

Ändert sich nämlich das Axenverhältniss des regulären Systems ($a:a:a$) in ein Axenverhältniss des quadratischen Systems ($a:b:b$), so geht das reguläre Oktaeder in ein quadratisches Oktaeder der Hauptreihe über, welches die Grundform ist; jedes Triakisoktaeder zerfällt in ein spitzeres quadratisches Oktaeder der Hauptreihe und ein Uebergangsdioктаeder, das Granatoeder in das quadratische Prisma der Hauptreihe und das nächststumpferes Oktaeder, jedes Deltoidikositetraeder in ein gleichmässig spitzeres Dioктаeder und ein stumpferes quadratisches Oktaeder der Hauptreihe, das Hexaeder ist das quadratische Prisma der Nebenreihe und das Dyoeder, jedes Hexakisoktaeder in ein mehr spitzeres, ein mindest spitzeres und ein stumpferes Dioктаeder, und endlich jedes Tetrakishehexaeder in ein oktogonales Prisma, ein spitzeres und ein stumpferes quadratisches Oktaeder der Nebenreihe. Nach dieser Uebersicht erkennt man auch die Uebereinstimmung in den Combinationen der einzelnen Formen an O und untereinander, wobei die gleichmässige Bezeichnung um so mehr zu Statten kommt.

B. Hemiedrische Formen.

a) Mit nicht parallelen Flächen.

1) Die quadratischen Tetraeder.

(Syn. Tetragonale Sphenoide; Naumann. Tetraederähnliche Gestalten, von gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken begrenzt; Mohs. Tetragonale Sphenöeder oder Keilflächner; Breithaupt. Sphenoide; Haidinger.)

Ein quadratisches Tetraeder ist eine von vier gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Triangeln umschlossene Gestalt mit sechs Kanten und vier unregelmässigen dreikantigen Ecken.

In Bezug auf ihre Entstehung giebt es zwei Arten, hemiedrische und tetartoe-drische, von denen die letzteren weiter unten betrachtet werden. Die ersteren entstehen durch Hemiedrie der quadratischen Oktaeder der Hauptreihe, indem von den acht Flächen eines solchen Oktaeders vier abwechselnde herrschend werden und die vier anderen bis zum gänzlichen Verschwinden zurücktreten. Daher werden die Tetraeder durch das Zeichen desjenigen Oktaeders, aus dem sie entstanden, bezeichnet, unter welches man den Nenner 2 setzt, und die beiden aus jedem Oktaeder hervorgehenden völlig gleichen, nur verschieden gestellten Tetraeder, von denen das eine das Gegentetraeder des anderen heisst, werden durch einen dem O beigefügten Strich unterschieden, wie schon im regulären System geschah.

Die Kanten sind zweierlei Art: zwei regelmässige horizontale, die Endkanten, deren Kantenlinien parallel dem Mittelqueerdurchschnitt durch die Endpunkte der Hauptaxe gelegt sind und durch diese Endpunkte halbirt werden, und von denen jede einer horizontalen Zwischenaxe parallel ist; ferner vier unregel-

mässige schief laufende, die Seitenkanten, welche durch die Endpunkte der Nebenaxen halbirt werden. Die Ecken sind gebildet von je zwei Seitenkanten und einer Endkante. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein Quadrat, die vertikalen Hauptschnitte sind Rhomben, die vertikalen Nebenschnitte gleichschenklige Triangel.

Vergleicht man die quadratischen Tetraeder mit dem regulären, so sind sie im Allgemeinen als scharfe und stumpfe zu unterscheiden; bei den ersteren sind die Endkanten schärfer und kürzer als die Seitenkanten und schärfer als die Kanten des regulären Tetraeders, bei den stumpferen sind die Endkanten stumpfer und länger als die Seitenkanten und stumpfer als die Kanten des regulären Tetraeders. Dieser Unterschied geht auch schon aus den zweierlei Oktaedern der Hauptreihe, den spitzen und stumpfen, hervor. Anderseits werden auch die Tetraeder in Bezug auf eine jedesmalige Grundform und die daraus hervorgehenden Tetraeder unter sich als schärfere und stumpfere unterschieden und bezeichnet, wodurch man im Allgemeinen folgende Zeichen erhält: $\frac{mO}{2}$, $\frac{mO'}{2}$, $\frac{O}{2}$, $\frac{O'}{2}$, $\frac{Omm}{2}$, $\frac{O'mm}{2}$.

Stellen A und B wie bei den Oktaedern ganz allgemein die halben Haupt- und Nebenaxen dar, so wird man für die Kantenwinkel die nachfolgenden Werthe erhalten, wobei durch X die Endkanten und durch Z die Seitenkanten bezeichnet werden:

$$\cos. X = -\frac{B^2 - 2A^2}{B^2 + 2A^2}, \cos. \frac{1}{2} X = \frac{B\sqrt{2}}{\sqrt{(B^2 + 2A^2)}}, \tan. \frac{1}{2} X = \frac{B}{A\sqrt{2}};$$

$$\cos. Z = \frac{B^2}{2A^2 + B^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{(A^2 + B^2)}}{\sqrt{(2A^2 + B^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Z = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}.$$

In den besonderen Fällen dürfen dann nur für A und B die entsprechenden Werthe des zugehörigen Axenverhältnisses gesetzt werden, nämlich bei $\frac{O}{2}$ die Grössen a und b, bei $\frac{mO}{2}$ die Grössen ma und b, und bei $\frac{Omm}{2}$ die Grössen a und mb. Als Beispiele für die Tetraederreihe mögen die aus dem Grundverhältniss des Kupferkieses abgeleiteten Tetraeder $\frac{O}{2}$, $\frac{2O}{2}$ und $\frac{O2,2}{2}$ dienen:

Grundform des Kupferkieses, O, worin a:b:b = $\sqrt{33}:\sqrt{34}:\sqrt{34}$;

$\frac{O}{2}$	Endkanten	71° 20' 13"	Seitenkanten	70° 7' 23"
$\frac{2O}{2}$	"	39 28 59	"	81 29 57
$\frac{O2,2}{2}$	"	110 16 32	"	47 40 49.

2) Die Diplotetraeder.

(Syn. Tetragonale Skalenoeder; Naumann. Ditetragonale Skalenoeder; Breithaupt. Pyramidenähnliche Gestalten, von ungleichseitigen Dreiecken begrenzt und von tetraedrischer Hauptform; Mohs. Disphene; Haidinger.)

Ein Diplotetraeder ist ein von acht gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Triangeln umschlossener Körper, mit zwölf Kanten und sechs Ecken, dessen Flächen in vier Paare nach den Flächen eines quadratischen Tetraeders vertheilt sind.

Die Kanten sind dreierlei Art: vier symmetrische kürzere schärfere und vier symmetrische längere stumpfere Endkanten, und vier unregelmässige Seitenkanten. Die Ecken sind zweierlei Art: zwei symmetrische vierkantige Endecken, welche von den abwechselnden Endkanten gebildet werden und deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind; vier unregelmässige vierkantige Seitenecken, welche von zwei verschiedenen End- und zwei Seitenkanten gebildet werden. Mit den quadratischen Tetraedern verglichen, entsprechen je zwei kürzere Endkanten je einer Endkante der Tetraeder, deren Flächen als in ihren Höhenlinien gebrochen angesehen werden können; die Seitenkanten entsprechen den Seitenkanten und die längeren Endkanten kommen über die Höhenlinien zu liegen. Es entstehen diese Körper durch Hemiedrie der Dioktaeder dadurch, dass von den acht an den Nebenkanten liegenden Paaren vier abwechselnde herrschend werden, während die vier anderen verschwinden, wie es bei den Oktaedern mit den einzelnen Flächen der Fall war. Die unveränderten Nebenkanten bilden dann die längeren Endkanten, welche demnach zur besseren Unterscheidung und der Kürze wegen diesen Namen beibehalten können, wohingegen die kürzeren Endkanten ausschliesslich mit dem Namen Endkanten bezeichnet werden. Das Zeichen der Diplotetraeder ist das der Dioktaeder mit dem Nenner 2, und die beiden aus jedem Dioktaeder hervorgehenden gleichen, nur verschieden gestellten Gegenhemieder, werden durch den dem O beigefügten Strich unterschieden. Hierdurch

gehen nachfolgende allgemeine Zeichen für die Diplotetraeder hervor, $\frac{Om}{2}$, $\frac{O'm}{2}$, $\frac{mOm}{2}$, $\frac{mO'm}{2}$, $\frac{mOn}{2}$, $\frac{mO'n}{2}$, $\frac{nOm}{2}$, $\frac{nO'm}{2}$, $\frac{Omn}{2}$ und $\frac{O'mn}{2}$, da es nämlich so viele Arten von Diplotetraedern geben muss, als Dioktaederarten unterschieden werden, und denen man auch analoge Namen ertheilen könnte, als: Uebergangsdiplo-tetraeder, gleichmässig-, mehr-, mindest spitzere und stumpfere Diplotetraeder, um ihren Ursprung anzudeuten.

Zufolge der Entstehung der Diplotetraeder sind die Nebenkantenlinien durch die Endpunkte der Hauptaxe und durch die der horizontalen Zwischenaxen gelegt, die Seitenkantenlinien dagegen werden durch die Endpunkte der Nebenaxen halbirt.

Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Oktogon, die beiden vertikalen Hauptschnitte sind Rhomben und die beiden vertikalen Nebenschnitte sind Deltoide. Um die Kantenwinkel zu bestimmen, kann man sich im Allgemeinen wieder der Grössen bedienen, wie sie in den beiden gleichen allgemeinsten Axenverhältnissen für je zwei über einer Tetraederfläche liegende Flächen, oder für je zwei zu einem Oktanten gehörige Dioktaederflächen, in $(A:xB:B)$ und $(A:B:xB)$ enthalten sind. Für jeden einzelnen Fall dürfen dann nur die entsprechenden Werthe gesetzt werden, wie bei den Dioktaedern angegeben ist. Wenn nun die Endkanten mit X , die Nebenkanten mit Y und die Seitenkanten mit Z bezeichnet werden, so sind die Werthe für Y dieselben, wie bei den Dioktaedern, da diese Kanten beiden gemeinschaftlich sind, für X und Z aber ist:

$$\cos. X = -\frac{x(xB^2 - 2A^2)}{(x^2+1)A^2 + x^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{(x+1)A}{\sqrt{2} \sqrt{[(x^2+1)A^2 + x^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{[(x-1)^2A^2 + 2x^2B^2]}}{(x+1)A};$$

$$\cos. Z = \frac{x^2B^2 - A^2(x^2 - 1)}{x^2B^2 + A^2(x^2 + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{(x^2B^2 + A^2)}}{\sqrt{[(x^2+1)A^2 + x^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Z = \frac{Ax}{\sqrt{(x^2B^2 + A^2)}}.$$

Als Beispiele mögen einige aus der Grundform des Kupferkieses abgeleitete Diplotetraeder dienen:

	Endkanten	Nebenkanten	Seitenkanten.
$\frac{O3}{2}$	990 46' 37"	1420 24' 55"	860 12' 49"
$\frac{3O3}{2}$	63 13 16	129 35 44	129 11 17
$\frac{3O3}{2}$	82 21 16	135 47 9	105 56 34
$\frac{4O2}{2}$	44 37 2	144 4 34	121 26 26
$\frac{O4,2}{2}$	125 31 41	162 27 1	51 7 24.

3) Die Trapezoidoktaeder.

(Syn. Tetragonale Trapezoeder; Naumann. Pyramidenähnliche Gestalten von trapezoidalen Flächen; Mohs. Quadratische Trapezoeder, v. Glocker. Ditetragonale Trapezoeder; Breithaupt. Trapezoeder; Haidinger.)

Ein Trapezoidoktaeder ist ein von acht gleichen und ähnlichen unsymmetrischen Trapezoidflächen umschlossener Körper, mit

sechszehn unregelmässigen Kanten und zehn Ecken, dessen Flächen in zwei vierzählige Systeme vertheilt sind.

Diese Körper entstehen auch durch Hemiedrie der Dioktaeder, aber dadurch, dass die abwechselnden Flächen herrschend werden, und die beiden aus einem jeden Dioktaeder auf diese Weise hervorgehenden Gegenhemieder werden durch die Beinamen rechts oder links gewendet unterschieden. Wenn man nämlich die Vertheilung der Dioktaederflächen nach den ihnen zu Grunde liegenden Oktaedern der Hauptreihe im Auge behält, so liegt in jedem der Flächenpaare die eine Fläche rechts, die andere links an der zugehörigen Nebenkante; werden nun in dem einen Falle alle auf gleiche Weise rechts liegenden Flächen herrschend, so entsteht ein rechts gewendetes Trapezoidoktaeder, in dem anderen Falle ein links gewendetes. Dieser Unterschied wird durch ein vorgesetztes r oder l an dem mit dem Nenner 2 versehenen Zeichen des Dioktaeders dargestellt, wodurch gleichzeitig diese Hemieder von den Diploetraedern unterschieden werden; so sind z. B. $r \frac{mOm}{2}$ und $l \frac{mOm}{2}$ die beiden aus dem Dioktaeder mOm hervorgehenden Trapezoidoktaeder. Es giebt dieser Körper möglicherweise so viele, als es Dioktaeder giebt, nur in der Natur ist ihr Vorkommen, so wie das der übrigen Hemieder dieses Systems, sehr sparsam.

Ueber ihre allgemeine Beschaffenheit gilt noch Folgendes: Die Kanten sind dreierlei Art, nämlich acht Endkanten, die zu je vier von den Endpunkten der Hauptaxe ausgehen; vier kürzere schärfere und vier längere stumpfere Seitenkanten, welche einzeln mit einander abwechselnd schief (im Zickzack) laufen. Die Ecken sind zweierlei Art: zwei regelmässige vierkantige Endecken, welche von den Endkanten gebildet werden und deren Scheitel die Endpunkte der Hauptaxe sind; acht unregelmässige dreikantige Seitenecken, welche von je drei verschiedenen Kanten gebildet werden und deren Scheitelpunkte nicht in einer Ebene, sondern in zwei dem Mittelqueerdurchschnitt parallelen Ebenen liegen, so dass vier abwechselnde in der einen und vier in der anderen liegen. Die Seitenkanten lassen sich durch ihre Beschaffenheit im Allgemeinen nicht in ihrer Lage bestimmen; ihre Kantenlinien werden zunächst durch die Ebene des Mittelqueerdurchschnittes halbt und in den Halbierungspunkten je vier gleicher enden auch gleiche Halbaxen, so dass also die Endpunkte der Nebenaxen und die der horizontalen Zwischenaxen je vier gleiche Kantenlinien halbiren. Hiernach kann man, analog den beiderlei Seitenecken der Dioktaeder, durch deren Scheitelpunkte die Endpunkte der horizontalen Axen bestimmt wurden, die beiderlei Seitenkanten als Grund- und Nebenseitenkanten unterscheiden, je nachdem ihre Kantenlinien durch die Endpunkte der Nebenaxen oder der horizontalen Zwischenaxen halbt werden. Wählt man wiederum das ganz allgemeine Verhältniss (A:x:B) oder

(A:B:xB) zur Bestimmung der Flächen, so werden bei den Trapezoidoktaedern die längeren Seitenkanten die Nebenseitenkanten und die kürzeren die Grundseitenkanten sein, so lange $x < 1 + \frac{1}{2}$; ist aber $x > 1 + \frac{1}{2}$, so sind die kürzeren Seitenkanten die Nebenseitenkanten und die längeren die Grundseitenkanten.

Werden die Endkanten mit X, die Nebenseitenkanten mit Y und die Grundseitenkanten mit Z bezeichnet, so erhält man für die Kantenwinkel die nachfolgenden Werthe:

$$\cos. X = -\frac{x^2 B^2}{(x^2 + 1) A^2 + x^2 B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{A \sqrt{(x^2 + 1)}}{\sqrt{2} \sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + x^2 B^2]}},$$

$$\tan g. \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + 2 x^2 B^2]}}{A \sqrt{(x^2 + 1)}};$$

$$\cos. Y = \frac{x (x B^2 - 2 A^2)}{x^2 B^2 + A^2 (x^2 + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(x - 1)^2 A^2 + 2 x^2 B^2]}}{\sqrt{2} \sqrt{(x^2 + 1) A^2 + x^2 B^2}},$$

$$\tan g. \frac{1}{2} Y = \frac{A (x + 1)}{\sqrt{[(x - 1)^2 A^2 + 2 x^2 B^2]}}.$$

Die Funktionen für den Kantenwinkel Z sind dieselben wie für die gleichbezeichneten Seitenkantenwinkel der Diplotetraeder, welche oben angegeben sind. Um beispielsweise einige Trapezoidoktaeder mit ihren Kantenwinkeln anzuführen, sollen nachfolgende aus dem Grundverhältniss des Skapoliths abgeleitete dazu dienen:

Grundform O, in welcher $a:b:b = \sqrt{99}:\sqrt{511}:\sqrt{511}$

	Endkanten	Grund-	Nebenseitenkanten.
$\frac{O3}{2}$	145° 22' 22"	47° 3' 56"	44° 13' 36"
$\frac{3O3}{2}$	109 54 13	100 47 24	93 10 12
$\frac{4O2}{2}$	101 50 15	105 46 12	115 30 55

b) Hemieder mit parallelen Flächen.

1) Die hemiedrischen quadratischen Oktaeder.

(Syn. Oktaederähnliche Hemidioktaeder; v. Glocker. Tetragonale Pyramiden von abnormer Flächenstellung; Naumann.)

Unter einem hemiedrischen quadratischen Oktaeder versteht man ein quadratisches Oktaeder, dessen Flächen dadurch bestimmt werden, dass man bei Voraussetzung der allgemeinen quadratischen Axen A und B, in jedem Oktanten eine der beiden Nebenaxen durch den rationalen Coefficienten $x > 1$ vervielfacht, durch den Endpunkt dieser vervielfachten, durch den der unveränderten anderen und durch den Endpunkt der Hauptaxe eine Ebene legt. Es bilden diese Oktaeder, den Ge-

staltsverhältnissen nach von den holoedrischen nicht verschieden, eine neue Reihe zwischen denen der Haupt- und Nebenreihe, und heissen daher quadratische Oktaeder der Zwischenreihe. Sie entstehen durch Hemiedrie der Dioktaeder dadurch, dass von den acht an den Seitenkanten liegenden Flächenpaaren vier abwechselnde herrschend werden und die vier anderen verschwinden. Zur Unterscheidung von den Diplotetraedern und Trapezoidoktaedern kann in den Zeichen dieser Hemieder, als parallelfächiger, der doppelte Theilungsstrich angewandt werden, und die beiden jedesmaligen Gegenhemieder werden dann durch den dem O beigefügten Strich unterschieden, so dass z. B. $\frac{303}{2}$ und $\frac{30'3}{2}$ die beiden aus dem Dioktaeder 303 entstehenden hemiedrischen quadratischen Oktaeder oder Oktaeder der Zwischenreihe bezeichnen wird.

Obgleich es dieser Oktaeder so viele geben kann, als Dioktaeder möglich sind, so ist doch ihr Vorkommen in der Natur sehr beschränkt. Ueber die Gestaltungseigenschaften gilt das, was von den quadratischen Oktaedern im Allgemeinen gesagt ist. Die Lage der Flächen wird durch das allgemeine Axenverhältniss der Dioktaeder, durch $(A:xB:B)$ oder $(A:B:xB)$ bestimmt, und wenn die Endkanten mit X, die Seitenkanten mit Z bezeichnet werden, so geht die Grösse der zugehörigen Kantenwinkel aus bereits angegebenen Gleichungen hervor. Die Endkanten nämlich sind dieselben wie die gleichbezeichneten der Trapezoidoktaeder und die Seitenkanten sind die unveränderten Seitenkanten der Dioktaeder. Als Beispiele solcher Formen dienen die nachfolgenden aus der Grundform des Scheelspathes abgeleitet:

$\frac{03}{2}$	Endkanten	116° 44' 37"	Seitenkanten	95° 44' 21"
$\frac{\frac{3}{2}03}{2}$	„	105 27 58	„	117 49 5
$\frac{402}{2}$	„	92 47 18	„	155 55 46

2) Die hemiedrischen quadratischen Prismen.

(Syn. Hemioktogonale Säulen; v. Glocker. Tetragonale Prismen von abnormer Flächenstellung; Naumann.)

Unter einem hemiedrischen quadratischen Prisma versteht man ein quadratisches Prisma, dessen Flächenlage dadurch bestimmt wird, dass man von je zwei halben Nebenaxen eine durch einen rationalen Coefficienten $n > 1$ vervielfacht, durch den so erhaltenen Endpunkt und den Endpunkt der anderen unveränderten eine Ebene parallel der Hauptaxe legt. Sie entstehen durch Hemiedrie der oktagonalen Prismen, indem die abwechselnden Flächen herrschend werden,

und können, als zwischen den beiden holoedrischen Prismen liegend, quadratische Prismen der Zwischenreihe genannt werden. Die beiden aus einem Holoeder hervorgehenden Gegenhemieder werden durch den beigefügten Strich unterschieden so dass ihre allgemeinen Zeichen $\frac{\infty O n}{2}$ und $\frac{\infty O' n}{2}$ sind.

C. Tetartoedrische Formen.

Die tetartoedrischen quadratischen Tetraeder.

Hierunter sind diejenigen quadratischen Tetraeder zu verstehen, welche durch Hemiedrie der Diplotetraeder und hemiedrischen quadratischen Oktaeder entstehen, und zwar durch Herschendenwerden der abwechselnden Flächen; sie sind demnach Tetartoeder der Dioktaeder und werden durch das Zeichen derselben mit dem Nenner 4 bezeichnet. Die horizontalen Endkanten sind auch, wie bei den hemiedrischen Tetraedern, durch die Endpunkte der Hauptaxe halbiert und parallel dem Mittelqueerdurchschnitt, liegen aber weder in den vertikalen Haupt- noch Nebenschnitten, sondern zwischen denselben.

Bei Voraussetzung des allgemeinen Axenverhältnisses der Dioktaeder werden die mit X bezeichneten Endkanten und die mit Z bezeichneten Seitenkanten der tetartoedrischen Tetraeder, wie folgt, bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{x^2 B^2 - A^2 (x^2 + 1)}{x^2 B^2 + A^2 (x^2 + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{A \sqrt{(x^2 + 1)}}{\sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + x^2 B^2]}}$$

$$\tan g. \frac{1}{2} X = \frac{x B}{A \sqrt{(x^2 + 1)}};$$

$$\cos. Z = \frac{x^2 B^2}{x^2 B^2 + A^2 (x^2 + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + 2 x^2 B^2]}}{\sqrt{2} \sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + x^2 B^2]}}$$

$$\tan g. \frac{1}{2} Z = \frac{A \sqrt{(x^2 + 1)}}{\sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + 2 x^2 B^2]}}$$

In der Natur sind diese tetartoedrischen Formen noch nicht angetroffen worden, und es sollen die beiden aus der Grundform des Scheelspathes berechneten hemiedrischen Tetraeder nur als Beispiele gelten:

$\frac{O3}{4}$	Endkanten	84° 15' 39"	Seitenkanten	63° 15' 23"
$\frac{3O3}{4}$	"	33 33 26	"	85 18 11

Eine Vergleichung der hemiedrischen und tetartoedrischen Formen des quadratischen Systems mit denen des regulären, wie sie bei den Holoedern angestellt wurde,