

## A. Holoedrische Formen:

- 1) Dihexaeder, 2) hexagonale Prismen, 3) Didodekaeder, 4) dodekagonale Prismen, 5) hexagonale Dyoeder.

## B. Hemiedrische Formen:

- a) Mit nicht parallelen Flächen:

- 1) Ditrioeder, 2) Diploditrioeder, 3) Trapezoiddihexaeder, 4) trigonale Prismen, 5) ditrigonale Prismen.

- b) Mit parallelen Flächen:

- 1) Rhomboeder, 2) Skalenoeder, 3) Dihexaeder, 4) hexagonale Prismen.

## C. Tetartoedrische Formen:

- a) Mit nicht parallelen Flächen:

- 1) Trapezoidditrioeder, 2) Ditrioeder, 3) trigonale Prismen.

- b) Mit parallelen Flächen:

Rhomboeder.

## Beschreibung der einfachen Krystallformen.

### A. Holoedrische Formen.

#### 1) Die Dihexaeder.

(Syn. Hexagonale Pyramiden; Naumann. Sechsgliedrige Doppelpyramiden, Dihexaeder, Quarzoide; Weiss. Gleichschenklige sechsseitige Pyramiden, Dirrhomboeder; Mohs. Achteckige Dodekaeder z. Th. Bernhardt. Bipyramidaldodekaeder; Hausmann. Hexagonale Pyramidoeder oder Pyramidenflächner; Breithaupt.)

Ein Dihexaeder ist ein von zwölf gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Triangeln umschlossener Körper mit achtzehn Kanten und acht Ecken, dessen Flächen in zwei sechszählige Systeme so vertheilt sind, dass jedes derselben eine gleichseitige sechsseitige Pyramide auf gemeinschaftlicher Basis bildet.

Verbindet man die Gipfelpunkte dieser beiden Pyramiden durch eine gerade Linie und giebt dieser Verbindungslinie, welche in allen Dihexaedern die Hauptaxe ist, ihre senkrechte Stellung, so werden die Kanten als End- und Seitenkanten unterschieden. Der ersteren sind zwölf, sie sind symmetrisch und liegen zu je sechs an den Endpunkten der Hauptaxe; die Seitenkanten, der Zahl nach sechs, sind regelmässig und ihre Kantenlinien liegen in einer horizontalen Ebene. Die Ecken sind auch zweierlei Art: zwei regelmässige sechskantige, die Endecken, von den Endkanten gebildet, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind, und sechs symmetrische vierkantige, die Seitenecken, welche von den abwechselnden End- und Seitenkanten gebildet werden.

Nach der Lage der Flächen zu den Axen werden die Dihexaeder als Dihexaeder der Haupt- oder Neben- oder Zwischenreihe unterschieden, von denen die letzteren als zu den hemiedrischen Formen gehörige später betrachtet werden, die ersteren beiden Reihen unterscheiden sich folgendermassen: Wenn man irgend ein hexagonales Axensystem ganz beliebig annimmt und allgemein durch  $A:B:B$  bezeichnet, so ist es zunächst nicht nöthig, die Lage der einzelnen Flächen zu der Hauptaxe und je drei halben Nebenaxen zugleich anzugeben, sondern die Lage der Flächen wird hier nur zu zwei halben Nebenaxen und der Hauptaxe angegeben. Es wird hier nämlich der Raum nicht in acht Oktanten, sondern in zwölf Zwölftheile getheilt, also der Raum sowohl über als unter der horizontalen durch die drei Nebenaxen gelegten Ebene in sechs Sextanten und für die Sextanten wird hier, wie in den übrigen, für die Oktanten die Lage der Ebenen angegeben, wozu wieder das allgemeine Verhältniss  $A:B:B$ , in welchem die halbe Hauptaxe und zwei sich unter  $60^\circ$  schneidende halbe Nebenaxen stehen, in seiner einfachsten Form und mit den nothwendig eintretenden Modifikationen gebraucht wird. Legt man demnach durch die drei Endpunkte der zu einem jeden Sextanten gehörigen Halbaxen Ebenen, so wird das dadurch hervorgehende Dihexaeder ein Dihexaeder der Hauptreihe genannt, und mithin die Lage der Flächen derselben allgemein durch  $(A:B:B)$  bestimmt. Wird dagegen durch den Endpunkt der halben Hauptaxe, einer halben Nebenaxe und der doppelt so langen anderen für jeden Sextanten eine Ebene gelegt, was das Verhältniss  $(A:B:2B)$  oder  $(A:2B:B)$  angeht, so ist das hervorgehende Dihexaeder eins der Nebenreihe.

In Bezug auf die Grösse der Kantenwinkel kann man auch alle Dihexaeder in spitze und stumpfe eintheilen, insofern nämlich einerseits die Winkel der Seitenkanten stumpfer, anderseits schärfer als die Winkel der Endkanten sind.

Bei den Dihexaedern der Hauptreihe sind die Endkantenlinien die Verbindungslinien der Hauptaxenendpunkte mit den Endpunkten der Nebenaxen, während die Seitenkantenlinien die Endpunkte der Nebenaxen untereinander verbinden und immer der jedesmaligen dritten Nebenaxe parallel sind. Die Scheitelpunkte der Endecken sind, wie schon erwähnt, die Endpunkte der Hauptaxe, die Scheitelpunkte dagegen der Seitenecken sind die Endpunkte der Nebenaxen. Die Hauptschnitte, deren in allen Formen des hexagonalen Systems vier sind und die entweder durch die Hauptaxe und eine Nebenaxe, oder durch alle drei Nebenaxen geführt sind, sind als drei gleiche vertikale und ein horizontaler zu unterscheiden. In den Dihexaedern der Hauptreihe sind die drei vertikalen von rhombischer Gestalt, als Ebenen gelegt durch die Hauptaxe und je eine Nebenaxe und umgrenzt von vier Endkantenlinien; der horizontale Hauptschnitt, auch Mittelqueerdurchschnitt genannt, ist eine durch die drei Nebenaxen gelegte und von den Seitenkantenlinien begrenzte Ebene, mithin ein regelmässiges Hexagon.

Ausser den schon erwähnten eigentlichen Axen sind noch drei Zwischenaxen, die horizontalen Zwischenaxen festzustellen, welche zwischen den Nebenaxen liegen und die Halbirungspunkte je zweier parallelen Seitenkantenlinien verbinden. Durch sie sind dann auch drei vertikale Nebenschnitte bestimmt, die durch die Hauptaxe und je eine horizontale Zwischenaxe gelegte Ebenen sind, welche von den Höhenperpendikeln der Flächentriangel begrenzt werden.

Werden die Endkanten mit X und die Seitenkanten mit Z bezeichnet, so wird die Grösse der Kantenwinkel für alle Dihexaeder der Hauptreihe, als durch das Verhältniss (A:B:B) gegebene, durch nachfolgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{2A^2 + 3B^2}{4A^2 + 3B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{A}{\sqrt{(4A^2 + 3B^2)}}, \quad \tan g. \frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3} \sqrt{(A^2 + B^2)}}{A};$$

$$\cos. Z = -\frac{4A^2 - 3B^2}{4A^2 + 3B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{B \sqrt{3}}{\sqrt{(4A^2 + 3B^2)}}, \quad \tan g. \frac{1}{2}Z = \frac{2A}{B \sqrt{3}};$$

$$\text{die halbe horizontale Zwischenaxe } r = \frac{B \sqrt{3}}{2}.$$

Auf gleiche Weise, wie es im quadratischen und rhombischen System geschah, wird auch im hexagonalen System für jede krystallographische Species ein Axenverhältniss als Grundverhältniss aufgestellt, durch dessen Veränderung die verschiedenen abgeleiteten Verhältnisse hervorgehen. Das diesem Grundverhältniss in seiner einfachsten Form entsprechende Dihexaeder der Hauptreihe heisst dann die Grundform und alle übrigen Formen der Krystallspecies sind dann abgeleitete Formen. Das Grundverhältniss wird auf analoge Weise, wie im quadratischen, durch (a:b:b) ausgedrückt und die Grundform durch D bezeichnet. Die Zeichen der abgeleiteten Formen werden gleichfalls durch D ausgedrückt, an welchem die Veränderungen der Hauptaxe vor, und die der Nebenaxen hinter D angegeben werden, wie ja schon aus dem Obigen bekannt ist. Um die Grösse der Kantenwinkel für die Grundform zu bestimmen, darf man nur die obigen allgemeinen Gleichungen nehmen und für A und B die Werthe a und b setzen, wodurch man erhält:

$$\cos. X = -\frac{2a^2 + 3b^2}{4a^2 + 3b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{a}{\sqrt{(4a^2 + 3b^2)}}, \quad \tan g. \frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3} \sqrt{(a^2 + b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = -\frac{4a^2 - 3b^2}{4a^2 + 3b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{b \sqrt{3}}{\sqrt{(4a^2 + 3b^2)}}, \quad \tan g. \frac{1}{2}Z = \frac{2a}{b \sqrt{3}};$$

$$r = \frac{b \sqrt{3}}{2}.$$

Wird das Grundverhältniss dadurch verändert, dass man a mit einem beliebigen rationalen Coefficienten  $m > 1$  vervielfacht, während die beiden Nebenaxen unverändert bleiben, wodurch das Grundverhältniss (a:b:b) in das Verhältniss

(ma:b:b) übergeht, so entstehen, wenn durch je drei Endpunkte des neuen Axenverhältnisses in allen Sextanten Ebenen gelegt werden, Dihexaeder der Hauptreihe, welche durch die Verlängerung der Hauptaxe spitzere Endecken, schärfere Endkanten, stumpfere Seitenecken und stumpfere Seitenkanten als die Grundform haben, ihr Mittelquerdurchschnitt ist derselbe wie in der Grundform und untereinander unterscheiden sie sich durch die von dem jedesmaligen m abhängigen Grössenverhältnisse. Sie heissen spitzere Dihexaeder der Hauptreihe und führen das Zeichen mD. Ihre Kantenwinkel werden bei gleicher Bezeichnung durch nachfolgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{2m^2 a^2 + 3b^2}{4m^2 a^2 + 3b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{ma}{\sqrt{(4m^2 a^2 + 3b^2)}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{3} \sqrt{(m^2 a^2 + b^2)}}{ma};$$

$$\cos. Z = -\frac{4m^2 a^2 - 3b^2}{4m^2 a^2 + 3b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{(4m^2 a^2 + 3b^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{2ma}{b\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Werden dagegen die beiden Nebenaxen des Verhältnisses (a:b:b) durch die Vervielfachung mit einem beliebigen rationalen Coefficienten  $m > 1$  gleichzeitig verlängert, während die Hauptaxe unverändert bleibt, wodurch also das Grundverhältnis die Form (a:mb:mb) erlangt, und werden durch je drei zugehörige Axenendpunkte für jeden Sextanten Ebenen gelegt, so entsteht für jeden Werth von m ein Dihexaeder der Hauptreihe, dessen Endecken und Endkanten stumpfer, dessen Seitenecken aber spitzer und dessen Seitenkanten schärfer sind als in der Grundform. Sie heissen stumpfere Dihexaeder der Hauptreihe und führen das Zeichen Dmm. Die Kantenwinkel der stumpferen Dihexaeder der Hauptreihe werden durch nachfolgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{2a^2 + 3m^2 b^2}{4a^2 + 3m^2 b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{a}{\sqrt{(4a^2 + 3m^2 b^2)}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{3} \sqrt{(a^2 + m^2 b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = -\frac{4a^2 - 3m^2 b^2}{4a^2 + 3m^2 b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{mb\sqrt{3}}{\sqrt{(4a^2 + 3m^2 b^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{2a}{mb\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{mb\sqrt{3}}{2}.$$

Bei den Dihexaedern der Nebenreihe verbinden die Endkantenlinien die Endpunkte der Hauptaxe mit den Endpunkten der horizontalen Zwischenaxen,

und die Seitenkantenlinien die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen untereinander. Die Scheitelpunkte der Endecken sind die Endpunkte der Hauptaxe und die Scheitelpunkte der Seitenecken die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen; die Endpunkte der Nebenaxen liegen in den Halbierungspunkten der Seitenkantenlinien. Die vertikalen Hauptschnitte werden demnach in den Dihexaedern der Nebenreihe durch die Höhenperpendikel der Flächentriangel begrenzt und die vertikalen Nebenschnitte durch die Endkantenlinien, der Mittelqueerdurchschnitt aber durch die Seitenkantenlinien.

Werden die Endkanten durch  $Y$  und die Seitenkanten durch  $Z$  bezeichnet, so ergeben sich für die Kantenwinkel aus dem allgemeinen Axenverhältniss der Nebenreihe, aus  $(A:B:2B)$  oder  $(A:2B:B)$  nachfolgende Werthe:

$$\cos. Y = -\frac{A^2 + 2B^2}{2A^2 + 2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{A}{2\sqrt{(A^2 + B^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(3A^2 + 4B^2)}}{A};$$

$$\cos. Z = -\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{A}{B};$$

$$\text{die halbe horizontale Zwischenaxe } r = \frac{2B}{\sqrt{3}}.$$

So wie die Grundform in der Hauptreihe verhält sich dasjenige Dihexaeder in der Nebenreihe, dessen Axenverhältniss für ein bestimmtes Grundverhältniss  $(a:b:2b)$  oder  $(a:2b:b)$  ist, und welches das nächst stumpfere Dihexaeder ausschliesslich genannt wird. Seine Endecken und Endkanten sind stumpfer als die der Grundform und sein Zeichen ist  $D2$ . Die Kantenwinkel dieses Dihexaeders werden durch nachfolgende Werthe bestimmt:

$$\cos. Y = -\frac{a^2 + 2b^2}{2a^2 + 2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{a}{2\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(3a^2 + 4b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{a}{b};$$

$$r = \frac{2b}{\sqrt{3}}.$$

Wenn die Hauptaxe durch die Vervielfachung mit einem beliebigen rationalen Coefficienten  $m > 1$  verlängert wird, während die Nebenaxen unverändert bleiben und man nach dem Gesetz der Nebenreihe Ebenen legt, so entstehen für jeden Werth von  $m$  verschiedene Dihexaeder der Nebenreihe, welche sämmtlich spitzer sind als das nächststumpfere Dihexaeder, d. h. ihre Endecken sind spitzer und ihre Endkanten schärfer als die von  $D2$ . Sie heissen daher spitzere Dihexaeder der Nebenreihe und führen das Zeichen  $mD2$ , welches aus den beiden Axen-

verhältnissen ( $ma:2b$ ) oder ( $ma:2b:b$ ) hervorgeht, durch welche die Lage der Flächen bestimmt wird. Für die Grösse der Kantenwinkel gelten nachfolgende Gleichungen:

$$\cos. Y = -\frac{m^2 a^2 + 2b^2}{2m^2 a^2 + 2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{ma}{2\sqrt{(m^2 a^2 + b^2)}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(3m^2 a^2 + 4b^2)}}{ma};$$

$$\cos. Z = -\frac{m^2 a^2 - b^2}{m^2 a^2 + b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{b}{\sqrt{(m^2 a^2 + b^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{ma}{b};$$

$$r = \frac{2b}{\sqrt{3}}.$$

Die stumpferen Dihexaeder der Nebenreihe, deren Endecken und Endkanten stumpfer sind als in D2, entstehen dadurch, dass man von den drei zu einem Sextanten gehörigen Halbaxen bei unveränderter Hauptaxe die eine Nebenaxe durch  $m$ , die andere durch  $2m$  vervielfacht, und umgekehrt wieder die erstere durch  $2m$ , die andere durch  $m$ , und durch die so gegebenen drei Axenendpunkte der Verhältnisse ( $a:mb:2mb$ ) und ( $a:2mb:mb$ ) Ebenen legt, oder mit anderen Worten, dass man in dem Grundverhältniss die beiden Nebenaxen in jedem Sextanten durch  $m$  vervielfacht und für das neue Verhältniss ( $a:mb:mb$ ) nach dem Gesetz der Nebenreihe Ebenen legt. Das Zeichen der stumpferen Dihexaeder der Nebenreihe wird demgemäss  $D2m,m$  sein, und ihre Kantenwinkel durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\cos. Y = -\frac{a^2 + 2m^2 b^2}{2a^2 + 2m^2 b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{a}{2\sqrt{(a^2 + m^2 b^2)}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(3a^2 + 4m^2 b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = -\frac{a^2 - m^2 b^2}{a^2 + m^2 b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{mb}{\sqrt{(a^2 + m^2 b^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{a}{mb};$$

$$r = \frac{2mb}{\sqrt{3}}.$$

Als Beispiele für die verschiedenen Arten der Dihexaeder mögen die nachfolgenden dienen, welche aus der Grundform des Quarzes berechnet sind, in welcher  $a:b:b=11:10:10$  ist.

D	Endkanten	133° 44' 6"	Seitenkanten	103° 34' 25"
4D	„	121 14 30	„	157 43 49
D2,2	„	148 54 11	„	64 50 17

D2	Endkanten	1360 34' 21"	Seitenkanten	(950 27' ) 9"
2D2	„	125 50 48	„	131 6 47
D4,2	„	152 6 49	„	57 37 20.

## 2) Die hexagonalen Prismen.

(Syn. Regulär-sechsstellige Säulen; v. Glocker. Regelmässige sechsstellige Prismen; Mohs. Sechsstellige Prismen; Haidinger.)

Ein hexagonales Prisma ist ein gleichseitig-sechsstelliges Prisma, in welchem jeder auf die Kanten senkrecht geführte Schnitt ein regelmässiges Sechsstück ist. Die sechs Kanten desselben sind regelmässig und untereinander gleich, und der Flächenwinkel derselben =  $120^\circ$ ; die Kantenlinien sind untereinander und einer im Mittelpunkt des erwähnten Schnittes auf demselben senkrecht stehenden Linie parallel, welche die Hauptaxe darstellt und die senkrechte Stellung des Prismas bedingt. Die Gestalt der Prismenflächen wird durch die jedesmaligen mit ihm vereint vorkommenden Formen bestimmt und ist nach diesen verschieden. Die hexagonalen Prismen, welche sämtlich die Hauptaxe zur Richtungslinie haben, sind nach der Lage ihrer Flächen zu den Nebenaxen dreierlei Art, von denen das hexagonale Prisma der Hauptreihe und das hexagonale Prisma der Nebenreihe zu den Holoedern gehören, die hexagonalen Prismen aber der Zwischenreihe werden als hemiedrische Formen später betrachtet.

Die Flächen des hexagonalen Prismas der Hauptreihe sind durch die Endpunkte je zweier sich unter  $60^\circ$  schneidender unveränderter Nebenaxen parallel der Hauptaxe gelegt, was allgemein das Verhältniss ( $\infty A : B : B$ ), oder auf die Grundform bezogen, das Verhältniss ( $\infty a : b : b$ ) angiebt, woher denn auch für dasselbe das Zeichen  $\infty D$  hervorgeht. Seine Kantenlinien gehen durch die Endpunkte der Nebenaxen. Für das Prisma dagegen der Nebenreihe wird die Lage der Flächen durch das Verhältniss ( $\infty A : B : 2B$ ) oder ( $\infty A : 2B : B$ ) oder auch auf die Grundform bezogen durch die Verhältnisse ( $\infty a : b : 2b$ ) und ( $\infty a : 2b : b$ ) angegeben, d. h. eine solche Prismenfläche ist durch den Endpunkt einer unveränderter und der anderen doppelt so lang gewordenen Nebenaxe parallel der Hauptaxe gelegt. Das Zeichen für dasselbe ist demnach  $\infty D_2$  und seine Kantenlinien gehen durch die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen. In Bezug auf die Dihexaeder  $mD$  und  $mD_2$  kann man die beiden Prismen ansehen als die Grenzgestalten der spitzeren Dihexaeder der beiden Reihen, indem bei einem Werthe für  $m$  gleich  $\infty$  je zwei an einer Seitenkante liegende Dihexaederflächen in eine Ebene fallen und die Prismenflächen bilden.

## 8) Die Didodekaeder.

(Syn. Dihexagonale Pyramiden; Naumann. Ungleichschenklige zwölfseitige Pyramiden, Dipyramiden; Mohs. Sechs- und Sechs-Kantner; Didodekaeder; sechs und sechskantige Doppelpyramiden; Weiss. Doppelt zwölfseitige Pyramiden; Hausmann. Dihexagonale Pyramidoeder; Breithaupt. Beryllöide; Haidinger.)

Ein Didodekaeder ist eine von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Triangeln umschlossene Gestalt, mit vierzehn symmetrischen Ecken und sechs und dreissig symmetrischen Kanten, deren Flächen entweder in zwei zwölfzählige Systeme, oder nach den Flächen eines Dihexaeders in zwölf Flächenpaare vertheilt sind.

Jedes der beiden zwölfzähligen Systeme bildet bei gemeinschaftlicher Basis eine ungleichkantige zwölfseitige Pyramide, und die gerade Verbindungslinie der Gipfelpunkte beider ist die Hauptaxe. Nach ihr unterscheiden sich die Kanten zunächst als End- und Seitenkanten; die letzteren, an der Zahl zwölf, liegen in der Ebene des Mittelqueerdurchschnittes und verbinden durch ihre Kantenlinien die Endpunkte der Nebenaxen und der horizontalen Zwischenaxen. Die Endkanten sind zweierlei Art und werden nach ihrer Beschaffenheit als längere schärfere und kürzere stumpfere unterschieden, von jeder Art sind zwölf gleiche. Die Endkanten verbinden durch ihre Kantenlinien die Endpunkte der Hauptaxe zum Theil mit den Endpunkten der Nebenaxen, zum Theil mit denen der horizontalen Zwischenaxen. Die Ecken sind auch dreierlei Art, zwei gleiche zwölfkantige, gebildet von den abwechselnden Endkanten, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind; diese heissen die Ecken. Ausser diesen gibt es zweierlei Seitenecken, von denen sechs gleiche vierkantige durch je zwei Seitenkanten und je zwei längere Endkanten gebildet werden und als spitzere von den sechs gleichen vierkantigen stumpferen unterschieden werden, welche von je zwei Seitenkanten und je zwei kürzeren Endkanten gebildet werden. Die Scheitelpunkte von je sechs gleichen sind die Endpunkte der Nebenaxen und die sechs anderen sind die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Zwölfseit, die vertikalen Haupt- und Nebenschnitte sind Rhomben.

Wenn die Flächen der Didodekaeder auf ein allgemeines Axenverhältniss eines Sextanten,  $A:B:B$  bezogen werden, so wird die Lage je zweier Flächen für einen Sextanten dadurch bestimmt, dass man von den beiden Nebenaxen abwechselnd je eine und die andere durch einen beliebigen rationalen Coefficienten  $n$  grösser als 1 und kleiner als 2 vervielfacht, wodurch die beiden Verhältnisse  $(A:B:nB)$  und  $(A:nB:B)$  hervorgehen, legt man nun durch je drei Endpunkte eines jeden Verhältnisses Ebenen, und zwar für jeden Sextanten auf gleiche Weise, so geht dadurch



ein Didodekaeder hervor. Vergleicht man ein Didodekaeder mit dem ihm zu Grunde liegenden Dihexaeder der Hauptreihe, dessen Axenverhältniss (A : B : B), so erscheinen die Didodekaeder als in den Höhenlinien gebrochene Dihexaeder der Hauptreihe, und nach dieser Ansicht der Form sind die Endkantenlinien des jedesmal entsprechenden Dihexaeders unverändert die einen der Endkantenlinien des Didodekaeders, welche die Endpunkte der Hauptaxe mit denen der Nebenaxen verbinden und wonach dann, wie im quadratischen System bei den Dioktaedern, diese Kanten der Didodekaeder die Grundkanten genannt werden. Die anderen zwölf Endkanten, deren Kantenlinien die Endpunkte der Hauptaxe mit denen der horizontalen Zwischenaxen verbinden, und so über die Höhenlinien der zu Grunde liegenden Dihexaederflächen zu liegen kommen, heissen dann Nebenkanten. Durch die Benennung der zweierlei Endkanten, als Grund- und Nebenkanten, welche abgekürzt für Grund- und Nebenkanten gebraucht wird, ergibt sich auch eine unterscheidende Benennung der zweierlei Seitenecken, so dass die sechs gleichen, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Nebenaxen sind und die von je zwei Seiten- und je zwei Grundkanten gebildet werden, die Grundecken genannt werden; die sechs anderen heissen dann die Nebenecken.

Von der Grösse des Werthes  $n$  hängt es nun ab, ob die Grund- oder Nebenkanten die schärferen oder stumpferen, längeren oder kürzeren sind, ob die Grund- oder Nebenecken die spitzeren oder stumpferen sind. Ist nämlich  $n < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ , so sind in dem Didodekaeder die Grundkantenwinkel schärfer als die Nebenkantenwinkel, die Grundkantenlinien länger als die Nebenkantenlinien und die Grundecken spitzer als die Nebenecken; für jeden Werth aber von  $n$  über  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  sind die Grundkantenwinkel stumpfer als die Nebenkantenwinkel, die Grundkantenlinien kürzer als die Nebenkantenlinien und die Grundecken stumpfer als die Nebenecken.

Was die Grösse der Kantenwinkel überhaupt betrifft, so werden dieselben für ein Didodekaeder, dem die obigen allgemeinen Axenverhältnisse angehören, durch nachfolgende allgemeine Gleichungen bestimmt, in denen die Grundkanten mit  $X$ , die Nebenkanten mit  $Y$  und die Seitenkanten mit  $Z$  bezeichnet sind:

$$\cos. X = \frac{2A^2(n^2 + 2n - 2) + 3n^2B^2}{4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{(2-n)A}{\sqrt{[4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{n\sqrt{3}\sqrt{(A^2 + B^2)}}{(2-n)A};$$

$$\cos. Y = \frac{2A^2(4n - n^2 - 1) + 3n^2B^2}{4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{(n-1)A\sqrt{3}}{\sqrt{[4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2A^2 + 3n^2B^2]}}{(n-1)A\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{4A^2(n^2-n+1)-3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{nB\sqrt{3}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Z = \frac{2A\sqrt{(n^2-n+1)}}{nB\sqrt{2}}$$

$$\text{Die horizontale Zwischenaxe } r = \frac{nB\sqrt{3}}{1+n}$$

Geht man wieder auf die Grundform zurück, so ergibt sich ein mehrfacher Unterschied der Didodekaeder, denn wenn nämlich das unveränderte Axenverhältniss der Grundform für A:B:B gesetzt wird, und nun abwechselnd eine der beiden gleichen Nebenaxenhälften eines jeden Sextanten durch die Vervielfachung mit einem rationalen Werthe  $n$  grösser als 1 und kleiner als 2 verlängert und gleichzeitig durch den Endpunkt einer jeden verlängerten und der jedesmaligen anderen unveränderten und durch den Endpunkt der Hauptaxe Ebenen gelegt werden, so entstehen dadurch eine Reihe von Didodekaedern, die unter einander, durch den verschiedenen Werth für  $n$  verschieden, das gemein haben, dass ihre Grundkantenlinien die unveränderten Endkantenlinien der Grundform sind. Diese Didodekaeder, deren Flächenlage für jeden Sextanten durch die beiden Verhältnisse  $(a:b:nb)$  und  $(a:nb:b)$  bestimmt wird, werden Uebergangsdidodekaeder genannt, weil sie den Uebergang aus der Grundform in das nächststumpferes Dihexaeder vermitteln; denn ist in diesen Didodekaedern  $n=1$ , so fallen je zwei an einer Nebenkante liegende Flächen in eine Ebene und bilden die Flächen der Grundform; ist aber  $n=2$  geworden, so fallen je zwei an einer Grundkante liegende Flächen in eine Ebene und bilden die Flächen des nächststumpferen Dihexaeders. Das Zeichen für die Uebergangsdidodekaeder ist  $D_n$  und die Grösse der Kantenwinkel ergibt sich bei gleicher Bezeichnung derselben aus den obigen allgemein angegebenen Funktionsbestimmungen, wenn man für  $A$  und  $B$  die Grössen  $a$  und  $b$  setzt:

$$\cos. X = -\frac{2a^2(n^2+2n-2)+3n^2b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{(2-n)a}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{n\sqrt{3}\sqrt{(a^2+b^2)}}{(2-n)a};$$

$$\cos. Y = -\frac{2a^2(4n-n^2-1)+3n^2b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Y = \frac{(n-1)a\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2a^2+3n^2b^2]}}{(n-1)a\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{4a^3(n^2-n+1)-3n^2b^2}{4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{nb\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Z = \frac{2a\sqrt{(n^2-n+1)}}{nb\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{nb\sqrt{3}}{1+n}.$$

Werden in den allgemeinen Axenverhältnissen der Didodekaeder für A und B die Werthe  $ma$  und  $b$  gesetzt, wobei  $n$  wiederum einen beliebigen rationalen Coefficienten grösser als 1 und kleiner als 2,  $m$  dagegen einen beliebigen rationalen Coefficienten grösser als 1 bezeichnet, so gehen die beiden Verhältnisse in die Form  $(ma:b:nb)$  und  $(ma:nb:b)$  ein, und wenn durch je drei Endpunkte die beiden Verhältnisse, wie sie zu einem Sextanten gehören, Ebenen gelegt werden, so entsteht für jeden Werth von  $m$  oder  $n$  der angegebenen Art, ein Didodekaeder, dessen Ecken spitzer und dessen Endkanten schärfer sind als die in  $Dn$ , wenn die  $n$  beider einander gleich sind. Sie heissen demnach spitzere Didodekaeder und führen das Zeichen  $mDn$ . Mit den spitzeren Dihexaedern der Hauptreihe  $mD$  stehen sie in demselben Verhältniss wie die Uebergangsdidodekaeder mit der Grundform, und alle Didodekaeder  $mDn$  haben bei gleichem Werthe  $m$  zu Grundkantenlinien die Endkantenlinien des spitzeren Dihexaeders  $mD$ , in dem  $m$  gleich dem  $n$  jener ist, mag auch der Werth  $n$  noch so verschieden sein. Für die Kantenwinkel ergeben sich aus obigen allgemeinen Gleichungen die nachfolgenden Werthe:

$$\cos. X = -\frac{2m^2a^2(n^2+2n-2)+3n^2b^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{(2-n)ma}{\sqrt{[4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{n\sqrt{3}\sqrt{(m^2a^2+b^2)}}{(2-n)ma};$$

$$\cos. Y = -\frac{2m^2a^2(4n-n^2-1)+3n^2b^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Y = \frac{(n-1)ma\sqrt{3}}{\sqrt{[4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2m^2a^2+3n^2b^2]}}{(n-1)ma\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = -\frac{4m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2b^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{nb\sqrt{3}}{\sqrt{[4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Z = \frac{2ma\sqrt{(n^2-n+1)}}{nb\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{nb\sqrt{3}}{1+n}.$$

Weil nun aber der Werth für  $n$  nur alle möglichen rationalen Zahlen grösser als 1 und kleiner als 2 darstellen kann, für  $m$  aber alle möglichen rationalen Zahlen-

werthe grösser als 1 gesetzt werden können, so muss nothwendigerweise stets einer der drei Fälle Statt finden, dass  $m$  entweder grösser, oder gleich, oder kleiner als  $n$  ist. Hiernach könnte man, wie es im quadratischen System bei den spitzeren Dioktaedern der Fall war, drei verschiedene Arten spitzerer Didodekaeder aufstellen, und sie durch die Zusätze mehr, gleichmässig und mindest spitzere in der Benennung unterscheiden, je nachdem  $m$  grösser, oder gleich, oder kleiner als  $n$  ist. Meist ist das erstere der Fall, und es wird daher das Zeichen  $mDn$ , welches überhaupt für alle spitzeren Didodekaeder gilt, wenn nicht Rücksicht auf das Verhältniss zwischen  $m$  und  $n$  genommen wird, auch für diese gelten. Tritt der Fall ein, dass  $m = n$ , so zeigt dies das Zeichen  $nDn$  an; sollte es auch noch nöthig sein, den Fall, dass  $m$  kleiner als  $n$ , zu bezeichnen, so kann man sich des

Zeichens  $mDn$  bedienen. In allen besonderen Fällen, wo Zahlenwerthe gesetzt werden, zeigt die Zahl selbst diesen Unterschied an, und es ist daher nichts weiter zu bemerken nöthig. Die Bestimmungen der Kantenwinkel bleiben dieselben, nur in dem Falle  $m = n$  vereinfachen sie sich und geben folgende Werthe:

$$\cos. X = -\frac{2a^2(n^2 + 2n - 2) + 3b^2}{4a^2(n^2 - n + 1) + 3b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{(2-n)a}{\sqrt{[4a^2(n^2 - n + 1) + 3b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{3} \sqrt{(n^2 a^2 + b^2)}}{(2-n)a}$$

$$\cos. Y = -\frac{2a^2(4n - n^2 - 1) + 3b^2}{4a^2(n^2 - n + 1) + 3b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{(n-1)a\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2 - n + 1) + 3b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2 a^2 + 3b^2]}}{(n-1)a\sqrt{3}}$$

$$\cos. Z = -\frac{4a^2(n^2 - n + 1) - 3b^2}{4a^2(n^2 - n + 1) + 3b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2 - n + 1) + 3b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{2a\sqrt{(n^2 - n + 1)}}{b\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{nb\sqrt{3}}{1+n}$$

Wenn endlich noch in dem Axenverhältniss der stumpferen Dihexaeder der Hauptreihe, in  $(a:mb:mb)$  jede der schon verlängerten Nebenaxen abwechselnd mit dem Coefficienten  $n$  von der oben angegebenen Eigenschaft vervielfacht wird, wodurch für jeden Sextanten die beiden Verhältnisse  $(a:mb:mnb)$  und  $(a:nmb:mb)$  hervorgehen, so entstehen, wenn durch die je drei Endpunkte der durch diese Verhältnisse bestimmten Axen in allen Sextanten Ebenen gelegt werden, die stumpferen Didodekaeder, deren Ecken und Endkanten stumpfer als in den

Didodekaedern  $D_n$  sind, und deren Grundkantenlinien den Endkantenlinien desjenigen stumpferen Dihexaeders  $D_{nm}$  entsprechen, in welchem der Werth für  $m$  gleich ist. Das Zeichen der stumpferen Didodekaeder ist  $D_{nm,m}$  und ihre Kantenwinkel werden durch nachfolgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = \frac{2a^2(n^2 + 2n - 2) + 3m^2n^2b^2}{4a^2(n^2 - n + 1) + 3m^2n^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{(2-n)a}{\sqrt{[4a^2(n^2 - n + 1) + 3m^2n^2b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{n\sqrt{3}\sqrt{(a^2 + m^2b^2)}}{(2-n)a};$$

$$\cos. Y = \frac{2a^2(4n - n^2 - 1) + 3m^2n^2b^2}{4a^2(n^2 - n + 1) + 3m^2n^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{(n-1)a\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2 - n + 1) + 3m^2n^2b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2a^2 + 3m^2n^2b^2]}}{(n-1)a\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = \frac{4a^2(n^2 - n + 1) - 3m^2n^2b^2}{4a^2(n^2 - n + 1) + 3m^2n^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{mnb\sqrt{3}}{\sqrt{[4a^2(n^2 - n + 1) + 3m^2n^2b^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{2a\sqrt{(n^2 - n + 1)}}{mnb\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{mnb\sqrt{3}}{1+n}.$$

Für die nachfolgenden des Beispiels wegen angeführten Didodekaeder liegt die oben angeführte Grundform des Quarzes zu Grunde:

	Grundkanten.	Nebenkanten.	Seitenkanten.
$D\frac{1}{2}$	1630 45' 13"	1540 12' 46"	960 29' 20"
$\frac{4}{3}D\frac{1}{2}$	161 55 49	148 26 3	112 39 34
$\frac{3}{2}D\frac{4}{3}$	153 10 12	156 49 6	113 32 41
$6D\frac{4}{3}$	138 19 50	162 16 52	163 54 11
$D_{4,3}$	168 38 58	170 10 27	41 46 40.

#### 4) Die dodekagonalen Prismen.

(Syn. Ungleichwinklige zwölfseitige Prismen; Mohs. Zwölfseitige Prismen; Haidinger. Ungleichkantige zwölfseitige oder didodekaedrische Säulen; v. Glocker. Dihexagonale Prismen; Naumann.)

Ein dodekagonales Prisma ist ein gleichseitig zwölfseitiges Prisma, bei welchem ein auf die Kanten senkrecht geführter Schnitt ein symmetrisches Zwölfseit ist. Die zwölf Kanten sind regelmässig und zweierlei Art, je sechs abwechselnde einander gleich; der Unterschied beruht in der Grösse der Kantenwinkel, so dass sie als stumpfere und schärfere oder

weniger stumpfe unterschieden werden, und es sind daher, gleichviel von welcher Kante man zu zählen anfängt, die erste, dritte, fünfte, siebente, neunte, elfte und eben so die zweite, vierte, sechste, achte, zehnte, zwölfte einander gleich. Die Flächen und die Kantenlinien sind der Hauptaxe parallel, welche auf dem oben erwähnten senkrechten Durchschnitt in seinem Mittelpunkte senkrecht steht; die Kantenlinien der einen Art gleicher Kanten gehen durch die Endpunkte der Nebenaxen und die der anderen Art durch die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen.

Die Lage der Flächen wird im Allgemeinen für je drei zu einem Sextanten gehörige Halbaxen durch  $(\infty A:B:nB)$  oder  $(\infty A:nB:B)$  und auf das Grundverhältniss bezogen, durch  $(\infty a:b:nb)$  und  $(\infty a;nb:b)$  ausgedrückt, wobei  $n$  wieder, wie schon oben, einen beliebigen rationalen Coefficienten grösser als 1 und kleiner als 2 bezeichnet, so dass also in Bezug auf zwei einander unter  $60^\circ$  schneidende halbe Nebenaxen und die auf ihnen senkrecht stehende Hauptaxe eine Fläche eines dodekagonalen Prisma eine durch den Endpunkt einer unveränderten und der anderen verlängerten Nebenaxe parallel der Hauptaxe gelegte Ebene ist. Es ist demnach auch das Zeichen der dodekagonalen Prismen  $\infty D_n$  und sie selbst bilden die Grenzgestalten der spitzeren Didodekaeder  $mD_n$ , in denen bei fortgesetzter Zunahme des Werthes  $m$ , endlich bei dem Werthe  $m = \infty$  je zwei an einer Seitenkante liegende Flächen in eine der Hauptaxe parallele Ebene fallen und die Prismenflächen bilden.

Verglichen mit den holodrischen hexagonalen Prismen erscheinen die dodekagonalen Prismen als gebrochene hexagonale Prismen und die zwölf Flächen bilden sechs gleiche Paare, die über die hexagonalen Prismenflächen zu liegen kommen. Wird dieser Vergleich nur auf das hexagonale Prisma der Hauptreihe bezogen, so sind die Kantenlinien des hexagonalen Prisma in den Prismen  $\infty D_n$  unverändert dieselben und es werden dann diese Kanten, deren Kantenlinien die von  $\infty D$  und mithin durch die Endpunkte der Nebenaxen gelegt sind, durch den Namen Grundkanten, von den anderen, den Nebenkanten, unterschieden. Die Grösse der zugehörigen Kantenwinkel hängt von dem jedesmaligen Werthe  $n$  ab, und es sind

in allen Prismen  $\infty D_n$ , wo  $n < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ , die Grundkanten die weniger stumpfen, dagegen wenn  $n > \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ , die Grundkanten stumpfer als die Nebenkanten. Die Grösse der Kantenwinkel wird durch nachfolgende Ausdrücke bestimmt, in denen die Grundkanten durch  $X$  und die Nebenkanten durch  $Y$  bezeichnet sind:

$$\cos. X = -\frac{n^2 + 2n - 2}{2(n^2 - n + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{2 - n}{2\sqrt{(n^2 - n + 1)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{n\sqrt{3}}{2 - n};$$

$$\cos. Y = -\frac{4n - n^2 - 1}{2(n^2 - n + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{(n-1)\sqrt{3}}{2\sqrt{(n^2 - n + 1)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{n+1}{(n-1)\sqrt{3}}.$$

Als Beispiele dieser Prismen können die drei nachfolgenden mit ihren Kantenwinkeln dienen:

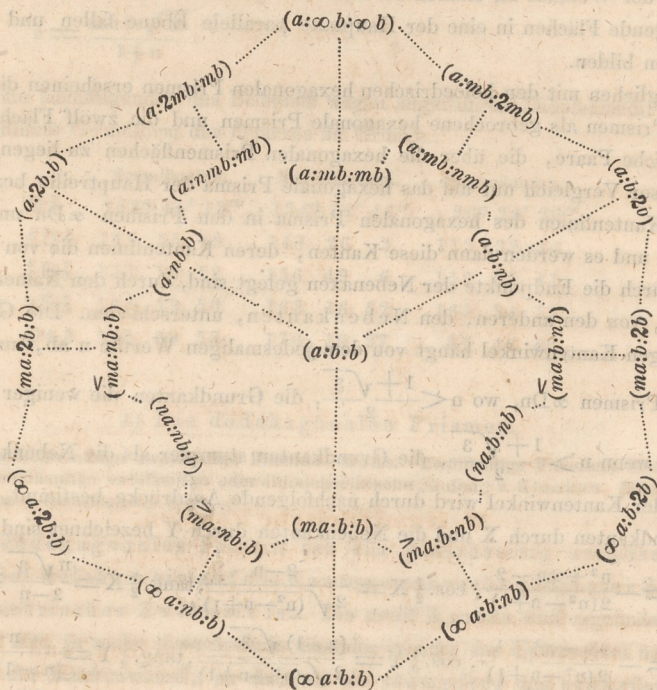
$\infty D\frac{2}{3}$	Grundkanten	137° 53' 48"	Nebenkanten	162° 6' 12"
$\infty D\frac{1}{3}$	„	147 47 45	„	152 12 15
$\infty D\frac{2}{3}$	„	158 12 48	„	141 47 12.

### 5) Das hexagonale Dyoeder.

(Syn. Endfläche; Mohs. Base; Haidinger. Gerad-angesetzte Endfläche; v. Glocker.)

Unter dem hexagonalen Dyoeder ist ein Paar paralleler Flächen zu verstehen, von denen jede durch einen Endpunkt der Hauptaxe parallel den Nebenaxen oder dem horizontalen Hauptschnitt gelegt ist, welche Lage auf das Grundverhältniss bezogen durch  $(a : \infty b : \infty b)$  ausgedrückt wird, woraus als Zeichen für das hexagonale Dyoeder sich  $D\infty\infty$  ergibt. Es bildet das Dyoeder das letzte Glied der stumpferen Dihexaeder, sowohl der Haupt- als der Nebenreihe,  $Dmm$  und  $D2m,m$ , indem bei dem Werthe  $m = \infty$  je sechs die Endecke bildende Flächen in eine durch

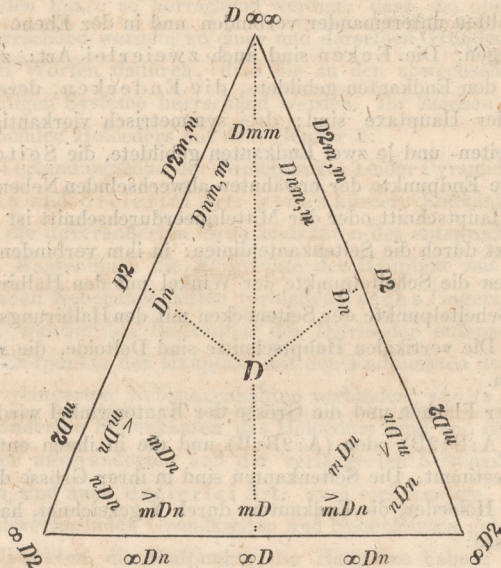
Fig. 8.



den Endpunkt der Hauptaxe parallel dem Mittelqueerdurchschnitt gelegte Ebene fallen und die Dyoederflächen bilden. Auch für die stumpferen Dioktaeder  $D_{nm,m}$  geht auf gleiche Weise das Dyoeder als Extremgestalt hervor.

Vergleicht man am Schluss, wie es bei den schon erörterten Systemen der Fall war, die verschiedenen Arten einfacher Formen, welche aus einem bestimmten Grundverhältniss abgeleitet werden, so findet man auch hier wieder die verschiedensten Reihen, durch welche die Uebergänge zwischen den einzelnen Arten vermittelt werden. Eine Anschauung dieser Verhältnisse giebt das in Fig. 8 dargestellte Schema, welchem entsprechend die Fig. 9 die Lage der Flächen der abgeleiteten Formen zu der Fläche der Grundform angiebt. Eine nähere Erörterung zum Verständniss dieser beiden Darstellungen ist nicht nothwendig, da eine Vergleichung mit den früheren und namentlich den Darstellungen dieser Verhältnisse im quadratischen Systeme jede nähere Erklärung überflüssig macht.

Fig. 9.



**B. Hemiedrische Formen.**

a) Mit nicht parallelen Flächen.

1) Die Ditrioeder.

(Syn. Trigonale Pyramiden; Naumann.)

Ein Ditrioeder ist eine von sechs gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalt, mit neun Kan-



ten und fünf Ecken, deren Flächen in zwei dreizählige Systeme so vertheilt sind, dass jedes derselben bei gemeinschaftlicher Basis eine gleichseitige dreiseitige Pyramide bildet. Sie entstehen durch Hemiedrie der Dihexaeder der Nebenreihe dadurch, dass die an den abwechselnden Seitenkanten liegenden Flächenpaare herrschend werden. Ihr Zeichen ist daher das der genannten Dihexaeder mit dem Nenner 2, also  $\frac{D2}{2}$ ,  $\frac{mD2}{2}$ ,  $\frac{D2m,m}{2}$  und die beiden jedesmaligen Gegenhemieder eines Holoeders werden durch den dem D des einen beigefügten Strich unterschieden.

Die gerade Verbindungslinie der Gipfelpunkte beider Pyramiden ist die Hauptaxe. Die Kanten sind zweierlei Art: sechs symmetrische, die Endkanten, deren Kantenlinien zu je drei von einem Endpunkt der Hauptaxe ausgehen und denselben mit den Endpunkten dreier abwechselnden Nebenaxenhälften verbinden; drei regelmässige, die Seitenkanten, deren Kantenlinien die Endpunkte derselben Nebenaxenhälften untereinander verbinden und in der Ebene des Mittelqueerdurchschnittes liegen. Die Ecken sind auch zweierlei Art: zwei regelmässige dreikantige, von den Endkanten gebildete, die Endecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind; drei symmetrisch vierkantige, von je zwei abwechselnden Seiten- und je zwei Endkanten gebildete, die Seitenecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der erwähnten abwechselnden Nebenaxenhälften sind. Der horizontale Hauptschnitt oder der Mittelqueerdurchschnitt ist ein gleichseitiger Triangel, begrenzt durch die Seitenkantenlinien; in ihm verbinden die ungleich getheilten Nebenaxen die Scheitelpunkte der Winkel mit den Halbierungspunkten der Seiten, also die Scheitelpunkte der Seitenecken mit den Halbierungspunkten der Seitenkantenlinien. Die vertikalen Hauptschnitte sind Deltoide, die vertikalen Nebenschnitte Rhomben.

Die Lage der Flächen und die Grösse der Kantenwinkel wird allgemein durch das Verhältniss (A:B:2B) oder (A:2B:B) und die in ihnen enthaltenen Werthe angegeben und bestimmt. Die Seitenkanten sind in ihrer Grösse die unveränderten Seitenkanten der Holoeder, die Endkanten, durch Y gezeichnet, haben nachfolgende Grössenverhältnisse:

$$\cos. Y = \frac{A^2 - 2B^2}{2(A^2 + B^2)}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{A\sqrt{3}}{2\sqrt{(A^2 + B^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(A^2 + 4B^2)}}{A\sqrt{3}};$$

Als Beispiele der Formen dieser Art mögen die aus dem oben erwähnten Grundverhältniss (a:b:b) = 11:10:10 abgeleiteten dienen:

$$\frac{D2}{2} \quad \text{Endkanten } 100^\circ 17' 45'' \quad \text{Seitenkanten } 95^\circ 27' 9''$$

$\frac{2D_2}{2}$	Endkanten	75° 55' 38"	Seitenkanten	131° 6' 47"
$\frac{D_{4,2}}{2}$	„	130 39 53	„	57 37 20.

## 2) Die Diploditrioeder.

Ein Diploditrioeder ist eine von zwölf gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt mit achtzehn symmetrischen Kanten und acht symmetrischen Ecken, deren Flächen entweder nach den Flächen eines Ditrioeders in sechs Flächenpaare oder in zwei sechszählige Systeme so vertheilt sind, dass jedes derselben bei gemeinschaftlicher Basis eine ungleichkantige sechsseitige Pyramide bildet. Sie entstehen durch Hemiedrie aus den Didodekaedern dadurch, dass die an den abwechselnden Grundkanten liegenden Paare so herrschend werden, dass die oberen und unteren Paare, welche herrschend werden, zu einer und derselben Grunddecke gehören, oder auch mit anderen Worten dadurch, dass die an den abwechselnden Grunddecken liegenden vierzähligen Systeme herrschend werden. Ihr Zeichen ist demnach auch das des entsprechenden Holoeders mit dem Nenner 2.

Die gerade Verbindungslinie der Gipfelpunkte beider Pyramiden ist die Hauptaxe. Die Kanten sind dreierlei Art: sechs kürzere Endkanten, die Grundkanten, welche die unveränderten Grundkanten des entsprechenden Holoeders sind, und deren Kantenlinien die Endpunkte der Hauptaxe mit den Endpunkten dreier abwechselnden Nebenaxenhälften verbinden; sechs längere Endkanten, die Nebenkanten, welche den Endkanten der Ditrioeder entsprechen und deren Kantenlinien die Endpunkte der Hauptaxe mit den Endpunkten der drei mit obigen abwechselnden verlängerten Nebenaxenhälften verbinden; sechs Seitenkanten, welche die unveränderten Seitenkanten des Holoeders sind und deren Kantenlinien die Endpunkte der unveränderten und der verlängerten Nebenaxenhälften verbinden. Die Ecken sind auch dreierlei Art: zwei sechskantige, die Endecken, welche von den abwechselnden Grundkanten und Nebenkanten gebildet werden und zu ihren Scheitelpunkten die Endpunkte der Hauptaxe haben; drei vierkantige stumpfere und drei dergleichen spitzere, die Seitenecken, welche demnach zweierlei sind und als Grundecken und Nebenecken unterschieden werden, denn die stumpferen Seitenecken sind die unveränderten Grundecken des entsprechenden Holoeders und führen daher auch hier diesen Namen; ihre Scheitelpunkte sind die Endpunkte der abwechselnden unveränderten Nebenaxenhälften. Die spitzeren Seitenecken, welche im Gegensatz zu jenen Nebenecken genannt werden, haben zu ihren Scheitelpunkten die Endpunkte der verlängerten abwechselnden

Nebenaxenhälften und entsprechen den Seitenecken der Ditrioeder. Der horizontale Hauptschnitt oder der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Sechseck, gebildet von den Seitenkantenlinien; die vertikalen Hauptschnitte sind Deltoide, gebildet von je zwei kürzeren und je zwei längeren Endkantenlinien; die vertikalen Nebenschnitte sind Rhomben.

Die Lage der Flächen wird durch dasselbe Verhältniss bestimmt, wie in dem entsprechenden Holoeder und es gilt daher im Allgemeinen für die Diploditrioederflächen das Axenverhältniss (A : B : nB) oder (A : nB : B), wo n eine beliebige rationale Grösse grösser als 1 und kleiner als 2 bezeichnet. In Betreff der Kantenwinkel ist es nur nöthig die Nebenkanten zu bestimmen, da die Grundkanten und die Seitenkanten die unveränderten des Holoeders sind. Bezeichnet man die Grundkanten mit X, die Nebenkanten mit Y und die Seitenkanten mit Z, so sind die Funktionen für X und Z dieselben, wie bei den Didodekaedern, für Y aber ergeben sich für obiges Verhältniss folgende Werthe:

$$\cos. Y = -\frac{2A^2(2n-2n^2+1)+3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{(2n-1)A}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{3} \sqrt{(A^2+n^2B^2)}}{(2n-1)A}$$

Die Diploditrioeder sind an natürlichen Krystallen noch nicht angetroffen worden, jedoch ist die Möglichkeit ihres Vorkommens nicht abzuspochen, da ihnen dasselbe Gesetz der Hemiedrie zu Grunde liegt, wie den Ditrioedern, in die sie auch übergehen, wenn der Werth n zunimmt und endlich = 2 wird, wodurch je zwei an einer Grundkante liegende Flächen in eine Ebene fallen und eine Ditrioederfläche bilden. Des Beispiels wegen mögen die beiden aus den Didodekaedern  $D\frac{3}{2}$  und  $\frac{4}{3}D\frac{4}{3}$  berechneten dienen, denen das obige Grundverhältniss a : b = 11 : 10 zu Grunde liegt:

	Grundkanten.	Nebenkanten	Seitenkanten.
$D\frac{3}{2}$			
$\frac{2}{2}$	1630 45' 13"	1110 20' 44"	960 29' 20"
$\frac{4}{3}D\frac{4}{3}$			
$\frac{2}{2}$	153 10 12	109 5 52	113 32 41.

### 3) Die Trapezoidihexaeder.

(Syn. Hexagonale Trapezoeder; Naumann. Dihexagonale Trapezoeder; Breithaupt. Hexagontrapezoeder; v. Glöcker. Gleichkantige sechsseitige pyramidenähnliche, durch rechts und links sich von einander unterscheidende Gestalten; Mohs. Diplagieder; Haidinger.)

Ein Trapezoidihexaeder ist eine von zwölf gleichen und ähnlichen Trapezoiden umschlossene Gestalt, mit vier und zwanzig unregelmässigen Kanten und vierzehn Ecken, deren Flächen in

zwei sechszählige Systeme vertheilt sind. Diese Körper entstehen auch durch Hemiedrie der Didodekaeder, aber dadurch, dass die abwechselnden Flächen herrschend werden, und die beiden aus einem jeden Didodekaeder auf diese Weise hervorgehenden Gegenhemieder werden durch die Beinamen rechts und links gewendetes unterschieden. Wenn man nämlich die Vertheilung der Didodekaederflächen nach den ihnen zu Grunde liegenden Dihexaedern der Hauptreihe berücksichtigt, so liegt von jedem der Flächenpaare die eine Fläche rechts, die andere links an der zugehörigen Nebenkante; werden nun in dem einen Falle alle auf gleiche Weise rechts liegenden Flächen herrschend, so entsteht ein rechtsgewendetes Trapezoidihexaeder, in dem anderen Falle ein linksgewendetes. Dieser Unterschied wird durch ein vorgesetztes r oder l an dem mit dem Nenner 2 versehenen Zeichen des Didodekaeders dargestellt, wodurch gleichzeitig diese Hemieder von den anderen Hemiedern der Didodekaeder unterschieden werden, so sind z. B.  $r \frac{mDn}{2}$  und  $l \frac{mDn}{2}$  die beiden aus dem Didodekaeder  $mDn$  hervorgehenden Trapezoidihexaeder.

Die Kanten eines jeden Trapezoidihexaeders sind dreierlei Art: zwölf Endkanten, deren Kantenlinien zu je sechs von den Endpunkten der Hauptaxe ausgehen; sechs kürzere schärfere und sechs längere stumpfere Seitenkanten, welche einzeln mit einander abwechseln und deren Kantenlinien schief (im Zickzack) laufen. Die Ecken sind zweierlei Art: zwei regelmässige sechskantige, von den Endkanten gebildete, die Endecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind; zwölf unregelmässige dreikantige, die Seitenecken, welche von je drei verschiedenen Kanten gebildet werden und deren Scheitelpunkte nicht in einer Ebene, sondern in zwei dem Mittelqueerdurchschnitt parallelen Ebenen so liegen, dass sechs abwechselnde in der einen, die sechs anderen in der anderen liegen. Die Seitenkanten lassen sich durch ihre Beschaffenheit im Allgemeinen nicht in ihrer Lage bestimmen; ihre Kantenlinien werden zunächst durch die Ebene des Mittelqueerdurchschnittes halbirt und in den Halbierungspunkten je sechs gleicher liegen die Endpunkte der Nebenaxen, und in denen der sechs anderen die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen, zufolge welcher Beschaffenheit die ersteren die Grund-, die anderen die Neben-Seitenkanten oder -Kanten genannt werden, analog den beiderlei Ecken der Didodekaeder, durch deren Scheitelpunkte diese Kanten halbirt werden. Wenn man wieder das allgemeine Axenverhältniss  $(A:B:nB)$  oder  $(A:nB:B)$  zur Bestimmung der Flächenlage wählt, so werden bei den Trapezoidihexaedern die längeren Seitenkanten die Nebenkanten und die kürzeren die Grundseitenkanten sein, so lange  $n < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ; ist aber  $n > \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ , so sind die kürzeren Seitenkanten die Nebenseitenkanten und die längeren die

Grundseitenkanten. Der Mittelquerdurchschnitt ist ein symmetrisches Zwölfseit, die vertikalen Haupt- und Nebenschnitte sind Rhomben.

Wenn die Endkanten mit X, die Nebenseitenkanten mit Y und die Grundseitenkanten mit Z bezeichnet werden, so erhält man allgemein für ihre Kantenwinkel die nachfolgenden Werthe:

$$\cos. X = \frac{2A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2}{4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{A\sqrt{(n^2 - n + 1)}}{\sqrt{[4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3}\sqrt{[A^2(n^2 - n + 1) + n^2B^2]}}{A\sqrt{(n^2 - n + 1)}}$$

$$\cos. Y = \frac{2A^2(4n - n^2 - 1) - 3n^2B^2}{4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{3}\sqrt{[A^2(n-1)^2 + n^2B^2]}}{\sqrt{[4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Y = \frac{A(n+1)}{\sqrt{3}\sqrt{[A^2(n-1)^2 + n^2B^2]}}$$

$$\cos. Z = \frac{2A^2(n^2 + 2n - 2) - 3n^2B^2}{4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{A^2(2-n)^2 + 3n^2B^2}}{\sqrt{[4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Z = \frac{nA\sqrt{3}}{\sqrt{[A^2(2-n)^2 + 3n^2B^2]}}$$

Als Beispiele der Trapezoidihexaeder mögen nachfolgende für das schon oben aufgestellte Grundverhältniss geltende dienen, welche die Hemieder der Didodekaeder  $D\frac{3}{2}$ ,  $\frac{4}{3}D\frac{4}{3}$  und  $6D\frac{6}{3}$  sind:

	Endkanten.	Grund-	Nebenseitenkanten.
$\frac{D\frac{3}{2}}{2}$	136° 11' 56"	94° 12' 4"	89° 38' 32"
$\frac{\frac{4}{3}D\frac{4}{3}}{2}$	130 33 6	106 58 0	108 35 10
$\frac{6D\frac{6}{3}}{2}$	120 39 2	135 3 19	155 58 24.

#### 4) Die trigonalen Prismen.

(Syn. Gleichkantig dreiseitige oder trigonale Säulen; v. Glocker.)

Hierunter versteht man gleichseitig dreiseitige Prismen, bei denen ein auf die Kanten senkrecht geführter Schnitt ein gleichseitiger Triangel ist. Sie entstehen durch Hemiedrie der hexagonalen Prismen der Nebenreihe durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen und es ist daher das Zeichen eines solchen trigonalen Prisma das Zeichen des Holoeders mit dem Nenner 2, also  $\frac{\infty D 2}{2}$  und die beiden gleichen nur verschieden gestellten Hemieder eines Holoeders

werden durch den dem D des einen beigefügten Accent unterschieden. Die drei Kanten eines solchen Prisma sind regelmässige und ihre Kantenlinien gehen durch die Endpunkte dreier abwechselnder Nebenaxenhälften parallel der Hauptaxe; der Kantenwinkel ist  $= 60^\circ$ . Die Flächen sind durch je zwei dieser Endpunkte parallel der Hauptaxe gelegt. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein gleichseitiger Triangel. Ein trigonales Prisma ist anzusehen als das letzte Glied der spitzen Ditrioeder, indem bei dem Wachsen des Werthes  $m$  bei dem Falle, dass  $m$  unendlich gross geworden, je zwei an einer Seitenkante liegende Ditrioederflächen in eine der Hauptaxe parallele Ebene fallen und eine Prismenfläche bilden.

### 5) Die ditrigonalen Prismen.

Hierunter hat man gleichseitig sechsseitige Prismen zu verstehen, bei denen ein auf die Kanten senkrecht geführter Schnitt ein symmetrisches Sechsstück ist. Sie entstehen durch Hemiedrie der dodekagonalen Prismen dadurch, dass die an den abwechselnden Grundkanten liegenden Paare herrschend werden, und sind die Extremgestalten der Diploditrioeder, indem bei der Zunahme des Werthes  $m$ , durch welchen die Hauptaxe vervielfacht wird, endlich der Fall eintritt, dass bei  $m = \infty$  je zwei an einer Seitenkante liegende Flächen in eine der Hauptaxe parallele Ebene fallen und eine solche Prismenfläche bilden. Die sechs Kanten sind regelmässig und zweierlei Art, drei stumpfere und drei schärfere; die stumpferen sind die unveränderten Grundkanten des Holoeders und behalten auch hier den Namen Grundkanten, die schärferen heissen im Gegensatz zu ihnen Nebenkanten. Die Kanten wechseln einzeln untereinander ab und der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Sechsstück. Die Kantenlinien der Grundkanten gehen durch die Endpunkte der unveränderten abwechselnden Nebenaxenhälften, während die der Nebenkanten durch die Endpunkte der abwechselnden verlängerten Hälften, beide parallel der Hauptaxe gehen. Das Zeichen dieser Prismen ist das der entsprechenden Holoeder mit dem Nenner 2, also allgemein  $\frac{\infty Dn}{2}$ , die beiden gleichen Gegenhemieder werden durch den beigefügten Strich an dem Zeichen des einen unterschieden.

Bezeichnet man die Grundkanten durch  $X$  und die Nebenkanten durch  $Y$ , so ist die Grösse der ersteren, als der unveränderten des entsprechenden Holoeders, auch durch dieselben Funktionen bestimmt, wie für  $X$  Seite 145 angegeben ist; für  $Y$  dagegen gelten folgende Werthe:

$$\cos. Y = \frac{2n - 2n^2 + 1}{2(n^2 - n + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{2n - 1}{2\sqrt{(n^2 - n + 1)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{3}}{2n - 1}.$$

Als Beispiele dieser Prismen, welche in der Natur noch nicht beobachtet worden sind, können die drei nachfolgenden mit ihren Kantenwinkeln dienen:

$\frac{\infty D \frac{2}{3}}{2}$	Grundkanten	1370 53' 48"	Nebenkanten	1020 6' 12"
$\frac{\infty D \frac{4}{3}}{2}$	„	147 47 45	„	92 12 15
$\frac{\infty D \frac{3}{2}}{2}$	„	158 12 48	„	81 47 12.

## b) Mit parallelen Flächen.

### 1) Die Rhomboeder.

(Syn. Rautenflächner; Weiss. Rautenflach; v. Raumer. Achteckige Hexaeder z. Th. Bernhardt)

Ein Rhomboeder ist ein von sechs gleichen und ähnlichen Rhomben umschlossener Körper mit zwölf Kanten und acht dreieckigen Ecken, dessen Flächen in zwei dreizählige Systeme vertheilt sind. Die ausschliesslich so benannten Körper, da es auch derartige tetartodratische Gestalten giebt, entstehen durch Hemiedrie der Dihexaeder der Hauptreihe, durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen. Ihr Zeichen ist demnach das der Dihexaeder der Hauptreihe mit dem Nenner 2, also nach den verschiedenen Arten derselben  $\frac{D}{2}$ ,  $\frac{mD}{2}$  und  $\frac{Dmm}{2}$ , und die beiden jedesmaligen Gegenhemieder eines Holoeders, die sich nur durch ihre Stellung unterscheiden, werden durch den an das D des einen hinzugefügten Strich unterschieden, so dass  $\frac{D'}{2}$  das Gegenrhomboeder zu  $\frac{D}{2}$  ist und genannt wird.

Die Kanten, welche alle gleichlang sind, sind zweierlei Art: sechs symmetrische, die Endkanten, deren Kantenlinien zu je drei von einem Endpunkt der Hauptaxe ausgehen und verlängert die horizontalen Zwischenaxen treffen; je zwei sind einander parallel und liegen in der Ebene eines vertikalen Nebenschnittes. Sechs unregelmässige Kanten, die Seitenkanten, deren Kantenlinien im Zickzack laufen und zu je zwei einander parallel gehen und in einer Ebene liegen. Durch die Endpunkte der Nebenaxen werden die Seitenkantenlinien halbirt und jeder Seitenkantenlinie gehen zwei Endkantenlinien parallel. Die Ecken sind auch zweierlei Art: zwei regelmässige, von den Endkanten gebildete, die Endecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind; sechs unregelmässige, die Seitenecken, welche von je zwei Seitenkanten und einer Endkante gebildet werden und von denen die Scheitelpunkte je dreier abwechselnden in einer dem Mittelqueerdurchschnitt parallelen Ebene liegen. Der Mittelqueerdurchschnitt selbst ist

eine durch die Halbirungspunkte der Seitenkantenlinien gelegte Ebene und ein regelmässiges Sechseit. Die vertikalen Hauptschnitte sind Rhomben und die vertikalen Nebenschnitte Rhomboide.

Stellt man das reguläre Hexaeder so, dass eine der trigonalen Zwischenaxen desselben senkrecht steht, so bildet es ein Rhomboeder, dessen Flächen nicht Rhomben, sondern Quadrate sind und dessen Kanten und Ecken untereinander gleich sind. Verglichen mit dem so gestellten regulären Hexaeder werden die Rhomboeder als spitze und stumpfe im Allgemeinen unterschieden, je nachdem die Endkantenwinkel kleiner oder grösser als  $90^\circ$  sind. Bei den spitzen Rhomboedern sind also die Endkantenwinkel kleiner als  $90^\circ$  und demnach die Endecken spitzer als die Hexaederecken; die Seitenkantenwinkel dagegen sind grösser als  $90^\circ$  und daher stumpfer als die Endkantenwinkel, mit denen sie sich zu  $180^\circ$  ergänzen. Bei den stumpfen Rhomboedern sind die Endkantenwinkel grösser als  $90^\circ$  und demnach die Endecken stumpfer als die Hexaederecken; die Seitenkantenwinkel sind kleiner als  $90^\circ$ , also schärfer als die Endkanten, und die Seitenecken spitzer als die Endecken, was bei den spitzen umgekehrt der Fall ist.

Da im Allgemeinen die Flächenlage der Rhomboeder als der Hemieder der Dihexaeder der Hauptreihe durch das Axenverhältniss  $A:B:B$  bestimmt wird, so wird auch durch die Werthe von  $A$  und  $B$  die Grösse der Kantenwinkel bestimmt, und wenn mit  $X$  die Endkanten und mit  $Z$  die Seitenkanten bezeichnet werden, so erhält man für sie folgende Werthe zur Bestimmung ihrer Grösse:

$$\begin{aligned} \cos. X &= -\frac{3B^2 - 2A^2}{3B^2 + 4A^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{(4A^2 + 3B^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{(A^2 + 3B^2)}}{A\sqrt{3}}; \\ \cos. Z &= -\frac{2A^2 - 3B^2}{4A^2 + 3B^2} = -\cos. X, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{(A^2 + 3B^2)}}{\sqrt{(4A^2 + 3B^2)}}, \\ \text{tang. } \frac{1}{2}Z &= \frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{(A^2 + 3B^2)}}. \end{aligned}$$

Wenn diese Grössenbestimmungen auf ein bestimmtes Grundverhältniss bezogen werden, durch welches die Grundform  $D$  und ihr Hemieder  $\frac{D}{2}$  ausgedrückt wird und von welchem die Hemieder  $\frac{mD}{2}$  und  $\frac{Dmm}{2}$  als die der spitzeren und stumpferen Dihexaeder der Hauptreihe abgeleitet werden, so ergeben sich für diese drei Arten Rhomboeder nachfolgende Winkelfunktionen:

Für das Rhomboeder  $\frac{D}{2}$ ,

$$\cos. X = -\frac{3b^2 - 2a^2}{3b^2 + 4a^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(4a^2 + 3b^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{(a^2 + 3b^2)}}{a\sqrt{3}};$$



$$\cos. Z = -\frac{2a^2 - 3b^2}{4a^2 + 3b^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{(a^2 + 3b^2)}}{\sqrt{(4a^2 + 3b^2)}}, \text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(a^2 + 3b^2)}}$$

Für die Rhomboeder  $\frac{mD}{2}$ ,

$$\cos. X = -\frac{3b^2 - 2m^2a^2}{3b^2 + 4m^2a^2}, \cos. \frac{1}{2} X = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{(4m^2a^2 + 3b^2)}}, \text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{(m^2a^2 + 3b^2)}}{ma\sqrt{3}}$$

$$\cos. Z = -\frac{2m^2a^2 - 3b^2}{4m^2a^2 + 3b^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{(m^2a^2 + 3b^2)}}{\sqrt{(4m^2a^2 + 3b^2)}}, \text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{(m^2a^2 + 3b^2)}}$$

Für die Rhomboeder  $\frac{Dmm}{2}$ ,

$$\cos. X = -\frac{3m^2b^2 - 2a^2}{3m^2b^2 + 4a^2}, \cos. \frac{1}{2} X = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(4a^2 + 3m^2b^2)}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{(a^2 + 3m^2b^2)}}{a\sqrt{3}}$$

$$\cos. Z = -\frac{2a^2 - 3m^2b^2}{4a^2 + 3m^2b^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{(a^2 + 3m^2b^2)}}{\sqrt{(4a^2 + 3m^2b^2)}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(a^2 + 3m^2b^2)}}$$

Unter den in der Natur vorkommenden Rhomboedern mögen des Beispiels wegen die bei dem Kalkspath vorkommenden drei Rhomboeder  $\frac{D}{2}$ ,  $\frac{2D}{2}$  und  $\frac{D2,2}{2}$  dienen, welchen das Axenverhältniss  $a:b:b = \sqrt{27}:\sqrt{37}:\sqrt{37}$  als Grundverhältniss zu Grunde liegt:

$\frac{D}{2}$	Endkanten	1050	5' 10"	Seitenkanten	740	54' 50"
$\frac{2D}{2}$	„	78	51 2	„	101	8 58
$\frac{D2,2}{2}$	„	134	57 9	„	45	2 51.

## 2) Die Skalenoeder.

(Syn. Drei- und Dreikantner; Weiss. Ungleichkantige sechsstellige Pyramiden; Mohs. Bipyramoide; Hausmann. Kalkpyramiden; v. Raumer. Hexagonale Skalenoeder; Naumann. Dihexagonale Skalenoeder; Breithaupt.)

Ein Skalenoeder ist eine von zwölf gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt mit achtzehn Kanten und acht Ecken, deren Flächen in sechs Paare vertheilt sind. Sie entstehen durch Hemiedrie der Didodekaeder dadurch, dass wenn

man die Didodekaederflächen in zwölf Paare nach den Dihexaederflächen der Hauptreihe vertheilt betrachtet, die abwechselnden dieser Paare herrschend werden, gerade so wie es beim Uebergang der Dihexaeder der Hauptreihe in die Rhomboeder der Fall war in Bezug auf die einzelnen Flächen, welche hier den Paaren entsprechen. Da die Flächen eines solchen Paares an den Nebenkanten liegen, so kann man auch sagen, dass die Skalenoeder aus den Didodekaedern dadurch hervorgehen, dass die an den abwechselnden Nebenkanten liegenden Flächenpaare herrschend werden. Das Zeichen der Skalenoeder ist demnach auch wiederum das der Didodekaeder mit dem Nenner 2, welcher aber zur Unterscheidung der obigen schon angeführten Hemieder unter einen doppelten Theilungsstrich gesetzt wird, um damit zu gleicher Zeit die Parallelität der Flächen auszudrücken, und die beiden jedesmaligen aus einem Holoeder hervorgehenden Gegenhemieder werden durch den Accent an dem D des einen unterschieden, so dass also z. B. die beiden aus dem Didodekaeder  $mD$  hervorgehenden Skalenoeder durch  $\frac{mD}{2}$  und  $\frac{mD'}{2}$  bezeichnet und unterschieden werden.

Die Kanten eines jeden Skalenoeders sind dreierlei Art: sechs längere stumpfere und sechs kürzere schärfere Endkanten, und sechs Seitenkanten. Die Endkanten sind symmetrisch und drei jeder Art gehen untereinander abwechselnd von einem Endpunkt der Hauptaxe aus und verbinden denselben durch ihre Kantenlinien mit den horizontalen Zwischenaxen, welche durch das Centrum ungleich getheilt werden. Die längeren Endkanten sind die unveränderten Nebenkanten des entsprechenden Holoeders und in ihnen enden die kürzeren Hälften der Zwischenaxen, welche dieselben wie im Holoeder sind. Die Seitenkanten sind unregelmässig und gehen wie die Seitenkanten der Rhomboeder im Zickzack; ihre Kantenlinien werden durch die Endpunkte der Nebenaxen halbirt und durch diese Halbirtungspunkte ist die Ebene des Mittelqueerdurchschnittes gelegt. Die Ecken sind zweierlei Art: zwei symmetrische sechskantige, die Endecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind und welche von den abwechselnden Endkanten gebildet werden; sechs unregelmässige vierkantige, die Seitenecken, deren Scheitelpunkte zu je drei abwechselnd in einer dem Mittelqueerdurchschnitt parallelen Ebene liegen, also drei abwechselnde in einer Ebene oberhalb und drei abwechselnde in einer Ebene unterhalb wie die Seitenecken der Rhomboeder; die Ecken selbst sind gebildet von je zwei Seitenkanten und zwei verschiedenen Endkanten. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Zwölfseit; die vertikalen Hauptschnitte sind Rhomben und die vertikalen Nebenschnitte Rhomboide.

Da die Lage der Skalenoederflächen durch dasselbe Axenverhältniss bestimmt wird, wie die Lage der Didodekaederflächen, also im Allgemeinen durch das schon oben näher bestimmte Verhältniss  $(A:B:nB)$  oder  $(A:nB:B)$ , so werden auch die

Kantenwinkel im Allgemeinen durch die in ihm enthaltenen Grössen bestimmt werden. Bezeichnet man nun die kürzeren Endkanten mit X, die längeren mit Y und die Seitenkanten mit Z, so ist nur die Grösse für X und Z anzugeben, da die Grösse des Winkels Y, des der längeren Endkanten mit der des Winkels Y der Didodekaeder übereinstimmt, indem die längeren Endkanten die unveränderten Nebenkanten der Didodekaeder sind. Es ist:

$$\cos. X = \frac{2A^2(2n^2 - 2n - 1) + 3n^2B^2}{4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{[4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{[A^2(2n-1)^2 + 3n^2B^2]}}{A\sqrt{3}};$$

$$\cos. Z = \frac{2A^2(n^2 + 2n - 2) - 2n^2B^2}{4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{[A^2(2-n)^2 + 3n^2B^2]}}{\sqrt{[4A^2(n^2 - n + 1) + 3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{nA\sqrt{3}}{\sqrt{[A^2(2-n)^2 + 3n^2B^2]}}$$

Als Beispiele der Skalenoeder mögen die drei bei dem Kalkspath beobachteten und auf das Grundverhältniss  $a:b:b = \sqrt{27}:\sqrt{37}:\sqrt{37}$  bezogenen Skalenoeder  $\frac{2D\frac{4}{3}}{2}$ ,  $\frac{3D\frac{3}{2}}{2}$  und  $\frac{5D\frac{3}{4}}{2}$  mit ihren Kantenwinkeln dienen.

	Kürzere	längere Endkanten.	Seitenkanten.
$\frac{2D\frac{4}{3}}{2}$	1360 2' 42"	1550 48' 49"	1130 44' 26"
$\frac{3D\frac{3}{2}}{2}$	104 37 52	144 24 17	132 58 25
$\frac{5D\frac{3}{4}}{2}$	109 1 20	134 27 37	150 44 19.

### 3) Die hemiedrischen Dihexaeder.

(Syn. Hexagonale Pyramiden von abnormer Flächenstellung; Naumann. Dihexaederähnliche Hemididodekaeder; v. Glocker.)

Der allgemeine Charakter dieser Krystallformen ist derselbe, wie der der oben angeführten Dihexaeder, nämlich dass sie von zwölf gleichschenkligen Dreiecken umschlossen sind, welche untereinander achtzehn Kanten und acht Ecken der oben angegebenen Art bildend, in zwei sechszählige Systeme so vertheilt sind, dass jedes derselben bei gemeinschaftlicher Basis eine gleichkantige sechsseitige Pyramide bildet und dass die gerade Verbindungslinie der Gipfelpunkte beider Pyramiden die Hauptaxe ist. Sie unterscheiden sich von den oben aufgeführten holodrischen Dihexaedern durch die Lage der Flächen, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht. Sie

sind nämlich Hemieder der Didodekaeder und entstehen aus denselben dadurch, dass die an den Seitenkanten liegenden Flächenpaare abwechselnd herrschend werden, also gerade so, wie die hemiedrischen quadratischen Oktaeder aus den Dioktaedern. Die Lage ihrer Flächen wird demnach auch wieder durch das allgemeinste Axenverhältniss  $A:B:nB$  oder  $A:nB:B$  der Didodekaederflächen allgemein bestimmt, so dass sie ihrer Lage gemäss eine Zwischenreihe zwischen den Dihexaedern der Haupt- und Nebenreihe bilden und daher auch Dihexaeder der Zwischenreihe genannt werden können. Eine Fläche derselben ist also durch den Endpunkt der Hauptaxe, durch den Endpunkt einer unveränderten halben Nebenaxe und durch den Endpunkt der durch  $n$  vervielfachten anderen halben Nebenaxe eines Sextanten gelegt, wodurch die Endpunkte der Nebenaxen und der horizontalen Zwischenaxen durch nichts in den äusseren Begrenzungselementen bestimmt sind. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein regelmässiges Sechseit und die vertikalen Haupt- und Nebenschnitte sind Rhomben. Das Zeichen dieser hemiedrischen Dihexaeder ist zunächst das der Didodekaeder mit dem Nenner 2, wobei auch wieder wegen des Parallelismus der Flächen der doppelte Theilungsstrich anzuwenden ist; zum Unterschiede jedoch von den Skalenoedern wird noch der Buchstabe  $r$  oder  $l$  vorgesetzt, insofern man wieder auf die Lage der Didodekaederflächen gegen die Dihexaederflächen der Hauptreihe Rücksicht nimmt, denn jedes vierflächige um eine Nebenecke gruppirtes Flächensystem, welches je zwei an einer Seitenkante liegenden Flächen der Dihexaeder entspricht, wird durch die Nebenkanten in eine rechte und linke Hälfte getheilt, und durch die Hemiedrie werden entweder alle auf gleiche Weise rechts oder links liegenden Hälften dieser Systeme herrschend, um ein hemiedrisches Dihexaeder hervorzubringen. So würden also z. B. die aus einem Didodekaeder  $mDn$  hervorgehenden hemiedrischen Dihexaeder durch  $r \frac{mDn}{2}$  und  $l \frac{mDn}{2}$  unterschieden und bezeichnet werden.

Was die Grösse der Kantenwinkel betrifft, so sind nur die mit  $X$  bezeichneten Endkanten zu bestimmen, die Seitenkanten sind die gleichnamigen unveränderten des jedesmaligen Holoeders; für den Kantenwinkel  $X$  gelten im Allgemeinen nachfolgende Funktionen, welche mit denen der Endkanten der Trapezoiddihexaeder übereinstimmen:

$$\cos. X = -\frac{2A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{A\sqrt{(n^2-n+1)}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{3} \sqrt{[A^2(n^2-n+1)+n^2B^2]}}{A\sqrt{(n^2-n+1)}}$$

## 4) Die hemiedrischen hexagonalen Prismen.

(Syn. Hexagonale Prismen von abnormer Flächenstellung; Naumann.)

Die hemiedrischen hexagonalen Prismen unterscheiden sich der Gestalt nach nicht von den beiden hexagonalen Prismen der Haupt- und der Nebenreihe, indem sie so wie diese gleichseitig-sechsseitige Prismen sind, bei denen ein auf die Kanten senkrecht geführter Schnitt ein regelmässiges Sechseck ist. Die Flächen eines solchen Prisma sind gleichfalls der Hauptaxe parallel, aber durch die Lage zu den Nebenaxen unterscheiden sie sich von  $\infty D$  und  $\infty D_2$ . Sie entstehen nämlich durch Hemiedrie der dodekagonalen Prismen, indem die abwechselnden Flächen herrschend werden, und werden daher auch durch das Zeichen derselben,  $\infty D_n$ , mit dem Nenner 2 bezeichnet. Die beiden jedesmaligen Gegenhemieder eines Holoceders kann man in Bezug auf die hemiedrischen Dihexaeder durch die vorgesetzten Buchstaben r und l unterscheiden, indem durch die Hemiedrie entweder alle rechts an den Nebenkanten liegenden Flächen oder alle links liegenden herrschend werden, so dass also die beiden Zeichen der Gegenhemieder allgemein  $r \frac{\infty D_n}{2}$  und  $l \frac{\infty D_n}{2}$  sein werden. Vermöge der Entstehungsweise eines solchen Prisma sind seine Flächen durch den Endpunkt einer unveränderten Nebenaxenhälfte und der anderen durch n vervielfachten parallel der Hauptaxe gelegt, welche Lage das Verhältniss  $(\infty a : b : nb)$  oder  $(\infty a : nb : b)$  angiebt.

## C. Tetartoedrische Formen.

## a) Mit nicht parallelen Flächen.

## 1) Die Trapezoidditrioeder.

(Syn. Trigonale Trapezoeder; Naumann. Ditrigonale Trapezoeder; Breithaupt. Von Trapezoiden begrenzte pyramidenähnliche Gestalten; Mohs. Plagieder; Haidinger. Trigontrapezoeder; v. Glocker.)

Ein Trapezoidditrioeder ist eine von sechs gleichen und ähnlichen Trapezoiden umschlossene Gestalt, mit zwölf unregelmässigen Kanten und acht dreikantigen Ecken, deren Flächen in zwei dreizählige Systeme vertheilt sind.

Sie entstehen durch Hemiedrie der Diploditrioeder oder der Skalenoeder oder der Trapezoiddihexaeder, und sind demnach Tetartoeder der Didodekaeder. Aus den Diploditrioedern entstehen sie durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen, aus den Skalenoedern durch Herrschendwerden der an den abwechselnden Seitenkanten liegenden Paare und aus den Trapezoiddihexaedern durch Herrschendwerden der an den abwechselnden Grundkanten liegenden Paare. Ihr

Zeichen ist dasjenige des Holoeders mit dem Nenner 4, und die vier möglichen Tetartoeder werden durch die vorgesetzten Buchstaben r und l und den beigelegten Accent unterschieden, wodurch einerseits die Lage der Flächen zu den Nebenkanten im Holoeder und anderseits die entgegengesetzte Stellung angegeben wird, so dass also die vier Zeichen für die vier Tetartoeder eines Holoeders, z. B. der vier möglicherweise aus einem Didodekaeder  $mDn$  hervorgehenden Trapezoidditrioeder, die Zeichen  $r\frac{mDn}{4}$ ,  $r\frac{mD'n}{4}$ ,  $l\frac{mDn}{4}$  und  $l\frac{mD'n}{4}$  sein würden.

Die Flächen der Trapezoidditrioeder sind von der Art, dass von den vier Seiten der Trapezoide zwei gleichlang und verschieden von den beiden anderen unter sich ungleich sind; hiernach werden auch die Kanten selbst dreierlei Art sein, nämlich: sechs Endkanten, deren Kantenlinien zu je drei von den Endpunkten der Hauptaxe ausgehen, ferner drei längere stumpfere und drei kürzere schärfere Seitenkanten, welche untereinander einzeln abwechselnd im Zickzack laufen, und deren Halbierungspunkte die Endpunkte der ungleich getheilten Nebenaxen sind. Die Ecken sind zweierlei Art: zwei regelmässige, die Endecken, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind, und welche von den Endkanten gebildet werden; sechs unregelmässige, die Seitenecken, welche von je einer Endkante und zwei verschiedenen Seitenkanten gebildet werden und deren Scheitelpunkte zu je drei in einer dem Mittelqueerdurchschnitt parallelen Ebene liegen. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Sechseck, die vertikalen Hauptschnitte sind Deltoide.

Da die Lage der Flächen allgemein durch das Axenverhältniss der Didodekaederflächen  $(A:B:nB)$  oder  $(A:nB:B)$  bestimmt wird, so wird auch die Grösse der Kantenwinkel durch die in diesem Verhältniss enthaltenen Grössen ausgedrückt werden. Wenn die Endkanten mit  $X$ , die beiderlei Seitenkanten durch  $Y$  und  $Z$  bezeichnet werden, so ist die Grösse der einen von den letzteren, welche die unveränderten Grundseitenkanten der Trapezoiddihexaeder oder die unveränderten Seitenkanten der Skalenoeder sind und mit  $Z$  bezeichnet werden, schon oben unter dieser Bezeichnung bestimmt; für die Winkel  $X$  aber und  $Y$  ergeben sich nachfolgende Werthe:

$$\cos. X = \frac{2A^2(n^2-n+1)-3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{A\sqrt{3}\sqrt{(n^2-n+1)}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}}{A\sqrt{3}\sqrt{(n^2-n+1)}}$$

$$\cos. Y = \frac{2A^2(2n^2-2n-1)+3n^2B^2}{4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[A^2(2n-1)^2+3n^2B^2]}}{\sqrt{[4A^2(n^2-n+1)+3n^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{[A^2(2n-1)^2+3n^2B^2]}}$$

## 2) Die tetartoedrischen Ditrioeder.

Unter diesem Namen sind diejenigen Ditrioeder verstanden, welche durch Hemiedrie der Diploeditrioeder und hemiedrischen Dihexaeder hervorgehen und in ihren allgemeinsten Gestaltseigenschaften mit den hemiedrischen Ditrioedern übereinstimmen, nur in der Lage der Flächen verschieden sind. Aus den Diploeditrioedern entstehen sie durch Herrschendwerden der an den abwechselnden Seitenkanten liegenden Flächenpaare und auf gleiche Weise aus den hemiedrischen Dihexaedern; sie sind demnach Tetartoeder der Didodekaeder und erhalten das Zeichen der Holoeder mit dem Nenner 4. Zum Unterschiede aber von den Trapezoidditrioedern werden die Buchstabenausdrücke  $\frac{r}{1}$  oder  $\frac{1}{r}$  ausser dem Accente beigefügt, indem nämlich von den beiden an einer Seitenkante liegenden Flächen die eine rechts und die andere links bei gleicher Betrachtungsweise nach Flächenpaaren liegt, so dass also z. B. die 4 möglicherweise aus einem Didodekaeder  $mD$  hervorgehenden tetartoedrischen Ditrioeder durch die Zeichen  $\frac{r}{1} \frac{mD}{4}$ ,  $\frac{r}{1} \frac{mD'}{4}$ ,  $\frac{1}{r} \frac{mD}{4}$  und  $\frac{1}{r} \frac{mD'}{4}$  unterschieden und bezeichnet werden. Die Endkantenwinkel stimmen in der Grösse mit den Endkantenwinkeln der Trapezoidditrioeder überein und die Seitenkantenwinkel sind die unveränderten des Holoeders.

## 3) Die tetartoedrischen trigonalen Prismen.

Dies sind diejenigen gleichseitig-dreieitigen Prismen, welche durch Hemiedrie der ditrigonalen und der hemiedrischen hexagonalen Prismen dadurch hervorgehen, dass die abwechselnden Flächen derselben herrschend werden. Sie sind demnach Tetartoeder der dodekagonalen Prismen und erhalten das Zeichen derselben  $\infty Dn$  mit dem Nenner 4, wobei die Buchstaben  $r$  und  $l$  ausser dem Accent beigefügt werden, um die vier Tetartoeder eines Holoeders zu unterscheiden, so dass diese vier Tetartoeder durch  $r \frac{\infty Dn}{4}$ ,  $r \frac{\infty D'n}{4}$ ,  $l \frac{\infty Dn}{4}$  und  $l \frac{\infty D'n}{4}$  unterschieden und bezeichnet werden. Der Kantenwinkel ist  $60^\circ$ .

## b) Mit parallelen Flächen.

## Die tetartoedrischen Rhomboeder.

(Syn. Rhomboeder von abnormer Flächenstellung; Naumann. Rhombentetartoeder.)

Hierunter sind diejenigen Körper zu verstehen, welche ihrer allgemeinen Beschaffenheit nach mit den oben angeführten Rhomboedern, den Hemiedern der Dihexaeder der Hauptreihe, übereinstimmen, aber durch Hemiedrie der hemiedri-

schen Dihexaeder und der Skalenoeder dadurch hervorgehen, dass die abwechselnden Flächen herrschend werden. Sie sind mithin Tetartoeder der Didodekaeder und werden zum Unterschiede von den schon erwähnten Tetartoedern durch den doppelten Theilungsstrich unterschieden, um zugleich auf die Parallelität der Flächen hinzuweisen. Die vier aus einem Holoeder hervorgehenden Tetartoeder werden ausserdem noch durch die vorgesetzten Buchstaben r und l und durch den beigefügten Accent unterschieden, so dass die vier aus einem Didodekaeder z. B.

aus  $D_n$  hervorgehenden tetartoedrischen Rhomboeder die Zeichen  $r\frac{D_n}{4}$ ,  $r'\frac{D_n}{4}$ ,  $l\frac{D_n}{4}$  und  $l'\frac{D_n}{4}$  erhalten. Der Endkantenwinkel stimmt in der Grösse mit dem der schon erwähnten Tetartoeder überein und der Seitenkantenwinkel ist der Ergänzungswinkel desselben zu zwei Rechten.

## Darstellung der zweifachen Combinationen.

### A. Holoeder mit Holoedern.

#### 1) An der Grundform D

bilden die Flächen:

mD, Zuschärfung der Seitenkanten;

$\infty D$ , gerade Abstumpfung der Seitenkanten;

Dmm, sechsfl. Zuspitzung der Endecken, die Zusp. Fl. auf die Fl. ger. aufgesetzt;

$D\infty\infty$ , ger. Abst. der Endecken;

$D_n$ , Zuschärfung der Endkanten;

$D_2$ , ger. Abst. der Endkanten;

$mD_2$ , Zusp. der Seitenecken, die Zusp. Fl. auf die Endkanten ger. aufgesetzt;

$\infty D_2$ , ger. Abst. der Seitenecken;

$D_2m,m$ , sechsfl. Zusp. der Endecken, die Zusp. Fl. auf die Kanten ger. aufgesetzt;

$Dnm,m$ , zwölf. Zusp. der Endecken;

$mD_n$ , vierfl. Zusp. der Seitenecken, die Zusp. Fl. auf die Fl. aufgesetzt, wobei die Combinationskanten mit den Endkanten entweder nach den Endecken hin convergiren, oder parallel laufen, oder nach den Seitenecken hin convergiren, wenn m kleiner, oder gleich oder grösser als n ist;

$\infty D_n$ , Zusp. der Seitenecken, die Zusp. Fl. auf die Seitenkanten ger. aufgesetzt.