

b) Mit parallelen Flächen,

1) Pentagondodekaeder, 2) Trapezoidikositetraeder.

C. Tetartoedrische Formen:

Pentagontrikistetraeder.

Beschreibung der einfachen Krystallformen.

A. Holoedrische Formen.

1) Das reguläre Oktaeder.

(Syn. Oktaeder; Naumann. Achtfach; Bernhardt. Achtfächner; Breithaupt. Reguläre vierseitige Doppelpyramide. Regelmässiges Oktaeder.)

Das reguläre Oktaeder ist eine von acht gleichen gleichseitigen Triangeln umschlossene Gestalt, mit zwölf gleichen regelmässigen Kanten und sechs gleichen regelmässigen vierkantigen Ecken.

Jede Oktaederfläche ist durch die Endpunkte der je drei zu einem Raumoktanten gehörigen Halbaxen gelegt und die ebenen Winkel derselben betragen 60° ; je zwei Flächen aber bilden in einer Kante einen Flächenwinkel von $109^\circ 28' 16''$. Die Kantenlinien sind die Verbindungslinien je zweier Axenendpunkte und es liegen daher je vier derselben in einer Ebene. Die Scheitel der Ecken sind die Endpunkte der Hauptaxen. Im regulären Oktaeder, so wie in jeder anderen Krystallform des regulären Systems, giebt es drei Hauptschnitte, welche hier Quadrate sind, als Ebenen, die durch je zwei Hauptaxen gelegt und von je vier Kantenlinien umgrenzt sind. Ausser den drei erwähnten Axen, welche ausschliesslich so genannt oder als Hauptaxen insbesondere unterschieden werden, giebt es noch zweierlei Zwischenaxen, sechs rhombische und vier trigonale. Die ersteren liegen zu je zwei in einem Hauptschnitte und sind die Verbindungslinien der Halbierungspunkte je zweier zugehörigen parallelen Kantenlinien. Durch sie entstehen sechs gleiche Nebenschnitte von Rhombengestalt; sie sind nämlich Ebenen, gelegt durch je eine rhombische Zwischenaxe und die auf ihr senkrechte Hauptaxe und begrenzt durch die Höhenperpendikel der Oktaederflächen. Verbindet man endlich die Mittelpunkte je zweier parallelen Oktaederflächen durch gerade Linien, so gehen dadurch die vier trigonalen Zwischenaxen hervor, welche auch in den erwähnten Nebenschnitten liegen.

Die angeführten Zwischenaxen, sowohl die rhombischen als trigonalen, sind ihrer Lage nach in jeder Krystallform des regulären Systems auf gleiche Weise vorhanden, nur in Bezug auf die Länge treten Unterschiede ein; im regulären Oktaeder selbst ist, wenn man die Länge der halben Hauptaxen $= 1$ setzt, durch r die halbe rhombische und durch t die halbe trigonale Zwischenaxe bezeichnet, $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Da die Lage einer jeden Oktaederfläche durch je drei Hauptaxenendpunkte bestimmt wird und die Entfernungen derselben vom Centrum aus gleich sind, so ist, wenn man diese Entfernung mit a bezeichnet, das Axenverhältniss einer jeden Fläche ($a:a:a$) oder $a=1$ gesetzt, $(1:1:1)$, welches Verhältniss man als Zeichen für dieselbe oder für das ganze Oktaeder annehmen könnte. Es ist aber bei der Einführung gewisser Symbole zur Bezeichnung besonders darauf zu sehen, dass dieselben möglichst einfach und kurz sind, ohne jedoch der Deutlichkeit zu schaden, und man hat deshalb bei Voraussetzung des obigen Verhältnisses, als des einfachsten im ganzen Systeme, das reguläre Oktaeder mit dem Buchstaben O bezeichnet, aus welchem Zeichen, wie im Verfolg ersichtlich ist, die Zeichen der übrigen Krystallformen des regulären Systems gebildet werden.

2) Die Triakisoktaeder.

(Syn. Triakisoktaeder oder Dreimalachtflächner; Naumann. Trigontriakisoktaeder. Pyramidenoktaeder; Weiss. Oktaedrische Trigonalikositetraeder; Mohs. Oktaedrische pyramidale Ikositessaraeder, oktaederkantige Ikositessaraeder oder Vierundzwanzigflächner; Breithaupt. Dreimalachtfläche; Bernhardi. Pyramidenachtfläche; v. Raumer. Galenoide; Haidinger.)

Ein Triakisoktaeder ist eine von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen stumpfwinkligen gleichschenkligen Triangeln umschlossene Gestalt, mit vierzehn Ecken und sechs und dreissig Kanten, deren Flächen in acht dreizählige Systeme so vertheilt sind, dass ein jedes derselben eine stumpfe gleichseitig-dreieckige Pyramide bildet, deren Basis eine Fläche des eingeschriebenen regulären Oktaeders ist.

Wenn man nämlich von den drei zu einem Oktanten gehörigen Halbaxen je eine verlängert, indem man sie durch eine beliebige rationale Grösse $m > 1$ vervielfacht, während die jedesmaligen beiden anderen unverändert bleiben, und durch die Endpunkte der beiden unveränderten und durch den aus der Verlängerung hervorgegangenen Endpunkt der dritten Ebenen legt, so entstehen dadurch die über einer jeden Oktaederfläche liegenden drei Flächen. Von dem Werthe m hängt die jedesmalige Lage der Triakisoktaederflächen ab, welcher die Verlängerung der einen Axe bestimmt, und es werden demnach so viele Triakisoktaeder möglich sein, als man rationale Zahlen grösser als 1 für m setzen kann; alle jedoch haben den angegebenen gemeinsamen Charakter und unterscheiden sich nur durch die von dem jedesmaligen Werthe für m abhängigen Grössenverhältnisse der Theile.

Weil die Flächen gleichschenklige Triangel sind, so sind die Kanten zweierlei Art: zwölf längere, regelmässige und vierundzwanzig kürzere, symmetrische. Die ersteren entsprechen den Kanten des zu Grunde liegenden regulären Oktaeders und werden durch den Namen Hauptkanten unterschieden; ihre Kantenlinien

sind wie in O die Verbindungslinien je zweier Hauptaxenendpunkte und jede derselben bildet die Basis zweier zu zwei Nebensystemen gehörigen Flächentriangel. Die kürzeren Kanten, welche im Gegensatz zu den Hauptkanten Nebenkanten genannt werden, sind zu je drei über einer Oktaederfläche gruppirt und ihre Kantenlinien verbinden den Endpunkt einer trigonalen Zwischenaxe mit den drei zu demselben Oktanten gehörigen Hauptaxenendpunkten.

Die Ecken sind auch zweierlei Art: sechs symmetrische achtkantige, gebildet von je vier abwechselnden Haupt- und je vier Nebenkanten, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxen sind, wodurch sie den Oktaederecken entsprechen; ferner acht regelmässige dreikantige, von den Nebenkanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind. Diese Zwischenaxen sind länger als in dem zu Grunde liegenden Oktaeder und für jedes Triakisoktaeder verschieden; die rhombischen Zwischenaxen aber haben mit denen in O gleiche Länge und ihre Endpunkte in den Halbierungspunkten der Hauptkantenlinien. Die Hauptschnitte sind Quadrate, die Nebenschnitte ungleichseitige Oktogone.

Da je drei zu einem Oktanten gehörige und über einer Oktaederfläche liegende Flächen eines Triakisoktaeders nach obiger Angabe allgemein durch die drei gleichen Verhältnisse ($ma:aa$), ($a:ma:a$) und ($a:a:ma$) in ihrer Lage bestimmt werden, welche Verhältnisse sich von dem des O dadurch unterscheiden, dass je eine Halbaxe durch m vervielfacht wird, so ist hieraus für die einzelnen Triakisoktaederflächen oder für die Triakisoktaeder selbst das allgemeine Zeichen mO hervorgegangen, in welchem das vorgesetzte m anzeigt, um wievielfach eine Halbaxe vervielfacht werden muss, um die Lage einer einzelnen Fläche zu bestimmen. Die Grösse der Kantenwinkel wird, wenn man die Hauptkanten mit X , die Nebenkanten mit Y bezeichnet und die Länge der halben Hauptaxen, wie in O, gleich 1 setzt, durch folgende von m abhängige Gleichungen allgemein bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{2m^2 - 1}{2m^2 + 1}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{1}{\sqrt{(2m^2 + 1)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} X = m\sqrt{2};$$

$$\cos. Y = -\frac{m(m+2)}{2m^2 + 1}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{m-1}{\sqrt{2}\sqrt{(2m^2 + 1)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{(3m^2 + 2m + 1)}}{m-1}.$$

$$\text{Die halbe trigonale Zwischenaxe } t = \frac{m\sqrt{3}}{2m+1}.$$

Obleich durch die vielen Werthe, welche der Grösse m ertheilt werden können, eine unendliche Anzahl Triakisoktaeder möglich ist, so ist dennoch ihr Vorkommen in der Natur sehr beschränkt, und als Beispiele mögen die nachfolgenden mit ihren Kantenwinkeln dienen:

	Hauptkanten.	Nebenkanten.	Vorkommen.
$\frac{3}{2}$ O	1290 31' 16"	1620 39' 31"	Granat.
2 O	141 3 27	152 44 2	Bleiglanz.
3 O	153 28 29	142 8 11	Bleiglanz.

3) Das Granatoeder. (1)

(Syn. Rhombendodekaeder; Naumann. Reguläres Rhombendodekaeder; Hausmann. Einkantiges Tetragonal-Dodekaeder; Mohs. Rautenzwölfflach; v. Raumer, Bernhardt. Granatdodekaeder; Werner. Rhombisches Dodekaeder oder Rautenzwölffächner; Breithaupt. Granatoid; Haidinger.)

Das Granatoeder ist ein von zwölf gleichen und ähnlichen Rhombenflächen umschlossener Körper, mit vierundzwanzig gleichen symmetrischen Kanten und vierzehn regelmässigen Ecken.

Der Name ist hergenommen vom Granat, einem Mineral, welches vorzüglich in dieser Form erscheint und wegen seines häufigen Vorkommens sehr bekannt ist. Vergleicht man das Granatoeder mit den Triakisoktaedern, so entsprechen je zwei an einer Hauptkante liegende Flächen mO einer Granatoederfläche und das Granatoeder selbst erscheint als ein Triakisoktaeder, wo m unendlich gross ist, so dass je zwei an einer Hauptkante liegende Flächen von mO bei dem Werthe $m = \infty$ in eine Ebene fallen und eine Granatoederfläche bilden, welche demnach durch die Endpunkte zweier halben Hauptaxen parallel der dritten auf ihnen senkrechten gelegt ist. Das Granatoeder ist also das letzte Glied der Reihe aller möglichen Triakisoktaeder bei dem Zunehmen des Werthes m . Die Kanten des Granatoeders entsprechen den Nebenkanten von mO und liegen wie diese zu je drei über einer eingeschriebenen Oktaederfläche das Ende einer trigonalen Zwischenaxe mit je drei Hauptaxenendpunkten durch ihre Kantenlinien verbindend. Die Ecken sind zweierlei Art: sechs vierkantige, deren Scheitelpunkte wie in O die Endpunkte der Hauptaxen sind, und acht dreikantige, den gleichnamigen in mO entsprechende, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind. Die Hauptschnitte sind Quadrate, die Nebenschnitte ungleichseitige Hexagone. Die Endpunkte der rhombischen Zwischenaxen liegen in den Mittelpunkten der Rhombenflächen und die Zwischenaxen selbst haben mit denen des zu Grunde liegenden O gleiche Länge, da durch die Kantenlinien desselben die Granatoederflächen gelegt sind. Die halben trigonalen Zwischenaxen t sind $= \frac{\sqrt{3}}{2}$. Die Kanten bilden einen Winkel von 120° , und die ebenen Winkel sind $109^\circ 28' 16''$ und $70^\circ 31' 44''$.

Da je drei zu einem Oktanten gehörige Flächen ihrer Lage nach durch die drei gleichen Verhältnisse ($\infty a : a : a$), ($a : \infty a : a$) und ($a : a : \infty a$) bestimmt werden, welche von dem des O durch den Coefficienten ∞ , wie die von mO durch m unterschieden sind, indem hier m in eine unendlich grosse Grösse übergegangen ist und die parallele Lage der Flächen gegen die damit versehene Halbaxe bedingt, so wird diesem gemäss die Granatoederfläche oder das Granatoeder durch ∞O bezeichnet.

4) Die Deltoidikositetraeder.

Das Leucitoeder und die Leucitoide.

(Syn. Ikositetraeder, Vierundzwanzigflächner; Naumann. Trapezoidale oder deltoide Ikositessaraeder oder Vierundzwanzigflächner; Breithaupt. Zweikantige Tetragonal-Ikositetraeder; Mohs. Trapezoeder; Hausmann. Leucite; v. Raumer. Leucitkrystallisation; Werner. Deltoid-Vierundzwanzigfläche; Bernhardt.)

Ein Deltoidikositetraeder ist eine von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen Deltoiden umschlossene Gestalt, deren Flächen entweder in acht dreizählige oder in sechs vierzählige Systeme vertheilt erscheinen und acht und vierzig symmetrische Kanten und sechs und zwanzig Ecken bilden.

Die Lage einer solchen Körperfläche wird dadurch bestimmt, dass man von den drei zu einem Oktanten gehörigen halben Hauptaxen zwei auf gleiche Weise verlängert, indem man sie durch einen rationalen Coefficienten $m > 1$ vervielfacht, während die dritte auf ihnen senkrechte unverändert bleibt. Legt man nun durch den Endpunkt der unveränderten Halbaxe und durch die zwei aus der gleichmässigen Verlängerung der beiden anderen Halbaxen hervorgegangenen Endpunkte eine Ebene, so ist dies die Fläche eines Deltoidikositetraeders. Da dies für jede Halbaxe abwechselnd gleichzeitig Statt findet, so gehen für jeden Oktanten drei Flächen hervor. Vermöge des veränderlichen Werthes m sind auch hier, wie bei mO , sehr viele Körper dieser Art möglich, deren allgemeiner Charakter derselbe bleibt, und nur die von m abhängigen Grössenverhältnisse bedingen die Unterschiede untereinander. Unter den in der Natur gleichfalls in geringer Anzahl vorkommenden Deltoidikositetraedern ist dasjenige, bei welchem $m = 2$, das häufigste, man hat es zuerst beobachtet und nach dem Namen desjenigen Minerals, bei welchem man es besonders ausgebildet vorfand, nach dem Leucit, Leucitoeder genannt. So vortheilhaft ihrer Kürze wegen diese Benennung ist, so kann sie doch nicht auf alle Deltoidikositetraeder ausgedehnt werden, weil sie für die übrigen unrichtig leicht zu Missverständnissen führen könnte; es lässt sich jedoch eine aus dem angeführten Namen abgeleitete kürzere Benennung für die übrigen anwenden. Man nennt nämlich alle diejenigen Deltoidikositetraeder, bei welchen $m < 2$, spitze Leucitoide (dem Leucit ähnliche Formen), dagegen die, bei welchen $m > 2$, stumpfe Leucitoide. Diese Trennung der Namen für Körper einer Art ist, obgleich im Allgemeinen nicht vortheilhaft, hier im Gebrauche vorzuziehen, da man es am häufigsten mit dem Leucitoeder, weniger mit Leucitoiden zu thun hat; wo es sich jedoch um gemeinsame Bestimmungen der erwähnten Körperart handelt, da ist nur der gemeinsame Name anzuwenden.

Die Kanten eines jeden Deltoidikositetraeders sind zweierlei Art: vier und zwanzig längere und eben so viele kürzere. Von den letzteren liegen je

drei über einer eingeschriebenen Oktaederfläche, den Endpunkt einer trigonalen Zwischenaxe mit den Endpunkten der drei herumliegenden zu demselben Oktanten gehörigen rhombischen Zwischenaxen verbindend; die längeren Kanten dagegen verbinden zu je vier einen Hauptaxenendpunkt mit den Endpunkten der vier herumliegenden rhombischen Halbaxen. Die Ecken sind dreierlei Art: sechs regelmässige vierkantige, von den längeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der Hauptaxen sind; acht regelmässige dreikantige, von den kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind; zwölf symmetrische vierkantige, von den abwechselnden längeren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Enden der rhombischen Zwischenaxen sind. Die Hauptschnitte sind symmetrische, die Nebenschnitte ungleichseitige Oktogone.

Zufolge der oben angegebenen Bestimmung über die Lage der Deltoidikositetraederflächen werden je drei zu einem Oktanten gehörige Flächen durch die drei Verhältnisse $(a:ma:ma)$, $(ma:a:ma)$ und $(ma:ma:a)$ bestimmt, welche sich von dem der Oktaederfläche dadurch unterscheiden, dass der Coefficient m zweimal mit a in Verbindung tritt, wodurch für die Deltoidikositetraeder das allgemeine Zeichen mOm aufgestellt worden ist. Unter den in der Natur beobachteten mOm mögen als Beispiele das spitze Leucitoid $\frac{4}{3}O\frac{4}{3}$, das Leucitoeder $2O2$ und das stumpfe Leucitoid $3O3$ dienen:

	kürzere	längere Kanten.	Vorkommen.
$\frac{4}{3}O\frac{4}{3}$	166° 4' 10"	118° 4' 21"	Bleiglanz.
$2O2$	146 26 34	131 48 37	Leucit.
$3O3$	129 31 16	144 54 12	Silber.

Um aus dem gegebenen Zeichen die Kantenwinkel, oder das Umgekehrte zu bestimmen, dienen folgende Gleichungen, in denen die längeren Kanten durch X und die kürzeren durch Z bezeichnet sind:

$$\cos. X = \frac{m^2}{m^2 + 2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{1}{\sqrt{(m^2 + 2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} X = \sqrt{(m^2 + 1)};$$

$$\cos. Z = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{m - 1}{\sqrt{2} \sqrt{(m^2 + 2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{(m^2 + 2m + 3)}}{m - 1};$$

$$\text{ferner ist } t = \frac{m \sqrt{3}}{m + 2} \quad \text{und} \quad r = \frac{m \sqrt{2}}{m + 1}.$$

5) Das Hexaeder.

(Syn. Würfel. Cubus.)

Das Hexaeder ist eine von sechs gleichen Quadraten umschlossene Gestalt, mit zwölf gleichen regelmässigen Kanten und acht gleichen regelmässigen dreikantigen Ecken.

Jede Fläche ist durch den Endpunkt einer Hauptaxe parallel den beiden andern gelegt, und in ihrem Mittelpunkte liegt dieser Endpunkt. Die Ebenen und die Kantenwinkel betragen 90° ; die rhombischen Zwischenachsen halbiren durch ihre Endpunkte die Kantenlinien, die der trigonalen sind die Scheitelpunkte der Ecken. Die Hauptschnitte sind Quadrate, die Nebenschnitte Oblongate $\pm \sqrt{3}a$ und $r = \sqrt{2}a$. Aus der angegebenen Lage der Flächen gehen für je drei zu einem Oktanten gehörige Flächen, die eine Ecke bilden, die drei Axenverhältnisse $(a:\infty a:\infty a)$, $(\infty a:a:\infty a)$ und $(\infty a:\infty a:a)$ hervor, welche mit denen von mOm übereinstimmen, wenn man in denselben $m = \infty$ setzt. Es werden nämlich die gleichkantigen vierkantigen Ecken der stumpfen Leucitoide immer stumpfer, je grösser der Werth für m wird, bis bei $m = \infty$ jedes vierflächige um den Endpunkt einer Hauptaxe gruppirte Flächensystem in eine Ebene fällt und das Hexaeder als das letzte Glied der Reihe von den Körpern mOm hervorgeht. Das Zeichen des Hexaeders ist demgemäss $\infty O \infty$.

6) Die Hexakisoktaeder.

(Syno. Sechsmächtlächler oder Hexakisoktaeder; Naumann. Pyramidengranatoeder, Acht- und vierzigflächner; Weiss. Tetrakontaeder; Mohs. Trigonalpolyeder; Hausmann. Pyramidenrautenzwölfäche; v. Raumer. Tessarakontaeder; Breithaupt. Tetrakisgranatoeder, z. Th., Oktakishexaeder, z. Th.; v. Glocker. Achtundvierzigfläche; Bernhardt. Adamantoide; Haidinger.)

Ein Hexakisoktaeder ist ein von acht und vierzig gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Dreiecken umschlossener Körper, mit zwei und siebenzig symmetrischen Kanten und sechs und zwanzig symmetrischen Ecken, dessen Flächen entweder, wie der Name besagt, in acht sechszählige, oder in sechs achtzählige, oder in zwölf vierzählige Systeme vertheilt erscheinen.

Die Lage irgend einer Fläche in einem der acht Oktanten wird nach den drei zugehörigen halben Hauptachsen folgendermassen bestimmt: Man verlängere die eine durch die Vervielfachung mit einem rationalen Coefficienten $n > 1$, die andere durch die Vervielfachung mit einem rationalen Coefficienten $m > n$, während die dritte unverändert bleibt, und lege durch die drei so bestimmten Endpunkte eine Ebene, so gehört diese einem Hexakisoktaeder an. Es giebt deren unzählig viele, da dieselben nicht nur von dem veränderlichen Werthe für m , sondern auch von dem veränderlichen n abhängen, in der Natur jedoch sind nur wenige angetroffen worden.

Ausser dem bereits über sie Ausgesagten gilt im Allgemeinen für sie noch Folgendes: Die Kanten sind dreierlei Art, von jeder vier und zwanzig, und werden nach der Länge unterschieden, nämlich vier und zwanzig längere, deren Kanten-

linien die Verbindungslinien der Hauptaxenenden mit den Endpunkten der trigonalen Zwischenaxen sind; vier und zwanzig mittlere, deren Kantenlinien die Endpunkte der Hauptaxen mit denen der rhombischen Zwischenaxen verbinden, und endlich vier und zwanzig kürzere, deren Kantenlinien die Endpunkte der trigonalen und rhombischen Zwischenaxen verbinden. Die Ecken sind auch dreierlei Art, nämlich: sechs achtkantige, von den längeren und mittleren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxen sind; acht sechskantige, von den längeren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind, und zwölf vierkantige, von den mittleren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der rhombischen Zwischenaxen sind. Nach diesen drei Arten von Ecken zerfallen die Hexakisoktaederflächen in die drei erwähnten über den Hexaeder-, Oktaeder- und Granatoederflächen liegenden Systeme. Die Hauptschnitte sind symmetrische, die Nebenschnitte ungleichseitige Oktogone.

Für je sechs zu einem Oktanten gehörige Flächen ergeben sich, wenn die obige Veränderung der Axen abwechselnd für die drei zugehörigen Halbaxen in der angegebenen Art eintritt, folgende sechs Axenverhältnisse, durch welche ihre Lage bestimmt wird, $(ma:na:a)$, $(ma:a:na)$, $(a:ma:na)$, $(na:ma:a)$, $(a:na:ma)$ und $(na:a:ma)$, und da sich dieselben von dem Axenverhältniss der Fläche O dadurch unterscheiden, dass immer in Bezug auf zwei Halbaxen eine Veränderung durch m und n eintritt, so entsteht für die Hexakisoktaeder das allgemeine Zeichen mOn , in welchem immer der grössere Werth m vorgesetzt wird.

Wenn die längeren Kanten mit Y , die mittleren mit X und die kürzeren mit Z bezeichnet werden, so wird die Grösse ihrer Kantenwinkel durch nachfolgende von m und n abhängige Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = \frac{m^2 n^2 + m^2 - n^2}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} X = \frac{n}{\sqrt{(m^2 n^2 + m^2 + n^2)}}, \quad \text{tang. } \frac{1}{2} X = \frac{m\sqrt{(1+n^2)}}{n}$$

$$\cos. Y = \frac{mn(mn+2)}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{m-n}{\sqrt{2} \sqrt{(m^2 n^2 + m^2 + n^2)}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{[(m+n)^2 + 2m^2 n^2]}}{m-n}$$

$$\cos. Z = \frac{n(2m^2 + n)}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}, \quad \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{m(n-1)}{\sqrt{2} \sqrt{(m^2 n^2 + m^2 + n^2)}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{[m^2(n+1)^2 + 2n^2]}}{m(n-1)}$$

$$\text{Ferner ist: } t = \frac{mn\sqrt{3}}{mn+m+n} \quad \text{und} \quad r = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

Unter den natürlich vorkommenden Hexakisoktaedern können die nachfolgenden mit ihren Kantenwinkeln als Beispiele dienen:

	längere	mittlere	kürzere Kanten.	Vorkommen.
$30\frac{1}{2}$	1580 12' 48"	1480 59' 50"	1580 12' 48"	Granat
$40\frac{1}{3}$	147 47 45	157 22 48	164 3 28	Granat
402	162 14 50	154 47 28	144 2 58	Flussspath.

7) Die Tetrakishexaeder.

(Syn. Viermalsechsfächner, Tetrakishexaeder; Naumann. Pyramidenwürfel; Weiss, v. Raumer. Hexaedrische Trigonalikositetraeder; Mohs. Hexaedrisch-pyramidale Ikositessaeder, hexaederkantige Ikositetraeder oder Vierundzwanzigfächner; Breithaupt. Viermalsechsfäche; Bernhardt. Gebrochene Granatoeder oder Diplogranatoeder z. Th., v. Glocker. Fluoroide; Haidinger.)

Ein Tetrakishexaeder ist eine von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalt, mit sechs und dreissig Kanten und vierzehn Ecken, deren Flächen in sechs vierzählige Systeme so vertheilt sind, dass ein jedes über einer eingeschriebenen Hexaederfläche eine gleichseitige vierseitige Pyramide bildet.

Die Lage einer einzelnen Fläche dieser Körperart zu den drei halben Hauptaxen eines Oktanten wird dadurch bestimmt, dass eine von diesen durch die Vielfachung mit einem rationalen Coefficienten $n > 1$ verlängert wird, dann ergiebt eine durch den so erhaltenen Endpunkt und durch den Endpunkt der zweiten unveränderten Halbaxe parallel der dritten gelegte Ebene eine Tetrakishexaederfläche. Da auch hier die jedesmalige Lage der Flächen von einer veränderlichen Grösse n abhängt, so giebt es möglicherweise sehr viele Körper dieser Art, unter deren Zahl aber nur sehr wenige an natürlichen Krystallen angetroffen worden sind.

Zur näheren Bestimmung der allgemeinen Verhältnisse gehört noch Folgendes: Die Kanten sind zweierlei Art: zwölf längere regelmässige, den Kanten des Hexaeders entsprechende, welche Hauptkanten genannt werden, und vier und zwanzig kürzere symmetrische, zu je vier über einer eingeschriebenen Hexaederfläche liegende, welche Nebenkanten heissen. Die Kantenlinien der ersteren verbinden wie die von $\infty O \infty$ die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen untereinander, die der letzteren aber dieselben mit den Endpunkten der Hauptaxen. Die Ecken sind auch zweierlei Art: sechs regelmässige vierkantige, von den Nebenkanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Hauptaxenenden sind, und acht symmetrische sechskantige, von den abwechselnden Haupt- und Nebenkanten gebildete, deren Scheitel, wie in $\infty O \infty$ bei den Ecken, die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind. Die Endpunkte der rhombischen Zwischenaxen halbiren die Hauptkantenlinien; die Hauptschnitte sind symmetrische Oktogone und die Nebenschnitte ungleichseitige Hexagone.

Da die sechs an einer sechskantigen Ecke liegenden und zu einem Oktanten

gehörigen Flächen ihrer Lage nach durch die sechs gleichen Axenverhältnisse ($\infty a : na : a$), ($\infty a : a : na$), ($na : \infty a : a$), ($a : \infty a : na$), ($a : na : \infty a$) und ($na : a : \infty a$) bestimmt werden, welche aus denen der Hexakisoktaeder dadurch hervorgehen, dass man $m = \infty$ setzt, wodurch je zwei an einer mittleren Kante liegende Flächen mOn in eine Ebene fallen und eine Tetrakishexaederfläche bilden, so geht für die Tetrakishexaederflächen oder für die Tetrakishexaeder selbst das allgemeine Zeichen ∞On hervor.

Die zur Bestimmung der Kantenwinkel nöthigen und von n abhängigen Gleichungen sind folgende, in denen die Hauptkanten mit Z , die Nebenkanten mit Y bezeichnet sind:

$$\cos. Y = -\frac{n^2}{1+n^2}, \cos. \frac{1}{2} Y = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{(1+n^2)}}, \text{tang. } \frac{1}{2} Y = \sqrt{(1+2n^2)};$$

$$\cos. Z = -\frac{2n}{1+n^2}, \cos. \frac{1}{2} Z = \frac{n-1}{\sqrt{2} \sqrt{(1+n^2)}}, \text{tang. } \frac{1}{2} Z = \frac{n+1}{n-1};$$

Ferner ist $t = \frac{n\sqrt{3}}{1+n}$ und $r = \frac{n\sqrt{2}}{1+n}$.

Von den in der Natur vorkommenden Tetrakishexaedern mögen die nachfolgenden drei als Beispiele dienen:

	Hauptkanten.	Nebenkanten.	Vorkommen.
$\infty O \frac{3}{2}$	1570 22' 48"	1330 48' 47"	Granat.
$\infty O 2$	143 7 48	143 7 48	Gold.
$\infty O 3$	126 52 12	154 9 29	Flussspath.

Vergleicht man nach der gegebenen Beschreibung der einfachen holoedrischen Formen des regulären Systems dieselben untereinander, so findet man, wie alle im genauesten Zusammenhange untereinander stehen. Diejenigen Formen, welche durch die veränderlichen Werthe von m oder n charakterisirt sind, bilden untereinander, durch diese Werthe verschieden, Reihen, durch welche der Uebergang zwischen gewissen nur unveränderlich gleich auftretenden Formen oder auch zwischen den veränderlichen vermittelt wird. So stellen die Triakisoktaeder, die Deltoïdikositetraeder und die Tetrakishexaeder den Uebergang aus dem Oktaeder in das Granatoeder und Hexaeder und den Uebergang aus dem Granatoeder in das Hexaeder dar, wie die Reihen

$$\begin{aligned} O & \dots \dots \dots mO \dots \dots \dots \infty O \\ O & \dots \dots \dots mOm \dots \dots \dots \infty O \infty \\ \infty O & \dots \dots \dots \infty On \dots \dots \dots \infty O \infty \end{aligned}$$

es bildlich darstellen, indem bei allen Werthen für m oder n , welche zwischen der Einheit und einem unendlich grossen Werthe liegen, Krystallformen der genannten drei Arten möglich sind. Nur wenn m oder n gleich der Einheit oder gleich einer

unendlich grossen Grösse wird, entstehen die Grenzformen, welche die Reihen nach einer der beiden Seiten beschliessen. Es tragen daher auch die von den veränderlichen Werthen abhängigen Formen bald den Totalausdruck der einen oder der anderen Grenzform an sich und stellen so auch sichtbar den Uebergang dar. So sind bei kleinen Werthen von m die Triakisoktaeder in ihrem Totalausdruck des Anblickes, welchen sie gewähren, dem Oktaeder nahe stehend, über dessen Flächen sich sehr stumpfe dreiseitige Pyramiden erheben; bald aber verlieren die Triakisoktaeder bei Zunahme des Werthes m den oktaedrischen Charakter und zeigen ihre Aehnlichkeit mit dem Granatoeder, welches als in seinen längeren Flächendiagonalen gebrochen erscheint. Auf gleiche Weise bieten die Deltoidikositetraeder entweder den oktaedrischen oder hexaedrischen Charakter in ihrem Anblicke dar, der in gewissen Formen nicht entscheidend hervortritt, sondern als eine Vereinigung beider sich darstellt. Die spitzen Leucitoide zeigen unverkennbar, wie nahe sie dem Oktaeder stehen, aber schon in dem Leucitoeder tritt das allgemeine oktaedrische Aussehen zurück, und in den stumpfen Leucitoiden ist die Annäherung an das Hexaeder auf den ersten Blick zu erkennen. Die Tetrakishexaeder endlich bilden die Verbindungsglieder zwischen dem Granatoeder und Hexaeder, indem bei dem geringsten Werthe von n über 1 das Granatoeder in seinen kürzeren Diagonalen gebrochen erscheint, wodurch die Tetrakishexaeder von granatoedrischen Habitus erkennbar sind. Allmählig verliert sich der Charakter des Granatoeders, so dass er auch schon in dem Tetrakishexaeder $\infty O 2$, dessen Kantenwinkel von gleicher Grösse sind, wenig sichtbar ist, von da aber tritt der hexaedrische Habitus hervor und das Hexaeder selbst schliesst die Zahl der möglichen Tetrakishexaeder bei dem Werthe $n = \infty$, indem die Flächen der vierzähligen Systeme, je vier, in eine Ebene, die Hexaederfläche fallen.

Die Hexakisoktaeder, deren Mannigfaltigkeit von zwei veränderlichen Grössen abhängt, bilden auch Uebergangsglieder zweier Reihen, welche durch

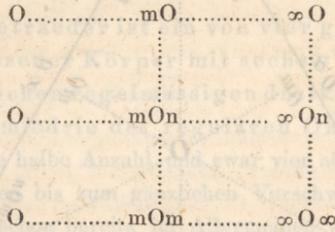
$$O \dots \dots \dots m O n \dots \dots \dots \infty O n$$

$$m O \dots \dots \dots m O n \dots \dots \dots m O m$$

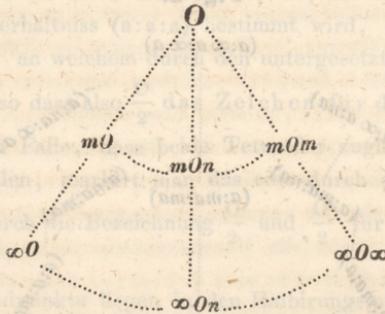
dargestellt werden; sie vermitteln einerseits den Uebergang aus dem Oktaeder in die Tetrakishexaeder, anderseits den Uebergang aus den Triakisoktaedern in die Deltoidikositetraeder. Da nämlich bei gleichzeitiger ungleicher Veränderung je zweier Halbaxen, wie es oben angegeben wurde, der Werth von m immer grösser ist, als der von n , so wird auch der Fall eintreten müssen, dass m unendlich gross ist, während n eine endliche Grösse bezeichnet. Es kann aber in diesem Falle die Grenzgestalt keine unveränderliche sein, sondern eine der Mannigfaltigkeit unterworfen, da jeder Werth von $n < m$ möglich ist, und mithin auch dieses n neben $m = \infty$ alle möglichen endlichen Werthe erhalten kann. Was die zweite durch die

Hexakisoktaeder vermittelte Uebergangsreihe betrifft, so beginnt dieselbe von irgend einem Triakisoktaeder und endet mit einem Deltoidikositetraeder von gleichen m, in der Mitte liegen nun alle Hexakisoktaeder, bei denen der Werth m der gegebene und der Werth n von 1 bis m sich erstreckt.

Diese fünf Reihen der Uebergänge der verschiedenen einfachen Formen untereinander stellt das Schema



dar, oder wenn das O als Ausgangspunkt der drei Reihen nur einmal dargestellt werden soll, so zeigt den Zusammenhang der sieben Formenarten der heloedrischen Abtheilung noch deutlicher dieses Schema:



Wollte man dagegen die Vertheilung der Flächen in einem Oktanten und die sie in ihrer Lage bestimmenden Axenverhältnisse für denselben sichtbar machen, was besonders zur Vergleichung mit den noch folgenden dreiaxigen Systemen sehr zweckdienlich ist, so würde diese das in Fig. 2*) dargestellte Schema am besten darstellen, wo die oben angeführten Axenverhältnisse der Flächen anstatt der allgemeinen Zeichen angegeben sind. Die Lage der Flächen dagegen der übrigen holoedrischen Formen am Oktaeder zeigt die Fig. 1, in welcher eine Oktaederfläche dargestellt ist und durch die Zeichen der übrigen Formen die Vertheilung aller übrigen Formen um eine Oktaederfläche herum.

*) Fig. 1 und 2 siehe umstehend.

Fig. 1.

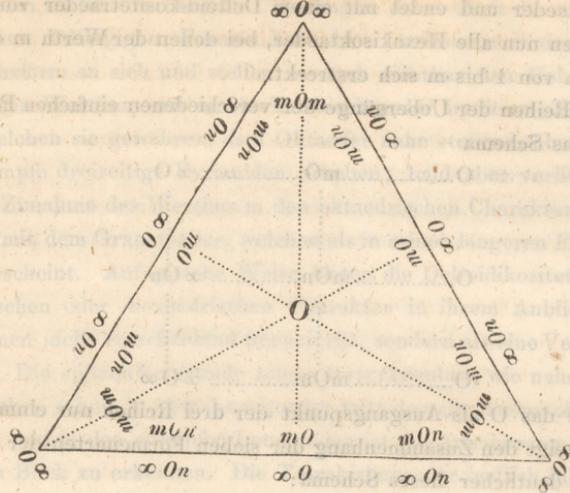


Fig. 2.

