A. Holoedrische Formen:

1) Dihexaeder, 2) hexagonale Prismen, 3) Didodekaeder, 4) dodekagonale Prismen, 5) hexagonale Dyoeder.

B. Hemiedrische Formen:

a) Mit nicht parallelen Flächen:

1) Ditrioeder, 2) Diploditrioeder, 3) Trapezoiddihexaeder, 4) trigonale Prismen, 5) ditrigonale Prismen.

b) Mit parallelen Flächen:

1) Rhomboeder, 2) Skalenoeder, 3) Dihexaeder, 4) hexagonale Prismen.

C. Tetartoedrische Formen:

a) Mit nicht parallelen Flächen:

1) Trapezoidditrioeder, 2) Ditrioeder, 3) trigonale Prismen.

b) Mit parallelen Flächen:

Rhomboeder.

Beschreibung der einfachen Krystallformen.

A. Holoedrische Formen.

1) Die Dihexaeder.

(Syn. Hexagonale Pyramiden; Naumann. Sechsgliedrige Doppelpyramiden, Dihexaeder, Quarzoide; Weiss. Gleichschenklige sechsseitige Pyramiden, Dirrhomboeder; Mohs. Achteckige Dodekaeder z. Th. Bernhardi. Bipyramidaldodekaeder; Hausmann. Hexagonale Pyramidoeder oder Pyramidenflächner; Breithaupt.)

Ein Dihexaeder ist ein von zwölf gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Triangeln umschlossener Körper mit achtzehn Kanten und acht Ecken, dessen Flächen in zwei sechszählige Systeme so vertheilt sind, dass jedes derselben eine gleichseitige sechsseitige Pyramide auf gemeinschaftlicher Basis bildet.

Verbindet man die Gipfelpunkte dieser beiden Pyramiden durch eine gerade Linie und giebt dieser Verbindungslinie, welche in allen Dihexaedern die Hauptaxe ist, ihre senkrechte Stellung, so werden die Kanten als End- und Seitenkanten unterschieden. Der ersteren sind zwölf, sie sind symmetrisch und liegen zu je sechs an den Endpunkten der Hauptaxe; die Seitenkanten, der Zahl nach sechs, sind regelmässig und ihre Kantenlinien liegen in einer horizontalen Ebene. Die Ecken sind auch zweierlei Art: zwei regelmässige sechskantige, die Endecken, von den Endkanten gebildet, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind, und sechs symmetrische vierkantige, die Seitenecken, welche von den abwechselnden End- und Seitenkanten gebildet werden.

Nach der Lage der Flächen zu den Axen werden die Dihexaeder als Dihexaeder der Haupt- oder Neben- oder Zwischenreihe unterschieden, von denen die letzteren als zu den hemiedrischen Formen gehörige später betrachtet werden, die ersteren beiden Reihen unterscheiden sich folgendermassen: Wenn man irgend ein hexagonales Axensystem ganz beliebig annimmt und allgemein durch A:B:B:B bezeichnet, so ist es zunächst nicht nöthig, die Lage der einzelnen Flächen zu der Hauptaxe und je drei halben Nebenaxen zugleich anzugeben, sondern die Lage der Flächen wird hier nur zu zwei halben Nebenaxen und der Hauptaxe angegeben. Es wird hier nämlich der Raum nicht in acht Oktanten, sondern in zwölf Zwölftheile getheilt, also der Raum sowohl über als unter der horizontalen durch die drei Nebenaxen gelegten Ebene in sechs Sextanten und für die Sextanten wird hier, wie in den übrigen, für die Oktanten die Lage der Ebenen angegeben, wozu wieder das allgemeine Verhältniss A:B:B, in welchem die halbe Hauptaxe und zwei sich unter 60° schneidende halbe Nebenaxen stehen, in seiner einfachsten Form und mit den nothwendig eintretenden Modifikationen gebraucht wird. Legt man demnach durch die drei Endpunkte der zu einem jeden Sextanten gehörigen Halbaxen Ebenen, so wird das dadurch hervorgehende Dihexaeder ein Dihexaeder der Hauptreihe genannt, und mithin die Lage der Flächen derselben allgemein durch (A:B:B) bestimmt. Wird dagegen durch den Endpunkt der halben Hauptaxe, einer halben Nebenaxe und der doppelt so langen anderen für jeden Sextanten eine Ebene gelegt, was das Verhältniss (A:B:2B) oder (A:2B:B) angiebt, so ist das hervorgehende Dihexaeder eins der Nebenreihe.

In Bezug auf die Grösse der Kantenwinkel kann man auch alle Dihexaeder in spitze und stumpfe eintheilen, insofern nämlich einerseits die Winkel der Seitenkanten stumpfer, anderseits schärfer als die Winkel der Endkanten sind.

Bei den Dihexaedern der Hauptreihe sind die Endkantenlinien die Verbindungslinien der Hauptaxenendpunkte mit den Endpunkten der Nebenaxen, während die Seitenkantenlinien die Endpunkte der Nebenaxen untereinander verbinden und immer der jedesmaligen dritten Nebenaxe parallel sind. Die Scheitelpunkte der Endecken sind, wie schon erwähnt, die Endpunkte der Hauptaxe, die Scheitelpunkte dagegen der Seitenecken sind die Endpunkte der Nebenaxen. Die Hauptschnitte, deren in allen Formen des hexagonalen Systems vier sind und die entweder durch die Hauptaxe und eine Nebenaxe, oder durch alle drei Nebenaxen geführt sind, sind als drei gleiche vertikale und ein horizontaler zu unterscheiden. In den Dihexaedern der Hauptreihe sind die drei vertikalen von rhombischer Gestalt, als Ebenen gelegt durch die Hauptaxe und je eine Nebenaxe und umgrenzt von vier Endkantenlinien; der horizontale Hauptschnitt, auch Mittelqueerdurchschnitt genannt, ist eine durch die drei Nebenaxen gelegte und von den Seitenkantenlinien begrenzte Ebene, mithin ein regelmässiges Hexagon.

Ausser den schon erwähnten eigentlichen Axen sind noch drei Zwischenaxen, die horizontalen Zwischenaxen festzustellen, welche zwischen den Nebenaxen liegen und die Halbirungspunkte je zweier parallelen Seitenkantenlinien verbinden. Durch sie sind dann auch drei vertikale Nebenschnitte bestimmt, die durch die Hauptaxe und je eine horizontale Zwischenaxe gelegte Ebenen sind, welche von den Höhenperpendikeln der Flächentriangel begrenzt werden.

Werden die Endkanten mit X und die Seitenkanten mit Z bezeichnet, so wird die Grösse der Kantenwinkel für alle Dihexaeder der Hauptreihe, als durch das Verhältniss (A:B:B) gegebene, durch nachfolgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{2A^2+3B^2}{4A^2+3B^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{A}{\sqrt{(4A^2+3B^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3}\sqrt{(A^2+B^2)}}{A};$$

$$\cos. Z = -\frac{4A^2-3B^2}{4A^2+3B^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{B\sqrt{3}}{\sqrt{(4A^2+3B^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{2A}{B\sqrt{3}};$$

die halbe horizontale Zwischenaxe $r = \frac{B\sqrt{3}}{2}$.

Auf gleiche Weise, wie es im quadratischen und rhombischen System geschah, wird auch im hexagonalen System für jede krystallographische Species ein Axenverhältniss als Grundverhältniss aufgestellt, durch dessen Veränderung die verschiedenen abgeleiteten Verhältnisse hervorgehen. Das diesem Grundverhältniss in seiner einfachsten Form entsprechende Dihexaeder der Hauptreihe heisst dann die Grundform und alle übrigen Formen der Krystallspecies sind dann abgeleitete Formen. Das Grundverhältniss wird auf analoge Weise, wie im quadratischen, durch (a:b:b) ausgedrückt und die Grundform durch D bezeichnet. Die Zeichen der abgeleiteten Formen werden gleichfalls durch D ausgedrückt, an welchem die Veränderungen der Hauptaxe vor, und die der Nebenaxen hinter D angegeben werden, wie ja schon aus dem Obigen bekannt ist. Um die Grösse der Kantenwinkel für die Grundform zu bestimmen, darf man nur die obigen allgemeinen Gleichungen nehmen und für A und B die Werthe a und b setzen, wodurch man erhält:

$$\cos. X = -\frac{2a^2+3b^2}{4a^2+3b^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{a}{\sqrt{(4a^2+3b^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a^2+b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = -\frac{4a^2-3b^2}{4a^2+3b^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{(4a^2+3b^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{2a}{b\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Wird das Grundverhältniss dadurch verändert, dass man a mit einem beliebigen rationalen Coefficienten $m > 1$ vervielfacht, während die beiden Nebenaxen unverändert bleiben, wodurch das Grundverhältniss (a:b:b) in das Verhältniss (ma:b:b) übergeht, so entstehen, wenn durch je drei Endpunkte des neuen Axenverhältnisses in allen Sextanten Ebenen gelegt werden, Dihexaeder der Hauptreihe, welche durch die Verlängerung der Hauptaxe spitzere Endecken, schärfere Endkanten, stumpfere Seitenecken und stumpfere Seitenkanten als die Grundform haben, ihr Mittelqueerdurchschnitt ist derselbe wie in der Grundform und untereinander unterscheiden sie sich durch die von dem jedesmaligen m abhängigen Grössenverhältnisse. Sie heissen spitzere Dihexaeder der Hauptreihe und führen das Zeichen mD. Ihre Kantenwinkel werden bei gleicher Bezeichnung durch nachfolgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{2m^2a^2+3b^2}{4m^2a^2+3b^2}, \quad \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{ma}{\sqrt{(4m^2a^2+3b^2)}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3}\sqrt{(m^2a^2+b^2)}}{ma};$$

$$\cos. Z = -\frac{4m^2a^2-3b^2}{4m^2a^2+3b^2}, \quad \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{(4m^2a^2+3b^2)}}, \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{2\,ma}{b\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Werden dagegen die beiden Nebenaxen des Verhältnisses (a:b:b) durch die Vervielfachung mit einem beliebigen rationalen Coefficienten $m > 1$ gleichzeitig verlängert, während die Hauptaxe unverändert bleibt, wodurch also das Grundverhältniss die Form (a:mb:mb) erlangt, und werden durch je drei zugehörige Axenendpunkte für jeden Sextanten Ebenen gelegt, so entsteht für jeden Werth von m ein Dihexaeder der Hauptreihe, dessen Endecken und Endkanten stumpfer, dessen Seitenecken aber spitzer und dessen Seitenkanten schärfer sind als in der Grundform. Sie heissen stumpfere Dihexaeder der Hauptreihe und führen das Zeichen Dmm. Die Kantenwinkel der stumpferen Dihexaeder der Hauptreihe werden durch nachfolgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{2a^2+3m^2b^2}{4a^2+3m^2b^2}, \quad \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{a}{\sqrt{(4a^2+3m^2b^2)}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a^2+m^2b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = -\frac{4a^2-3m^2b^2}{4a^2+3m^2b^2}, \quad \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{mb\sqrt{3}}{\sqrt{(4a^2+3m^2b^2)}}, \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{2a}{mb\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{mb\sqrt{3}}{2}.$$

Bei den Dihexaedern der Nebenreihe verbinden die Endkantenlinien die Endpunkte der Hauptaxe mit den Endpunkten der horizontalen Zwischenaxen, und die Seitenkantenlinien die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen untereinander. Die Scheitelpunkte der Endecken sind die Endpunkte der Hauptaxe und die Scheitelpunkte der Seitenecken die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen; die Endpunkte der Nebenaxen liegen in den Halbirungspunkten der Seitenkantenlinien. Die vertikalen Hauptschnitte werden demnach in den Dihexaedern der Nebenreihe durch die Höhenperpendikel der Flächentriangel begrenzt und die vertikalen Nebenschnitte durch die Endkantenlinien, der Mittelqueerdurchschnitt aber durch die Seitenkantenlinien.

Werden die Endkanten durch Y und die Seitenkanten durch Z bezeichnet, so ergeben sich für die Kantenwinkel aus dem allgemeinen Axenverhältniss der Nebenreihe, aus (A:B:2B) oder (A:2B:B) nachfolgende Werthe:

$$\cos. Y = -\frac{A^2 + 2B^2}{2A^2 + 2B^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} Y = \frac{A}{2\sqrt{(A^2 + B^2)}}, \quad \text{tang.} \tfrac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(3A^2 + 4B^2)}}{A};$$

$$\cos. Z = -\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}, \quad \text{tang.} \tfrac{1}{2} Z = \frac{A}{B};$$

die halbe horizontale Zwischenaxe $r = \frac{2B}{\sqrt{3}}$.

So wie die Grundform in der Hauptreihe verhält sich dasjenige Dihexaeder in der Nebenreihe, dessen Axenverhältniss für ein bestimmtes Grundverhältniss (a:b:2b) oder (a:2b:b) ist, und welches das nächst stumpfere Dihexaeder ausschliesslich genannt wird. Seine Endecken und Endkanten sind stumpfer als die der Grundform und sein Zeichen ist D2. Die Kantenwinkel dieses Dihexaeders werden durch nachfolgende Werthe bestimmt:

$$\cos. Y = -\frac{a^2 + 2b^2}{2a^2 + 2b^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} Y = \frac{a}{2\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \quad \text{tang.} \tfrac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(3a^2 + 4b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \quad \text{tang.} \tfrac{1}{2} Z = \frac{a}{b};$$

$$r = \frac{2b}{\sqrt{3}}.$$

Wenn die Hauptaxe durch die Vervielfachung mit einem beliebigen rationalen Coefficienten $m > 1$ verlängert wird, während die Nebenaxen unverändert bleiben und man nach dem Gesetz der Nebenreihe Ebenen legt, so entstehen für jeden Werth von m verschiedene Dihexaeder der Nebenreihe, welche sämmtlich spitzer sind als das nächststumpfere Dihexaeder, d. h. ihre Endecken sind spitzer und ihre Endkanten schärfer als die von D2. Sie heissen daher spitzere Dihexaeder der Nebenreihe und führen das Zeichen mD2, welches aus den beiden Axenverhältnissen (ma:b:2b) oder (ma:2b:b) hervorgeht, durch welche die Lage der Flächen bestimmt wird. Für die Grösse der Kantenwinkel gelten nachfolgende Gleichungen:

$$\cos. Y = -\frac{m^2a^2 + 2b^2}{2m^2a^2 + 2b^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}Y = \frac{ma}{2\sqrt{(m^2a^2+b^2)}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{(3m^2a^2+4b^2)}}{ma};$$

$$\cos. Z = -\frac{m^2a^2 - b^2}{m^2a^2 + b^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{b}{\sqrt{(m^2a^2+b^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{ma}{b};$$

$$r = \frac{2b}{\sqrt{3}}.$$

Die stumpferen Dihexaeder der Nebenreihe, deren Endecken und Endkanten stumpfer sind als in D2, entstehen dadurch, dass man von den drei zu einem Sextanten gehörigen Halbaxen bei unveränderter Hauptaxe die eine Nebenaxe durch m, die andere durch 2m vervielfacht, und umgekehrt wieder die erstere durch 2m, die andere durch m, und durch die so gegebenen drei Axenendpunkte der Verhältnisse (a:mb:2mb) und (a:2mb:mb) Ebenen legt, oder mit anderen Worten, dass man in dem Grundverhältniss die beiden Nebenaxen in jedem Sextanten durch m vervielfacht und für das neue Verhältniss (a:mb:mb) nach dem Gesetz der Nebenreihe Ebenen legt. Das Zeichen der stumpferen Dihexaeder der Nebenreihe wird demgemäss D2m,m sein, und ihre Kantenwinkel durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\cos. Y = -\frac{a^2 + 2m^2b^2}{2a^2 + 2m^2b^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}Y = \frac{a}{2\sqrt{(a^2+m^2b^2)}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{(3a^2+4m^2b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = -\frac{a^2 - m^2b^2}{a^2 + m^2b^2},\ \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{mb}{\sqrt{(a^2+m^2b^2)}},\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{a}{mb};$$

$$r = \frac{2mb}{\sqrt{3}}.$$

Als Beispiele für die verschiedenen Arten der Dihexaeder mögen die nachfolgenden dienen, welche aus der Grundform des Quarzes berechnet sind, in welcher a:b:b = 11:10:10 ist.

D	Endkanten	133°	44′	6″	Seitenkanten	103°	34′	25″
4D	„	121	14	30	„	157	43	49
D2,2	„	148	54	11	„	64	50	17

D2	Endkanten	136°	34′	21″	Seitenkanten	95°	27′	9″
2D2	„	125	50	48	„	131	6	47
D4,2	„	152	6	49	„	57	37	20.

2) Die hexagonalen Prismen.

(Syn. Regulär-sechsseitige Säulen; v. Glocker. Regelmässige sechsseitige Prismen; Mohs. Sechsseitige Prismen; Haidinger.)

Ein hexagonales Prisma ist ein gleichseitig-sechsseitiges Prisma, in welchem jeder auf die Kanten senkrecht geführte Schnitt ein regelmässiges Sechsseit ist. Die sechs Kanten desselben sind regelmässig und untereinander gleich, und der Flächenwinkel derselben = 120°; die Kantenlinien sind untereinander und einer im Mittelpunkt des erwähnten Schnittes auf demselben senkrecht stehenden Linie parallel, welche die Hauptaxe darstellt und die senkrechte Stellung des Prisma bedingt. Die Gestalt der Prismenflächen wird durch die jedesmaligen mit ihm vereint vorkommenden Formen bestimmt und ist nach diesen verschieden. Die hexagonalen Prismen, welche sämmtlich die Hauptaxe zur Richtungslinie haben, sind nach der Lage ihrer Flächen zu den Nebenaxen dreierlei Art, von denen das hexagonale Prisma der Hauptreihe und das hexagonale Prisma der Nebenreihe zu den Holoedern gehören, die hexagonalen Prismen aber der Zwischenreihe werden als hemiedrische Formen später betrachtet.

Die Flächen des hexagonalen Prisma der Hauptreihe sind durch die Endpunkte je zweier sich unter 60° schneidender unveränderten Nebenaxen parallel der Hauptaxe gelegt, was allgemein das Verhältniss ($\infty A:B:B$), oder auf die Grundform bezogen, das Verhältniss ($\infty a:b:b$) angiebt, woher denn auch für dasselbe das Zeichen ∞D hervorgeht. Seine Kantenlinien gehen durch die Endpunkte der Nebenaxen. Für das Prisma dagegen der Nebenreihe wird die Lage der Flächen durch das Verhältniss ($\infty A:B:2B$) oder ($\infty A:2B:B$) oder auch auf die Grundform bezogen durch die Verhältnisse ($\infty a:b:2b$) und ($\infty a:2b:b$) angegeben, d. h. eine solche Prismenfläche ist durch den Endpunkt einer unveränderten und der anderen doppelt so lang gewordenen Nebenaxe parallel der Hauptaxe gelegt. Das Zeichen für dasselbe ist demnach $\infty D2$ und seine Kantenlinien gehen durch die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen. In Bezug auf die Dihexaeder mD und $mD2$ kann man die beiden Prismen ansehen als die Grenzgestalten der spitzeren Dihexaeder der beiden Reihen, indem bei einem Werthe für m gleich ∞ je zwei an einer Seitenkante liegende Dihexaederflächen in eine Ebene fallen und die Prismenflächen bilden.

8) Die Didodekaeder.

(Syn. Dihexagonale Pyramiden; Naumann. Ungleichschenklige zwölfseitige Pyramiden, Dipyramiden; Mohs. Sechs- und Sechs-Kantner; Didodekaeder; sechs und sechskantige Doppelpyramiden; Weiss. Doppelt zwölfseitige Pyramiden; Hausmann. Dihexagonale Pyramidoeder; Breithaupt. Berylloide; Haidinger.)

Ein Didodekaeder ist eine von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Triangeln umschlossene Gestalt, mit vierzehn symmetrischen Ecken und sechs und dreissig symmetrischen Kanten, deren Flächen entweder in zwei zwölfzählige Systeme, oder nach den Flächen eines Dihexaeders in zwölf Flächenpaare vertheilt sind.

Jedes der beiden zwölfzähligen Systeme bildet bei gemeinschaftlicher Basis eine ungleichkantige zwölfseitige Pyramide, und die gerade Verbindungslinie der Gipfelpunkte beider ist die Hauptaxe. Nach ihr unterscheiden sich die Kanten zunächst als End- und Seitenkanten; die letzteren, an der Zahl zwölf, liegen in der Ebene des Mittelqueerdurchschnittes und verbinden durch ihre Kantenlinien die Endpunkte der Nebenaxen und der horizontalen Zwischenaxen. Die Endkanten sind zweierlei Art und werden nach ihrer Beschaffenheit als längere schärfere und kürzere stumpfere unterschieden, von jeder Art sind zwölf gleiche. Die Endkanten verbinden durch ihre Kantenlinien die Endpunkte der Hauptaxe zum Theil mit den Endpunkten der Nebenaxen, zum Theil mit denen der horizontalen Zwischenaxen. Die Ecken sind auch dreierlei Art, zwei gleiche zwölfkantige, gebildet von den abwechselnden Endkanten, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind; diese heissen die Endecken. Ausser diesen giebt es zweierlei Seitenecken, von denen sechs gleiche vierkantige durch je zwei Seitenkanten und je zwei längere Endkanten gebildet werden und als spitzere von den sechs gleichen vierkantigen stumpferen unterschieden werden, welche von je zwei Seitenkanten und je zwei kürzeren Endkanten gebildet werden. Die Scheitelpunkte von je sechs gleichen sind die Endpunkte der Nebenaxen und die der sechs anderen sind die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Zwölfseit, die vertikalen Haupt- und Nebenschnitte sind Rhomben.

Wenn die Flächen der Didodekaeder auf ein allgemeines Axenverhältniss eines Sextanten, A:B:B bezogen werden, so wird die Lage je zweier Flächen für einen Sextanten dadurch bestimmt, dass man von den beiden Nebenaxen abwechselnd die eine und die andere durch einen beliebigen rationalen Coefficienten n grösser als 1 und kleiner als 2 vervielfacht, wodurch die beiden Verhältnisse (A:B:nB) und (A:nB:B) hervorgehen, legt man nun durch je drei Endpunkte eines jeden Verhältnisses Ebenen, und zwar für jeden Sextanten auf gleiche Weise, so geht dadurch ein Didodekaeder hervor. Vergleicht man ein Didodekaeder mit dem ihm zu Grunde liegenden Dihexaeder der Hauptreihe, dessen Axenverhältniss (A:B:B), so erscheinen die Didodekaeder als in den Höhenlinien gebrochene Dihexaeder der Hauptreihe, und nach dieser Ansicht der Form sind die Endkantenlinien des jedesmal entsprechenden Dihexaeders unverändert die einen der Endkantenlinien des Didodekaeders, welche die Endpunkte der Hauptaxe mit denen der Nebenaxen verbinden und wonach dann, wie im quadratischen System bei den Dioktaedern, diese Kanten der Didodekaeder die Grundkanten genannt werden. Die anderen zwölf Endkanten, deren Kantenlinien die Endpunkte der Hauptaxe mit denen der horizontalen Zwischenaxen verbinden, und so über die Höhenlinien der zu Grunde liegenden Dihexaederflächen zu liegen kommen, heissen dann Nebenkanten. Durch die Benennung der zweierlei Endkanten, als Grund- und Nebenkanten, welche abgekürzt für Grund- und Nebenendkanten gebraucht wird, ergiebt sich auch eine unterscheidende Benennung der zweierlei Seitenecken, so dass die sechs gleichen, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Nebenaxen sind und die von je zwei Seiten- und je zwei Grundkanten gebildet werden, die Grundecken genannt werden; die sechs anderen heissen dann die Nebenecken.

Von der Grösse des Werthes n hängt es nun ab, ob die Grund- oder Nebenkanten die schärferen oder stumpferen, längeren oder kürzeren sind, ob die Grund- oder Nebenecken die spitzeren oder stumpferen sind. Ist nämlich $n < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, so sind in dem Didodekaeder die Grundkantenwinkel schärfer als die Nebenkantenwinkel, die Grundkantenlinien länger als die Nebenkantenlinien und die Grundecken spitzer als die Nebenecken; für jeden Werth aber von n über $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ sind die Grundkantenwinkel stumpfer als die Nebenkantenwinkel, die Grundkantenlinien kürzer als die Nebenkantenlinien und die Grundecken stumpfer als die Nebenecken.

Was die Grösse der Kantenwinkel überhaupt betrifft, so werden dieselben für ein Didodekaeder, dem die obigen allgemeinen Axenverhältnisse angehören, durch nachfolgende allgemeine Gleichungen bestimmt, in denen die Grundkanten mit X, die Nebenkanten mit Y und die Seitenkanten mit Z bezeichnet sind:

$$\cos. X = -\frac{2A^2(n^2+2n-2)+3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2}X = \frac{(2-n)A}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}X = \frac{n\sqrt{3}\sqrt{(A^2+B^2)}}{(2-n)A};$$

$$\cos. Y = -\frac{2A^2(4n-n^2-1)+3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2}Y = \frac{(n-1)A\sqrt{3}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2A^2+3n^2B^2]}}{(n-1)A\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{4A^2(n^2-n+1)-3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}, \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{nB\sqrt{3}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} Z = \frac{2A\sqrt{(n^2-n+1)}}{nB\sqrt{2}}.$$

Die horizontale Zwischenaxe $r = \frac{nB\sqrt{3}}{1+n}$.

Geht man wieder auf die Grundform zurück, so ergiebt sich ein mehrfacher Unterschied der Didodekaeder, denn wenn nämlich das unveränderte Axenverhältniss der Grundform für A:B:B gesetzt wird, und nun abwechselnd eine der beiden gleichen Nebenaxenhälften eines jeden Sextanten durch die Vervielfachung mit einem rationalen Werthe n grösser als 1 und kleiner als 2 verlängert und gleichzeitig durch den Endpunkt einer jeden verlängerten und der jedesmaligen anderen unveränderten und durch den Endpunkt der Hauptaxe Ebenen gelegt werden, so entstehen dadurch eine Reihe von Didodekaedern, die unter einander, durch den verschiedenen Werth für n verschieden, das gemein haben, dass ihre Grundkantenlinien die unveränderten Endkantenlinien der Grundform sind. Diese Didodekaeder, deren Flächenlage für jeden Sextanten durch die beiden Verhältnisse (a:b:nb) und (a:nb:b) bestimmt wird, werden Uebergangsdidodekaeder genannt, weil sie den Uebergang aus der Grundform in das nächststumpfere Dihexaeder vermitteln; denn ist in diesen Didodekaedern $n=1$, so fallen je zwei an einer Nebenkante liegende Flächen in eine Ebene und bilden die Flächen der Grundform; ist aber $n=2$ geworden, so fallen je zwei an einer Grundkante liegende Flächen in eine Ebene und bilden die Flächen des nächststumpferen Dihexaeders. Das Zeichen für die Uebergangsdidodekaeder ist Dn und die Grösse der Kantenwinkel ergiebt sich bei gleicher Bezeichnung derselben aus den obigen allgemein angegebenen Funktionsbestimmungen, wenn man für A und B die Grössen a und b setzt:

$$\cos. X = -\frac{2a^2(n^2+2n-2)+3n^2b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \cos. \tfrac{1}{2} X = \frac{(2-n)a}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} X = \frac{n\sqrt{3}\sqrt{(a^2+b^2)}}{(2-n)a};$$

$$\cos. Y = -\frac{2a^2(4n-n^2-1)+3n^2b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \cos. \tfrac{1}{2} Y = \frac{(n-1)a\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2a^2+3n^2b^2]}}{(n-1)a\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{4a^2(n^2-n+1)-3n^2b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{nb\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}},$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} Z = \frac{2a\sqrt{(n^2-n+1)}}{nb\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{nb\sqrt{3}}{1+n}.$$

Werden in den allgemeinen Axenverhältnissen der Didodekaeder für A und B die Werthe ma und b gesetzt, wobei n wiederum einen beliebigen rationalen Coefficienten grösser als 1 und kleiner als 2, m dagegen einen beliebigen rationalen Coefficienten grösser als 1 bezeichnet, so gehen die beiden Verhältnisse in die Form (ma : b : nb) und (ma : nb : b) ein, und wenn durch je drei Endpunkte die beiden Verhältnisse, wie sie zu einem Sextanten gehören, Ebenen gelegt werden, so entsteht für jeden Werth von m oder n der angegebenen Art, ein Didodekaeder, dessen Endecken spitzer und dessen Endkanten schärfer sind als die in Dn, wenn die n beider einander gleich sind. Sie heissen demnach **spitzere Didodekaeder** und führen **das Zeichen** mDn. Mit den spitzeren Dihexaedern der Hauptreihe mD stehen sie in demselben Verhältniss wie die Uebergangsdidodekaeder mit der Grundform, und alle Didodekaeder mDn haben bei gleichem Werthe m zu Grundkantenlinien die Endkantenlinien des spitzeren Dihexaeders mD, in dem m gleich dem m jener ist, mag auch der Werth n noch so verschieden sein. Für die Kantenwinkel ergeben sich aus obigen allgemeinen Gleichungen die nachfolgenden Werthe:

$$\cos. X = -\frac{2m^2a^2(n^2+2n-2)+3n^2b^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} X = \frac{(2-n)ma}{\sqrt{[4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}},$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} X = \frac{n\sqrt{3}\sqrt{(m^2a^2+b^2)}}{(2-n)ma};$$

$$\cos. Y = -\frac{2m^2a^2(4n-n^2-1)+3n^2b^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} Y = \frac{(n-1)ma\sqrt{3}}{\sqrt{[4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}},$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2m^2a^2+3n^2b^2]}}{(n-1)ma\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{4m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2b^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{nb\sqrt{3}}{\sqrt{[4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}},$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} Z = \frac{2ma\sqrt{(n^2-n+1)}}{nb\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{nb\sqrt{3}}{1+n}.$$

Weil nun aber der Werth für n nur alle möglichen rationalen Zahlen grösser als 1 und kleiner als 2 darstellen kann, für m aber alle möglichen rationalen Zahlenwerthe grösser als 1 gesetzt werden können, so muss nothwendigerweise stets einer der drei Fälle Statt finden, dass m entweder grösser, oder gleich, oder kleiner als n ist. Hiernach könnte man, wie es im quadratischen System bei den spitzeren Dioktaedern der Fall war, drei verschiedene Arten spitzerer Didodekaeder aufstellen, und sie durch die Zusätze mehr, gleichmässig und mindest spitzere, in der Benennung unterscheiden, je nachdem m grösser, oder gleich, oder kleiner als n ist. Meist ist das erstere der Fall, und es wird daher das Zeichen mDn, welches überhaupt für alle spitzeren Didodekaeder gilt, wenn nicht Rücksicht auf das Verhältniss zwischen m und n genommen wird, auch für diese gelten. Tritt der Fall ein, dass $m = n$, so zeigt dies das Zeichen nDn an; sollte es auch noch nöthig sein, den Fall, dass m kleiner als n, zu bezeichnen, so kann man sich des Zeichens $\overset{<}{\mathrm{mDn}}$ bedienen. In allen besonderen Fällen, wo Zahlenwerthe gesetzt werden, zeigt die Zahl selbst diesen Unterschied an, und es ist daher nichts weiter zu bemerken nöthig. Die Bestimmungen der Kantenwinkel bleiben dieselben, nur in dem Falle $m = n$ vereinfachen sie sich und geben folgende Werthe:

$$\cos. X = -\frac{2a^2(n^2+2n-2)+3b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3b^2},\quad \cos. \tfrac{1}{2}X = \frac{(2-n)a}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3b^2]}},$$

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{(n^2a^2+b^2)}}{(2-n)a}.$$

$$\cos. Y = -\frac{2a^2(4n-n^2-1)+3b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3b^2},\quad \cos. \tfrac{1}{2}Y = \frac{(n-1)a\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3b^2]}},$$

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2a^2+3b^2]}}{(n-1)a\sqrt{3}}.$$

$$\cos. Z = -\frac{4a^2(n^2-n+1)-3b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3b^2},\quad \cos. \tfrac{1}{2}Z = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3b^2]}},$$

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}Z = \frac{2a\sqrt{(n^2-n+1)}}{b\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{nb\sqrt{3}}{1+n}.$$

Wenn endlich noch in dem Axenverhältniss der stumpferen Dihexaeder der Hauptreihe, in (a:mb:mb) jede der schon verlängerten Nebenaxen abwechselnd mit dem Coefficienten n von der oben angegebenen Eigenschaft vervielfacht wird, wodurch für jeden Sextanten die beiden Verhältnisse (a:mb:mnb) und (a:nmb:mb) hervorgehen, so entstehen, wenn durch die je drei Endpunkte der durch diese Verhältnisse bestimmten Axen in allen Sextanten Ebenen gelegt werden, die stumpferen Didodekaeder, deren Endecken und Endkanten stumpfer als in den

Didodekaedern Dn sind, und deren Grundkantenlinien den Endkantenlinien desjenigen stumpferen Dihexaeders Dmm entsprechen, in welchem der Werth für m gleich ist. Das Zeichen der stumpferen Didodekaeder ist Dnm,m und ihre Kantenwinkel werden durch nachfolgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{2a^2(n^2+2n-2)+3m^2n^2b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3m^2n^2b^2},\quad \cos.\tfrac{1}{2}X = \frac{(2-n)a}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3m^2n^2b^2]}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}X = \frac{n\sqrt{3}\sqrt{(a^2+m^2b^2)}}{(2-n)a};$$

$$\cos. Y = -\frac{2a^2(4n-n^2-1)+3m^2n^2b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3m^2n^2b^2},\quad \cos.\tfrac{1}{2}Y = \frac{(n-1)a\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3m^2n^2b^2]}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2a^2+3m^2n^2b^2]}}{(n-1)a\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{4a^2(n^2-n+1)-3m^2n^2b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3m^2n^2b^2},\quad \cos.\tfrac{1}{2}Z = \frac{mnb\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3m^2n^2b^2]}},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}Z = \frac{2a\sqrt{(n^2-n+1)}}{mnb\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{mnb\sqrt{3}}{1+n}.$$

Für die nachfolgenden des Beispiels wegen angeführten Didodekaeder liegt die oben angeführte Grundform des Quarzes zu Grunde:

	Grundkanten.			Nebenkanten.			Seitenkanten.		
$D\frac{3}{2}$	163°	45′	13″	154°	12′	46″	96°	29′	20″
$\frac{4}{3}D\frac{1}{2}$	161	55	49	148	26	3	112	39	34
$\frac{4}{3}D\frac{4}{3}$	153	10	12	156	49	6	113	32	41
$6D\frac{6}{5}$	138	19	50	162	16	52	163	54	11
D4,3	168	38	58	170	10	27	41	46	40.

4) Die dodekagonalen Prismen.

(Syn. Ungleichwinklige zwölfseitige Prismen; Mohs. Zwölfseitige Prismen; Haidinger. Ungleichkantige zwölfseitige oder didodekaedrische Säulen; v. Glocker. Dihexagonale Prismen; Naumann.)

Ein dodekagonales Prisma ist ein gleichseitig zwölfseitiges Prisma, bei welchem ein auf die Kanten senkrecht geführter Schnitt ein symmetrisches Zwölfseit ist. Die zwölf Kanten sind regelmässig und zweierlei Art, je sechs abwechselnde einander gleich; der Unterschied beruht in der Grösse der Kantenwinkel, so dass sie als stumpfere und schärfere oder weniger stumpfe unterschieden werden, und es sind daher, gleichviel von welcher Kante man zu zählen anfängt, die erste, dritte, fünfte, siebente, neunte, elfte und eben so die zweite, vierte, sechste, achte, zehnte, zwölfte einander gleich. Die Flächen und die Kantenlinien sind der Hauptaxe parallel, welche auf dem oben erwähnten senkrechten Durchschnitt in seinem Mittelpunkte senkrecht steht; die Kantenlinien der einen Art gleicher Kanten gehen durch die Endpunkte der Nebenaxen und die der anderen Art durch die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen.

Die Lage der Flächen wird im Allgemeinen für je drei zu einem Sextanten gehörige Halbaxen durch ($\infty A : B : nB$) oder ($\infty A : nB : B$) und auf das Grundverhältniss bezogen, durch ($\infty a : b : nb$) und ($\infty a : nb : b$) ausgedrückt, wobei n wieder, wie schon oben, einen beliebigen rationalen Coefficienten grösser als 1 und kleiner als 2 bezeichnet, so dass also in Bezug auf zwei einander unter 60^0 schneidende halbe Nebenaxen und die auf ihnen senkrecht stehende Hauptaxe eine Fläche eines dodekagonalen Prisma eine durch den Endpunkt einer unveränderten und der anderen verlängerten Nebenaxe parallel der Hauptaxe gelegte Ebene ist. Es ist demnach auch das Zeichen der dodekagonalen Prismen ∞Dn und sie selbst bilden die Grenzgestalten der spitzeren Didodekaeder mDn, in denen bei fortgesetzter Zunahme des Werthes m, endlich bei dem Werthe $m = \infty$ je zwei an einer Seitenkante liegende Flächen in eine der Hauptaxe parallele Ebene fallen und die Prismenflächen bilden.

Verglichen mit den holoedrischen hexagonalen Prismen erscheinen die dodekagonalen Prismen als gebrochene hexagonale Prismen und die zwölf Flächen bilden sechs gleiche Paare, die über die hexagonalen Prismenflächen zu liegen kommen. Wird dieser Vergleich nur auf das hexagonale Prisma der Hauptreihe bezogen, so sind die Kantenlinien des hexagonalen Prisma in den Prismen ∞Dn unverändert dieselben und es werden dann diese Kanten, deren Kantenlinien die von ∞D und mithin durch die Endpunkte der Nebenaxen gelegt sind, durch den Namen Grundkanten, von den anderen, den Nebenkanten, unterschieden. Die Grösse der zugehörigen Kantenwinkel hängt von dem jedesmaligen Werthe n ab, und es sind in allen Prismen ∞Dn, wo $n < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, die Grundkanten die weniger stumpfen, dagegen wenn $n > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, die Grundkanten stumpfer als die Nebenkanten. Die Grösse der Kantenwinkel wird durch nachfolgende Ausdrücke bestimmt, in denen die Grundkanten durch X und die Nebenkanten durch Y bezeichnet sind:

$$\cos. X = -\frac{n^2+2n-2}{2(n^2-n+1)},\ \cos. \tfrac{1}{2}X = \frac{2-n}{2\sqrt{(n^2-n+1)}},\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}X = \frac{n\sqrt{3}}{2-n};$$

$$\cos. Y = -\frac{4n-n^2-1}{2(n^2-n+1)},\ \cos. \tfrac{1}{2}Y = \frac{(n-1)\sqrt{3}}{2\sqrt{(n^2-n+1)}},\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}Y = \frac{n+1}{(n-1)\sqrt{3}}.$$

Als Beispiele dieser Prismen können die drei nachfolgenden mit ihren Kantenwinkeln dienen:

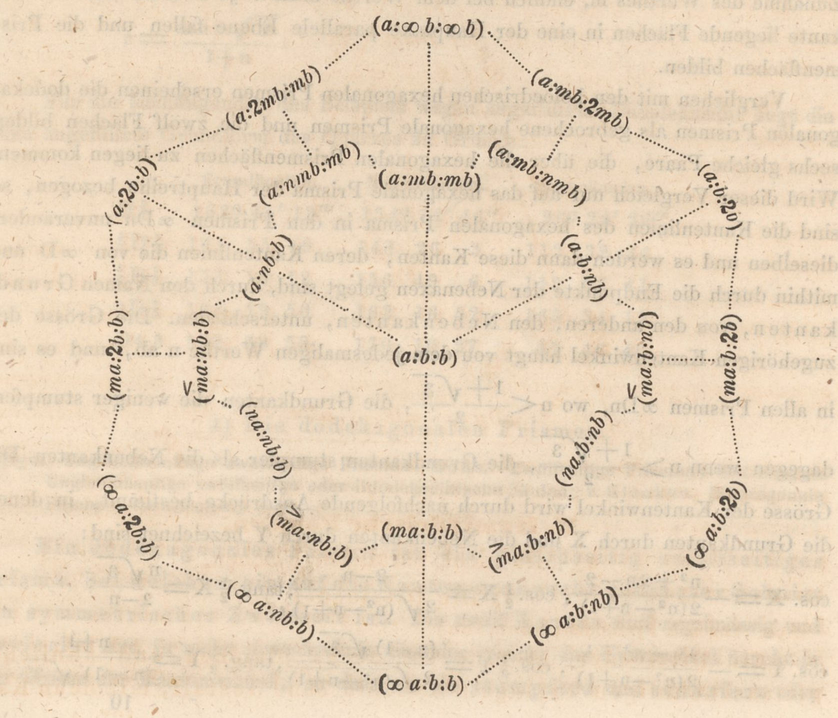
$\infty D\frac{6}{5}$	Grundkanten	$137^0\ 53'\ 48''$	Nebenkanten	$162^0\ \ 6'\ 12''$
$\infty D\frac{4}{3}$	„	147 47 45	„	152 12 15
$\infty D\frac{3}{2}$	„	158 12 48	„	141 47 12.

5) Das hexagonale Dyoeder.

(Syn. Endfläche; Mohs. Base; Haidinger. Gerad-angesetzte Endfläche; v. Glocker.)

Unter dem hexagonalen Dyoeder ist ein Paar paralleler Flächen zu verstehen, von denen jede durch einen Endpunkt der Hauptaxe parallel den Nebenaxen oder dem horizontalen Hauptschnitt gelegt ist, welche Lage auf das Grundverhältniss bezogen durch (a: ∞b: ∞b) ausgedrückt wird, woraus als Zeichen für das hexagonale Dyoeder sich D∞ ∞ ergiebt. Es bildet das Dyoeder das letzte Glied der stumpferen Dihexaeder, sowohl der Haupt- als der Nebenreihe, Dmm und D2m,m, indem bei dem Werthe m = ∞ je sechs die Endecke bildende Flächen in eine durch

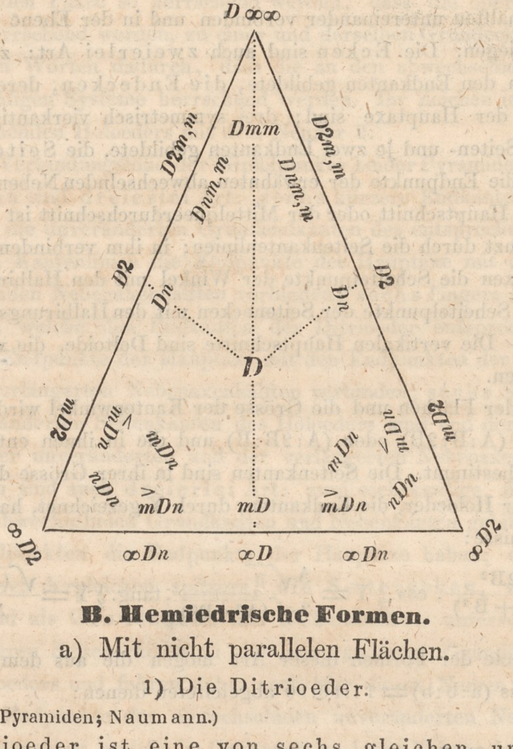
Fig. 8.



den Endpunkt der Hauptaxe parallel dem Mittelqueerdurchschnitt gelegte Ebene fallen und die Dyoederflächen bilden. Auch für die stumpferen Dioktaeder Dnm,m geht auf gleiche Weise das Dyoeder als Extremgestalt hervor.

Vergleicht man am Schluss, wie es bei den schon erörterten Systemen der Fall war, die verschiedenen Arten einfacher Formen, welche aus einem bestimmten Grundverhältniss abgeleitet werden, so findet man auch hier wieder die verschiedensten Reihen, durch welche die Uebergänge zwischen den einzelnen Arten vermittelt werden. Eine Anschauung dieser Verhältnisse giebt das in Fig. 8 dargestellte Schema, welchem entsprechend die Fig. 9 die Lage der Flächen der abgeleiteten Formen zu der Fläche der Grundform angiebt. Eine nähere Erörterung zum Verständniss dieser beiden Darstellungen ist nicht nothwendig, da eine Vergleichung mit den früheren und namentlich den Darstellungen dieser Verhältnisse im quadratischen Systeme jede nähere Erklärung überflüssig macht.

Fig. 9.



B. Hemiedrische Formen.

a) Mit nicht parallelen Flächen.

1) Die Ditrioeder.

(Syn. Trigonale Pyramiden; Naumann.)

Ein Ditrioeder ist eine von sechs gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Triangeln umschlossene Gestalt, mit neun Kan-