den dem D des einen beigefügten Accent unterschieden. Die drei Kanten eines solchen Prisma sind regelmässige und ihre Kantenlinien gehen durch die Endpunkte dreier abwechselnder Nebenaxenhälften parallel der Hauptaxe; der Kantenwinkel ist $= 60^{0}$. Die Flächen sind durch je zwei dieser Endpunkte parallel der Hauptaxe gelegt. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein gleichseitiger Triangel. Ein trigonales Prisma ist anzusehen als das letzte Glied der spitzen Ditrioeder, indem bei dem Wachsen des Werthes m bei dem Falle, dass m unendlich gross geworden, je zwei an einer Seitenkante liegende Ditrioederflächen in eine der Hauptaxe parallele Ebene fallen und eine Prismenfläche bilden.

5) Die ditrigonalen Prismen.

Hierunter hat man gleichseitig sechsseitige Prismen zu verstehen, bei denen ein auf die Kanten senkrecht geführter Schnitt ein symmetrisches Sechsseit ist. Sie entstehen durch Hemiedrie der dodekagonalen Prismen dadurch, dass die an den abwechselnden Grundkanten liegenden Paare herrschend werden, und sind die Extremgestalten der Diploditrioeder, indem bei der Zunahme des Werthes m, durch welchen die Hauptaxe vervielfacht wird, endlich der Fall eintritt, dass bei $m = \infty$ je zwei an einer Seitenkante liegende Flächen in eine der Hauptaxe parallele Ebene fallen und eine solche Prismenfläche bilden. Die sechs Kanten sind regelmässig und zweierlei Art, drei stumpfere und drei schärfere; die stumpferen sind die unveränderten Grundkanten des Holoeders und behalten auch hier den Namen Grundkanten, die schärferen heissen im Gegensatz zu ihnen Nebenkanten. Die Kanten wechseln einzeln untereinander ab und der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Sechsseit. Die Kantenlinien der Grundkanten gehen durch die Endpunkte der unveränderten abwechselnden Nebenaxenhälften, während die der Nebenkanten durch die Endpunkte der abwechselnden verlängerten Hälften, beide parallel der Hauptaxe gehen. Das Zeichen dieser Prismen ist das der entsprechenden Holoeder mit dem Nenner 2, also allgemein $\frac{\infty Dn}{2}$, die beiden gleichen Gegenhemieder werden durch den beigefügten Strich an dem Zeichen des einen unterschieden.

Bezeichnet man die Grundkanten durch X und die Nebenkanten durch Y, so ist die Grösse der ersteren, als der unveränderten des entsprechenden Holoeders, auch durch dieselben Funktionen bestimmt, wie für X Seite 145 angegeben ist; für Y dagegen gelten folgende Werthe:

$$\cos. Y = -\frac{2n - 2n^2 + 1}{2(n^2 - n + 1)},\ \cos. \tfrac{1}{2} Y = \frac{2n - 1}{2\sqrt{(n^2 - n + 1)}},\ \text{tang.} \tfrac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{3}}{2n - 1}.$$

Als Beispiele dieser Prismen, welche in der Natur noch nicht beobachtet worden sind, können die drei nachfolgenden mit ihren Kantenwinkeln dienen:

$\frac{\infty D\frac{6}{5}}{2}$	Grundkanten	137° 53′ 48″	Nebenkanten	102° 6′ 12″
$\frac{\infty D\frac{4}{3}}{2}$	„	147 47 45	„	92 12 15
$\frac{\infty D\frac{3}{2}}{2}$	„	158 12 48	„	81 47 12.

b) Mit parallelen Flächen.

1) Die Rhomboeder.

(Syn. Rautenflächner; Weiss. Rautenflach; v. Raumer. Achteckige Hexaeder z. Th. Bernhardi.)

Ein Rhomboeder ist ein von sechs gleichen und ähnlichen Rhomben umschlossener Körper mit zwölf Kanten und acht dreikantigen Ecken, dessen Flächen in zwei dreizählige Systeme vertheilt sind. Die ausschliesslich so benannten Körper, da es auch derartige tetartoedrische Gestalten giebt, entstehen durch Hemiedrie der Dihexaeder der Hauptreihe, durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen. Ihr Zeichen ist demnach das der Dihexaeder der Hauptreihe mit dem Nenner 2, also nach den verschiedenen Arten derselben $\frac{D}{2}$, $\frac{mD}{2}$ und $\frac{Dmm}{2}$, und die beiden jedesmaligen Gegenhemieder eines Holoeders, die sich nur durch ihre Stellung unterscheiden, werden durch den an das D des einen hinzugefügten Strich unterschieden, so dass $\frac{D'}{2}$ das Gegenrhomboeder zu $\frac{D}{2}$ ist und genannt wird.

Die Kanten, welche alle gleichlang sind, sind zweierlei Art: sechs symmetrische, die Endkanten, deren Kantenlinien zu je drei von einem Endpunkt der Hauptaxe ausgehen und verlängert die horizontalen Zwischenaxen treffen; je zwei sind einander parallel und liegen in der Ebene eines vertikalen Nebenschnittes. Sechs unregelmässige Kanten, die Seitenkanten, deren Kantenlinien im Zickzack laufen und zu je zwei einander parallel gehen und in einer Ebene liegen. Durch die Endpunkte der Nebenaxen werden die Seitenkantenlinien halbirt und jeder Seitenkantenlinie gehen zwei Endkantenlinien parallel. Die Ecken sind auch zweierlei Art: zwei regelmässige, von den Endkanten gebildete, die Endecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind; sechs unregelmässige, die Seitenecken, welche von je zwei Seitenkanten und einer Endkante gebildet werden und von denen die Scheitelpunkte je dreier abwechselnden in einer dem Mittelqueerdurchschnitt parallelen Ebene liegen. Der Mittelqueerdurchschnitt selbst ist eine durch die Halbirungspunkte der Seitenkantenlinien gelegte Ebene und ein regelmässiges Sechsseit. Die vertikalen Hauptschnitte sind Rhomben und die vertikalen Nebenschnitte Rhomboide.

Stellt man das reguläre Hexaeder so, dass eine der trigonalen Zwischenaxen desselben senkrecht steht, so bildet es ein Rhomboeder, dessen Flächen nicht Rhomben, sondern Quadrate sind und dessen Kanten und Ecken untereinander gleich sind. Verglichen mit dem so gestellten regulären Hexaeder werden die Rhomboeder als spitze und stumpfe im Allgemeinen unterschieden, je nachdem die Endkantenwinkel kleiner oder grösser als 90° sind. Bei den spitzen Rhomboedern sind also die Endkantenwinkel kleiner als 90° und demnach die Endecken spitzer als die Hexaederecken; die Seitenkantenwinkel dagegen sind grösser als 90° und daher stumpfer als die Endkantenwinkel, mit denen sie sich zu 180° ergänzen. Bei den stumpfen Rhomboedern sind die Endkantenwinkel grösser als 90° und demnach die Endecken stumpfer als die Hexaederecken; die Seitenkantenwinkel sind kleiner als 90°, also schärfer als die Endkanten, und die Seitenecken spitzer als die Endecken, was bei den spitzen umgekehrt der Fall ist.

Da im Allgemeinen die Flächenlage der Rhomboeder als der Hemieder der Dihexaeder der Hauptreihe durch das Axenverhältniss A:B:B bestimmt wird, so wird auch durch die Werthe von A und B die Grösse der Kantenwinkel bestimmt, und wenn mit X die Endkanten und mit Z die Seitenkanten bezeichnet werden, so erhält man für sie folgende Werthe zur Bestimmung ihrer Grösse:

$$\cos. X = -\frac{3B^2-2A^2}{3B^2+4A^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{(4A^2+3B^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{(A^2+3B^2)}}{A\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{2A^2-3B^2}{4A^2+3B^2} = -\cos. X,\ \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{(A^2+3B^2)}}{\sqrt{(4A^2+3B^2)}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{(A^2+3B^2)}}.$$

Wenn diese Grössenbestimmungen auf ein bestimmtes Grundverhältniss bezogen werden, durch welches die Grundform D und ihr Hemieder $\frac{D}{2}$ ausgedrückt wird und von welchem die Hemieder $\frac{mD}{2}$ und $\frac{Dmm}{2}$ als die der spitzeren und stumpferen Dihexaeder der Hauptreihe abgeleitet werden, so ergeben sich für diese drei Arten Rhomboeder nachfolgende Winkelfunktionen:

Für das Rhomboeder $\frac{D}{2}$,

$$\cos. X = -\frac{3b^2-2a^2}{3b^2+4a^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(4a^2+3b^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{(a^2+3b^2)}}{a\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{2a^2-3b^2}{4a^2+3b^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{(a^2+3b^2)}}{\sqrt{(4a^2+3b^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(a^2+3b^2)}}.$$

Für die Rhomboeder $\frac{mD}{2}$,

$$\cos. X = -\frac{3b^2-2m^2a^2}{3b^2+4m^2a^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{(4m^2a^2+3b^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{(m^2a^2+3b^2)}}{ma\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{2m^2a^2-3b^2}{4m^2a^2+3b^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{(m^2a^2+3b^2)}}{\sqrt{(4m^2a^2+3b^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{(m^2a^2+3b^2)}}.$$

Für die Rhomboeder $\frac{Dmm}{2}$,

$$\cos. X = -\frac{3m^2b^2-2a^2}{3m^2b^2+4a^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(4a^2+3m^2b^2)}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{(a^2+3m^2b^2)}}{a\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{2a^2-3m^2b^2}{4a^2+3m^2b^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{(a^2+3m^2b^2)}}{\sqrt{(4a^2+3m^2b^2)}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(a^2+3m^2b^2)}}.$$

Unter den in der Natur vorkommenden Rhomboedern mögen des Beispiels wegen die bei dem Kalkspath vorkommenden drei Rhomboeder $\frac{D}{2}$, $\frac{2D}{2}$ und $\frac{D2,2}{2}$ dienen, welchen das Axenverhältniss $a:b:b = \sqrt{27}:\sqrt{37}:\sqrt{37}$ als Grundverhältniss zu Grunde liegt:

$\frac{D}{2}$	Endkanten	105°	5′	10″	Seitenkanten	74°	54′	50″
$\frac{2D}{2}$	„	78	51	2	„	101	8	58
$\frac{D2,2}{2}$	„	134	57	9	„	45	2	51.

2) Die Skalenoeder.

(Syn. Drei- und Dreikantner; Weiss. Ungleichkantige sechsseitige Pyramiden; Mohs. Bipyramoide; Hausmann. Kalkpyramiden; v. Raumer. Hexagonale Skalenoeder; Naumann. Dihexagonale Skalenoeder; Breithaupt.)

Ein Skalenoeder ist eine von zwölf gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Triangeln umschlossene Gestalt mit achtzehn Kanten und acht Ecken, deren Flächen in sechs Paare vertheilt sind. Sie entstehen durch Hemiedrie der Didodekaeder dadurch, dass wenn man die Didodekaederflächen in zwölf Paare nach den Dihexaederflächen der Hauptreihe vertheilt betrachtet, die abwechselnden dieser Paare herrschend werden, gerade so wie es beim Uebergang der Dihexaeder der Hauptreihe in die Rhomboeder der Fall war in Bezug auf die einzelnen Flächen, welche hier den Paaren entsprechen. Da die Flächen eines solchen Paares an den Nebenkanten liegen, so kann man auch sagen, dass die Skalenoeder aus den Didodekaedern dadurch hervorgehen, dass die an den abwechselnden Nebenkanten liegenden Flächenpaare herrschend werden. Das Zeichen der Skalenoeder ist demnach auch wiederum das der Didodekaeder mit dem Nenner 2, welcher aber zur Unterscheidung der obigen schon angeführten Hemieder unter einen doppelten Theilungsstrich gesetzt wird, um damit zu gleicher Zeit die Parallelität der Flächen auszudrücken, und die beiden jedesmaligen aus einem Holoeder hervorgehenden Gegenhemieder werden durch den Accent an dem D des einen unterschieden, so dass also z. B. die beiden aus dem Didodekaeder mD hervorgehenden Skalenoeder durch $\genfrac{}{}{1.2pt}{}{mD}{2}$ und $\genfrac{}{}{1.2pt}{}{mD'}{2}$ bezeichnet und unterschieden werden.

Die Kanten eines jeden Skalenoeders sind dreierlei Art: sechs längere stumpfere und sechs kürzere schärfere Endkanten, und sechs Seitenkanten. Die Endkanten sind symmetrisch und drei jeder Art gehen untereinander abwechselnd von einem Endpunkt der Hauptaxe aus und verbinden denselben durch ihre Kantenlinien mit den horizontalen Zwischenaxen, welche durch das Centrum ungleich getheilt werden. Die längeren Endkanten sind die unveränderten Nebenkanten des entsprechenden Holoeders und in ihnen enden die kürzeren Hälften der Zwischenaxen, welche dieselben wie im Holoeder sind. Die Seitenkanten sind unregelmässig und gehen wie die Seitenkanten der Rhomboeder im Zickzack; ihre Kantenlinien werden durch die Endpunkte der Nebenaxen halbirt und durch diese Halbirungspunkte ist die Ebene des Mittelqueerdurchschnittes gelegt. Die Ecken sind zweierlei Art: zwei symmetrische sechskantige, die Endecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind und welche von den abwechselnden Endkanten gebildet werden; sechs unregelmässige vierkantige, die Seitenecken, deren Scheitelpunkte zu je drei abwechselnd in einer dem Mittelqueerdurchschnitt parallelen Ebene liegen, also drei abwechselnde in einer Ebene oberhalb und drei abwechselnde in einer Ebene unterhalb wie die Seitenecken der Rhomboeder; die Ecken selbst sind gebildet von je zwei Seitenkanten und zwei verschiedenen Endkanten. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Zwölfseit; die vertikalen Hauptschnitte sind Rhomben und die vertikalen Nebenschnitte Rhomboide.

Da die Lage der Skalenoederflächen durch dasselbe Axenverhältniss bestimmt wird, wie die Lage der Didodekaederflächen, also im Allgemeinen durch das schon oben näher bestimmte Verhältniss (A:B:nB) oder (A:nB:B), so werden auch die

Kantenwinkel im Allgemeinen durch die in ihm enthaltenen Grössen bestimmt werden. Bezeichnet man nun die kürzeren Endkanten mit X, die längeren mit Y und die Seitenkanten mit Z, so ist nur die Grösse für X und Z anzugeben, da die Grösse des Winkels Y, des der längeren Endkanten mit der des Winkels Y der Didodekaeder übereinstimmt, indem die längeren Endkanten die unveränderten Nebenkanten der Didodekaeder sind. Es ist:

$$\cos. X = -\frac{2A^2(2n^2-2n-1)+3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{[A^2(2n-1)^2+3n^2B^2]}}{A\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{2A^2(n^2+2n-2)-2n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{[A^2(2-n)^2+3n^2B^2]}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{nA\sqrt{3}}{\sqrt{[A^2(2-n)^2+3n^2B^2]}}.$$

Als Beispiele der Skalenoeder mögen die drei bei dem Kalkspath beobachteten und auf das Grundverhältniss $a:b:b=\sqrt{27}:\sqrt{37}:\sqrt{37}$ bezogenen Skalenoeder $\frac{2D\frac{4}{3}}{2}$, $\frac{3D\frac{3}{2}}{2}$ und $\frac{5D\frac{5}{3}}{2}$ mit ihren Kantenwinkeln dienen.

	Kürzere	längere Endkanten.	Seitenkanten.
$\frac{2D\frac{4}{3}}{2}$	136° 2′ 42″	155° 48′ 49″	113° 44′ 26″
$\frac{3D\frac{3}{2}}{2}$	104 37 52	144 24 17	132 58 25
$\frac{5D\frac{5}{4}}{2}$	109 1 20	134 27 37	150 44 19.

3) Die hemiedrischen Dihexaeder.

(Syn. Hexagonale Pyramiden von abnormer Flächenstellung; Naumann. Dihexaederähnliche Hemididodekaeder; v. Glocker.)

Der allgemeine Charakter dieser Krystallformen ist derselbe, wie der der oben angeführten Dihexaeder, nämlich dass sie von zwölf gleichschenkligen Triangeln umschlossen sind, welche untereinander achtzehn Kanten und acht Ecken der oben angegebenen Art bildend, in zwei sechszählige Systeme so vertheilt sind, dass jedes derselben bei gemeinschaftlicher Basis eine gleichkantige sechsseitige Pyramide bildet und dass die gerade Verbindungslinie der Gipfelpunkte beider Pyramiden die Hauptaxe ist. Sie unterscheiden sich von den oben aufgeführten holoedrischen Dihexaedern durch die Lage der Flächen, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht. Sie sind nämlich Hemieder der Didodekaeder und entstehen aus denselben dadurch, dass die an den Seitenkanten liegenden Flächenpaare abwechselnd herrschend werden, also gerade so, wie die hemiedrischen quadratischen Oktaeder aus den Dioktaedern. Die Lage ihrer Flächen wird demnach auch wieder durch das allgemeinste Axenverhältniss A:B:nB oder A:nB:B der Didodekaederflächen allgemein bestimmt, so dass sie ihrer Lage gemäss eine Zwischenreihe zwischen den Dihexaedern der Haupt- und Nebenreihe bilden und daher auch Dihexaeder der Zwischenreihe genannt werden können. Eine Fläche derselben ist also durch den Endpunkt der Hauptaxe, durch den Endpunkt einer unveränderten halben Nebenaxe und durch den Endpunkt der durch n vervielfachten anderen halben Nebenaxe eines Sextanten gelegt, wodurch die Endpunkte der Nebenaxen und der horizontalen Zwischenaxen durch nichts in den äusseren Begrenzungselementen bestimmt sind. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein regelmässiges Sechsseit und die vertikalen Haupt- und Nebenschnitte sind Rhomben. Das Zeichen dieser hemiedrischen Dihexaeder ist zunächst das der Didodekaeder mit dem Nenner 2, wobei auch wieder wegen des Parallelismus der Flächen der doppelte Theilungsstrich anzuwenden ist; zum Unterschiede jedoch von den Skalenoedern wird noch der Buchstabe r oder l vorgesetzt, insofern man wieder auf die Lage der Didodekaederflächen gegen die Dihexaederflächen der Hauptreihe Rücksicht nimmt, denn jedes vierflächige um eine Nebenecke gruppirtes Flächensystem, welches je zwei an einer Seitenkante liegenden Flächen der Dihexaeder entspricht, wird durch die Nebenkanten in eine rechte und linke Hälfte getheilt, und durch die Hemiedrie werden entweder alle auf gleiche Weise rechts oder links liegenden Hälften dieser Systeme herrschend, um ein hemiedrisches Dihexaeder hervorzubringen. So würden also z. B. die aus einem Didodekaeder mDn hervorgehenden hemiedrischen Dihexaeder durch $r\,\frac{mDn}{2}$ und $l\,\frac{mDn}{2}$ unterschieden und bezeichnet werden.

Was die Grösse der Kantenwinkel betrifft, so sind nur die mit X bezeichneten Endkanten zu bestimmen, die Seitenkanten sind die gleichnamigen unveränderten des jedesmaligen Holoeders; für den Kantenwinkel X gelten im Allgemeinen nachfolgende Funktionen, welche mit denen der Endkanten der Trapezoiddihexaeder übereinstimmen:

$$\cos. X = -\frac{2A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2},\quad \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{A\sqrt{(n^2-n+1)}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{[A^2(n^2-n+1)+n^2B^2]}}{A\sqrt{(n^2-n+1)}}.$$

4) Die hemiedrischen hexagonalen Prismen.

(Syn. Hexagonale Prismen von abnormer Flächenstellung; Naumann.)

Die hemiedrischen hexagonalen Prismen unterscheiden sich der Gestalt nach nicht von den beiden hexagonalen Prismen der Haupt- und der Nebenreihe, indem sie so wie diese gleichseitig-sechsseitige Prismen sind, bei denen ein auf die Kanten senkrecht geführter Schnitt ein regelmässiges Sechsseit ist. Die Flächen eines solchen Prisma sind gleichfalls der Hauptaxe parallel, aber durch die Lage zu den Nebenaxen unterscheiden sie sich von ∞D und $\infty D2$. Sie entstehen nämlich durch Hemiedrie der dodekagonalen Prismen, indem die abwechselnden Flächen herrschend werden, und werden daher auch durch das Zeichen derselben, ∞Dn, mit dem Nenner 2 bezeichnet. Die beiden jedesmaligen Gegenhemieder eines Holoeders kann man in Bezug auf die hemiedrischen Dihexaeder durch die vorgesetzten Buchstaben r und l unterscheiden, indem durch die Hemiedrie entweder alle rechts an den Nebenkanten liegenden Flächen oder alle links liegenden herrschend werden, so dass also die beiden Zeichen der Gegenhemieder allgemein $r\,\frac{\infty Dn}{2}$ und $l\,\frac{\infty Dn}{2}$ sein werden. Vermöge der Entstehungsweise eines solchen Prisma sind seine Flächen durch den Endpunkt einer unveränderten Nebenaxenhälfte und der anderen durch n vervielfachten parallel der Hauptaxe gelegt, welche Lage das Verhältniss ($\infty a : b : nb$) oder ($\infty a : nb : b$) angiebt.

C. Tetartoedrische Formen.

a) Mit nicht parallelen Flächen.

1) Die Trapezoidditrioeder.

(Syn. Trigonale Trapezoeder; Naumann. Ditrigonale Trapezoeder; Breithaupt. Von Trapezoiden begrenzte pyramidenähnliche Gestalten; Mohs. Plagieder; Haidinger. Trigontrapezoeder; v. Glocker.)

Ein Trapezoidditrioeder ist eine von sechs gleichen und ähnlichen Trapezoiden umschlossene Gestalt, mit zwölf unregelmässigen Kanten und acht dreikantigen Ecken, deren Flächen in zwei dreizählige Systeme vertheilt sind.

Sie entstehen durch Hemiedrie der Diploditrioeder oder der Skalenoeder oder der Trapezoiddihexaeder, und sind demnach Tetartoeder der Didodekaeder. Aus den Diploditrioedern entstehen sie durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen, aus den Skalenoedern durch Herrschendwerden der an den abwechselnden Seitenkanten liegenden Paare und aus den Trapezoiddihexaedern durch Herrschendwerden der an den abwechselnden Grundkanten liegenden Paare. Ihr