dere Erklärung deutlich genug den Zusammenhang aller holoedrischen Formen und die verschiedenen möglichen Reihen zeigen werden, zumal wenn man auf das zurücksieht, was im regulären und quadratischen Systeme über diese Reihen gesagt worden ist, so dass auch hier die grössere Mannigfaltigkeit zufolge der Ungleichheit aller drei Axen keine Schwierigkeit des Verständnisses hervorbringen wird.

Diese schematische Uebersicht aller einfachen holoedrischen Formen ergiebt sich auch aus der in Fig. 6 dargestellten schematischen Uebersicht aller Axenverhältnisse für einen Oktanten, welche auch zugleich den Zusammenhang und den Uebergang der schon dargestellten Systeme zeigt. Wie die Flächen aller abgeleiteten Formen um die Fläche der Grundform für einen Oktanten vertheilt sind, zeigt die Fig. 7, in welcher jeder beliebige ungleichseitige Triangel die Fläche O der Grundform darstellen kann.

B. Hemiedrische Formen.

a) Mit nicht parallelen Flächen.

Die rhombischen Tetraeder.

(Syn. Rhombische Sphenoeder; Breithaupt und Bernhardi. Rhombische Sphenoide; Naumann. Tetraedrische Gestalten, von ähnlichen und gleichen ungleichseitigen Dreiecken begrenzt; Mohs. Tartaroide; Haidinger.)

Ein rhombisches Tetraeder ist eine von vier gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Triangeln umschlossene Gestalt mit sechs unregelmässigen Kanten und vier unregelmässigen dreikantigen Ecken, und geht durch Hemiedrie eines rhombischen Oktaeders dadurch hervor, dass von den acht Flächen desselben vier abwechselnde sich erweitern und die vier anderen bis zum gänzlichen Verschwinden zurücktreten. Auf diese Weise gehen aus jedem rhombischen Oktaeder zwei gleiche nur verschieden gestellte Tetraeder hervor, welche in ihrer Bezeichnung durch den beigefügten Accent unterschieden werden. Das Zeichen selbst eines Tetraeders ist das desjenigen Oktaeders, aus dem es entstanden ist, mit dem Nenner 2, und die Namen der Tetraeder ergeben sich aus denen der Oktaeder, nur mit dem Unterschiede, dass, wo bei den Oktaedern das Beiwort spitzere steht, bei den Tetraedern das Beiwort schärfere gebraucht wird, weil es sich hier auf die Kanten bezieht.

Die sechs Kanten eines jeden Tetraeders, dessen Flächenlage allgemein durch das Axenverhältniss (A:B:C) wie bei den Oktaedern bestimmt wird, abgesehen von jeder Beziehung auf eine Grundform, sind dreierlei Art, von jeder Art zwei gleiche, deren Kantenlinien durch die Endpunkte einer und derselben Axe, parallel demselben Hauptschnitt und im gleichnamigen Nebenschnitt liegen. Man unterscheidet zwei Endkanten, deren Kantenlinien durch die Endpunkte der

Hauptaxe parallel dem Mittelqueerdurchschnitt gelegt sind, und von denen jede in einem vertikalen Nebenschnitt parallel der zugehörigen horizontalen Zwischenaxe liegt. Ferner giebt es zwei makrodiagonale und zwei brachydiagonale Kanten. Die Kantenlinien der ersteren sind durch die Endpunkte der Makrodiagonale dem brachydiagonalen Hauptschnitt parallel gelegt, die der letzteren dagegen durch die Endpunkte der Brachydiagonale parallel dem makrodiagonalen Hauptschnitt. Ausserdem liegt jede makrodiagonale Kantenlinie in einem makrodiagonalen Nebenschnitt der zugehörigen makrodiagonalen Zwischenaxe parallel und jede brachydiagonale Kantenlinie in einem brachydiagonalen Nebenschnitt parallel der zugehörigen brachydiagonalen Zwischenaxe. Jede Kantenlinie wird durch die Axe, durch deren Endpunkt sie gelegt ist, in zwei gleiche Theile getheilt. Die Ecken sind unter sich gleich und von je drei verschiedenen Kanten gebildet. Die Hauptschnitte sind von derselben Gestalt, wie in dem entsprechenden Holoeder, die Nebenschnitte aber sind gleichschenklige Triangel.

Wenn die Endkanten mit Z, die makrodiagonalen Kanten mit Y und die brachydiagonalen Kanten mit X bezeichnet werden, so wird die Grösse der Kantenwinkel im Allgemeinen durch nachfolgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. Z = \frac{A^2B^2 + A^2C^2 - B^2C^2}{A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2},\ \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{A\sqrt{(B^2+C^2)}}{\sqrt{(A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2)}},$$

$$\tang. \tfrac{1}{2} Z = \frac{BC}{A\sqrt{(B^2+C^2)}}.$$

$$\cos. Y = \frac{A^2B^2 + B^2C^2 - A^2C^2}{A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2},\ \cos. \tfrac{1}{2} Y = \frac{B\sqrt{(A^2+C^2)}}{\sqrt{(A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2)}},$$

$$\tang. \tfrac{1}{2} Y = \frac{AC}{B\sqrt{(A^2+C^2)}};$$

$$\cos. X = \frac{A^2C^2 + B^2C^2 - A^2B^2}{A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2},\ \cos. \tfrac{1}{2} X = \frac{C\sqrt{(A^2+B^2)}}{\sqrt{(A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2)}},$$

$$\tang. \tfrac{1}{2} X = \frac{AB}{C\sqrt{(A^2+B^2)}};$$

b) Hemieder mit parallelen Flächen.

1) Die rhombischen Hemioktaeder.

Mit diesem Namen werden die hemiedrischen rhombischen Prismen benannt, um sie von den holoedrischen rhombischen Prismen zu unterscheiden, für welche der Name rhombische Prismen ausschliesslich im Gebrauch bleibt, wie schon oben erwähnt wurde. Die Hemioktaeder entstehen, wie bereits der Name angiebt, durch

Hemiedrie der rhombischen Oktaeder, nur nach einem anderen Gesetz, als wie die rhombischen Tetraeder. Wenn man nämlich die acht Flächen eines Oktaeders in Bezug auf ihre Vertheilung nach den gleichnamigen Kanten betrachtet, so bilden sie stets vier Paare; um nun zu unterscheiden, wie man die Vertheilung angesehen wissen will, könnte man am einfachsten die Paare nach den Kanten selbst, an denen sie liegen, benennen, ein später einleuchtender Grund aber verlangt eine andere Benennung nach den Zwischenaxen, denen die Kantenlinien parallel gehen. Hiernach werden je zwei Flächen, welche eine makrodiagonale Kante bilden, brachydiagonales Paar genannt werden, weil die makrodiagonale Kantenlinie einer brachydiagonalen Zwischenaxe parallel ist; ein makrodiagonales Paar aber heissen je zwei Flächen, welche eine brachydiagonale Kante bilden, da deren Kantenlinie einer makrodiagonalen Zwischenaxe parallel ist; je zwei Flächen endlich, welche eine Seitenkante bilden, heissen horizontales Paar, weil die Seitenkantenlinien den horizontalen Zwischenaxen parallel gehen. So betrachtet und benannt bilden also die acht Flächen eines Oktaeders entweder vier brachydiagonale, oder vier makrodiagonale, oder vier horizontale Paare. Wenn nun nach diesen Paaren eine Hemiedrie eintritt, und von vier gleichnamigen Paaren zwei abwechselnde zu parallelen Kantenlinien gehörige herrschend werden, während die beiden anderen bis zu ihrem gänzlichen Verschwinden zurücktreten, so entstehen aus einem Oktaeder jederzeit zwei gleiche nur verschieden gestellte Hemieder, Hemioktaeder genannt, von der Form rhombischer Prismen, deren Richtungslinie eine gleichnamige Zwischenaxe ist. Da die Zwischenaxen und die nach ihnen benannten Paare dreierlei Art sind, so entstehen auch aus jedem rhombischen Oktaeder dreierlei Hemioktaeder, entweder zwei brachydiagonale, oder zwei makrodiagonale, oder zwei horizontale Hemioktaeder.

Ein brachydiagonales Hemioktaeder entsteht demnach aus einem rhombischen Oktaeder dadurch, dass zwei an zwei parallelen makrodiagonalen Kantenlinien liegende brachydiagonale Flächenpaare herrschend werden, während die beiden anderen verschwinden; die Flächen des dadurch hervorgehenden hemiedrischen Prisma sind derjenigen brachydiagonalen Zwischenaxe als Richtungslinie parallel, welche den beiden makrodiagonalen Kantenlinien, an denen die herrschend gewordenen Paare anliegen, parallel läuft. Die Kanten sind zweierlei Art, zwei derselben sind die unveränderten makrodiagonalen Kanten des Oktaeders unp behalten auch hier diesen Namen; ihre Kantenlinien sind durch je zwei Endpunkte der Hauptaxe und der Makrodiagonale gelegt. Die anderen beiden Kanten, deren Kantenlinien durch die Endpunkte der Brachydiagonale parallel der Ebene des makrodiagonalen Hauptschnittes gelegt sind, heissen brachydiagonale Kanten.

Ein makrodiagonales Hemioktaeder entsteht aus einem rhombischen Oktaeder dadurch, dass zwei an zwei parallelen brachydiagonalen Kantenlinien liegende makrodiagonale Paare herrschend werden, während die beiden anderen verschwinden. Die Richtungslinie dieses so entstandenen hemiedrischen Prisma ist diejenige makrodiagonale Zwischenaxe, welche den beiden brachydiagonalen Kantenlinien, deren anliegende Flächen herrschend werden, parallel ist. Die Kanten des Hemioktaeders werden als brachydiagonale und makrodiagonale unterschieden, von denen die ersteren die zwei unveränderten des Oktaeders selbst sind, die letzteren aber die, deren Kantenlinien durch die Endpunkte der Makrodiagonale parallel dem brachydiagonalen Hauptschnitt gelegt sind.

Ein horizontales Hemioktaeder endlich entsteht dadurch, dass zwei an zwei parallelen Seitenkantenlinien liegende horizontale Flächenpaare herrschend werden, während die beiden anderen verschwinden. Die Richtungslinie des so entstandenen hemiedrischen Prisma ist eine horizontale Zwischenaxe und zwar die, denen die zwei erwähnten Seitenkantenlinien parallel gehen. Die beiden unveränderten Seitenkanten des Oktaeders behalten auch in dem Hemioktaeder diesen Namen, während die beiden anderen, deren Kantenlinien durch die Endpunkte der Hauptaxe parallel dem Mittelqueerdurchschnitt gehen, Endkanten heissen.

Was die Grösse der Kantenwinkel in den verschiedenen Hemioktaedern betrifft, so ergiebt sich dieselbe aus den Kantenwinkeln der Holoeder, da je zwei Kanten immer die unveränderten des Oktaeders selbst sind, und die zwei anderen die Winkel jener zu 180° ergänzen. Um die Hemioktaeder in ihrer Bezeichnung als Hemieder der Oktaeder von den Tetraedern zu unterscheiden, wird es zunächst das einfachste sein, den Nenner 2 unter einen doppelten Theilungsstrich zu setzen, wodurch zugleich die Parallelität der Hemieder angegeben wird; da aber nicht aus jedem rhombischen Oktaeder nur zwei Hemioktaeder entstehen können, wie zwei Tetraeder entstehen, sondern dreierlei Hemioktaeder möglich sind, so müssen auch diese dreierlei Hemioktaeder eines und desselben Oktaeders unter sich durch irgend ein Zeichen unterschieden werden. Am kürzesten geschieht dies jedenfalls dadurch, dass man für die makrodiagonalen Hemioktaeder über das O das Zeichen ($-$) und für die brachydiagonalen Hemioktaeder über das O das Zeichen ($\smile$) setzt, während für die horizontalen Hemioktaeder das unbezeichnete O bleibt. So würden also z. B. die aus einem terminalspitzeren rhombischen Oktaeder der brachydiagonalen Nebenreihe, aus $nO\breve{m}$ hervorgehenden dreierlei Hemioktaeder in ihrer Bezeichnung durch $\frac{n\bar{O}\breve{m}}{\overline{2}}$, $\frac{n\breve{O}\breve{m}}{\overline{2}}$, und $\frac{nO\breve{m}}{\overline{2}}$ dargestellt werden. Die jedesmaligen beiden gleichen nur verschieden gestellten Gegenhemieder werden durch den dem O des einen beigefügten Accent unterschieden, wonach also beispielsweise die sechs möglichen aus der Grundform O hervorgehenden Hemioktaeder durch die Zeichen $\frac{O}{\overline{2}}$, $\frac{O'}{\overline{2}}$, $\frac{\bar{O}}{\overline{2}}$, $\frac{\bar{O}'}{\overline{2}}$, $\frac{\breve{O}}{\overline{2}}$ und $\frac{\breve{O}'}{\overline{2}}$ dargestellt werden.

2) Die rhombischen Hemiprismen.

So werden die hemiedrischen Dyoeder genannt, um sie von den ausschliesslich Dyoeder genannten holoedrischen Dyoedern zu unterscheiden. Sie entstehen durch Hemiedrie der rhombischen Prismen dadurch, dass zwei parallele Flächen eines solchen herrschend werden, während die beiden anderen verschwinden. Es giebt demnach so viele Arten von Hemiprismen, als es Prismen giebt, welche daher auch im Allgemeinen als vertikale, makrodiagonale und brachydiagonale Hemiprismen unterschieden werden, je nachdem sie aus einem Prisma der vertikalen, makrodiagonalen oder brachydiagonalen Reihen hervorgegangen sind. Ihr Zeichen ist immer das des entsprechenden holoedrischen Prisma mit dem Nenner 2, und die beiden jedesmaligen Gegenhemieder werden durch den dem O des einen beigefügten Accent unterschieden, z. B. $\frac{n O \overline{\infty}}{2}$ und $\frac{n O' \overline{\infty}}{2}$.

C. Tetartoedrische Formen.

Die Tetartooktaeder.

Mit diesem Namen werden die tetartoedrischen Dyoeder benannt, welche durch Tetartoedrie der rhombischen Oktaeder entstehen, indem von den acht Flächen eines solchen zwei einander parallele herrschend werden, während die anderen drei Paare paralleler Flächen bis zum gänzlichen Verschwinden zurücktreten. Ihre Bezeichnung ist zunächst die des Holoeders, also eines Oktaeders, mit dem Nenner 4, da aber aus jedem Oktaeder vier Tetartooktaeder hervorgehen, die unter sich zwar gleich, aber von verschiedener Stellung sind, so müssen diese wieder unter sich unterschieden werden. Man kann hierbei von einer zwar willkürlichen, aber meist sehr gewöhnlichen Stellung rhombischer Formen ausgehen, nämlich dass bei den Oktaedern und bei den Prismen der vertikalen Reihen die brachydiagonalen Kanten dem Beobachter zugekehrt und die makrodiagonalen Kanten rechts und links liegen. So werden nun von den vier Flächen eines Oktaeders, welche über dem Mittelqueerdurchschnitt eine vierseitige Pyramide bilden, zwei Flächen dem Beobachter zugekehrt und zwei abgewendet liegen, wesshalb sie vordere und hintere benannt und durch die vorgesetzten Buchstaben v und h unterschieden werden. Ausserdem werden dann die beiden abwechselnden mit oder ohne Accent neben dem Zeichen O geschrieben, so dass also die aus einem Oktaeder mO z. B. möglicherweise hervorgehenden Tetartooktaeder durch die Bezeichnung $v\frac{mO}{4}$, $v\frac{mO'}{4}$, $h\frac{mO}{4}$ und $h\frac{mO'}{4}$ unterschieden werden.