

A. Holodrische Formen:

- 1) Oktaeder, 2) Dioktaeder, 3) quadratische Prismen, 4) Dyoeder, 5) oktagonale Prismen.

B. Hemiedrische Formen:

- a) Mit nicht parallelen Flächen:

- 1) Tetraeder, 2) Diplotetraeder, 3) Trapezoidoktaeder.

- b) Mit parallelen Flächen:

- 1) Oktaeder, 2) quadratische Prismen.

C. Tetartoedrische Formen:

Tetraeder.

Beschreibung der einfachen Krystallformen.

A. Holodrische Formen.**1) Die quadratischen Oktaeder.**

(Syn. Viergliedrige Oktaeder oder Quadratoktaeder; Weiss. Tetragonale Pyramiden; Naumann. Gleichschenklige oder gleichkante vierseitige Pyramiden; Mohs. Tetragonale Pyramidoeder oder Pyramidenflächner; Breithaupt. Quadratoktaeder; Hausmann, Bernhardt. Pyramiden; Haidinger.)

Ein quadratisches Oktaeder ist ein von acht gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Triangeln umschlossener Körper, mit zwölf Kanten und sechs vierkantigen Ecken, dessen Flächen in zwei vierzählige Systeme so vertheilt sind, dass jedes derselben bei gemeinschaftlicher Basis eine gleichseitige vierseitige Pyramide bildet.

Verbindet man die Gipfelpunkte dieser beiden Pyramiden durch eine gerade Linie und giebt dieser Verbindungslinie, welche in allen quadratischen Oktaedern die Hauptaxe ist, ihre senkrechte Stellung, so werden die Kanten als End- und Seitenkanten unterschieden. Der ersteren sind acht, und zwar sind sie symmetrisch; die Seitenkanten, der Zahl nach, vier, sind regelmässig. Die Ecken sind auch zweierlei Art: zwei regelmässige, die Endecken, von den Endkanten gebildet, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind, und vier symmetrische, die Seitenecken, welche von den abwechselnden End- und Seitenkanten gebildet werden.

Vergleicht man zunächst die quadratischen Oktaeder mit dem regulären Oktaeder, so werden sie als spitze und stumpfe unterschieden, je nachdem ihre Endecken spitzer oder stumpfer sind als die Ecken des regulären Oktaeders. In den spitzeren sind ausserdem die Endkantenlinien länger als die Seitenkantenlinien und

die Endkanten schärfer als die Seitenkanten; in den stumpferen dagegen sind die Endkantenlinien kürzer als die Seitenkantenlinien und die Endkanten stumpfer als die Seitenkanten. Der Hauptunterschied jedoch der quadratischen Oktaeder beruht in der Lage der Flächen zu den Axen, wodurch drei Reihen unterschieden werden, die Haupt-, Neben- und Zwischenreihe, von denen die letztere bei den hemiedrischen Formen ihre Erörterung finden wird. Den Unterschied der beiden ersteren Reihen kann man sich dadurch klar machen, dass man sich irgend ein quadratisches Axenverhältniss, ganz allgemein durch $(A:B:B)$ bezeichnet, vorstellt; werden nun durch je drei Endpunkte der je drei zu einem Oktanten gehörigen Halbxen Ebenen gelegt, so ist das so entstandene quadratische Oktaeder in die Hauptreihe gehörig; legt man dagegen nur durch den Endpunkt der halben Hauptaxe und der einen halben Nebenaxe parallel der anderen je dreier zu einem Oktanten gehörigen Halbxen Ebenen, so ist das so hervorgehende quadratische Oktaeder eins der Nebenreihe. Es wird hiernach im Allgemeinen die Lage der Flächen in der Hauptreihe durch $(A:B:B)$, in der Nebenreihe aber durch $(A:B:\infty B)$ oder $(A:\infty B:B)$ für jeden Oktanten bestimmt.

Bei den Oktaedern der Hauptreihe sind zufolge der angegebenen Flächenlage die Endkantenlinien die Verbindungslinien der Hauptaxenendpunkte mit den Endpunkten der Nebenaxen, während die Seitenkantenlinien die Endpunkte der Nebenaxen untereinander verbinden. Die Scheitelpunkte der Endecken sind, wie schon erwähnt wurde, die Endpunkte der Hauptaxe, die Scheitelpunkte aber der Seitenecken sind die Endpunkte der Nebenaxen. Die Hauptschnitte sind zweierlei Art: zwei gleiche vertikale, von rhombischer Gestalt, von denen jeder eine durch die Hauptaxe und eine Nebenaxe gelegte und von vier Endkantenlinien begrenzte Ebene ist; ein horizontaler, auch Mittelqueerdurchschnitt genannt, von quadratischer Gestalt, welcher eine durch die beiden Nebenaxen gelegte und von den Seitenkantenlinien begrenzte Ebene ist. Ausser den beiden Nebenaxen und der Hauptaxe sind noch zweierlei Zwischenaxen zu erwähnen, zwei horizontale und vier geneigte. Die ersteren liegen im Mittelqueerdurchschnitt und sind die Verbindungslinien der Halbirungspunkte je zweier parallelen Seitenkantenlinien; die letzteren liegen zu je zwei in einem vertikalen Hauptschnitt und sind die Verbindungslinien der Halbirungspunkte je zweier parallelen Endkantenlinien. Durch diese Zwischenaxen werden auch sechs Nebenschnitte bedingt, zwei vertikale und vier geneigte, welche meist Rhomben sind; in manchen Fällen auch Quadrate. Die vertikalen sind Ebenen, gelegt durch die Hauptaxe und je eine horizontale Zwischenaxe und umgrenzt von den Höhenperpendikeln der Oktaederflächen; die geneigten Nebenschnitte aber sind durch je eine geneigte Zwischenaxe und die auf ihr senkrechte Nebenaxe gelegte Ebenen.

Bezeichnet man die Endkanten mit X und die Seitenkanten mit Z, so erhält

man für die Kantenwinkel bei Voraussetzung des obigen allgemeinen Axenverhältnisses folgende Gleichungen:

$$\cos. X = -\frac{B^2}{2A^2 + B^2}, \cos. \frac{1}{2} X = \frac{A}{\sqrt{(2A^2 + B^2)}}, \tan. \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A};$$

$$\cos. Z = \frac{B^2 - 2A^2}{B^2 + 2A^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{B}{\sqrt{(2A^2 + B^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Z = \frac{A\sqrt{2}}{B};$$

$$\text{die halbe horizontale Zwischenaxe } r = \frac{B}{\sqrt{2}}.$$

Bei jeder Species krystallisirter Stoffe wird, und so auch bei denen im quadratischen Systeme, ein bestimmtes Axenverhältniss als Grundverhältniss aufgestellt, welches durch seine unveränderten Axenendpunkte eine Form als Grundform feststellt, hier ein quadratisches Oktaeder der Hauptreihe, und von welchem durch Veränderungen der Axen alle übrigen Formen abgeleitet werden. Bezeichnet man dieses Grundverhältniss im quadratischen System allgemein durch (a:b:b), so erhält das durch dieses unveränderte Verhältniss bestimmte quadratische Oktaeder der Hauptreihe als Grundform das Zeichen O.

So wie nun alle übrigen Formen auf die Grundform bezogen werden, so werden auch die abgeleiteten Formen durch O bezeichnet, an welchem man die Veränderungen der Hauptaxe vor dem O, die der Nebenaxe hinter dem O angiebt. Für das als Grundform festgestellte und durch das Axenverhältniss (a:b:b) bestimmte quadratische Oktaeder der Hauptreihe, für O, ergibt sich die Grösse der Kantenwinkel aus den oben angegebenen allgemeinen Gleichungen der Oktaeder der Hauptreihe, wenn man für A und B die Grössen a und b setzt, welche bei jeder Species angegeben werden müssen; die Bezeichnung der Winkel bleibt dieselbe. So ist:

$$\cos. X = -\frac{b^2}{2a^2 + b^2}, \cos. \frac{1}{2} X = \frac{a}{\sqrt{(2a^2 + b^2)}}, \tan. \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = \frac{b^2 - 2a^2}{b^2 + 2a^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{b}{\sqrt{(2a^2 + b^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Z = \frac{a\sqrt{2}}{b};$$

$$\text{die halbe horizontale Zwischenaxe } r = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Verändert man das Axenverhältniss der Grundform (a:b:b) dadurch, dass man die Hauptaxe durch einen beliebigen rationalen Coefficienten $m \geq 1$ vervielfacht, und legt man durch je drei Axenendpunkte des nun hervorgegangenen Axenverhältnisses (ma:b:b) Ebenen, so entsteht für jeden Werth von m ein quadratisches Oktaeder der Hauptreihe, welches in Bezug auf die Endecken spitzer als die Grundform ist; die Kantenlinien der Seitenkanten fallen mit denen der Grundform

zusammen und die dadurch gelegten Oktaederflächen weichen von denen der Grundform durch ihre Neigung gegen die Hauptaxe ab, indem sie mit derselben einen spitzeren Winkel bilden, wodurch der Seitenkantenwinkel stumpfer als in O ist. Es erhalten alle diese Oktaeder den Namen „spitzere quadratische Oktaeder der Hauptreihe“ und ihr allgemeines Zeichen ist mO, wenn im Vergleich der beiden Verhältnisse (a:b:b) und (ma:b:b) die Veränderung der Hauptaxe durch das vorgesetzte m angedeutet wird, während die Nebenaxen unverändert wie in O sind. So wie die Endecken spitzer sind, sind auch die Endkanten weniger stumpf als die von O, die Seitenecken aber stumpfer; der Mittelqueerdurchschnitt ist derselbe, während die übrigen Schnitte mit der Hauptaxe in den Verhältnissen der Gestalt, der Grösse, auch zum Theil der Lage sich ändern.

Um die Grösse der Kantenwinkel zu bestimmen, dürfen nur in den allgemeinen Gleichungen der Hauptreihe für A und B die Werthe ma und b gesetzt werden, wodurch

$$\cos. X = -\frac{b^2}{2m^2a^2 + b^2}, \cos. \frac{1}{2}X = \frac{ma}{\sqrt{(2m^2a^2 + b^2)}}, \tan. \frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{(m^2a^2 + b^2)}}{ma},$$

$$\cos. Z = \frac{b^2 - 2m^2a^2}{b^2 + 2m^2a^2}, \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{b}{\sqrt{(2m^2a^2 + b^2)}}, \tan. \frac{1}{2}Z = \frac{ma\sqrt{2}}{b};$$

$$\text{und } r = \frac{b}{\sqrt{2}} \text{ wird.}$$

Verändert man dagegen das Grundverhältniss (a:b:b) dadurch, dass man beide Nebenaxen gleichmässig durch einen beliebigen rationalen Coefficienten $m > 1$ vervielfacht, wodurch es in (a:mb:mb) übergeht, und legt man durch je drei dadurch bestimmte Axenendpunkte Ebenen, so entstehen durch den jedesmaligen Werth von m untereinander verschiedene quadratische Oktaeder der Hauptreihe, deren Flächenneigung gegen die Hauptaxe durch die Verlängerung der Nebenaxen verändert ist, indem die Flächen jetzt einen stumpferen Winkel mit der Hauptaxe bilden, wodurch die Endecken und Endkanten stumpfer, die Seitenkanten hingegen und Seitenecken weniger stumpf als in der Grundform sind. Sie werden stumpfere quadratische Oktaeder der Hauptreihe genannt, und erhalten das allgemeine Zeichen Omm, in welchem die gleiche Veränderung beider Nebenaxen durch die beiden hinter O gesetzten m angedeutet wird. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein Quadrat, grösser als in O, die anderen Schnitte sind durch die Veränderung der Nebenaxen zum Theil in Form und Grösse, zum Theil auch noch in der Lage von denen der Grundform verschieden, soweit überhaupt ihre Eigenschaften durch die Grösse der Axen bedingt sind.

Für die Kantenwinkel ergeben sich, wenn in den allgemeinen Gleichungen

der Hauptreihe für A und B die Grössen a und mb gesetzt werden, nachfolgende Gleichungen:

$$\cos. X = -\frac{m^2 b^2}{2a^2 + m^2 b^2}, \cos. \frac{1}{2} X = \frac{a}{\sqrt{(2a^2 + m^2 b^2)}}, \tan. \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{(a^2 + m^2 b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = \frac{m^2 b^2 - 2a^2}{m^2 b^2 + 2a^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{mb}{\sqrt{(2a^2 + m^2 b^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Z = \frac{a\sqrt{2}}{mb};$$

$$\text{Zwischenaxe } r = \frac{mb}{\sqrt{2}};$$

Bei den Oktaedern der Nebenreihe sind die Endkantenlinien die Verbindungslinien der Hauptaxenenden mit den Endpunkten der horizontalen Zwischenaxen, die Seitenkantenlinien aber verbinden die Endpunkte dieser Zwischenaxen und werden durch die Endpunkte der Nebenaxen halbiert, weshalb die horizontalen Zwischenaxen in der Nebenreihe grösser als die Nebenaxen sind. Die Scheitel der Endecken sind die Endpunkte der Hauptaxen, die der Seitenecken die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen. Durch die Verschiedenheit der Lage der Flächen in Bezug auf die Axen und die für ein beliebiges Axenverhältniss eingeführten Zwischenaxen ist nun in der Nebenreihe der Mittelqueerdurchschnitt zwar auch ein Quadrat, dessen Diagonalen aber die horizontalen Zwischenaxen sind und dessen Seiten den Nebenaxen parallel und gleich sind. Die beiden vertikalen Hauptschnitte sind als Ebenen, gelegt durch die Hauptaxe und je eine Nebenaxe, nicht durch die Endkantenlinien, sondern durch die Höhenperpendikel der Flächen begrenzt, wie in der Hauptreihe die vertikalen Nebenschnitte, und von derselben Gestalt. Die vertikalen Nebenschnitte dagegen sind durch die Hauptaxe und je eine horizontale Zwischenaxe gelegte Ebenen, werden daher in der Nebenreihe durch die Endkantenlinien begrenzt und sind Rhomben.

Bezeichnet man die Endkanten mit Y und die Seitenkanten durch Z, so wird bei Voraussetzung des allgemeinen Axenverhältnisses (A:B:∞B) oder (A:∞B:B) für alle Oktaeder der Nebenreihe die Grösse der Kantenwinkel durch folgende Gleichungen bestimmt, in denen wieder die allgemeinen Grössen A und B enthalten sind:

$$\cos. Y = -\frac{B^2}{A^2 + B^2}, \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{A}{\sqrt{2}\sqrt{(A^2 + B^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(A^2 + 2B^2)}}{A};$$

$$\cos. Z = \frac{B^2 - A^2}{B^2 + A^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Z = \frac{A}{B};$$

die halbe horizontale Zwischenaxe $r = B\sqrt{2}$. Auch in der Nebenreihe tritt bei einem gegebenen Grundverhältniss (a:b:b)

der Unterschied zwischen spitzen und stumpfen Oktaedern in Bezug auf ein der Grundform entsprechendes Oktaeder der Nebenreihe ein. Wenn nämlich bei dem festgesetzten Grundverhältniss die Flächen nach dem Gesetz der Nebenreihe gelegt werden, so dass ihre Lage durch die beiden gleichen Verhältnisse $(a : \infty b : b)$ und $(a : b : \infty b)$ für jeden Oktanten bestimmt wird, so entsteht ein Oktaeder der Nebenreihe, welches mit O verglichen, das nächststumpfer Oktaeder ausschliesslich genannt wird, und das Zeichen $O \infty$ führt, weil das Axenverhältniss $(a : b : \infty b)$ oder $(a : \infty b : b)$ sich von dem der Grundform $(a : b : b)$ dadurch unterscheidet, dass eine der beiden halben Nebenaxen mit dem Coefficienten ∞ begabt ist, was man durch das hinter O gesetzte einmalige Zeichen ∞ angiebt. Seine Endecken und Endkanten sind stumpfer als in der Grundform O , da seine Flächen durch die Endkantenlinien der Grundform gelegt sind und deshalb mit der Hauptaxe einen grösseren Neigungswinkel bilden, als die Flächen von O . Die Grösse der Kantenwinkel bestimmen folgende Gleichungen, welche aus den so eben für die Oktaeder der Nebenreihe angegebenen hervorgehen, wenn für A und B die Grössen a und b gesetzt werden:

$$\cos. Y = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{a}{\sqrt{2\sqrt{(a^2 + b^2)}}}, \quad \tan. \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = \frac{b^2 + a^2}{b^2 + a^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \quad \tan. \frac{1}{2} Z = \frac{a}{b},$$

$$\text{Zwischenaxe } r = b \sqrt{2}.$$

Von diesem nächststumpferen Oktaeder ausgehend, gelangt man zu den spitzen und stumpfen quadratischen Oktaedern der Nebenreihe, deren allgemeine Zeichen $nO \infty$ und $O \infty n$ sind, wenn man einerseits die Hauptaxe, andererseits die beiden Nebenaxen durch einen beliebigen rationalen Coefficienten $n > 1$ vervielfacht und durch die hieraus hervorgehenden Axenendpunkte Ebenen nach dem Gesetz der Nebenreihe legt. Die spitzen, deren Flächenlage für jeden Oktanten durch die beiden gleichen Axenverhältnisse $(na : b : \infty b)$ und $(na : \infty b : b)$ bestimmt wird, haben mit dem nächststumpferen den Mittelqueerdurchschnitt gemein, ihre Flächen aber bilden mit der Hauptaxe einen spitzen Winkel als in $O \infty$, wodurch die Endecken spitzer und die Endkanten schärfer sind. Die Flächen der stumpfen Oktaeder hingegen, deren Lage für jeden Oktanten durch die beiden Verhältnisse $(a : nb : \infty b)$ und $(a : \infty b : nb)$ bestimmt wird, bilden mit der Hauptaxe einen stumpfen Winkel als die Flächen $O \infty$, wodurch die Endecken und Endkanten stumpfer sind. Der Mittelqueerdurchschnitt ist verhältnissmässig wegen der Verlängerung der Nebenaxen grösser, aber von quadratischer Form.

Für die Grösse der Kantenwinkel gelten die bereits oben angeführten allgemeinen Gleichungen der Nebenreihe, wenn man bei den spitzen für A und B die

Werthe na und b , bei den stumpferen aber die Werthe a und nb setzt, wodurch hervorgeht:

für $nO \infty$

$$\cos. Y = -\frac{b^2}{n^2 a^2 + b^2}, \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{na}{\sqrt{2} \sqrt{(n^2 a^2 + b^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(n^2 a^2 + 2b^2)}}{na};$$

$$\cos. Z = \frac{b^2 - n^2 a^2}{b^2 + n^2 a^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{b}{\sqrt{(n^2 a^2 + b^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Z = \frac{na}{b};$$

$$\text{Zwischenaxe } r = b\sqrt{2}.$$

Für $O \infty n$

$$\cos. Y = -\frac{n^2 b^2}{a^2 + n^2 b^2}, \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{a}{\sqrt{2} \sqrt{(a^2 + n^2 b^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(a^2 + 2n^2 b^2)}}{a};$$

$$\cos. Z = \frac{n^2 b^2 - a^2}{n^2 b^2 + a^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{nb}{\sqrt{(a^2 + n^2 b^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Z = \frac{a}{nb};$$

$$\text{Zwischenaxe } r = nb\sqrt{2}.$$

Als Beispiele der angeführten Oktaeder mögen die Formen dienen, welche aus den dem Zinnstein und Scheelspath zukommenden Grundformen entwickelt worden sind, von denen freilich einzelne nicht in der Natur vorkommen, sondern hier nur als Beispiele aufgeführt werden, und zwar bezieht sich die erstere der beiden gleich bezeichneten Formen jedesmal auf den Zinnstein.

Grundform des Zinnsteins, O, bei welcher $a:b:b = \sqrt{5}:\sqrt{11}:\sqrt{11}$,

„ „ Scheelspathes, O, „ „ $a:b:b = \sqrt{11}:\sqrt{10}:\sqrt{10}$.

	Endkanten.			Seitenkanten.		
O	1210	35'	17"	870	16'	14"
O	108	12	36	112	1	28
2O	102	27	21	124	39	16
2O	95	51	24	142	44	32
O2,2*)	144	34	10	50	58	39
O2,2	130	10	40	73	7	22
O ∞	133	25	57	67	58	32
O ∞	118	26	13	92	43	46
2O ∞	110	47	1	106	52	38
2O ∞	100	40	19	129	1	22
O ∞ 2	153	53	28	37	15	29
O ∞ 2	141	39	26	55	20	43

*) Bei der Bezeichnung durch Zahlen werden, um jeden Irrthum zu vermeiden, zwei neben einanderstehende für zwei Halbxen geltende Zahlen durch ein Komma getrennt.

2) Die Dioktaeder.

(Syn. Zweimalachtflächner. Vier- und Vierkantner oder vier- und vierkantige Dioktaeder; Weiss. Ungleichschenklige oder ungleichkantige achtseitige Pyramiden; Mohs. Ditetragonale Pyramiden; Naumann. Doppelt achtseitige Pyramiden; Hausmann. Zirkonoide; Haidinger. Ditetragonale Pyramidoeder; Breithaupt.)

Ein Dioktaeder ist eine von sechszehn ungleichseitigen gleichen und ähnlichen Triangeln umschlossene Gestalt, mit vier und zwanzig symmetrischen Kanten und zehn symmetrischen Ecken, deren Flächen entweder in zwei achtzählige Systeme, oder nach den Flächen eines eingeschriebenen quadratischen Oktaeders in acht Flächenpaare vertheilt sind.

Jedes der beiden achtzähligen Systeme bildet bei gemeinschaftlicher Basis eine ungleichkantige achtseitige Pyramide und die Verbindungslinie der Gipfelpunkte beider ist die Hauptaxe. Nach ihr sind zunächst, wie bei den Oktaedern die End- und Seitenkanten zu unterscheiden. Die letzteren, acht an der Zahl, sind einander gleich und liegen in der Ebene des Mittelqueerdurchschnittes, die Endpunkte der Nebenaxen mit denen der horizontalen Zwischenaxen durch ihre Kantenlinien verbindend. Die sechszehn Endkanten sind zweierlei Art, acht längere schärfere und acht kürzere stumpfere. Die Ecken werden auch als End- und Seitenecken unterschieden, von denen die zwei Endecken symmetrisch achtkantig sind und von den abwechselnden Endkanten gebildet werden; ihre Scheitelpunkte sind die Endpunkte der Hauptaxe. Die acht Seitenecken sind symmetrische vierkantige, und zweierlei Art, nämlich vier spitzere und vier stumpfere; die ersteren sind von je zwei Seiten- und je zwei längeren Endkanten, die letzteren aber von je zwei Seiten- und je zwei kürzeren Endkanten gebildet.

Wenn wiederum, wie bei den Oktaedern, im Allgemeinen die halbe Hauptaxe mit A und die halben Nebenaxen mit B bezeichnet werden, so geben im Allgemeinen die beiden gleichen Verhältnisse $(A:xB:B)$ und $(A:B:xB)$, wo x eine beliebige rationale Grösse grösser als 1 darstellt, die Lage je zweier Flächen in einem Oktanten an; da nämlich jede der beiden halben Nebenaxen abwechselnd durch die Vervielfachung mit x verlängert werden muss, um durch eine durch den Endpunkt der Hauptaxe, einer verlängerten und der jedesmaligen anderen unveränderten Nebenaxe gelegte Ebene eine Dioktaederfläche zu erzeugen. Nach der Grösse der Hauptaxe, ob A grösser oder kleiner als B, werden die Dioktaeder zunächst als spitze und stumpfe unterschieden, und jedem derselben liegt ein spitzes oder stumpfes Oktaeder der Hauptreihe zu Grunde, über dessen Flächen je zwei Dioktaederflächen zu liegen kommen, wenn nämlich in dem Dioktaeder und Oktaeder A und B dieselben Werthe haben.

Da die Endkanten der Dioktaeder zweierlei sind, und die einen die Haupt-

axenendpunkte mit den Endpunkten der Nebenaxen verbinden, wie die Kantenlinien der Endkanten des zu Grunde liegenden Oktaeders der Hauptreihe, und die anderen die Hauptaxenendpunkte mit den Endpunkten der horizontalen Zwischenaxen verbinden, so kann man die ersteren Kanten, deren Kantenlinien mit denen des entsprechenden Oktaeders der Hauptreihe zusammenfallen, Grundendkanten, die letzteren aber Nebenendkanten, oder kürzer, Grundkanten und Nebenkanten nennen. Auf gleiche Weise sind dann die Seitenecken als Grund- und Nebenecken zu unterscheiden, so dass Grundecken diejenigen Seitenecken sein werden, welche von je zwei Seiten- und je zwei Grundkanten gebildet werden und deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Nebenaxen sind; Nebenecken dagegen sind die vier anderen, welche von je zwei End- und je zwei Nebenkanten gebildet werden und deren Scheitelpunkte die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen sind. Von dem Werthe des Coefficienten x hängt es nun jedesmal ab, ob die Grundkanten und Grundecken die stumpferen sind oder nicht, indem bei jedem Werthe von x unter $1 + \sqrt{2}$ die Grundkanten die längeren schärferen Endkanten und die Grundecken die spitzeren Seitenecken sind; bei jedem Werthe von x aber über $1 + \sqrt{2}$ die Grundkanten und Grundecken stumpfer als die Nebenkanten und Nebenecken. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Oktogon, die vertikalen Haupt- und Nebenschnitte sind Rhomben.

Bezeichnet man die Grundkanten mit X , die Nebenkanten mit Y , und die Seitenkanten mit Z , so werden ihre Kantenwinkel durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{(x^2 - 1)A^2 + x^2B^2}{(x^2 + 1)A^2 + x^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{A}{\sqrt{[(x^2 + 1)A^2 + x^2B^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{x\sqrt{A^2 + B^2}}{A};$$

$$\cos. Y = -\frac{x(2A^2 + xB^2)}{(x^2 + 1)A^2 + x^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Y = \frac{A(x - 1)}{\sqrt{2}\sqrt{[(x^2 + 1)A^2 + x^2B^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[(x + 1)^2A^2 + 2x^2B^2]}}{(x - 1)A};$$

$$\cos. Z = -\frac{x^2B^2 - (x^2 + 1)A^2}{x^2B^2 + (x^2 + 1)A^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{x B}{\sqrt{[(x^2 + 1)A^2 + x^2B^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Z = \frac{A\sqrt{(1 + x^2)}}{x B};$$

$$\text{Zwischenaxe } r = \frac{x B \sqrt{2}}{1 + x}.$$

Geht man wieder auf die Grundform und ihr Axenverhältniss zurück, so tritt

durch die möglichen Veränderungen desselben ein mehrfacher Unterschied der Dioktaeder hervor. Setzt man nämlich anstatt des allgemeinen Verhältnisses der Dioktaeder das besondere der Grundform und nimmt für x den bekannten Coefficienten m , so erhält man für jeden Oktanten die zwei Verhältnisse $(a:mb:b)$ und $(a:b:mb)$, wodurch für jeden Werth von m ein Dioktaeder hervorgeht, welches mit der Grundform die Hauptaxe gemein hat, nebst der jedesmaligen unveränderten Nebenaxe, und in welchem die Endkantenlinien der Grundform unverändert dieselben sind und die Kantenlinien der Grundform darstellen, über deren Flächen je zwei Dioktaederflächen zu liegen kommen. Sie heissen Uebergangsdioctaeder, indem sie den Uebergang von der Grundform zu dem nächst stumpferen Oktaeder vermitteln, denn bei dem Werthe $m = \infty$ fallen je zwei Flächen an den Grundkanten in eine Ebene und bilden die Flächen des nächst stumpferen Oktaeders; ihr allgemeines Zeichen ist Om , hervorgegangen aus obigen beiden Axenverhältnissen, welche sich von dem der Grundform dadurch unterscheiden, dass eine Nebenaxe durch m vervielfacht wird. Für die Kantenwinkel erhält man nachfolgende Gleichungen:

$$\cos. X = -\frac{(m^2-1)a^2 + m^2 b^2}{(m^2+1)a^2 + m^2 b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{a}{\sqrt{[(m^2+1)a^2 + m^2 b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{m \sqrt{(a^2 + b^2)}}{a};$$

$$\cos. Y = -\frac{m(2a^2 + mb^2)}{(m^2+1)a^2 + m^2 b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{a(m-1)}{\sqrt{2} \sqrt{[(m^2+1)a^2 + m^2 b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(m+1)^2 a^2 + 2m^2 b^2]}}{(m-1)a};$$

$$\cos. Z = \frac{m^2 b^2 - (m^2+1)a^2}{m^2 b^2 + (m^2+1)a^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{mb}{\sqrt{[(m^2+1)a^2 + m^2 b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{a \sqrt{(1+m^2)}}{mb};$$

$$\text{Zwischenaxe } r = \frac{mb \sqrt{2}}{1+m}$$

Wenn ausser der erwähnten Vervielfachung der Nebenaxen durch m auch noch die Hauptaxe durch einen gleichen rationalen Coefficienten m vervielfacht wird, so entsteht für jeden Werth von m ein Dioktaeder, welches spitzer als jedes der Uebergangsreihe ist. Die Grundkanten eines solchen Dioktaeders entsprechen stets den Endkanten eines spitzeren Oktaeders der Hauptreihe, in welchem m denselben Werth hat. Je zwei Flächen eines solchen Dioktaeders in einem Oktanten werden durch die beiden Verhältnisse $(ma:mb:b)$ und $(ma:b:mb)$ bestimmt, woraus für sie

oder für die ganzen Körper selbst das allgemeine Zeichen mOm hervorgeht. Für die Kantenwinkel ergeben sich die nachfolgenden Werthe:

$$\cos. X = -\frac{(m^2-1)a^2+b^2}{(m^2+1)a^2+b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{a(m-1)}{\sqrt{[(m^2+1)a^2+b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{(m^2a^2+b^2)}}{a};$$

$$\cos. Y = -\frac{2ma^2+b^2}{(m^2+1)a^2+b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Y = \frac{a(m-1)}{\sqrt{2}\sqrt{[(m^2+1)a^2+b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[(m+1)^2a^2+2b^2]}}{(m-1)a};$$

$$\cos. Z = \frac{b^2-(m^2+1)a^2}{b^2+(m^2+1)a^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{b}{\sqrt{[(m^2+1)a^2+b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Z = \frac{a\sqrt{(1+m^2)}}{b};$$

$$\text{Zwischenaxe } r = \frac{mb\sqrt{2}}{1+m}.$$

Ist aber der Coefficient, durch welchen die Hauptaxe, neben der abwechselnden Vervielfachung der Nebenaxen durch m , vervielfacht wird, kleiner als m , aber rational und grösser als 1, der durch n bezeichnet wird, so erhält man gleichfalls eine Reihe von Dioktaedern, welche auch spitzer als die Uebergangsdioctaeder sind, verglichen aber mit mOm , bei gleichem Werthe von m , stets weniger spitz sind, indem ihnen ein weniger spitzes quadratisches Oktaeder der Hauptreihe zu Grunde liegt. Ihr allgemeines Zeichen ist nOm , hervorgegangen aus den beiden gleichen Axenverhältnissen $(na:mb:b)$ und $(na:b:mb)$ für je zwei Flächen eines Oktanten, und die Kantenwinkel werden durch die in ihnen enthaltenen Werthe wie folgt bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{(m^2-1)n^2a^2+m^2b^2}{(m^2+1)n^2a^2+m^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{na}{\sqrt{[(m^2+1)n^2a^2+m^2b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{m\sqrt{(n^2a^2+b^2)}}{na};$$

$$\cos. Y = -\frac{m(2n^2a^2+mb^2)}{(m^2+1)n^2a^2+m^2b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}Y = \frac{na(m-1)}{\sqrt{2}\sqrt{[(m^2+1)n^2a^2+m^2b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[(m+1)^2n^2a^2+2m^2b^2]}}{(m-1)na};$$

$$\cos. Z = \frac{m^2 b^2 - (m^2 + 1) n^2 a^2}{m^2 b^2 + (m^2 + 1) n^2 a^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{mb}{\sqrt{[(m^2 + 1) n^2 a^2 + m^2 b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{na \sqrt{(1+m^2)}}{mb};$$

$$\text{Zwischenaxe } r = \frac{mb \sqrt{2}}{1+m}.$$

Setzt man dagegen in dem allgemeinen Axenverhältniss der Dioktaeder für x den beliebigen rationalen Coefficienten $n > 1$, und vervielfacht die Hauptaxe der Grundform durch einen rationalen Coefficienten $m > n$, wodurch die beiden Verhältnisse, welche je zwei Flächen in einem Oktanten bestimmen, $(ma:nb:b)$ und $(ma:b:nb)$ werden, so werden die daraus hervorgehenden Dioktaeder, deren Zeichen mOn sein wird, auch spitzer als die Uebergangsdioctaeder sein, wie die Dioktaeder mOm und nOm . Sie unterscheiden sich aber von ihnen, nämlich von mOm und nOm dadurch, dass sie verhältnissmässig noch spitzer sind; denn wenn ihr n gleich dem m jener ist, durch welche Coefficienten die Nebenaxen vervielfacht werden, so ist in den zuletzt genannten Dioktaedern mOn die Hauptaxe am längsten und ihre Enden am spitzesten. Man kann demnach diese drei Arten spitzerer Dioktaeder, die mOn , mOm und nOm , durch die Namen mehr, gleichmässig und mindest spitzere Dioktaeder unterscheiden, eine Unterscheidung, die zwar wegen des nicht zu häufigen Vorkommens der Dioktaeder weniger nothwendig erscheinen dürfte, die aber als eine durch die Grössenverhältnisse begründete hervorgehoben werden muss. Der Ausdruck „gleichmässig spitzere“ bezieht sich wesentlich darauf, dass die Veränderung der Hauptaxe in gleichem Maasse mit der der Nebenaxen fortschreitet und beide gleichmässig ihr Ende erreichen.

Für die Kantenwinkel der mehr spitzeren Dioktaeder mOn erhält man nachfolgende Gleichungen:

$$\cos. X = -\frac{(n^2 - 1)m^2 a^2 + n^2 b^2}{(n^2 + 1)m^2 a^2 + n^2 b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{ma}{\sqrt{[(n^2 + 1)m^2 a^2 + n^2 b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{n \sqrt{(m^2 a^2 + b^2)}}{ma};$$

$$\cos. Y = -\frac{n(2m^2 a^2 + nb^2)}{(n^2 + 1)m^2 a^2 + n^2 b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{ma(n-1)}{\sqrt{2} \sqrt{[(n^2 + 1)m^2 a^2 + n^2 b^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(n+1)^2 m^2 a^2 + 2n^2 b^2]}}{(n-1)ma};$$

$$\cos. Z = \frac{n^2 b^2 - (n^2 + 1) m^2 a^2}{n^2 b^2 + (n^2 + 1) m^2 a^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{nb}{\sqrt{[(n^2 + 1) m^2 a^2 + n^2 b^2]}};$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{ma \sqrt{(1 + n^2)}}{nb};$$

$$\text{Zwischenaxe } r = \frac{nb \sqrt{2}}{1 + n}.$$

Wird endlich das allgemeine Axenverhältniss ($A : xB : B$) oder ($A : B : xB$) der Dioktaeder so umgewandelt, dass für A , B und x die Werthe a , nb und $\frac{m}{n}$ gesetzt werden, wodurch für jeden Oktanten die beiden Verhältnisse ($a : mb : nb$) und ($a : nb : mb$) hervorgehen, oder werden, mit anderen Worten, im Grundverhältniss die Nebenaxen jedes Oktanten abwechselnd ungleich verlängert, die eine durch den rationalen Coefficienten $n > 1$, die andere durch den rationalen Coefficienten $m > n$, und wiederum umgekehrt, während die Hauptaxe unverändert bleibt, so entstehen, wenn durch je drei so bestimmte Axenendpunkte Ebenen gelegt werden, die stumpferen Dioktaeder, deren allgemeines Zeichen Omn ist. Die Grundkanten entsprechen in ihnen den Endkanten eines stumpferen Oktaeders der Hauptreihe Omm , in welchem m gleich dem n des stumpferen Dioktaeders ist, zum Beispiel allen Dioktaedern $Om2$ liegt das Oktaeder $O2,2$ zu Grunde.

Um die Kantenwinkel zu bestimmen, dienen nachfolgende Gleichungen:

$$\cos. X = -\frac{(m^2 - n^2) a^2 + m^2 n^2 b^2}{(m^2 + n^2) a^2 + m^2 n^2 b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{na}{\sqrt{[(m^2 + n^2) a^2 + m^2 n^2 b^2]}};$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{m \sqrt{(a^2 + n^2 b^2)}}{na};$$

$$\cos. Y = -\frac{mn(2a^2 + mn b^2)}{(m^2 + n^2) a^2 + m^2 n^2 b^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{a(m - n)}{\sqrt{2} \sqrt{[(m^2 + n^2) a^2 + m^2 n^2 b^2]}};$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(m + n)^2 a^2 + 2m^2 n^2 b^2]}}{(m - n)a};$$

$$\cos. Z = \frac{m^2 n^2 b^2 - (m^2 + n^2) a^2}{m^2 n^2 b^2 + (m^2 + n^2) a^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{mn b}{\sqrt{[(m^2 + n^2) a^2 + m^2 n^2 b^2]}};$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{a \sqrt{(m^2 + n^2)}}{mn b};$$

$$\text{Zwischenaxe } r = \frac{mn b \sqrt{2}}{m + n}.$$

Für die nachfolgenden beispielsweise aufgeführten Dioktaeder liegen auch wieder die Grundformen des Zinnsteins und Scheelspathes zu Grunde:

	Grundkanten.	Nebenkanten.	Seitenkanten.
O3	1580 53' 21"	1490 58' 15"	700 48' 2"
O3	152 52 23	141 15 38	95 44 21
3O3	146 43 37	132 13 54	129 44 35
3O3	144 45 9	129 17 47	146 26 34
$\frac{1}{2}$ O3	153 19 53	141 54 40	93 39 35
$\frac{1}{2}$ O3	148 34 34	134 57 52	117 49 5
4O2	129 45 54	145 4 0	143 18 9
4O2	128 7 34	143 58 7	155 55 46
O4,2	161 51 3	167 11 37	41 18 6
O4,2	153 51 15	161 35 35	60 45 59

3) Die quadratischen Prismen.

(Syn. Quadratische Säulen und Tafeln; v. Glocker. Gerade rechtwinklige vierseitige Prismen; Mohs. Tetragonale Prismen; Naumann. Quadratprismen; Weiss. Regelmässige vierseitige oder quadratische Prismen; Haidinger.)

Ein quadratisches Prisma ist ein gleichseitig-vierseitiges Prisma, in welchem ein auf die Kanten senkrecht geführter Schnitt ein Quadrat ist.

Die vier Flächen sind stets parallel der Hauptaxe und werden in ihrer nach dieser Richtung unendlichen Ausdehnung durch die Flächen anderer quadratischer Formen begrenzt; die vier regelmässigen Kanten sind rechtwinklige. Nach der Lage der Flächen zu den Nebenaxen unterscheidet man dreierlei Prismen, von denen zwei zu den Holoedern gehören, nämlich das quadratische Prisma der Hauptreihe und das quadratische Prisma der Nebenreihe, die hemiedrischen dagegen werden später betrachtet.

Die Flächen des quadratischen Prisma der Hauptreihe sind durch je zwei Endpunkte der Nebenaxen parallel der Hauptaxe gelegt, welche Lage durch das Axenverhältniss ($\infty A:B:B$), oder auf die Grundform bezogen, durch ($\infty a:b:b$) bestimmt wird, aus welchem das Zeichen ∞O folgt; die Flächen dagegen des quadratischen Prisma der Nebenreihe sind nur durch je einen Endpunkt einer Nebenaxe parallel der jedesmaligen anderen und der Hauptaxe gelegt, welche Lage die beiden gleichen Axenverhältnisse ($\infty A:\infty B:B$) und ($\infty A:B:\infty B$), oder auf das Grundverhältniss bezogen, ($\infty a:\infty b:b$) und ($\infty a:b:\infty b$) bestimmen und das Zeichen $\infty O\infty$ ergeben. Das Prisma ∞O ist anzusehen als das letzte Glied der spitzeren quadratischen Oktaeder der Hauptreihe mO , indem bei einem unendlich grossen Werthe von m je zwei an einer Seitenkante liegende Flächen in eine der Hauptaxe parallele Ebene fallen; das Prisma $\infty O\infty$ aber ist das letzte Glied der spitzeren quadratischen Oktaeder der Nebenreihe, ∞On , indem bei einem unend-

lich grossen Werthe von n auch je zwei an einer Seitenkante liegende Flächen in eine Ebene fallen, die durch den Endpunkt einer Nebenaxe parallel der anderen und der Hauptaxe gelegt ist. Eben so kann auch das Prisma $\infty O \infty$ als das letzte Glied der gleichmässig spitzeren Dioktaeder, mOm , angesehen werden, indem bei einem unendlich grossen Werthe von m je vier an einer Grundecke liegende Flächen in eine der Hauptaxe parallele Ebene fallen.

4) Das quadratische Dyooeder.

(Syn. Endfläche; Mohs, v. Glocker. Die Base; Haidinger. Basisches Flächenpaar; Naumann.)

Hierunter versteht man zwei parallele Flächen, von denen jede durch einen Endpunkt der Hauptaxe parallel den beiden Nebenaxen gelegt ist; ihre Ausdehnung ist nach beiden Dimensionen der Nebenaxen unendlich und wird gleichfalls nur durch andere quadratische Formen begrenzt, wodurch erst die Dyooederflächen bestimmte und nach der begrenzenden Krystallform verschiedene Gestalten erlangen. Die Lage dieser beiden Flächen wird durch das allgemeine Axenverhältniss ($A : \infty B : \infty B$) oder auf die Grundform bezogen, durch ($a : \infty b : \infty b$) bestimmt, woraus sich das Zeichen $O \infty \infty$ ergibt. Das Dyooeder selbst bildet das letzte Glied der stumpferen quadratischen Oktaeder, sowohl der Haupt- als der Nebenreihe, indem bei einem unendlich grossen Werthe für m oder n derselben je vier die Endecken bildenden Flächen in eine den Nebenaxen oder dem Mittelqueerdurchschnitt parallele Ebene fallen.

5) Die oktagonalen Prismen.

(Syn. Gebrochene quadratische Säulen oder quadratoktagonale Säulen und Tafeln; v. Glocker. Vier- und vierkantige Prismen; Weiss. Ditetragonale Prismen; Naumann, Breithaupt. Achtseitige Prismen; Haidinger.)

Ein oktagonales Prisma ist ein gleichseitig-achtseitiges Prisma, bei welchem ein auf die Kanten senkrecht geführter Schnitt ein symmetrisches Oktogon ist. Die acht Flächen eines solchen Prismas sind der Hauptaxe parallel und bilden acht regelmässige stumpfwinklige Kanten von zweierlei Art, welche einzeln abwechselnd auf einander folgen, so dass die erste, dritte, fünfte und siebente, so wie wiederum die zweite, vierte, sechste und achte untereinander gleich sind, gleichviel von welcher der Anfang des Zählens gemacht wird. Vier derselben sind demnach stumpfer als die vier anderen, weshalb sie zunächst als stumpfere und schärfere oder weniger stumpfe unterschieden werden. Die Lage der Flächen wird in Bezug auf ein jedesmaliges Grundverhältniss durch die beiden gleichen Verhältnisse ($\infty a : nb : b$) und ($\infty a : b : nb$) bestimmt,

welche angeben, dass nach erfolgter Verlängerung je einer der beiden Nebenaxen durch die Vervielfachung mit dem rationalen Coefficienten $n > 1$ eine durch den Endpunkt einer verlängerten und der anderen unveränderten Nebenaxe parallel der Hauptaxe gelegte Ebene eine Fläche eines oktagonalen Prisma ergibt. Aus den obigen Verhältnissen geht auch im Vergleich mit dem Verhältniss $(a:b:b)$ der Grundform O das allgemeine Zeichen $\infty O n$ der oktagonalen Prismen hervor.

Da je zwei Flächen $\infty O n$ über eine Fläche eines quadratischen Prisma zu liegen kommen, so kann ein oktagonales Prisma als ein in der Mitte der Flächen gebrochenes quadratisches Prisma der Haupt- oder Nebenreihe angesehen werden; bezieht man diese Betrachtungsweise nur auf das quadratische Prisma der Hauptreihe, so kann man, analog den Dioktaedern, die vier Kanten, welche in ihren Kantenlinien den Kanten von ∞O entsprechen, Grundkanten, die anderen vier Nebenkanten nennen. Die Kantenlinien der letzteren gehen durch die Endpunkte der horizontalen Zwischenaxen, die der Grundkanten durch die Endpunkte der Nebenaxen. Von dem Werthe für n hängt es nun wie bei den Dioktaedern von x ab, ob die Grundkanten die stumpferen der beiderlei Kanten sind, und zwar sind, so lange $n < 1 + \sqrt{2}$ die Grundkanten weniger stumpf als die Nebenkanten, bei jedem Werthe von n über $1 + \sqrt{2}$ sind sie die stumpferen.

Bezeichnet man die Grundkanten mit X , die Nebenkanten mit Y , so ist:

$$\cos. X = -\frac{n^2-1}{n^2+1}, \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)}}, \tan. \frac{1}{2} X = n;$$

$$\cos. Y = -\frac{2n}{n^2+1}, \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{n-1}{\sqrt{2} \sqrt{(n^2+1)}}, \tan. \frac{1}{2} Y = \frac{n+1}{n-1};$$

$$\text{horizontale Zwischenaxe } r = \frac{nb \sqrt{2}}{1+n}.$$

Hieraus ergeben sich beispielsweise für die beiden oktagonalen Prismen $\infty O \frac{3}{2}$ und $\infty O 3$ folgende Winkel:

$\infty O \frac{3}{2}$	Grundkanten	112° 37' 12"	Nebenkanten	157° 22' 48"
$\infty O 3$	„	143 7 48	„	126 52 12

Wenn man die einfachen holoedrischen Formen des quadratischen Systems untereinander vergleicht, wie sie sich zu einer bestimmten Grundform verhalten, so ergeben sich auch hier, wie bei dem regulären System, gewisse Reihen, welche den Uebergang zwischen einzelnen feststehenden Formen vermitteln, nur sind dieselben weit mannichtfacher als im regulären Systeme. So bilden die spitzeren Oktaeder der Hauptreihe, die gleichmässig spitzeren Dioktaeder und die oktagonalen Prismen die Uebergangsglieder zwischen der Grund-

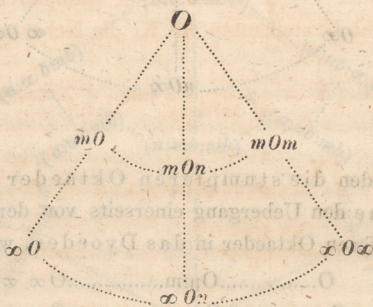
form, dem quadratischen Prisma der Hauptreihe und dem der Nebenreihe in den Reihen

$$\begin{array}{l} O \dots\dots\dots mO \dots\dots\dots \infty O \\ O \dots\dots\dots mOm \dots\dots\dots \infty O \infty \\ \infty O \dots\dots\dots \infty On \dots\dots\dots \infty O \infty \end{array}$$

welche auf dieselbe Weise, wie im regulären System gestellt, zeigen, wie wiederum durch die vermittelnde Reihe der mehr spitzeren Dioktaeder Uebergangsglieder zwischen den spitzeren Oktaedern der Hauptreihe und den gleichmässig spitzeren Dioktaedern, zwischen der Grundform und den oktagonalen Prismen gebildet werden, wie das Schema

$$\begin{array}{l} O \dots\dots\dots mO \dots\dots\dots \infty O \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ O \dots\dots\dots mOn \dots\dots\dots \infty On \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ O \dots\dots\dots mOm \dots\dots\dots \infty O \infty \end{array}$$

oder das Schema



zeigt.

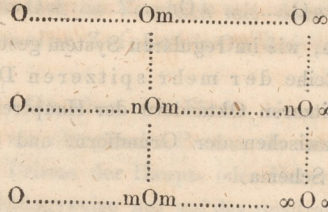
Andererseits bilden aber auch in den Reihen

$$\begin{array}{l} O \dots\dots\dots Om \dots\dots\dots O \infty \\ O \infty \dots\dots\dots nO \infty \dots\dots\dots \infty O \infty \end{array}$$

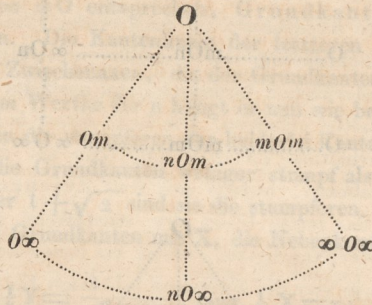
die Uebergangsdioctaeder und die spitzeren Oktaeder der Nebenreihe, die vermittelnden Glieder zwischen der Grundform und dem nächststumpferen Oktaeder und zwischen diesem und dem quadratischen Prisma der Nebenreihe; werden sie auf gleiche Weise mit der Reihe

$$O \dots\dots\dots mOm \dots\dots\dots \infty O \infty$$

wie oben zusammengestellt, so zeigen sich die mindest spitzeren Dioktaeder als die Uebergangsglieder von den Dioktaedern Om zu den Dioktaedern mOm , und von der Grundform zu den spitzeren Oktaedern der Nebenreihe $nO\infty$, so dass man ein zweites Schema von der Gestalt



oder wie oben von der Gestalt



erhält.

Endlich noch bilden die stumpferen Oktaeder der Hauptreihe und die der Nebenreihe den Uebergang einerseits von der Grundform, anderseits von dem nächststumpferen Oktaeder in das Dyoeder, wie es die Reihen

$$\begin{array}{ccccc}
 O & \dots\dots\dots & Omm & \dots\dots\dots & O\infty\infty \\
 O\infty & \dots\dots\dots & O\infty n & \dots\dots\dots & O\infty\infty
 \end{array}$$

zeigen, verbindet man diese mit der Reihe der Uebergangsdioektaeder

$$O \dots\dots\dots Om \dots\dots\dots O\infty$$

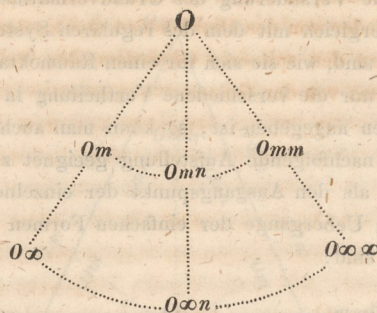
so ergibt sich ein drittes Schema von der Gestalt:

$$O \dots\dots\dots Om \dots\dots\dots O\infty$$

$$O \dots\dots\dots Omm \dots\dots\dots O\infty\infty$$

$$O \dots\dots\dots Omm \dots\dots\dots O\infty\infty$$

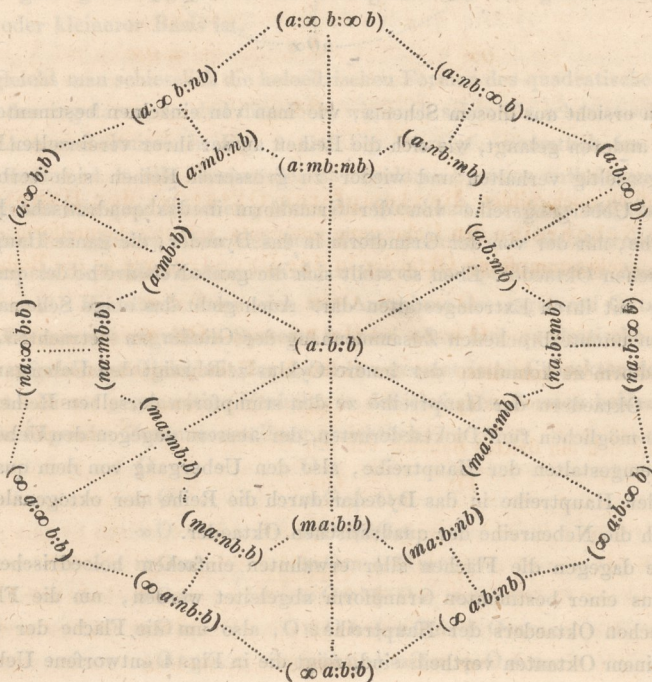
oder von der Gestalt



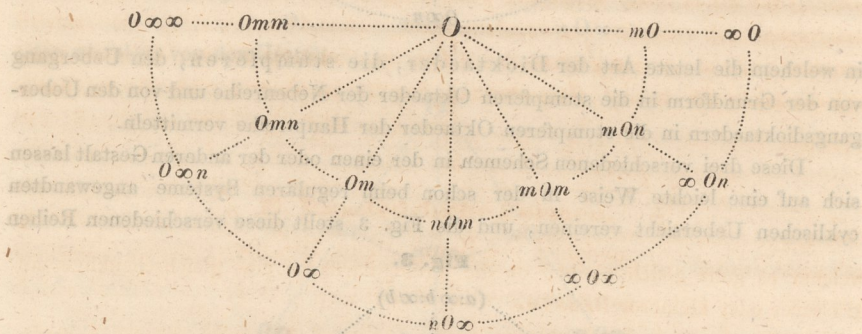
in welchem die letzte Art der Dioktaeder, die stumpferen, den Uebergang von der Grundform in die stumpferen Oktaeder der Nebenreihe und von den Uebergangsdioctaedern in die stumpferen Oktaeder der Hauptreihe vermitteln.

Diese drei verschiedenen Schemen in der einen oder der anderen Gestalt lassen sich auf eine leichte Weise in der schon beim regulären Systeme angewandten cyklischen Uebersicht vereinen, und die Fig. 3 stellt diese verschiedenen Reihen

Fig. 3.



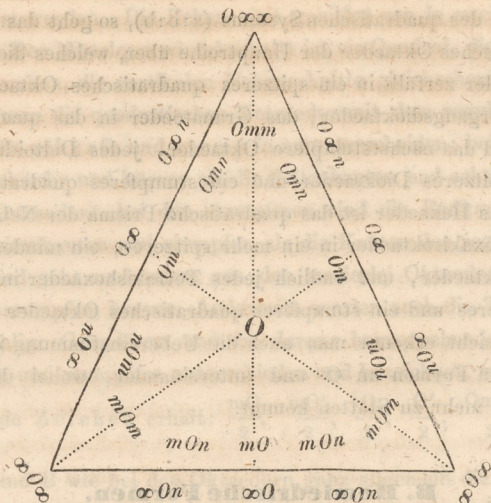
dar, wie sie durch die Veränderung des Grundverhältnisses hervorgehen, in welchem Schema zum Vergleich mit dem des regulären Systems die Axenverhältnisse unverändert gelassen sind, wie sie sich für einen Raumoktanten darstellen. Berücksichtigt man dagegen nur die verschiedene Vertheilung in Reihen, wie sie in den drei einzelnen Schemen angegeben ist, so kann man auch diese vereint darstellen, wozu am besten die nachfolgende Aufstellung geeignet zu sein scheint, weil sie immer die Grundform als den Ausgangspunkt der einzelnen Reihen zeigt, und in ihr die verschiedenen Uebergänge der einfachen Formen untereinander am übersichtlichsten gegeben sind:



Man ersieht aus diesem Schema, wie man von einzelnen bestimmten Formenarten zu anderen gelangt, wie sich die Reihen ausser ihrer vereinzelt Darstellung auch gegenseitig verhalten und wieder zu grösseren Reihen sich verbinden. So bildet die Uebergangsreihe von der Grundform in das quadratische Prisma der Hauptreihe, mit der von der Grundform in das Dyoeder, die ganze Hauptreihe der quadratischen Oktaeder. Eben so stellt sich die ganze Nebenreihe der quadratischen Oktaeder mit ihren Extremgestalten dar. Auch giebt das obige Schema Veranlassung, den ununterbrochenen Zusammenhang der Glieder zu betrachten, ohne auf die Grundform zu kommen; der innere Cyklus z. B. zeigt den Uebergang von den spitzeren Oktaedern der Hauptreihe zu den stumpferen derselben Reihe vermittelt durch die möglichen fünf Dioktaederarten, der äussere dagegen den Uebergang von den Extremgestalten der Hauptreihe, also den Uebergang von dem quadratischen Prisma der Hauptreihe in das Dyoeder durch die Reihe der oktagonalen Prismen und durch die Nebenreihe der quadratischen Oktaeder.

Wie dagegen die Flächen aller erwähnten einfachen holloedrischen Formen, welche aus einer bestimmten Grundform abgeleitet werden, um die Fläche eines quadratischen Oktaeders der Hauptreihe, O , also um die Fläche der Grundform oder in einem Oktanten vertheilt sind, zeigt die in Fig. 4 entworfene Uebersicht, in

Fig. 4.



welcher es ganz gleich bleibt, ob die Triangularfläche eine gleichschenklige mit grösserer oder kleinerer Basis ist.

Vergleicht man schliesslich die holoedrischen Formen des quadratischen Systems mit denen des regulären, so sind dieselben, wie auch schon die schematische Uebersicht der Axenverhältnisse in Fig. 2 und Fig. 3 zeigt, sämtlich im regulären System enthalten, d. h. alle Flächen der im regulären Systeme enthaltenen Körperformen ergeben alle quadratischen, wenn die Gleichheit der Axen aufgehoben wird und eine der drei gleichen Axen sich verändert, dadurch dass sie entweder grösser oder kleiner als die beiden anderen wird, wodurch ein quadratisches Axenverhältniss hervorgeht. Hierdurch lösen sich mit Ausnahme des regulären Oktaeders die einfachen Formen des regulären Systems in zwei oder drei quadratische auf, weil durch die aufgehobene Gleichheit der Axen der geometrische Charakter der Flächen sich ändert. Dieses gegenseitige Verhältniss der einfachen Formen beider Systeme ist leicht in folgender Zusammenstellung ersichtlich:

O	O
m O	m O + O m
∞ O	∞ O + O ∞
m O m	m O m + O m m
∞ O ∞	∞ O ∞ + O ∞ ∞
m O n	m O n + n O m + O m m
∞ O n	∞ O n + n O ∞ + O ∞ n

Ändert sich nämlich das Axenverhältniss des regulären Systems ($a:a:a$) in ein Axenverhältniss des quadratischen Systems ($a:b:b$), so geht das reguläre Oktaeder in ein quadratisches Oktaeder der Hauptreihe über, welches die Grundform ist; jedes Triakisoktaeder zerfällt in ein spitzeres quadratisches Oktaeder der Hauptreihe und ein Uebergangsdioктаeder, das Granatoeder in das quadratische Prisma der Hauptreihe und das nächststumpferes Oktaeder, jedes Deltoidikositetraeder in ein gleichmässig spitzeres Dioктаeder und ein stumpferes quadratisches Oktaeder der Hauptreihe, das Hexaeder ist das quadratische Prisma der Nebenreihe und das Dyoeder, jedes Hexakisoktaeder in ein mehr spitzeres, ein mindest spitzeres und ein stumpferes Dioктаeder, und endlich jedes Tetrakishexaeder in ein oktogonales Prisma, ein spitzeres und ein stumpferes quadratisches Oktaeder der Nebenreihe. Nach dieser Uebersicht erkennt man auch die Uebereinstimmung in den Combinationen der einzelnen Formen an O und untereinander, wobei die gleichmässige Bezeichnung um so mehr zu Statten kommt.

B. Hemiedrische Formen.

a) Mit nicht parallelen Flächen.

1) Die quadratischen Tetraeder.

(Syn. Tetragonale Sphenoide; Naumann. Tetraederähnliche Gestalten, von gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken begrenzt; Mohs. Tetragonale Sphenöeder oder Keilflächner; Breithaupt. Sphenoide; Haidinger.)

Ein quadratisches Tetraeder ist eine von vier gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Triangeln umschlossene Gestalt mit sechs Kanten und vier unregelmässigen dreikantigen Ecken.

In Bezug auf ihre Entstehung giebt es zwei Arten, hemiedrische und tetartoe-drische, von denen die letzteren weiter unten betrachtet werden. Die ersteren entstehen durch Hemiedrie der quadratischen Oktaeder der Hauptreihe, indem von den acht Flächen eines solchen Oktaeders vier abwechselnde herrschend werden und die vier anderen bis zum gänzlichen Verschwinden zurücktreten. Daher werden die Tetraeder durch das Zeichen desjenigen Oktaeders, aus dem sie entstanden, bezeichnet, unter welches man den Nenner 2 setzt, und die beiden aus jedem Oktaeder hervorgehenden völlig gleichen, nur verschieden gestellten Tetraeder, von denen das eine das Gegentetraeder des anderen heisst, werden durch einen dem O beigefügten Strich unterschieden, wie schon im regulären System geschah.

Die Kanten sind zweierlei Art: zwei regelmässige horizontale, die Endkanten, deren Kantenlinien parallel dem Mittelqueerdurchschnitt durch die Endpunkte der Hauptaxe gelegt sind und durch diese Endpunkte halbirt werden, und von denen jede einer horizontalen Zwischenaxe parallel ist; ferner vier unregel-

mässige schief laufende, die Seitenkanten, welche durch die Endpunkte der Nebenaxen halbirt werden. Die Ecken sind gebildet von je zwei Seitenkanten und einer Endkante. Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein Quadrat, die vertikalen Hauptschnitte sind Rhomben, die vertikalen Nebenschnitte gleichschenklige Triangel.

Vergleicht man die quadratischen Tetraeder mit dem regulären, so sind sie im Allgemeinen als scharfe und stumpfe zu unterscheiden; bei den ersteren sind die Endkanten schärfer und kürzer als die Seitenkanten und schärfer als die Kanten des regulären Tetraeders, bei den stumpferen sind die Endkanten stumpfer und länger als die Seitenkanten und stumpfer als die Kanten des regulären Tetraeders. Dieser Unterschied geht auch schon aus den zweierlei Oktaedern der Hauptreihe, den spitzen und stumpfen, hervor. Anderseits werden auch die Tetraeder in Bezug auf eine jedesmalige Grundform und die daraus hervorgehenden Tetraeder unter sich als schärfere und stumpfere unterschieden und bezeichnet, wodurch man im Allgemeinen folgende Zeichen erhält: $\frac{mO}{2}$, $\frac{mO'}{2}$, $\frac{O}{2}$, $\frac{O'}{2}$, $\frac{Omm}{2}$, $\frac{O'mm}{2}$.

Stellen A und B wie bei den Oktaedern ganz allgemein die halben Haupt- und Nebenaxen dar, so wird man für die Kantenwinkel die nachfolgenden Werthe erhalten, wobei durch X die Endkanten und durch Z die Seitenkanten bezeichnet werden:

$$\cos. X = -\frac{B^2 - 2A^2}{B^2 + 2A^2}, \cos. \frac{1}{2} X = \frac{B\sqrt{2}}{\sqrt{(B^2 + 2A^2)}}, \tan. \frac{1}{2} X = \frac{B}{A\sqrt{2}};$$

$$\cos. Z = \frac{B^2}{2A^2 + B^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{(A^2 + B^2)}}{\sqrt{(2A^2 + B^2)}}, \tan. \frac{1}{2} Z = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}.$$

In den besonderen Fällen dürfen dann nur für A und B die entsprechenden Werthe des zugehörigen Axenverhältnisses gesetzt werden, nämlich bei $\frac{O}{2}$ die Grössen a und b, bei $\frac{mO}{2}$ die Grössen ma und b, und bei $\frac{Omm}{2}$ die Grössen a und mb. Als Beispiele für die Tetraederreihe mögen die aus dem Grundverhältniss des Kupferkieses abgeleiteten Tetraeder $\frac{O}{2}$, $\frac{2O}{2}$ und $\frac{O2,2}{2}$ dienen:

Grundform des Kupferkieses, O, worin a:b:b = $\sqrt{33}:\sqrt{34}:\sqrt{34}$;

$\frac{O}{2}$	Endkanten	71° 20' 13"	Seitenkanten	70° 7' 23"
$\frac{2O}{2}$	„	39 28 59	„	81 29 57
$\frac{O2,2}{2}$	„	110 16 32	„	47 40 49.

2) Die Diplotetraeder.

(Syn. Tetragonale Skalenoeder; Naumann. Ditetragonale Skalenoeder; Breithaupt. Pyramidenähnliche Gestalten, von ungleichseitigen Dreiecken begrenzt und von tetraedrischer Hauptform; Mohs. Disphene; Haidinger.)

Ein Diplotetraeder ist ein von acht gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Triangeln umschlossener Körper, mit zwölf Kanten und sechs Ecken, dessen Flächen in vier Paare nach den Flächen eines quadratischen Tetraeders vertheilt sind.

Die Kanten sind dreierlei Art: vier symmetrische kürzere schärfere und vier symmetrische längere stumpfere Endkanten, und vier unregelmässige Seitenkanten. Die Ecken sind zweierlei Art: zwei symmetrische vierkantige Endecken, welche von den abwechselnden Endkanten gebildet werden und deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxe sind; vier unregelmässige vierkantige Seitenecken, welche von zwei verschiedenen End- und zwei Seitenkanten gebildet werden. Mit den quadratischen Tetraedern verglichen, entsprechen je zwei kürzere Endkanten je einer Endkante der Tetraeder, deren Flächen als in ihren Höhenlinien gebrochen angesehen werden können; die Seitenkanten entsprechen den Seitenkanten und die längeren Endkanten kommen über die Höhenlinien zu liegen. Es entstehen diese Körper durch Hemiedrie der Dioktaeder dadurch, dass von den acht an den Nebenkanten liegenden Paaren vier abwechselnde herrschend werden, während die vier anderen verschwinden, wie es bei den Oktaedern mit den einzelnen Flächen der Fall war. Die unveränderten Nebenkanten bilden dann die längeren Endkanten, welche demnach zur besseren Unterscheidung und der Kürze wegen diesen Namen beibehalten können, wohingegen die kürzeren Endkanten ausschliesslich mit dem Namen Endkanten bezeichnet werden. Das Zeichen der Diplotetraeder ist das der Dioktaeder mit dem Nenner 2, und die beiden aus jedem Dioktaeder hervorgehenden gleichen, nur verschieden gestellten Gegenhemieder, werden durch den dem O beigefügten Strich unterschieden. Hierdurch

gehen nachfolgende allgemeine Zeichen für die Diplotetraeder hervor, $\frac{Om}{2}$, $\frac{O'm}{2}$, $\frac{mOm}{2}$, $\frac{mO'm}{2}$, $\frac{mOn}{2}$, $\frac{mO'n}{2}$, $\frac{nOm}{2}$, $\frac{nO'm}{2}$, $\frac{Omn}{2}$ und $\frac{O'mn}{2}$, da es nämlich so viele Arten von Diplotetraedern geben muss, als Dioktaederarten unterschieden werden, und denen man auch analoge Namen ertheilen könnte, als: Uebergangsdiplo-tetraeder, gleichmässig-, mehr-, mindest spitzere und stumpfere Diplotetraeder, um ihren Ursprung anzudeuten.

Zufolge der Entstehung der Diplotetraeder sind die Nebenkantenlinien durch die Endpunkte der Hauptaxe und durch die der horizontalen Zwischenaxen gelegt, die Seitenkantenlinien dagegen werden durch die Endpunkte der Nebenaxen halbirt.

Der Mittelqueerdurchschnitt ist ein symmetrisches Oktogon, die beiden vertikalen Hauptschnitte sind Rhomben und die beiden vertikalen Nebenschnitte sind Deltoide. Um die Kantenwinkel zu bestimmen, kann man sich im Allgemeinen wieder der Grössen bedienen, wie sie in den beiden gleichen allgemeinsten Axenverhältnissen für je zwei über einer Tetraederfläche liegende Flächen, oder für je zwei zu einem Oktanten gehörige Dioktaederflächen, in $(A:xB:B)$ und $(A:B:xB)$ enthalten sind. Für jeden einzelnen Fall dürfen dann nur die entsprechenden Werthe gesetzt werden, wie bei den Dioktaedern angegeben ist. Wenn nun die Endkanten mit X , die Nebenkanten mit Y und die Seitenkanten mit Z bezeichnet werden, so sind die Werthe für Y dieselben, wie bei den Dioktaedern, da diese Kanten beiden gemeinschaftlich sind, für X und Z aber ist:

$$\cos. X = -\frac{x(xB^2 - 2A^2)}{(x^2+1)A^2 + x^2B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2}X = \frac{(x+1)A}{\sqrt{2} \sqrt{[(x^2+1)A^2 + x^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{[(x-1)^2A^2 + 2x^2B^2]}}{(x+1)A};$$

$$\cos. Z = \frac{x^2B^2 - A^2(x^2 - 1)}{x^2B^2 + A^2(x^2 + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{(x^2B^2 + A^2)}}{\sqrt{[(x^2+1)A^2 + x^2B^2]}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}Z = \frac{Ax}{\sqrt{(x^2B^2 + A^2)}}$$

Als Beispiele mögen einige aus der Grundform des Kupferkieses abgeleitete Diplotetraeder dienen:

	Endkanten	Nebenkanten	Seitenkanten.
$\frac{O3}{2}$	990 46' 37"	1420 24' 55"	860 12' 49"
$\frac{3O3}{2}$	63 13 16	129 35 44	129 11 17
$\frac{3O3}{2}$	82 21 16	135 47 9	105 56 34
$\frac{4O2}{2}$	44 37 2	144 4 34	121 26 26
$\frac{O4,2}{2}$	125 31 41	162 27 1	51 7 24.

3) Die Trapezoidoktaeder.

(Syn. Tetragonale Trapezoeder; Naumann. Pyramidenähnliche Gestalten von trapezoidalen Flächen; Mohs. Quadratische Trapezoeder, v. Glocker. Ditetragonale Trapezoeder; Breithaupt. Trapezoeder; Haidinger.)

Ein Trapezoidoktaeder ist ein von acht gleichen und ähnlichen unsymmetrischen Trapezoidflächen umschlossener Körper, mit

sechszehn unregelmässigen Kanten und zehn Ecken, dessen Flächen in zwei vierzählige Systeme vertheilt sind.

Diese Körper entstehen auch durch Hemiedrie der Dioktaeder, aber dadurch, dass die abwechselnden Flächen herrschend werden, und die beiden aus einem jeden Dioktaeder auf diese Weise hervorgehenden Gegenhemieder werden durch die Beinamen rechts oder links gewendet unterschieden. Wenn man nämlich die Vertheilung der Dioktaederflächen nach den ihnen zu Grunde liegenden Oktaedern der Hauptreihe im Auge behält, so liegt in jedem der Flächenpaare die eine Fläche rechts, die andere links an der zugehörigen Nebenkante; werden nun in dem einen Falle alle auf gleiche Weise rechts liegenden Flächen herrschend, so entsteht ein rechts gewendetes Trapezoidoktaeder, in dem anderen Falle ein links gewendetes. Dieser Unterschied wird durch ein vorgesetztes r oder l an dem mit dem Nenner 2 versehenen Zeichen des Dioktaeders dargestellt, wodurch gleichzeitig diese Hemieder von den Diploetraedern unterschieden werden; so sind z. B. $r \frac{mOm}{2}$ und $l \frac{mOm}{2}$ die beiden aus dem Dioktaeder mOm hervorgehenden Trapezoidoktaeder. Es giebt dieser Körper möglicherweise so viele, als es Dioktaeder giebt, nur in der Natur ist ihr Vorkommen, so wie das der übrigen Hemieder dieses Systems, sehr sparsam.

Ueber ihre allgemeine Beschaffenheit gilt noch Folgendes: Die Kanten sind dreierlei Art, nämlich acht Endkanten, die zu je vier von den Endpunkten der Hauptaxe ausgehen; vier kürzere schärfere und vier längere stumpfere Seitenkanten, welche einzeln mit einander abwechselnd schief (im Zickzack) laufen. Die Ecken sind zweierlei Art: zwei regelmässige vierkantige Endecken, welche von den Endkanten gebildet werden und deren Scheitel die Endpunkte der Hauptaxe sind; acht unregelmässige dreikantige Seitenecken, welche von je drei verschiedenen Kanten gebildet werden und deren Scheitelpunkte nicht in einer Ebene, sondern in zwei dem Mittelqueerdurchschnitt parallelen Ebenen liegen, so dass vier abwechselnde in der einen und vier in der anderen liegen. Die Seitenkanten lassen sich durch ihre Beschaffenheit im Allgemeinen nicht in ihrer Lage bestimmen; ihre Kantenlinien werden zunächst durch die Ebene des Mittelqueerdurchschnittes halbt und in den Halbierungspunkten je vier gleicher enden auch gleiche Halbaxen, so dass also die Endpunkte der Nebenaxen und die der horizontalen Zwischenaxen je vier gleiche Kantenlinien halbiren. Hiernach kann man, analog den beiderlei Seitenecken der Dioktaeder, durch deren Scheitelpunkte die Endpunkte der horizontalen Axen bestimmt wurden, die beiderlei Seitenkanten als Grund- und Nebenseitenkanten unterscheiden, je nachdem ihre Kantenlinien durch die Endpunkte der Nebenaxen oder der horizontalen Zwischenaxen halbt werden. Wählt man wiederum das ganz allgemeine Verhältniss (A:x:B) oder

(A:B:xB) zur Bestimmung der Flächen, so werden bei den Trapezoidoktaedern die längeren Seitenkanten die Nebenseitenkanten und die kürzeren die Grundseitenkanten sein, so lange $x < 1 + \frac{1}{2}$; ist aber $x > 1 + \frac{1}{2}$, so sind die kürzeren Seitenkanten die Nebenseitenkanten und die längeren die Grundseitenkanten.

Werden die Endkanten mit X, die Nebenseitenkanten mit Y und die Grundseitenkanten mit Z bezeichnet, so erhält man für die Kantenwinkel die nachfolgenden Werthe:

$$\cos. X = -\frac{x^2 B^2}{(x^2 + 1) A^2 + x^2 B^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{A \sqrt{(x^2 + 1)}}{\sqrt{2} \sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + x^2 B^2]}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{\sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + 2 x^2 B^2]}}{A \sqrt{(x^2 + 1)}};$$

$$\cos. Y = \frac{x (x B^2 - 2 A^2)}{x^2 B^2 + A^2 (x^2 + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(x - 1)^2 A^2 + 2 x^2 B^2]}}{\sqrt{2} \sqrt{(x^2 + 1) A^2 + x^2 B^2}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{A (x + 1)}{\sqrt{[(x - 1)^2 A^2 + 2 x^2 B^2]}}.$$

Die Funktionen für den Kantenwinkel Z sind dieselben wie für die gleichbezeichneten Seitenkantenwinkel der Diplotetraeder, welche oben angegeben sind. Um beispielsweise einige Trapezoidoktaeder mit ihren Kantenwinkeln anzuführen, sollen nachfolgende aus dem Grundverhältniss des Skapoliths abgeleitete dazu dienen:

Grundform O, in welcher $a:b:b = \sqrt{99}:\sqrt{511}:\sqrt{511}$

	Endkanten	Grund-	Nebenseitenkanten.
$\frac{O3}{2}$	1450 22' 22"	470 3' 56"	440 13' 36"
$\frac{3O3}{2}$	109 54 13	100 47 24	93 10 12
$\frac{4O2}{2}$	101 50 15	105 46 12	115 30 55

b) Hemieder mit parallelen Flächen.

1) Die hemiedrischen quadratischen Oktaeder.

(Syn. Oktaederähnliche Hemidioktaeder; v. Glocker. Tetragonale Pyramiden von abnormer Flächenstellung; Naumann.)

Unter einem hemiedrischen quadratischen Oktaeder versteht man ein quadratisches Oktaeder, dessen Flächen dadurch bestimmt werden, dass man bei Voraussetzung der allgemeinen quadratischen Axen A und B, in jedem Oktanten eine der beiden Nebenaxen durch den rationalen Coefficienten $x > 1$ vervielfacht, durch den Endpunkt dieser vervielfachten, durch den der unveränderten anderen und durch den Endpunkt der Hauptaxe eine Ebene legt. Es bilden diese Oktaeder, den Ge-

staltsverhältnissen nach von den holoedrischen nicht verschieden, eine neue Reihe zwischen denen der Haupt- und Nebenreihe, und heissen daher quadratische Oktaeder der Zwischenreihe. Sie entstehen durch Hemiedrie der Dioktaeder dadurch, dass von den acht an den Seitenkanten liegenden Flächenpaaren vier abwechselnde herrschend werden und die vier anderen verschwinden. Zur Unterscheidung von den Diplotetraedern und Trapezoidoktaedern kann in den Zeichen dieser Hemieder, als parallelfächiger, der doppelte Theilungsstrich angewandt werden, und die beiden jedesmaligen Gegenhemieder werden dann durch den dem O beigefügten Strich unterschieden, so dass z. B. $\frac{303}{2}$ und $\frac{30'3}{2}$ die beiden aus dem Dioktaeder 303 entstehenden hemiedrischen quadratischen Oktaeder oder Oktaeder der Zwischenreihe bezeichnen wird.

Obgleich es dieser Oktaeder so viele geben kann, als Dioktaeder möglich sind, so ist doch ihr Vorkommen in der Natur sehr beschränkt. Ueber die Gestaltungseigenschaften gilt das, was von den quadratischen Oktaedern im Allgemeinen gesagt ist. Die Lage der Flächen wird durch das allgemeine Axenverhältniss der Dioktaeder, durch $(A:xB:B)$ oder $(A:B:xB)$ bestimmt, und wenn die Endkanten mit X, die Seitenkanten mit Z bezeichnet werden, so geht die Grösse der zugehörigen Kantenwinkel aus bereits angegebenen Gleichungen hervor. Die Endkanten nämlich sind dieselben wie die gleichbezeichneten der Trapezoidoktaeder und die Seitenkanten sind die unveränderten Seitenkanten der Dioktaeder. Als Beispiele solcher Formen dienen die nachfolgenden aus der Grundform des Scheelspathes abgeleitet:

$\frac{03}{2}$	Endkanten	116° 44' 37"	Seitenkanten	95° 44' 21"
$\frac{\frac{3}{2}03}{2}$	„	105 27 58	„	117 49 5
$\frac{402}{2}$	„	92 47 18	„	155 55 46

2) Die hemiedrischen quadratischen Prismen.

(Syn. Hemioktogonale Säulen; v. Glocker. Tetragonale Prismen von abnormer Flächenstellung; Naumann.)

Unter einem hemiedrischen quadratischen Prisma versteht man ein quadratisches Prisma, dessen Flächenlage dadurch bestimmt wird, dass man von je zwei halben Nebenaxen eine durch einen rationalen Coefficienten $n > 1$ vervielfacht, durch den so erhaltenen Endpunkt und den Endpunkt der anderen unveränderten eine Ebene parallel der Hauptaxe legt. Sie entstehen durch Hemiedrie der oktagonale Prismen, indem die abwechselnden Flächen herrschend werden,

und können, als zwischen den beiden holoeidrischen Prismen liegend, quadratische Prismen der Zwischenreihe genannt werden. Die beiden aus einem Holoeder hervorgehenden Gegenhemieder werden durch den beigefügten Strich unterschieden so dass ihre allgemeinen Zeichen $\frac{\infty O n}{2}$ und $\frac{\infty O' n}{2}$ sind.

C. Tetartoedrische Formen.

Die tetartoedrischen quadratischen Tetraeder.

Hierunter sind diejenigen quadratischen Tetraeder zu verstehen, welche durch Hemiedrie der Diplotetraeder und hemiedrischen quadratischen Oktaeder entstehen, und zwar durch Herschendenwerden der abwechselnden Flächen; sie sind demnach Tetartoeder der Dioktaeder und werden durch das Zeichen derselben mit dem Nenner 4 bezeichnet. Die horizontalen Endkanten sind auch, wie bei den hemiedrischen Tetraedern, durch die Endpunkte der Hauptaxe halbiert und parallel dem Mittelqueerdurchschnitt, liegen aber weder in den vertikalen Haupt- noch Nebenschnitten, sondern zwischen denselben.

Bei Voraussetzung des allgemeinen Axenverhältnisses der Dioktaeder werden die mit X bezeichneten Endkanten und die mit Z bezeichneten Seitenkanten der tetartoedrischen Tetraeder, wie folgt, bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{x^2 B^2 - A^2 (x^2 + 1)}{x^2 B^2 + A^2 (x^2 + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{A \sqrt{(x^2 + 1)}}{\sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + x^2 B^2]}}$$

$$\tan g. \frac{1}{2} X = \frac{x B}{A \sqrt{(x^2 + 1)}};$$

$$\cos. Z = \frac{x^2 B^2}{x^2 B^2 + A^2 (x^2 + 1)}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + 2 x^2 B^2]}}{\sqrt{2} \sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + x^2 B^2]}}$$

$$\tan g. \frac{1}{2} Z = \frac{A \sqrt{(x^2 + 1)}}{\sqrt{[(x^2 + 1) A^2 + 2 x^2 B^2]}}$$

In der Natur sind diese tetartoedrischen Formen noch nicht angetroffen worden, und es sollen die beiden aus der Grundform des Scheelspathes berechneten hemiedrischen Tetraeder nur als Beispiele gelten:

$\frac{O3}{4}$	Endkanten	84° 15' 39"	Seitenkanten	63° 15' 23"
$\frac{3O3}{4}$	"	33 33 26	"	85 18 11

Eine Vergleichung der hemiedrischen und tetartoedrischen Formen des quadratischen Systems mit denen des regulären, wie sie bei den Holoedern angestellt wurde,

zeigt eine Uebereinstimmung verschiedener derjenigen Formen, welche nicht parallelflächig sind und deren Hemiedriegesetz analog dem der regulären Formen ist; doch übertrifft das quadratische System an Mannigfaltigkeit das reguläre, indem, wie z. B. aus den Formen Om und mOm hemiedrische Formen hervorgehen, die durch die Hemiedrie des regulären Systems nicht gegeben sind. So lassen sich denn auch bei Uebereinstimmung der Art der Hemiedrie aus regulären Hemiedern durch Veränderung einer Axe quadratische Hemieder ableiten, z. B. aus $\frac{O}{2}$ die Form $\frac{O}{2}$, aus $\frac{mO}{2}$ die Formen $\frac{mO}{2}$ und $\frac{Om}{2}$, aus $\frac{mOm}{2}$ die Formen $\frac{mOm}{2}$ und $\frac{Omm}{2}$, aus $\frac{mOn}{2}$ die Formen $\frac{mOn}{2}$, $\frac{nOm}{2}$ und $\frac{Om n}{2}$, wie es eine passende Stellung der Formen leicht ersehen lässt.

Darstellung der zweifachen Combinationen.

A. Holoeder mit Holoedern.

1) An der Grundform O

bilden die Flächen:

- mO , Zuschärfung der Seitenkanten;
- Om , Zuschärfung der Endkanten;
- ∞O , gerade Abstumpfung der Seitenkanten;
- $O\infty$, gerade Abstumpfung der Endkanten;
- mOm , vierfl. Zusp. der Seitenecken, die Zusp. Fl. auf die Fl. aufgesetzt, wobei die Combinationskanten mit den Endkanten parallel sind;
- Omm , vierfl. Zusp. der Endecken, die Zusp. Fl. auf die Fl. ger. aufgesetzt;
- $\infty O\infty$, ger. Abst. der Seitenecken;
- $O\infty\infty$, ger. Abst. der Endecken;
- mOn , vierfl. Zusp. der Seitenecken, die Zusp. Fl. auf die Fl. aufgesetzt, wobei die Combinationskanten mit den Endkanten nach den Seitenecken hin convergiren;
- nOm , vierfl. Zusp. der Seitenecken, die Zusp. Fl. auf die Fl. aufgesetzt, wobei die Combinationskanten mit den Endkanten nach den Endecken hin convergiren;
- Omn , achtf. Zusp. der Endecken;