B. Hemiedrische Formen.

a) Mit nicht parallelen Flächen.

1) Das reguläre Tetraeder.

(Syn. Tetraeder; Naumann. Vierflächner; v. Raumer, Breithaupt. Vierflach; Bernhardi. Hemioktaeder; G. Rose. Einfache dreiseitige Pyramide.)

Das reguläre Tetraeder ist ein von vier gleichen gleichseitigen Triangeln umschlossener Körper mit sechs gleichen regelmässigen Kanten und vier gleichen regelmässigen dreikantigen Ecken, hervorgegangen durch Hemiedrie des regulären Oktaeders, indem von den acht Oktaederflächen die halbe Anzahl und zwar vier abwechselnde sich erweitern, während die vier anderen bis zum gänzlichen Verschwinden zurücktreten. Man erhält so aus O, wie es schon bereits im Allgemeinen von den Hemiedern bekannt ist, zwei völlig gleichgestaltete, nur verschieden gestellte Tetraeder, je nachdem die eine oder die andere Hälfte der Flächenanzahl herrschend wird, und von denen das eine das Gegentetraeder des anderen genannt wird. Weil nun die Lage der Tetraederflächen gegen die Axen dieselbe ist, wie die der Oktaederflächen, und auch durch das Axenverhältniss (a:a:a) bestimmt wird, so wird auch für sie das Zeichen O angewandt, an welchem durch den untergesetzten Nenner 2 die Hemiedrie angedeutet wird, so dass also $\frac{O}{2}$ das Zeichen für das reguläre Tetraeder ist. Nur in dem Falle, dass beide Tetraeder zugleich und unterscheidend bezeichnet werden sollen, markirt man das eine durch einen rechts oberhalb O gesetzten Strich, wodurch die Bezeichnung $\frac{O}{2}$ und $\frac{O'}{2}$ für die beiden Tetraeder hervorgeht.

Die Hauptaxenendpunkte liegen in den Halbirungspunkten der Kantenlinien. Die trigonalen Zwischenaxen des Oktaeders als des Holoeders sind im Tetraeder in der Art verändert, dass diejenigen Hälften, welche in den verschwundenen Oktaederflächen endigten, verlängert sind und ihre Endpunkte in den Scheiteln der Tetraederecken haben; sie verlieren dadurch, weil sie durch das Centrum ungleich getheilt werden, den Charakter der Axen und sind als solche nur in Bezug auf das Holoeder beizubehalten. Die Länge der unveränderten Hälften, die in den Mittelpunkten der Flächen endigen, ist wie bei O, $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$, während die verlängerten Hälften eine Länge $T = \sqrt{3} = 3t$ erlangt haben. Die rhombischen Zwischenaxen sind unverändert wie in O, aber ihre Endpunkte werden durch nichts bemerkbar. Die Hauptschnitte sind Quadrate, die Nebenschnitte gleichschenklige Triangel. Die ebenen Winkel sind $= 60^0$, die Kantenwinkel $= 70^0\ 31'\ 44''$, und die Kantenlinien verbinden die Endpunkte der verlängerten trigonalen Halbaxen.

2) Die Deltoiddodekaeder.

(Syn. Trapezoid-Dodekaeder; Weiss. Zweikantige Tetragonaldodekaeder; Mohs. Trapezoidale Dodekaeder, Deltoiddodekaeder, Deltoidzwölfflächner; Breithaupt. Doltoidzwölfflache; Bernhardi. Deltoeder; Haidinger.)

Ein Deltoiddodekaeder ist eine von zwölf gleichen und ähnlichen Deltoiden umschlossene Gestalt, mit vier und zwanzig symmetrischen Kanten und vierzehn Ecken, deren Flächen in vier dreizählige Systeme vertheilt sind. Es entstehen diese Formen durch Hemiedrie der Triakisoktaeder, wenn von den Flächen eines solchen die Hälfte so herrschend wird, dass wie bei dem Uebergang von O in $\frac{O}{2}$ die abwechselnden Flächen, hier die abwechselnden dreizähligen Flächensysteme sich erweitern, während die anderen verschwinden, wodurch aus jedem mO zwei völlig gleichgestaltete, nur verschieden gestellte, Deltoiddodekaeder hervorgehen, je nachdem die eine oder die andere halbe Anzahl der dreiflächigen Systeme herrschend wird. Ihr allgemeines Zeichen ist $\frac{mO}{2}$, und für die beiden jedesmaligen Gegenhemieder $\frac{mO}{2}$ und $\frac{mO'}{2}$.

Es giebt der Deltoiddodekaeder möglicherweise so viele, als es mO geben kann, und zu ihrer gemeinsamen Bestimmung gehört noch Folgendes: Die Kanten sind zweierlei Art: zwölf längere schärfere, von denen je zwei einer Tetraederkante entsprechen; zwölf kürzere stumpfere, welche zu je drei über einer eingeschriebenen Tetraederfläche gruppirt sind. Die Kantenlinien der ersteren sind die Verbindungslinien der Hauptaxenendpunkte mit den Endpunkten der verlängerten trigonalen Axenhälften, die der letzteren aber, wie in mO die entsprechenden, die Nebenkantenlinien, verbinden die Hauptaxenendpunkte mit den unveränderten trigonalen Axenenden. Die Ecken sind dreierlei Art: sechs symmetrische vierkantige, von den abwechselnden längeren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Hauptaxenendpunkte sind; vier spitzere regelmässige dreikantige, gebildet von den längeren, und vier stumpfere regelmässige dreikantige, gebildet von den kürzeren Kanten. Die Scheitelpunkte der spitzeren sind den Ecken von $\frac{O}{2}$ entsprechend die Endpunkte der verlängerten, die Scheitelpunkte dagegen der stumpferen, wie in mO der dreikantigen, die Endpunkte der unveränderten halben trigonalen Zwischenaxen. Die rhombischen Zwischenaxen sind unverändert wie in mO, die Hauptschnitte sind Quadrate, die Nebenschnitte ungleichseitige Hexagone.

Von den Kanten sind nur die mit X bezeichneten längeren zu bestimmen, während die mit Y bezeichneten kürzeren mit den gleichen in mO übereinstimmen. Es ist:

$$\cos. X = -\frac{m(m-2)}{2m^2+1}, \ \cos. \tfrac{1}{2} X = \frac{m+1}{\sqrt{2} \ \sqrt{(2m^2+1)}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} X = \frac{\sqrt{(3m^2-2m+1)}}{m+1};$$

für die trigonalen Zwischenaxen ist $t = \frac{m\sqrt{3}}{2m+1}$, $T = \frac{m\sqrt{3}}{2m-1} = \frac{2m+1}{2m-1} \cdot t$.

Als Beispiele dieser Körper dienen die zwei in der Natur vorgekommenen mit Angabe ihrer Kantenwinkel:

	längere	kürzere Kanten.	Vorkommen.
$\frac{\frac{3}{2}O}{2}$	82° 9′ 45″	162° 39′ 31″	Fahlerz
$\frac{2O}{2}$	90 0 0	152 44 2	Zinkblende.

3) Die Triakistetraeder.

(Syn. Trigondodekaeder; Naumann. Pyramidentetraeder; Weiss. Trigonaldodekaeder; Mohs. Pyramidale Dodekaeder oder Zwölfflächner, tetraederkantige Dodekaeder; Breithaupt. Dreimalvierflache; Bernhardi. Kyproide; Haidinger.)

Ein Triakistetraeder ist ein von zwölf gleichen und ähnlichen stumpfwinklig-gleichschenkligen Triangeln umschlossener Körper, mit achtzehn Kanten und acht Ecken, dessen Flächen in vier dreizählige Systeme so vertheilt erscheinen, dass ein jedes über einer eingeschriebenen Tetraederfläche eine gleichseitige dreiseitige Pyramide bildet. Es sind diese Körperformen Hemieder der Deltoidikositetraeder, und entstehen dadurch, dass von den acht dreizähligen Flächensystemen vier abwechselnde herrschend werden, die anderen vier verschwinden. Das allgemeine Zeichen ist daher $\frac{mOm}{2}$, und die beiden gleichen nur verschieden gestellten Hemieder eines Holoeders werden als $\frac{mOm}{2}$ und $\frac{mO'm}{2}$ unterschieden.

Die Kanten eines jeden Triakistetraeders sind zweierlei Art: sechs regelmässige, längere, den Tetraederkanten entsprechende, welche den Namen Hauptkanten führen, zwölf symmetrische kürzere, die Nebenkanten, deren je drei über einer eingeschriebenen Tetraederfläche liegen. Die Kantenlinien der Hauptkanten sind durch die Endpunkte der Hauptaxen halbirt und verbinden die Endpunkte der verlängerten trigonalen Halbaxen, während die Nebenkantenlinien dieselben Endpunkte mit denen der unveränderten trigonalen Halbaxen verbinden. Die Ecken sind auch zweierlei Art: vier symmetrische sechskantige, deren Scheitelpunkte den Tetraederecken entsprechend die Endpunkte der verlängerten trigonalen Halbaxen sind, und vier regelmässige dreikantige, von den Nebenkanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der unveränderten trigonalen Halbaxen sind. Die rhombischen Zwischenaxen sind gleich denen in mOm, aber durch nichts bezeichnet. Die Hauptschnitte sind symmetrische Oktogone, die Nebenschnitte ungleichseitige Pentagone.

Die Grösse der Nebenkantenwinkel, welche mit Z bezeichnet werden, ist dieselbe, wie bei den gleichbezeichneten in mOm, dagegen wird die der Hauptkantenwinkel, welche mit X bezeichnet werden mögen, durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{m^2 - 2}{m^2 + 2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} X = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(m^2 + 2)}}, \quad \text{tang.} \tfrac{1}{2} X = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

$$t = \frac{m\sqrt{3}}{m+2}, \quad T = \sqrt{3} = \frac{m+2}{m}. t.$$

Als Beispiele können die zwei nachfolgenden in der Natur angetroffenen Triakistetraeder dienen:

	Hauptkanten	Nebenkanten	Vorkommen.
$\frac{2O2}{2}$	109° 28′ 16″	146° 26′ 34″	Fahlerz.
$\frac{3O3}{2}$	129 31 16	129 31 16	Zinkblende.

4) Die Hexakistetraeder.

(Syn. Sechsmalvierflächner oder Hexakistetraeder; Naumann. Gebrochene Pyramidentetraeder; Weiss. Tetraedrische Trigonalikositetraeder; Mohs. Skalenische Ikositessaraeder oder Vierundzwanzigflächner; Breithaupt. Sechsmalvierflache; Bernhardi. Borazitoide; Haidinger.)

Ein Hexakistetraeder ist ein von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Triangeln umschlossener Körper, mit vierzehn symmetrischen Ecken und sechs und dreissig symmetrischen Kanten, dessen Flächen in vier sechszählige Systeme so vertheilt sind, dass dieselben über die eingeschriebenen Tetraederflächen zu liegen kommen. Die Körper dieser Art entstehen durch Hemiedrie der Hexakisoktaeder, indem vier abwechselnde sechszählige Flächensysteme herrschend werden, während die vier anderen verschwinden. Es ist daher ihr allgemeines Zeichen $\frac{mOn}{2}$, und die beiden jedesmaligen Gegenhemieder werden durch $\frac{mOn}{2}$ und $\frac{mO'n}{2}$ unterscheidend bezeichnet.

Die Kanten eines jeden Hexakistetraeders sind dreierlei Art: zwölf längere, zwölf mittlere, zwölf kürzere. Die mittleren, zu je zwei einer Tetraederkante entsprechend, verbinden durch ihre Kantenlinien die Hauptaxenendpunkte mit den Enden der verlängerten trigonalen Halbaxen; die längeren Kanten, welche in dem zu Grunde liegenden Holoeder die kürzeren waren, entsprechen den Nebenkanten der Triakistetraeder und verbinden wie diese durch ihre Kantenlinien die Endpunkte der verlängerten mit denen der unveränderten halben trigonalen Zwischenaxen; die kürzeren endlich, welche im entsprechenden Holoeder die längeren sind, verbinden wie sie, da sie unverändert geblieben sind, durch ihre Kantenlinien die Hauptaxenendpunkte mit den Endpunkten der unveränderten trigonalen Halbaxen. Die rhombischen Zwischenaxen sind durch nichts an ihren Endpunkten bezeichnet.

Die Ecken sind gleichfalls dreierlei Art: sechs vierkantige, von den abwechselnden mittleren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxen sind, vier spitzere sechskantige, von den mittleren und längeren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte den Ecken von $\frac{O}{2}$ entsprechend die Endpunkte der verlängerten trigonalen Halbaxen sind; vier stumpfere sechskantige, von den kürzeren und längeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der unverändert gebliebenen halben trigonalen Zwischenaxen sind, wie es im entsprechenden Holoeder der Fall ist, dessen unveränderte Ecken die letztgenannten sind. Die Hauptschnitte sind symmetrische Oktogone, die Nebenschnitte ungleichseitige Hexagone.

Werden die längeren Kanten mit Z, die mittleren mit X und die kürzeren mit Y bezeichnet, so ergeben sich für Y und Z die Kantenwinkel aus dem zu Grunde liegenden Holoeder, da sie dieselben geblieben sind, der Kantenwinkel X aber aus den Gleichungen:

$$\cos. X = -\frac{mn(mn-2)}{m^2n^2+m^2+n^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} X = \frac{m+n}{\sqrt{2}\,\sqrt{(m^2n^2+m^2+n^2)}},$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} X = \frac{\sqrt{[2m^2n^2+(m-n)^2]}}{m+n}.$$

Für die trigonalen Zwischenaxen ist $t = \frac{mn\sqrt{3}}{mn+m+n}$, $T = \frac{mn\sqrt{3}}{mn+m-n}$

$$= \frac{mn+m+n}{mn+m-n}\,.\,t.$$

Als Beispiele dieser hemiedrischen Formen dienen die nachfolgenden drei, welche in der Natur beobachtet worden sind:

	längere	mittlere	kürzere Kanten.	Vorkommen.
$\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$	158° 12′ 48″	110° 55′ 29″	158° 12′ 48″	Fahlerz.
$\frac{4O2}{2}$	144 2 58	124 51 0	162 14 50	Borazit.
$\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$	152 20 22	122 52 42	152 20 22	Borazit.

5) Die Pentagonikositetraeder.

(Syn. Verschobene Leucitoide; Weiss. Pentagonal-Ikositetraeder; Mohs. Gyroide; Haidinger.)

Ein Pentagonikositetraeder ist eine von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen unregelmässigen Fünfseiten umschlossene Gestalt, mit sechzig unregelmässigen Kanten und acht und dreissig Ecken, deren Flächen entweder in acht dreizählige oder in sechs vierzählige Systeme vertheilt erscheinen. Diese Körper entstehen auch durch Hemiedrie der Hexakisoktaeder, aber nach einem anderen Gesetz als die Hexakistetraeder, nämlich durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen. Denkt man sich das Hexakisoktaeder mit dem Deltoidikositetraeder verglichen, so kann man das erstere als ein in seinen symmetrischen Diagonalen gebrochenes Deltoidikositetraeder ansehen, in welchem Falle dann je zwei mOn Flächen, welche über eine Fläche mOm zu liegen kommen, die eine rechts, die andere links von der symmetrischen Diagonale in mOm (der längeren Kante in mOn) zu liegen kommen. Werden nun entweder alle auf gleiche Weise rechts liegenden Flächen herrschend, während die links liegenden verschwinden, oder umgekehrt, so entsteht in jedem Falle ein Körper der angegebenen Art, die für ein und dasselbe Holoeder einander gleich, und nur durch die Lage verschieden sind. Das allgemeine Zeichen der Pentagonikositetraeder muss, als das einer Hemiederform von mOn, $\frac{mOn}{2}$ sein. Zum Unterschiede aber von den Hexakistetraedern, an welche bereits dieses Zeichen vergeben ist, und um die beiden Gegenhemieder zu unterscheiden, wird vor das erwähnte Zeichen entweder der Buchstabe r oder l gesetzt, je nachdem die rechts oder links liegenden Flächen zur Bildung des Hemieders herrschend geworden sind, so dass $r\frac{mOn}{2}$ und $l\frac{mOn}{2}$ die Zeichen für die rechts und für die links gewendeten Pentagonikositetraeder sind.

Dieser Körper kann es möglicherweise so viele geben, als es Hexakisoktaeder giebt, bis jetzt aber ist in der Natur keiner angetroffen worden, jedoch giebt dies keinen Grund, um die Körper selbst aus der Betrachtung der systematisch begründeten Krystallgestalten auszuschliessen, da sowohl einerseits die Möglichkeit nicht abgesprochen werden kann, derartige Körper in der Natur anzutreffen, als auch anderseits durch die Nichtbeachtung derselben ein nothwendiges Glied der Vergleichung und des Zusammenhanges der verschiedenen dreiaxigen Systeme untereinander ausgelassen bleibt.

Zur näheren Beschreibung der Pentagonikositetraeder gehört Folgendes: Die Pentagone sind zwar unregelmässig, aber nicht alle fünf Seiten sind ungleich, sondern es sind zwei von einander verschiedene Paare und eine von diesen verschiedene Seite, von der Lage, dass auf diese letztere zu jeder Seite zwei gleiche Seiten folgen, wodurch der ihr gegenüberliegende Winkel von zwei verschiedenen Seiten der beiden Paare gebildet wird. Diese von den Paaren verschiedene Seite heisse die Hauptseite, so unterscheiden sich die der beiden Paare als die zwei längeren und zwei kürzeren Nebenseiten. Durch diese Verschiedenheit der Pentagonseiten giebt es dreierlei Kanten, welche nach den Namen der Seiten unterschieden werden können. Es giebt demnach zwölf Hauptkanten, deren Kantenlinien durch die Endpunkte der rhombischen Zwischenaxen halbirt werden, vier und zwanzig längere Nebenkanten, zu je vier an jedem Hauptaxenendpunkt, denselben mit den Hauptkanten verbindend, und vier und zwanzig kürzere Nebenkanten, zu je drei von den Endpunkten der trigonalen Zwischenaxen ausgehend, dieselben durch ihre Kantenlinien auch mit den Hauptkanten verbindend. Die Ecken sind auch dreierlei Art: sechs regelmässige vierkantige, von den längeren Nebenkanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxen sind; acht regelmässige dreikantige, von den kürzeren Nebenkanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind, und vier und zwanzig unregelmässige dreikantige Ecken, gebildet von je drei verschiedenen Kanten, deren Scheitelpunkte über die verschwundenen mOn Flächen zu liegen kommen.

Die Länge der Zwischenaxen und die Gestalt der Haupt- und Nebenschnitte sind dieselben wie in dem entsprechenden Holoeder. Bezeichnet man die Hauptkanten mit X, die längeren Nebenkanten mit Z, die kürzeren mit Y, so werden ihre Kantenwinkel durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{(2m^2-n)n}{m^2n^2+m^2+n^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} X = \frac{\sqrt{[m^2(n-1)^2+2n^2]}}{\sqrt{2}\sqrt{(m^2n^2+m^2+n^2)}},$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} X = \frac{m(n+1)}{\sqrt{[m^2(n-1)^2+2n^2]}};$$

$$\cos. Z = -\frac{m^2n^2}{m^2n^2+m^2+n^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{(m^2+n^2)}}{\sqrt{2}\sqrt{(m^2n^2+m^2+n^2)}},$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{(2m^2n^2+m^2+n^2)}}{\sqrt{(m^2+n^2)}};$$

$$\cos. Y = -\frac{mn(m+n+1)}{m^2n^2+m^2+n^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[m^2+n^2+mn(mn-m-n-1)]}}{\sqrt{2}\sqrt{(m^2n^2+m^2+n^2)}},$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[m^2+n^2+mn(mn+m+n+1)]}}{\sqrt{[m^2+n^2+mn(mn-m-n-1)]}}.$$

Es ergeben sich hieraus für die beispielsweise anzuführenden Pentagonikositetraeder r oder l $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$ und $\frac{4O2}{2}$ folgende Kantenwinkel:

	Hauptkanten	längere	kürzere Nebenkanten.
$\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$	141° 47′ 13″	130° 0′ 18″	141° 47′ 13″
$\frac{4O2}{2}$	135 35 5	139 37 57	131 48 37

b) Hemiedrische Formen mit parallelen Flächen.

1) Die Pentagondodekaeder.

Das Pyritoeder und die Pyritoide.

(Syn. Hexaedrische Pentagonaldodekaeder; Mohs. Domatische Dodekaeder oder dachförmige Zwölfflächner; Breithaupt. Kieszwölfflache; v. Raumer. Pentagonaldodekaeder; Hausmann. Zweimalsechsflache; Bernhardi. Schwefelkiesdodekaeder.)

Ein Pentagondodekaeder ist ein von zwölf gleichen und ähnlichen symmetrischen Pentagonen umschlossener Körper, mit dreissig Kanten und zwanzig Ecken, dessen Flächen in sechs Paare vertheilt sind. Sie gehen aus den Tetrakishexaedern durch Hemiedrie hervor, indem die abwechselnden Flächen herrschend werden, oder mit anderen Worten, indem von den vier Flächen eines jeden vierzähligen Systems zwei abwechselnde so herrschend werden, dass nie zwei an einer Hauptkante liegende Flächen gleichzeitig sich erweitern. Aus jedem ∞On entstehen auf diese Weise zwei völlig gleiche, nur verschieden gestellte Pentagondodekaeder, deren allgemeine Zeichen $\frac{\infty On}{2}$ und $\frac{\infty O'n}{2}$ sind.

Die Pentagone sind symmetrisch in der Weise, wie es bei den Flächengestalten im Allgemeinen oben erwähnt worden ist. Die Kanten sind demnach zweierlei Art: sechs regelmässige längere, über den eingeschriebenen Hexaederflächen liegende; deren Kantenlinien durch die Hauptaxenendpunkte halbirt werden, und deren je zwei durch die Endpunkte einer Hauptaxe in der Ebene eines Hauptschnittes einander parallel und senkrecht gegen die Hauptaxe gelegt sind. Sie heissen Hauptkanten. Die übrigen vier und zwanzig Kanten, Nebenkanten genannt, sind unregelmässig und kürzer als jene und gehen zu je drei von den Endpunkten der trigonalen Zwischenaxen aus. Die Ecken sind auch zweierlei Art: zwölf unregelmässige dreikantige, gebildet von je zwei Nebenkanten und einer Hauptkante, und acht regelmässige dreikantige, gebildet von den Nebenkanten, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind. Die Haupt- und Nebenschnitte sind ungleichseitige Hexagone, und die Länge der Zwischenaxen ist dieselbe, wie in den entsprechenden Holoedern.

Unter den Pentagondodekaedern hatte man dasjenige, bei welchem $n = 2$ ist, am häufigsten gefunden, und da dasselbe beim Schwefelkies und anderen Mineralspecies aus der Familie der Pyrite vorkommt, so hatte man es nach dem synonymen Namen des Schwefelkieses, pyrites, Pyritoeder genannt. Als nun noch andere Formen der Art $\frac{\infty On}{2}$ gefunden wurden, so dehnte man zum Theil jenen Namen auf sie aus, oder nannte einige von ihnen Pyritoide. Am besten ist es, wenn man, wie bei mOm, für das Pentagondodekaeder allein, dessen $n=2$, den Namen Pyritoeder ausschliesslich behält, diejenigen Pentagondodekaeder aber, wo $n>2$, stumpfe Pyritoide, und die, wo $n<2$, scharfe Pyritoide nennt, weil in jenen die Hauptkanten stumpfer, in diesen aber schärfer als im Pyritoeder sind.

Um die Kantenwinkel zu bestimmen, dienen folgende Gleichungen, in denen die Hauptkanten mit Z, die Nebenkanten mit Y bezeichnet sind:

$$\cos. Z = -\frac{n^2-1}{n^2+1}, \quad \cos. \tfrac{1}{2}Z = \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)}}, \quad \operatorname{tang}. \tfrac{1}{2}Z = n;$$

$$\cos. Y = -\frac{n}{n^2+1}, \quad \cos. \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{(n^2-n-1)}}{\sqrt{2}\,\sqrt{(n^2+1)}}, \quad \operatorname{tang}. \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{(n^2+n+1)}}{\sqrt{(n^2-n+1)}}.$$

Des Beispiels wegen folgen drei in der Natur beobachtete Pentagondodekaeder mit Angabe ihrer Kantenwinkel:

	Hauptkanten.	Nebenkanten.	Vorkommen.
$\frac{\infty O \frac{3}{2}}{2}$	112° 37′ 12″	117° 29′ 11″	Schwefelkies.
$\frac{\infty O 2}{2}$	126 52 12	113 34 41	Schwefelkies.
$\frac{\infty O 3}{2}$	143 7 48	107 27 27	Glanzkobalt.

2) Die Trapezoidikositetraeder.

Die Diplopyritoeder und Diplopyritoide.

(Syn. Dyakisdodekaeder oder Zweimalsechsflächner; Naumann. Gebrochene Pentagondodekaeder oder Pyritoeder; Weiss. Dreikantige Tetragonal-Ikositetraeder; Mohs. Heterogonale Ikositessaraeder oder ungleichwinklige Vierundzwanzigflächner; Breithaupt. Kiesvierundzwanzigflache; v. Raumer. Trapezoidvierundzwanzigflache; Bernhardi. Diploide; Haidinger. Trapezoiddidodekaeder; v. Glocker. Hemioktakishexaeder.)

Ein Trapezoidikositetraeder ist ein von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen unregelmässigen Trapezoidflächen umschlossener Körper, mit acht und vierzig Kanten und sechs und zwanzig Ecken, dessen Flächen in zwölf Paare, oder in acht dreizählige Systeme vertheilt erscheinen. Diese Körper entstehen auch durch Hemiedrie der Hexakisoktaeder, und zwar dadurch, dass nicht die abwechselnden Flächen überhaupt, sondern die abwechselnden Flächen der sechszähligen

Systeme so herrschend werden, dass je zwei an einer mittleren Kante liegende Flächen zweier Nebensysteme gleichzeitig sich erweitern. Betrachtet man die Hexakisoktaeder als gebrochene Tetrakishexaeder, bestehend aus vier und zwanzig an den mittleren Kanten liegenden Flächenpaaren, so entstehen die Trapezoidikositetraeder durch Herrschendwerden der abwechselnden dieser Flächenpaare. Um das Zeichen dieser Hemieder von den schon angeführten der Hexakistetraeder und der Pentagonikositetraeder zu unterscheiden, dient am einfachsten ein doppelter Theilungsstrich, welcher zu gleicher Zeit auch auf den Parallelismus der Flächen hinweist, wodurch man als allgemeine Zeichen der Trapezoidikositetraeder, und zwar für die beiden Gegenhemieder, die Zeichen $\frac{mOn}{2}$ und $\frac{mO'n}{2}$ erhalten wird.

Die Trapezoide dieser Körper haben dreierlei Seiten, zwei gleiche mittlere an einander stossende, eine längere und eine kürzere. Vergleicht man je zwei an einer längeren Seitenlinie angrenzende Trapezoide mit der symmetrischen Pentagonfläche eines Pentagondodekaeders, über die sie zu liegen kommen, so entspricht die beiden gemeinschaftliche längere Seite der Höhenlinie derselben, die vier mittleren den Nebenseiten und die beiden kürzeren der Hauptseite. Aus der angegebenen Verschiedenheit der Seiten gehen dreierlei Kanten hervor: zwölf längere, welche die mittleren des jedesmaligen Holoeders sind; vier und zwanzig mittlere, deren je drei von einem trigonalen Axenendpunkt ausgehen; endlich zwölf kürzere, die je zwei einer Hauptkante in den Pentagondodekaedern entsprechen. Die Ecken sind auch dreierlei Art: sechs symmetrische vierkantige, von den abwechselnden längeren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der Hauptaxen sind; acht regelmässige dreikantige, von den mittleren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind, und zwölf unregelmässige vierkantige, gebildet von je zwei mittleren, einer längeren und einer kürzeren Kante. Die Haupt- und Nebenschnitte sind ungleichseitige Oktogone, und die Länge der Zwischenaxen ist unverändert dieselbe, wie in dem jedesmaligen entsprechenden Holoeder.

In Bezug auf das Pyritoeder und die Pyritoide, über deren Flächen je zwei Trapezoidflächen zu liegen kommen, kann man auch hier sich der abkürzenden Namen Diplopyritoeder und Diplopyritoide bedienen, je nach dem Werthe n, indem nämlich alle Trapezoidikositetraeder, in denen $n = 2$, Diplopyritoeder genannt werden, weil die Neigung ihrer längsten Kanten gegen die Hauptaxe dieselbe ist, wie die der Pentagonflächen des Pyritoeders; alle anderen, wo n grösser oder kleiner als 2, heissen Diplopyritoide, mit dem von n abhängigen Unterschiede, weil mit jedem Pyritoide die Diplopyritoide mit gleichen n in der Neigung der Pentagonflächen und der längsten Kanten übereinstimmen.

Wenn die längsten Kanten mit X, die mittleren mit Y und die kürzeren mit Z bezeichnet werden, so bedarf man bloss der Grössenbestimmung für die letzteren, indem die Grösse der ersteren mit den gleichbenannten mittleren der Hexakisoktaeder, die der mittleren mit den gleichbenannten kürzeren Nebenkanten der Pentagonikositetraeder übereinstimmt, und es ist:

$$\cos. Z = -\frac{m^2n^2 - m^2 + n^2}{m^2n^2 + m^2 + n^2}, \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{m}{\sqrt{(m^2n^2 + m^2 + n^2)}}, \text{tang.} \tfrac{1}{2} Z = \frac{n\sqrt{(m^2+1)}}{m}.$$

Als Beispiele in der Natur beobachteter Trapezoidikositetraeder dienen folgende mit ihren Kantenwinkeln:

	längere	mittlere	kürzere Kanten.	Vorkommen.
$\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$	148° 59′ 50″	141° 47′ 13″	115° 22′ 37″	Glanzkobalt.
$\frac{4O2}{2}$	154 47 28	131 48 37	128 14 48	Schwefelkies.
$\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$	160 32 13	131 4 56	119 3 33	Schwefelkies.

C. Tetartoedrische Formen.

Die Pentagontriakistetraeder.

(Syn. Tetraedrische Pentagonaldodekaeder; Mohs. Tetartohexakisoktaeder; v. Glocker. Tetartoide; Haidinger.)

Ein Pentagontriakistetraeder ist ein von zwölf gleichen und ähnlichen unregelmässigen Fünfseiten umschlossener Körper, mit dreissig unregelmässigen Kanten und zwanzig Ecken, dessen Flächen in vier dreizählige Systeme vertheilt erscheinen. Diese Körper entstehen aus den Hexakistetraedern durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen, aus den Pentagonikositetraedern und Trapezoidikositetraedern durch Herrschendwerden der abwechselnden dreizähligen Flächensysteme, sind also Tetartoeder der Hexakisoktaeder, und aus jedem Hexakisoktaeder gehen je vier gleiche Tetartoeder hervor, die allgemein das Zeichen $\frac{mOn}{4}$ führen. Ihrer verschiedenen Stellung nach können sie durch $r\frac{mOn}{4}$, $r\frac{mO'n}{4}$, $l\frac{mOn}{4}$ und $l\frac{mO'n}{4}$ unterschieden werden. In Bezug auf die Pentagonikositetraeder bilden dann $r\frac{mOn}{4}$ und $r\frac{mO'n}{4}$ die beiden Gegenhemieder eines rechts gewendeten, und $l\frac{mOn}{4}$ und $l\frac{mO'n}{4}$ die beiden Gegenhemieder eines links gewendeten Pentagonikositetraeders.