b) Mit parallelen Flächen,

1) Pentagondodekaeder, 2) Trapezoidikositetraeder.

C. Tetartoedrische Formen:

Pentagontriakistetraeder.

Beschreibung der einfachen Krystallformen.

A. Holoedrische Formen.

1) Das reguläre Oktaeder.

(Syn. Oktaeder; Naumann. Achtflach; Bernhardi. Achtflächner; Breithaupt. Reguläre vierseitige Doppelpyramide. Regelmässiges Oktaeder.)

Das reguläre Oktaeder ist eine von acht gleichen gleichseitigen Triangeln umschlossene Gestalt, mit zwölf gleichen regelmässigen Kanten und sechs gleichen regelmässigen vierkantigen Ecken.

Jede Oktaederfläche ist durch die Endpunkte der je drei zu einem Raumoktanten gehörigen Halbaxen gelegt und die ebenen Winkel derselben betragen 60^{0}; je zwei Flächen aber bilden in einer Kante einen Flächenwinkel von $109^{0}\ 28'\ 16''$. Die Kantenlinien sind die Verbindungslinien je zweier Axenendpunkte und es liegen daher je vier derselben in einer Ebene. Die Scheitel der Ecken sind die Endpunkte der Hauptaxen. Im regulären Octaeder, so wie in jeder anderen Krystallform des regulären Systems, giebt es drei Hauptschnitte, welche hier Quadrate sind, als Ebenen, die durch je zwei Hauptaxen gelegt und von je vier Kantenlinien umgrenzt sind. Ausser den drei erwähnten Axen, welche ausschliesslich so genannt oder als Hauptaxen insbesondere unterschieden werden, giebt es noch zweierlei Zwischenaxen, sechs rhombische und vier trigonale. Die ersteren liegen zu je zwei in einem Hauptschnitte und sind die Verbindungslinien der Halbirungspunkte je zweier zugehörigen parallelen Kantenlinien. Durch sie entstehen sechs gleiche Nebenschnitte von Rhombengestalt; sie sind nämlich Ebenen, gelegt durch je eine rhombische Zwischenaxe und die auf ihr senkrechte Hauptaxe und begrenzt durch die Höhenperpendikel der Oktaederflächen. Verbindet man endlich die Mittelpunkte je zweier parallelen Oktaederflächen durch gerade Linien, so gehen dadurch die vier trigonalen Zwischenaxen hervor, welche auch in den erwähnten Nebenschnitten liegen.

Die angeführten Zwischenaxen, sowohl die rhombischen als trigonalen, sind ihrer Lage nach in jeder Krystallform des regulären Systems auf gleiche Weise vorhanden, nur in Bezug auf die Länge treten Unterschiede ein; im regulären Oktaeder selbst ist, wenn man die Länge der halben Hauptaxen $= 1$ setzt, durch r die halbe rhombische und durch t die halbe trigonale Zwischenaxe bezeichnet, $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Da die Lage einer jeden Oktaederfläche durch je drei Hauptaxenendpunkte bestimmt wird und die Entfernungen derselben vom Centrum aus gleich sind, so ist, wenn man diese Entfernung mit a bezeichnet, das Axenverhältniss einer jeden Fläche (a:a:a) oder a = 1 gesetzt, (1 : 1 : 1), welches Verhältniss man als Zeichen für dieselbe oder für das ganze Oktaeder annehmen könnte. Es ist aber bei der Einführung gewisser Symbole zur Bezeichnung besonders darauf zu sehen, dass dieselben möglichst einfach und kurz sind, ohne jedoch der Deutlichkeit zu schaden, und man hat desshalb bei Voraussetzung des obigen Verhältnisses, als des einfachsten im ganzen Systeme, das reguläre Oktaeder mit dem Buchstaben O bezeichnet, aus welchem Zeichen, wie im Verfolg ersichtlich ist, die Zeichen der übrigen Krystallformen des regulären Systems gebildet werden.

2) Die Triakisoktaeder.

(Syn. Triakisoktaeder oder Dreimalachtflächner; Naumann. Trigontriakisoktaeder. Pyramidenoktaeder; Weiss. Oktaedrische Trigonalikositetraeder; Mohs. Oktaedrische pyramidale Ikositessaraeder, oktaederkantige Ikositessaraeder oder Vierundzwanzigflächner; Breithaupt. Dreimalachtflache; Bernhardi. Pyramidenachtflache; v. Raumer. Galenoide; Haidinger.)

Ein Triakisoktaeder ist eine von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen stumpfwinkligen gleichschenkligen Triangeln umschlossene Gestalt, mit vierzehn Ecken und sechs und dreissig Kanten, deren Flächen in acht dreizählige Systeme so vertheilt sind, dass ein jedes derselben eine stumpfe gleichseitig-dreiseitige Pyramide bildet, deren Basis eine Fläche des eingeschriebenen regulären Oktaeders ist.

Wenn man nämlich von den drei zu einem Oktanten gehörigen Halbaxen je eine verlängert, indem man sie durch eine beliebige rationale Grösse $m > 1$ vervielfacht, während die jedesmaligen beiden anderen unverändert bleiben, und durch die Endpunkte der beiden unveränderten und durch den aus der Verlängerung hervorgegangenen Endpunkt der dritten Ebenen legt, so entstehen dadurch die über einer jeden Oktaederfläche liegenden drei Flächen. Von dem Werthe m hängt die jedesmalige Lage der Triakisoktaederflächen ab, welcher die Verlängerung der einen Axe bestimmt, und es werden demnach so viele Triakisoktaeder möglich sein, als man rationale Zahlen grösser als 1 für m setzen kann; alle jedoch haben den angegebenen gemeinsamen Charakter und unterscheiden sich nur durch die von dem jedesmaligen Werthe für m abhängigen Grössenverhältnisse der Theile.

Weil die Flächen gleichschenklige Triangel sind, so sind die Kanten zweierlei Art: zwölf längere, regelmässige und vierundzwanzig kürzere, symmetrische. Die ersteren entsprechen den Kanten des zu Grunde liegenden regulären Oktaeders und werden durch den Namen Hauptkanten unterschieden; ihre Kantenlinien sind wie in O die Verbindungslinien je zweier Hauptaxenendpunkte und jede derselben bildet die Basis zweier zu zwei Nebensystemen gehörigen Flächentriangel. Die kürzeren Kanten, welche im Gegensatz zu den Hauptkanten Nebenkanten genannt werden, sind zu je drei über einer Oktaederfläche gruppirt und ihre Kantenlinien verbinden den Endpunkt einer trigonalen Zwischenaxe mit den drei zu demselben Oktanten gehörigen Hauptaxenendpunkten.

Die Ecken sind auch zweierlei Art: sechs symmetrische achtkantige, gebildet von je vier abwechselnden Haupt- und je vier Nebenkanten, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxen sind, wodurch sie den Oktaederecken entsprechen; ferner acht regelmässige dreikantige, von den Nebenkanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind. Diese Zwischenaxen sind länger als in dem zu Grunde liegenden Oktaeder und für jedes Triakisoktaeder verschieden; die rhombischen Zwischenaxen aber haben mit denen in O gleiche Länge und ihre Endpunkte in den Halbirungspunkten der Hauptkantenlinien. Die Hauptschnitte sind Quadrate, die Nebenschnitte ungleichseitige Oktogone.

Da je drei zu einem Oktanten gehörige und über einer Oktaederfläche liegende Flächen eines Triakisoktaeders nach obiger Angabe allgemein durch die drei gleichen Verhältnisse (ma : a : a), (a : ma : a) und (a : a : ma) in ihrer Lage bestimmt werden, welche Verhältnisse sich von dem des O dadurch unterscheiden, dass je eine Halbaxe durch m vervielfacht wird, so ist hieraus für die einzelnen Triakisoktaederflächen oder für die Triakisoktaeder selbst das allgemeine Zeichen mO hervorgegangen, in welchem das vorgesetzte m angiebt, um wievielmal eine Halbaxe vervielfacht werden muss, um die Lage einer einzelnen Fläche zu bestimmen. Die Grösse der Kantenwinkel wird, wenn man die Hauptkanten mit X, die Nebenkanten mit Y bezeichnet und die Länge der halben Hauptaxen, wie in O, gleich 1 setzt, durch folgende von m abhängige Gleichungen allgemein bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{2m^2-1}{2m^2+1},\ \cos. \tfrac{1}{2}X = \frac{1}{\sqrt{(2m^2+1)}},\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}X = m\sqrt{2};$$

$$\cos. Y = -\frac{m(m+2)}{2m^2+1},\ \cos. \tfrac{1}{2}Y = \frac{m-1}{\sqrt{2}\sqrt{(2m^2+1)}},\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{(3m^2+2m+1)}}{m-1}.$$

Die halbe trigonale Zwischenaxe $t = \frac{m\sqrt{3}}{2m+1}$.

Obgleich durch die vielen Werthe, welche der Grösse m ertheilt werden können, eine unendliche Anzahl Triakisoktaeder möglich ist, so ist dennoch ihr Vorkommen in der Natur sehr beschränkt, und als Beispiele mögen die nachfolgenden mit ihren Kantenwinkeln dienen:

	Hauptkanten.	Nebenkanten.	Vorkommen.
$\frac{3}{2}$ O	129° 31′ 16″	162° 39′ 31″	Granat.
2 O	141 3 27	152 44 2	Bleiglanz.
3 O	153 28 29	142 8 11	Bleiglanz.

3) Das Granatoeder.

(Syn. Rhombendodeakeder; Naumann. Reguläres Rhombendodekaeder; Hausmann. Einkantiges Tetragonal-Dodekaeder; Mohs. Rautenzwölfflach; v. Raumer, Bernhardi. Granatdodekaeder; Werner. Rhombisches Dodekaeder oder Rautenzwölfflächner; Breithaupt. Granatoid; Haidinger.)

Das Granatoeder ist ein von zwölf gleichen und ähnlichen Rhombenflächen umschlossener Körper, mit vierundzwanzig gleichen symmetrischen Kanten und vierzehn regelmässigen Ecken.

Der Name ist hergenommen vom Granat, einem Mineral, welches vorzüglich in dieser Form erscheint und wegen seines häufigen Vorkommens sehr bekannt ist. Vergleicht man das Granatoeder mit den Triakisoktaedern, so entsprechen je zwei an einer Hauptkante liegende Flächen mO einer Granatoederfläche und das Granatoeder selbst erscheint als ein Triakisoktaeder, wo m unendlich gross ist, so dass je zwei an einer Hauptkante liegende Flächen von mO bei dem Werthe $m = \infty$ in eine Ebene fallen und eine Granatoederfläche bilden, welche demnach durch die Endpunkte zweier halben Hauptaxen parallel der dritten auf ihnen senkrechten gelegt ist. Das Granatoeder ist also das letzte Glied der Reihe aller möglichen Triakisoktaeder bei dem Zunehmen des Werthes m. Die Kanten des Granatoeders entsprechen den Nebenkanten von mO und liegen wie diese zu je drei über einer eingeschriebenen Oktaederfläche das Ende einer trigonalen Zwischenaxe mit je drei Hauptaxenendpunkten durch ihre Kantenlinien verbindend. Die Ecken sind zweierlei Art: sechs vierkantige, deren Scheitelpunkte wie in O die Endpunkte der Hauptaxen sind, und acht dreikantige, den gleichnamigen in mO entsprechende, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind. Die Hauptschnitte sind Quadrate, die Nebenschnitte ungleichseitige Hexagone. Die Endpunkte der rhombischen Zwischenaxen liegen in den Mittelpunkten der Rhombenflächen und die Zwischenaxen selbst haben mit denen des zu Grunde liegenden O gleiche Länge, da durch die Kantenlinien desselben die Granatoederflächen gelegt sind. Die halben trigonalen Zwischenaxen t sind $= \frac{\sqrt{3}}{2}$. Die Kanten bilden einen Winkel von 120°, und die ebenen Winkel sind 109° 28′ 16″ und 70° 31′ 44″.

Da je drei zu einem Oktanten gehörige Flächen ihrer Lage nach durch die drei gleichen Verhältnisse $(\infty a : a : a)$, $(a : \infty a : a)$ und $(a : a : \infty a)$ bestimmt werden, welche von dem des O durch den Coefficienten ∞, wie die von mO durch m unterschieden sind, indem hier m in eine unendlich grosse Grösse übergegangen ist und die parallele Lage der Flächen gegen die damit versehene Halbaxe bedingt, so wird diesem gemäss die Granatoederfläche oder das Granatoeder durch ∞O bezeichnet.

4) Die Deltoidikositetraeder.

Das Leucitoeder und die Leucitoide.

(Syn. Ikositetraeder, Vierundzwanzigflächner; Naumann. Trapezoidale oder deltoide Ikositessaraeder oder Vierundzwanzigflächner; Breithaupt. Zweikantige Tetragonal-Ikositetraeder; Mohs. Trapezoeder; Hausmann. Leucite; v. Raumer. Leucitkrystallisation; Werner. Deltoid-Vierundzwanzigflache; Bernhardi.)

Ein Deltoidikositetraeder ist eine von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen Deltoiden umschlossene Gestalt, deren Flächen entweder in acht dreizählige oder in sechs vierzählige Systeme vertheilt erscheinen und acht und vierzig symmetrische Kanten und sechs und zwanzig Ecken bilden.

Die Lage einer solchen Körperfläche wird dadurch bestimmt, dass man von den drei zu einem Oktanten gehörigen halben Hauptaxen zwei auf gleiche Weise verlängert, indem man sie durch einen rationalen Coefficienten $m > 1$ vervielfacht, während die dritte auf ihnen senkrechte unverändert bleibt. Legt man nun durch den Endpunkt der unveränderten Halbaxe und durch die zwei aus der gleichmässigen Verlängerung der beiden anderen Halbaxen hervorgegangenen Endpunkte eine Ebene, so ist dies die Fläche eines Deltoidikositetraeders. Da dies für jede Halbaxe abwechselnd gleichzeitig Statt findet, so gehen für jeden Oktanten drei Flächen hervor. Vermöge des veränderlichen Werthes m sind auch hier, wie bei mO, sehr viele Körper dieser Art möglich, deren allgemeiner Charakter derselbe bleibt, und nur die von m abhängigen Grössenverhältnisse bedingen die Unterschiede untereinander. Unter den in der Natur gleichfalls in geringer Anzahl vorkommenden Deltoidikositetraedern ist dasjenige, bei welchem $m = 2$, das häufigste, man hat es zuerst beobachtet und nach dem Namen desjenigen Minerals, bei welchem man es besonders ausgebildet vorfand, nach dem Leucit, Leucitoeder genannt. So vortheilhaft ihrer Kürze wegen diese Benennung ist, so kann sie doch nicht auf alle Deltoidikositetraeder ausgedehnt werden, weil sie für die übrigen unrichtig leicht zu Missverständnissen führen könnte; es lässt sich jedoch eine aus dem angeführten Namen abgeleitete kürzere Benennung für die übrigen anwenden. Man nennt nämlich alle diejenigen Deltoidikositetraeder, bei welchen $m < 2$, spitze Leucitoide (dem Leucit ähnliche Formen), dagegen die, bei welchen $m > 2$, stumpfe Leucitoide. Diese Trennung der Namen für Körper einer Art ist, obgleich im Allgemeinen nicht vortheilhaft, hier im Gebrauche vorzuziehen, da man es am häufigsten mit dem Leucitoeder, weniger mit Leucitoiden zu thun hat; wo es sich jedoch um gemeinsame Bestimmungen der erwähnten Körperart handelt, da ist nur der gemeinsame Name anzuwenden.

Die Kanten eines jeden Deltoidikositetraeders sind zweierlei Art: vier und zwanzig längere und eben so viele kürzere. Von den letzteren liegen je drei über einer eingeschriebenen Oktaederfläche, den Endpunkt einer trigonalen Zwischenaxe mit den Endpunkten der drei herumliegenden zu demselben Oktanten gehörigen rhombischen Zwischenaxen verbindend; die längeren Kanten dagegen verbinden zu je vier einen Hauptaxenendpunkt mit den Endpunkten der vier herumliegenden rhombischen Halbaxen. Die Ecken sind dreierlei Art: sechs regelmässige vierkantige, von den längeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der Hauptaxen sind; acht regelmässige dreikantige, von den kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind; zwölf symmetrische vierkantige, von den abwechselnden längeren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Enden der rhombischen Zwischenaxen sind. Die Hauptschnitte sind symmetrische, die Nebenschnitte ungleichseitige Oktogone.

Zufolge der oben angegebenen Bestimmung über die Lage der Deltoidikositetraederflächen werden je drei zu einem Oktanten gehörige Flächen durch die drei Verhältnisse (a:ma:ma), (ma:a:ma) und (ma:ma:a) bestimmt, welche sich von dem der Oktaederfläche dadurch unterscheiden, dass der Coefficient m zweimal mit a in Verbindung tritt, wodurch für die Deltoidikositetraeder das allgemeine Zeichen mOm aufgestellt worden ist. Unter den in der Natur beobachteten mOm mögen als Beispiele das spitze Leucitoid $\frac{4}{3}O\frac{4}{3}$, das Leucitoeder 2O2 und das stumpfe Leucitoid 3O3 dienen:

	kürzere	längere Kanten.	Vorkommen.
$\frac{4}{3}O\frac{4}{3}$	166° 4′ 10″	118° 4′ 21″	Bleiglanz.
2O2	146 26 34	131 48 37	Leucit.
3O3	129 31 16	144 54 12	Silber.

Um aus dem gegebenen Zeichen die Kantenwinkel, oder das Umgekehrte zu bestimmen, dienen folgende Gleichungen, in denen die längeren Kanten durch X und die kürzeren durch Z bezeichnet sind:

$$\cos. X = -\frac{m^2}{m^2+2},\quad \cos. \tfrac{1}{2}X = \frac{1}{\sqrt{(m^2+2)}},\quad \text{tang. } \tfrac{1}{2}X = \sqrt{(m^2+1)};$$

$$\cos. Z = -\frac{2m+1}{m^2+2},\quad \cos. {}^1Z = \frac{m-1}{\sqrt{2}\,\sqrt{(m^2+2)}},\quad \text{tang. } \tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{(m^2+2m+3)}}{m-1};$$

ferner ist $t = \dfrac{m\sqrt{3}}{m+2}$ und $r = \dfrac{m\sqrt{2}}{m+1}$.

5) Das Hexaeder.

(Syn. Würfel. Cubus.)

Das Hexaeder ist eine von sechs gleichen Quadraten umschlossene Gestalt, mit zwölf gleichen regelmässigen Kanten und acht gleichen regelmässigen dreikantigen Ecken.

Jede Fläche ist durch den Endpunkt einer Hauptaxe parallel den beiden anderen gelegt, und in ihrem Mittelpunkte liegt dieser Endpunkt. Die ebenen und die Kantenwinkel betragen 90°; die rhombischen Zwischenaxen halbiren durch ihre Endpunkte die Kantenlinien, die der trigonalen sind die Scheitelpunkte der Ecken. Die Hauptschnitte sind Quadrate, die Nebenschnitte Oblonga. $t = \sqrt{3}$ und $r = \sqrt{2}$.

Aus der angegebenen Lage der Flächen gehen für je drei zu einem Oktanten gehörige Flächen, die eine Ecke bilden, die drei Axenverhältnisse $(a : \infty a : \infty a)$, $(\infty a : a : \infty a)$ und $(\infty a : \infty a : a)$ hervor, welche mit denen von mOm übereinstimmen, wenn man in denselben $m = \infty$ setzt. Es werden nämlich die gleichkantigen vierkantigen Ecken der stumpfen Leucitoide immer stumpfer, je grösser der Werth für m wird, bis bei $m = \infty$ jedes vierflächige um den Endpunkt einer Hauptaxe gruppirte Flächensystem in eine Ebene fällt und das Hexaeder als das letzte Glied der Reihe von den Körpern mOm hervorgeht. Das Zeichen des Hexaeders ist demgemäss $\infty O \infty$.

6) Die Hexakisoktaeder.

(Syn. Sechsmalachtflächner oder Hexakisoktaeder; Naumann. Pyramidengranatoeder, Achtundvierzigflächner; Weiss. Tetrakontaoktaeder; Mohs. Trigonalpolyeder; Hausmann. Pyramidenrautenzwölfflache; v. Raumer. Tessarakontaoctaeder; Breithaupt. Tetrakisgranatoeder, z. Th., Oktakishexaeder, z. Th.; v. Glocker. Achtundvierzigflache; Bernhardi. Adamantoide; Haidinger.)

Ein Hexakisoktaeder ist ein von acht und vierzig gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Triangeln umschlossener Körper, mit zwei und siebzig symmetrischen Kanten und sechs und zwanzig symmetrischen Ecken, dessen Flächen entweder, wie der Name besagt, in acht sechszählige, oder in sechs achtzählige, oder in zwölf vierzählige Systeme vertheilt erscheinen.

Die Lage irgend einer Fläche in einem der acht Oktanten wird nach den drei zugehörigen halben Hauptaxen folgendermassen bestimmt: Man verlängere die eine durch die Vervielfachung mit einem rationalen Coefficienten $n > 1$, die andere durch die Vervielfachung mit einem rationalen Coefficienten $m > n$, während die dritte unverändert bleibt, und lege durch die drei so bestimmten Endpunkte eine Ebene, so gehört diese einem Hexakisoktaeder an. Es giebt deren unzählig viele, da dieselben nicht nur von dem veränderlichen Werthe für m, sondern auch von dem veränderlichen n abhängen, in der Natur jedoch sind nur wenige angetroffen worden.

Ausser dem bereits über sie Ausgesagten gilt im Allgemeinen für sie noch Folgendes: Die Kanten sind dreierlei Art, von jeder vier und zwanzig, und werden nach der Länge unterschieden, nämlich vier und zwanzig längere, deren Kantenlinien die Verbindungslinien der Hauptaxenenden mit den Endpunkten der trigonalen Zwischenaxen sind; vier und zwanzig mittlere, deren Kantenlinien die Endpunkte der Hauptaxen mit denen der rhombischen Zwischenaxen verbinden, und endlich vier und zwanzig kürzere, deren Kantenlinien die Endpunkte der trigonalen und rhombischen Zwischenaxen verbinden. Die Ecken sind auch dreierlei Art, nämlich: sechs achtkantige, von den längeren und mittleren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxen sind; acht sechskantige, von den längeren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind, und zwölf vierkantige, von den mittleren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der rhombischen Zwischenaxen sind. Nach diesen drei Arten von Ecken zerfallen die Hexakisoktaederflächen in die drei erwähnten über den Hexaeder-, Oktaeder- und Granatoederflächen liegenden Systeme. Die Hauptschnitte sind symmetrische, die Nebenschnitte ungleichseitige Oktogone.

Für je sechs zu einem Oktanten gehörige Flächen ergeben sich, wenn die obige Veränderung der Axen abwechselnd für die drei zugehörigen Halbaxen in der angegebenen Art eintritt, folgende sechs Axenverhältnisse, durch welche ihre Lage bestimmt wird, (ma:na:a), (ma:a:na), (a:ma:na), (na:ma:a), (a:na:ma) und (na:a:ma), und da sich dieselben von dem Axenverhältniss der Fläche O dadurch unterscheiden, dass immer in Bezug auf zwei Halbaxen eine Veränderung durch m und n eintritt, so entsteht für die Hexakisoktaeder das allgemeine Zeichen mOn, in welchem immer der grössere Werth m vorgesetzt wird.

Wenn die längeren Kanten mit Y, die mittleren mit X und die kürzeren mit Z bezeichnet werden, so wird die Grösse ihrer Kantenwinkel durch nachfolgende von m und n abhängige Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{m^2n^2 + m^2 - n^2}{m^2n^2 + m^2 + n^2}, \cos. \tfrac{1}{2}X = \frac{n}{\sqrt{(m^2n^2 + m^2 + n^2)}}, \text{tang. } \tfrac{1}{2}X = \frac{m\sqrt{(1+n^2)}}{n};$$

$$\cos. Y = -\frac{mn(mn+2)}{m^2n^2 + m^2 + n^2}, \cos. \tfrac{1}{2}Y = \frac{m-n}{\sqrt{2}\sqrt{(m^2n^2 + m^2 + n^2)}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[(m+n)^2 + 2m^2n^2]}}{m-n};$$

$$\cos. Z = -\frac{n(2m^2+n)}{m^2n^2 + m^2 + n^2}, \cos. \tfrac{1}{2}Z = \frac{m(n-1)}{\sqrt{2}\sqrt{(m^2n^2 + m^2 + n^2)}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{[m^2(n+1)^2 + 2n^2]}}{m(n-1)}.$$

Ferner ist: $t = \frac{mn\sqrt{3}}{mn + m + n}$ und $r = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$.

Unter den natürlich vorkommenden Hexakisoktaedern können die nachfolgenden mit ihren Kantenwinkeln als Beispiele dienen:

	längere	mittlere	kürzere Kanten.	Vorkommen.
$3O\frac{3}{2}$	158^0 12′ 48″	148^0 59′ 50″	158^0 12′ 48″	Granat
$4O\frac{4}{3}$	147 47 45	157 22 48	164 3 28	Granat
$4O2$	162 14 50	154 47 28	144 2 58	Flussspath.

7) Die Tetrakishexaeder.

(Syn. Viermalsechsflächner, Tetrakishexaeder; Naumann. Pyramidenwürfel; Weiss, v. Raumer. Hexaedrische Trigonalikositetraeder; Mohs. Hexaedrisch-pyramidale Ikositessaraeder, hexaederkantige Ikositetraeder oder Vierundzwanzigflächner; Breithaupt. Viermalsechsflache; Bernhardi. Gebrochene Granatoeder oder Diplogranatoeder z. Th., v. Glocker. Fluoroide; Haidinger.)

Ein Tetrakishexaeder ist eine von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Triangeln umschlossene Gestalt, mit sechs und dreissig Kanten und vierzehn Ecken, deren Flächen in sechs vierzählige Systeme so vertheilt sind, dass ein jedes über einer eingeschriebenen Hexaederfläche eine gleichseitige vierseitige Pyramide bildet.

Die Lage einer einzelnen Fläche dieser Körperart zu den drei halben Hauptaxen eines Oktanten wird dadurch bestimmt, dass eine von diesen durch die Vervielfachung mit einem rationalen Coefficienten $n > 1$ verlängert wird, dann ergiebt eine durch den so erhaltenen Endpunkt und durch den Endpunkt der zweiten unveränderten Halbaxe parallel der dritten gelegte Ebene eine Tetrakishexaederfläche. Da auch hier die jedesmalige Lage der Flächen von einer veränderlichen Grösse n abhängt, so giebt es möglicherweise sehr viele Körper dieser Art, unter deren Zahl aber nur sehr wenige an natürlichen Krystallen angetroffen worden sind.

Zur näheren Bestimmung der allgemeinen Verhältnisse gehört noch Folgendes: Die Kanten sind zweierlei Art: zwölf längere regelmässige, den Kanten des Hexaeders entsprechende, welche Hauptkanten genannt werden, und vier und zwanzig kürzere symmetrische, zu je vier über einer eingeschriebenen Hexaederfläche liegende, welche Nebenkanten heissen. Die Kantenlinien der ersteren verbinden wie die von $\infty O \infty$ die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen untereinander, die der letzteren aber dieselben mit den Endpunkten der Hauptaxen. Die Ecken sind auch zweierlei Art: sechs regelmässige vierkantige, von den Nebenkanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Hauptaxenenden sind, und acht symmetrische sechskantige, von den abwechselnden Haupt- und Nebenkanten gebildete, deren Scheitel, wie in $\infty O \infty$ bei den Ecken, die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind. Die Endpunkte der rhombischen Zwischenaxen halbiren die Hauptkantenlinien; die Hauptschnitte sind symmetrische Oktogone und die Nebenschnitte ungleichseitige Hexagone.

Da die sechs an einer sechskantigen Ecke liegenden und zu einem Oktanten gehörigen Flächen ihrer Lage nach durch die sechs gleichen Axenverhältnisse (∞a:na:a), (∞a:a:na), (na:∞a:a), (a:∞a:na), (a:na:∞a) und (na:a:∞a) bestimmt werden, welche aus denen der Hexakisoktaeder dadurch hervorgehen, dass man $m = \infty$ setzt, wodurch je zwei an einer mittleren Kante liegende Flächen mOn in eine Ebene fallen und eine Tetrakishexaederfläche bilden, so geht für die Tetrakishexaederflächen oder für die Tetrakishexaeder selbst das allgemeine Zeichen ∞On hervor.

Die zur Bestimmung der Kantenwinkel nöthigen und von n abhängigen Gleichungen sind folgende, in denen die Hauptkanten mit Z, die Nebenkanten mit Y bezeichnet sind:

$$\cos. Y = -\frac{n^2}{1+n^2}, \ \cos. \tfrac{1}{2} Y = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(1+n^2)}}, \ \text{tang.} \tfrac{1}{2} Y = \sqrt{(1+2n^2)};$$

$$\cos. Z = -\frac{2n}{1+n^2}, \ \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{n-1}{\sqrt{2}\sqrt{(1+n^2)}}, \ \text{tang.} \tfrac{1}{2} Z = \frac{n+1}{n-1};$$

Ferner ist $t = \frac{n\sqrt{3}}{1+n}$ und $r = \frac{n\sqrt{2}}{1+n}$.

Von den in der Natur vorkommenden Tetrakishexaedern mögen die nachfolgenden drei als Beispiele dienen:

	Hauptkanten.	Nebenkanten.	Vorkommen.
$\infty O\frac{3}{2}$	157° 22′ 48″	133° 48′ 47″	Granat.
∞O2	143 7 48	143 7 48	Gold.
∞O3	126 52 12	154 9 29	Flussspath.

Vergleicht man nach der gegebenen Beschreibung der einfachen holoedrischen Formen des regulären Systems dieselben untereinander, so findet man, wie alle im genauesten Zusammenhange untereinander stehen. Diejenigen Formen, welche durch die veränderlichen Werthe von m oder n charakterisirt sind, bilden untereinander, durch diese Werthe verschieden, Reihen, durch welche der Uebergang zwischen gewissen nur unveränderlich gleich auftretenden Formen oder auch zwischen den veränderlichen vermittelt wird. So stellen die Triakisoktaeder, die Deltoidikositetraeder und die Tetrakishexaeder den Uebergang aus dem Oktaeder in das Granatoeder und Hexaeder und den Uebergang aus dem Granatoeder in das Hexaeder dar, wie die Reihen

O.............mO.............. ∞O

O.............mOm.............. ∞O∞

∞O.......... ∞On.............. ∞O∞

es bildlich darstellen, indem bei allen Werthen für m oder n, welche zwischen der Einheit und einem unendlich grossen Werthe liegen, Krystallformen der genannten drei Arten möglich sind. Nur wenn m oder n gleich der Einheit oder gleich einer unendlich grossen Grösse wird, entstehen die Grenzformen, welche die Reihen nach einer der beiden Seiten beschliessen. Es tragen daher auch die von den veränderlichen Werthen abhängigen Formen bald den Totalausdruck der einen oder der anderen Grenzform an sich und stellen so auch sichtbar den Uebergang dar. So sind bei kleinen Werthen von m die Triakisoktaeder in ihrem Totalausdruck des Anblickes, welchen sie gewähren, dem Oktaeder nahe stehend, über dessen Flächen sich sehr stumpfe dreiseitige Pyramiden erheben; bald aber verlieren die Triakisoktaeder bei Zunahme des Werthes m den oktaedrischen Charakter und zeigen ihre Aehnlichkeit mit dem Granatoeder, welches als in seinen längeren Flächendiagonalen gebrochen erscheint. Auf gleiche Weise bieten die Deltoidikositetraeder entweder den oktaedrischen oder hexaedrischen Charakter in ihrem Anblicke dar, der in gewissen Formen nicht entscheidend hervortritt, sondern als eine Vereinigung beider sich darstellt. Die spitzen Leucitoide zeigen unverkennbar, wie nahe sie dem Oktaeder stehen, aber schon in dem Leucitoeder tritt das allgemeine oktaedrische Aussehen zurück, und in den stumpfen Leucitoiden ist die Annäherung an das Hexaeder auf den ersten Blick zu erkennen. Die Tetrakishexaeder endlich bilden die Verbindungsglieder zwischen dem Granatoeder und Hexaeder, indem bei dem geringsten Werthe von n über 1 das Granatoeder in seinen kürzeren Diagonalen gebrochen erscheint, wodurch die Tetrakishexaeder von granatoedrischen Habitus erkennbar sind. Allmählig verliert sich der Charakter des Granatoeders, so dass er auch schon in dem Tetrakishexaeder $\infty O 2$, dessen Kantenwinkel von gleicher Grösse sind, wenig sichtbar ist, von da aber tritt der hexaedrische Habitus hervor und das Hexaeder selbst schliesst die Zahl der möglichen Tetrakishexaeder bei dem Werthe $n = \infty$, indem die Flächen der vierzähligen Systeme, je vier, in eine Ebene, die Hexaederfläche fallen.

Die Hexakisoktaeder, deren Mannigfaltigkeit von zwei veränderlichen Grössen abhängt, bilden auch Uebergangsglieder zweier Reihen, welche durch

$$O \ldots\ldots\ldots mOn \ldots\ldots\ldots \infty On$$
$$mO \ldots\ldots\ldots mOn \ldots\ldots\ldots mOm$$

dargestellt werden; sie vermitteln einerseits den Uebergang aus dem Oktaeder in die Tetrakishexaeder, anderseits den Uebergang aus den Triakisoktaedern in die Doltoidikositetraeder. Da nämlich bei gleichzeitiger ungleicher Veränderung je zweier Halbaxen, wie es oben angegeben wurde, der Werth von m immer grösser ist, als der von n, so wird auch der Fall eintreten müssen, dass m unendlich gross ist, während n eine endliche Grösse bezeichnet. Es kann aber in diesem Falle die Grenzgestalt keine unveränderliche sein, sondern eine der Mannigfaltigkeit unterworfene, da jeder Werth von $n < m$ möglich ist, und mithin auch dieses n neben $m = \infty$ alle möglichen endlichen Werthe erhalten kann. Was die zweite durch die

Hexakisoktaeder vermittelte Uebergangsreihe betrifft, so beginnt dieselbe von irgend einem Triakisoktaeder und endet mit einem Deltoidikositetraeder von gleichen m, in der Mitte liegen nun alle Hexakisoktaeder, bei denen der Werth m der gegebene und der Werth n von 1 bis m sich erstreckt.

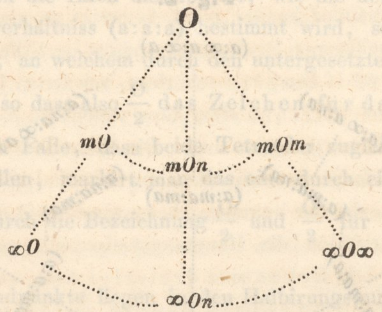
Diese fünf Reihen der Uebergänge der verschiedenen einfachen Formen untereinander stellt das Schema

O .... mO .... ∞O

O .... mOn .... ∞On

O .... mOm .... ∞O∞

dar, oder wenn das O als Ausgangspunkt der drei Reihen nur einmal dargestellt werden soll, so zeigt den Zusammenhang der sieben Formenarten der heloedrischen Abtheilung noch deutlicher dieses Schema:

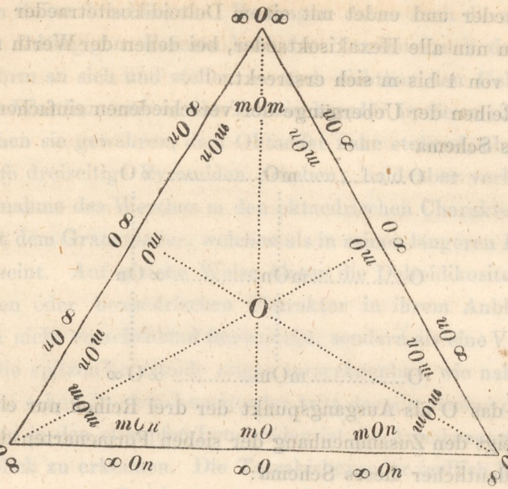


Wollte man dagegen die Vertheilung der Flächen in einem Oktanten und die sie in ihrer Lage bestimmenden Axenverhältnisse für denselben sichtbar machen, was besonders zur Vergleichung mit den noch folgenden dreiaxigen Systemen sehr zweckdienlich ist, so würde diese das in Fig. 2*) dargestellte Schema am besten darstellen, wo die oben angeführten Axenverhältnisse der Flächen anstatt der allgemeinen Zeichen angegeben sind. Die Lage der Flächen dagegen der übrigen holoedrischen Formen am Oktaeder zeigt die Fig. 1, in welcher eine Oktaederfläche dargestellt ist und durch die Zeichen der übrigen Formen die Vertheilung aller übrigen Formen um eine Oktaederfläche herum.

---

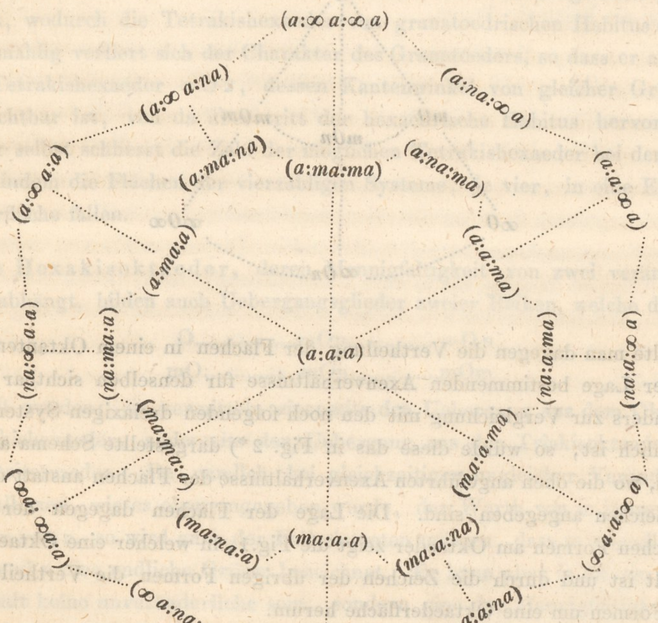
*) Fig. 1 und 2 siehe umstehend.

Fig. 1.



∞O∞
mOm
∞Om
mOm
∞Om
O
∞O
mO
∞On
mOn
mOn
∞On
∞On
∞O
mO
mOn
∞On

Fig. 2.



(a:∞a:∞a)
(a:∞a:na)
(a:na:∞a)
(a:ma:ma)
(a:∞a:a)
(a:ma:na)
(a:na:ma)
(a:a:∞a)
(a:ma:a)
(a:a:ma)
(a:a:a)
(na:∞a:a)
(na:ma:a)
(na:a:ma)
(na:a:∞a)
(ma:na:a)
(ma:a:na)
(∞a:∞a:a)
(ma:na:a)
(ma:a:a)
(ma:a:na)
(∞a:a:∞a)
(∞a:na:a)
(∞a:a:na)
(∞a:a:a)

B. Hemiedrische Formen.

a) Mit nicht parallelen Flächen.

1) Das reguläre Tetraeder.

(Syn. Tetraeder; Naumann. Vierflächner; v. Raumer, Breithaupt. Vierflach; Bernhardi. Hemioktaeder; G. Rose. Einfache dreiseitige Pyramide.)

Das reguläre Tetraeder ist ein von vier gleichen gleichseitigen Triangeln umschlossener Körper mit sechs gleichen regelmässigen Kanten und vier gleichen regelmässigen dreikantigen Ecken, hervorgegangen durch Hemiedrie des regulären Oktaeders, indem von den acht Oktaederflächen die halbe Anzahl und zwar vier abwechselnde sich erweitern, während die vier anderen bis zum gänzlichen Verschwinden zurücktreten. Man erhält so aus O, wie es schon bereits im Allgemeinen von den Hemiedern bekannt ist, zwei völlig gleichgestaltete, nur verschieden gestellte Tetraeder, je nachdem die eine oder die andere Hälfte der Flächenanzahl herrschend wird, und von denen das eine das Gegentetraeder des anderen genannt wird. Weil nun die Lage der Tetraederflächen gegen die Axen dieselbe ist, wie die der Oktaederflächen, und auch durch das Axenverhältniss (a:a:a) bestimmt wird, so wird auch für sie das Zeichen O angewandt, an welchem durch den untergesetzten Nenner 2 die Hemiedrie angedeutet wird, so dass also $\frac{O}{2}$ das Zeichen für das reguläre Tetraeder ist. Nur in dem Falle, dass beide Tetraeder zugleich und unterscheidend bezeichnet werden sollen, markirt man das eine durch einen rechts oberhalb O gesetzten Strich, wodurch die Bezeichnung $\frac{O}{2}$ und $\frac{O'}{2}$ für die beiden Tetraeder hervorgeht.

Die Hauptaxenendpunkte liegen in den Halbirungspunkten der Kantenlinien. Die trigonalen Zwischenaxen des Oktaeders als des Holoeders sind im Tetraeder in der Art verändert, dass diejenigen Hälften, welche in den verschwundenen Oktaederflächen endigten, verlängert sind und ihre Endpunkte in den Scheiteln der Tetraederecken haben; sie verlieren dadurch, weil sie durch das Centrum ungleich getheilt werden, den Charakter der Axen und sind als solche nur in Bezug auf das Holoeder beizubehalten. Die Länge der unveränderten Hälften, die in den Mittelpunkten der Flächen endigen, ist wie bei O, $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$, während die verlängerten Hälften eine Länge $T = \sqrt{3} = 3t$ erlangt haben. Die rhombischen Zwischenaxen sind unverändert wie in O, aber ihre Endpunkte werden durch nichts bemerkbar. Die Hauptschnitte sind Quadrate, die Nebenschnitte gleichschenklige Triangel. Die ebenen Winkel sind $= 60^\circ$, die Kantenwinkel $= 70^\circ\ 31'\ 44''$, und die Kantenlinien verbinden die Endpunkte der verlängerten trigonalen Halbaxen.

2) Die Deltoiddodekaeder.

(Syn. Trapezoid-Dodekaeder; Weiss. Zweikantige Tetragonaldodekaeder; Mohs. Trapezoidale Dodekaeder, Deltoiddodekaeder, Deltoidzwölfflächner; Breithaupt. Doltoidzwölfflache; Bernhardi. Deltoeder; Haidinger.)

Ein Deltoiddodekaeder ist eine von zwölf gleichen und ähnlichen Deltoiden umschlossene Gestalt, mit vier und zwanzig symmetrischen Kanten und vierzehn Ecken, deren Flächen in vier dreizählige Systeme vertheilt sind. Es entstehen diese Formen durch Hemiedrie der Triakisoktaeder, wenn von den Flächen eines solchen die Hälfte so herrschend wird, dass wie bei dem Uebergang von O in $\frac{O}{2}$ die abwechselnden Flächen, hier die abwechselnden dreizähligen Flächensysteme sich erweitern, während die anderen verschwinden, wodurch aus jedem mO zwei völlig gleichgestaltete, nur verschieden gestellte, Deltoiddodekaeder hervorgehen, je nachdem die eine oder die andere halbe Anzahl der dreiflächigen Systeme herrschend wird. Ihr allgemeines Zeichen ist $\frac{mO}{2}$, und für die beiden jedesmaligen Gegenhemieder $\frac{mO}{2}$ und $\frac{mO'}{2}$.

Es giebt der Deltoiddodekaeder möglicherweise so viele, als es mO geben kann, und zu ihrer gemeinsamen Bestimmung gehört noch Folgendes: Die Kanten sind zweierlei Art: zwölf längere schärfere, von denen je zwei einer Tetraederkante entsprechen; zwölf kürzere stumpfere, welche zu je drei über einer eingeschriebenen Tetraederfläche gruppirt sind. Die Kantenlinien der ersteren sind die Verbindungslinien der Hauptaxenendpunkte mit den Endpunkten der verlängerten trigonalen Axenhälften, die der letzteren aber, wie in mO die entsprechenden, die Nebenkantenlinien, verbinden die Hauptaxenendpunkte mit den unveränderten trigonalen Axenenden. Die Ecken sind dreierlei Art: sechs symmetrische vierkantige, von den abwechselnden längeren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Hauptaxenendpunkte sind; vier spitzere regelmässige dreikantige, gebildet von den längeren, und vier stumpfere regelmässige dreikantige, gebildet von den kürzeren Kanten. Die Scheitelpunkte der spitzeren sind den Ecken von $\frac{O}{2}$ entsprechend die Endpunkte der verlängerten, die Scheitelpunkte dagegen der stumpferen, wie in mO der dreikantigen, die Endpunkte der unveränderten halben trigonalen Zwischenaxen. Die rhombischen Zwischenaxen sind unverändert wie in mO, die Hauptschnitte sind Quadrate, die Nebenschnitte ungleichseitige Hexagone.

Von den Kanten sind nur die mit X bezeichneten längeren zu bestimmen, während die mit Y bezeichneten kürzeren mit den gleichen in mO übereinstimmen. Es ist:

$$\cos. X = -\frac{m(m-2)}{2m^2+1}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} X = \frac{m+1}{\sqrt{2}\ \sqrt{(2m^2+1)}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} X = \frac{\sqrt{(3m^2-2m+1)}}{m+1};$$

für die trigonalen Zwischenaxen ist $t = \frac{m\sqrt{3}}{2m+1}$, $T = \frac{m\sqrt{3}}{2m-1} = \frac{2m+1}{2m-1} \cdot t$.

Als Beispiele dieser Körper dienen die zwei in der Natur vorgekommenen mit Angabe ihrer Kantenwinkel:

	längere	kürzere Kanten.	Vorkommen.
$\frac{\frac{3}{2}O}{2}$	82° 9′ 45″	162° 39′ 31″	Fahlerz
$\frac{2O}{2}$	90 0 0	152 44 2	Zinkblende.

3) Die Triakistetraeder.

(Syn. Trigondodekaeder; Naumann. Pyramidentetraeder; Weiss. Trigonaldodekaeder; Mohs. Pyramidale Dodekaeder oder Zwölfflächner, tetraederkantige Dodekaeder; Breithaupt. Dreimalvierflache; Bernhardi. Kyproide; Haidinger.)

Ein Triakistetraeder ist ein von zwölf gleichen und ähnlichen stumpfwinklig-gleichschenkligen Triangeln umschlossener Körper, mit achtzehn Kanten und acht Ecken, dessen Flächen in vier dreizählige Systeme so vertheilt erscheinen, dass ein jedes über einer eingeschriebenen Tetraederfläche eine gleichseitige dreiseitige Pyramide bildet. Es sind diese Körperformen Hemieder der Deltoidikositetraeder, und entstehen dadurch, dass von den acht dreizähligen Flächensystemen vier abwechselnde herrschend werden, die anderen vier verschwinden. Das allgemeine Zeichen ist daher $\frac{mOm}{2}$, und die beiden gleichen nur verschieden gestellten Hemieder eines Holoeders werden als $\frac{mOm}{2}$ und $\frac{mO'm}{2}$ unterschieden.

Die Kanten eines jeden Triakistetraeders sind zweierlei Art: sechs regelmässige, längere, den Tetraederkanten entsprechende, welche den Namen Hauptkanten führen, zwölf symmetrische kürzere, die Nebenkanten, deren je drei über einer eingeschriebenen Tetraederfläche liegen. Die Kantenlinien der Hauptkanten sind durch die Endpunkte der Hauptaxen halbirt und verbinden die Endpunkte der verlängerten trigonalen Halbaxen, während die Nebenkantenlinien dieselben Endpunkte mit denen der unveränderten trigonalen Halbaxen verbinden. Die Ecken sind auch zweierlei Art: vier symmetrische sechskantige, deren Scheitelpunkte den Tetraederecken entsprechend die Endpunkte der verlängerten trigonalen Halbaxen sind, und vier regelmässige dreikantige, von den Nebenkanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der unveränderten trigonalen Halbaxen sind. Die rhombischen Zwischenaxen sind gleich denen in mOm, aber durch nichts bezeichnet. Die Hauptschnitte sind symmetrische Oktogone, die Nebenschnitte ungleichseitige Pentagone.

Die Grösse der Nebenkantenwinkel, welche mit Z bezeichnet werden, ist dieselbe, wie bei den gleichbezeichneten in mOm, dagegen wird die der Hauptkantenwinkel, welche mit X bezeichnet werden mögen, durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{m^2-2}{m^2+2}, \cos. \tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(m^2+2)}}, \text{tang. } \tfrac{1}{2}X = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

$$t = \frac{m\sqrt{3}}{m+2}, T = \sqrt{3} = \frac{m+2}{m}. t.$$

Als Beispiele können die zwei nachfolgenden in der Natur angetroffenen Triakistetraeder dienen:

	Hauptkanten	Nebenkanten	Vorkommen.
$\frac{2O2}{2}$	109° 28′ 16″	146° 26′ 34″	Fahlerz.
$\frac{3O3}{2}$	129 31 16	129 31 16	Zinkblende.

4) Die Hexakistetraeder.

(Syn. Sechsmalvierflächner oder Hexakistetraeder; Naumann. Gebrochene Pyramidentetraeder; Weiss. Tetraedrische Trigonalikositetraeder; Mohs. Skalenische Ikositessaraeder oder Vierundzwanzigflächner; Breithaupt. Sechsmalvierflache; Bernhardi. Borazitoide; Haidinger.)

Ein Hexakistetraeder ist ein von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Triangeln umschlossener Körper, mit vierzehn symmetrischen Ecken und sechs und dreissig symmetrischen Kanten, dessen Flächen in vier sechszählige Systeme so vertheilt sind, dass dieselben über die eingeschriebenen Tetraederflächen zu liegen kommen. Die Körper dieser Art entstehen durch Hemiedrie der Hexakisoktaeder, indem vier abwechselnde sechszählige Flächensysteme herrschend werden, während die vier anderen verschwinden. Es ist daher ihr allgemeines Zeichen $\frac{mOn}{2}$, und die beiden jedesmaligen Gegenhemieder werden durch $\frac{mOn}{2}$ und $\frac{mO'n}{2}$ unterscheidend bezeichnet.

Die Kanten eines jeden Hexakistetraeders sind dreierlei Art: zwölf längere, zwölf mittlere, zwölf kürzere. Die mittleren, zu je zwei einer Tetraederkante entsprechend, verbinden durch ihre Kantenlinien die Hauptaxenendpunkte mit den Enden der verlängerten trigonalen Halbaxen; die längeren Kanten, welche in dem zu Grunde liegenden Holoeder die kürzeren waren, entsprechen den Nebenkanten der Triakistetraeder und verbinden wie diese durch ihre Kantenlinien die Endpunkte der verlängerten mit denen der unveränderten halben trigonalen Zwischenaxen; die kürzeren endlich, welche im entsprechenden Holoeder die längeren sind, verbinden wie sie, da sie unverändert geblieben sind, durch ihre Kantenlinien die Hauptaxenendpunkte mit den Endpunkten der unveränderten trigonalen Halbaxen. Die rhombischen Zwischenaxen sind durch nichts an ihren Endpunkten bezeichnet.

Die Ecken sind gleichfalls dreierlei Art: sechs vierkantige, von den abwechselnden mittleren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxen sind, vier spitzere sechskantige, von den mittleren und längeren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte den Ecken von $\frac{O}{2}$ entsprechend die Endpunkte der verlängerten trigonalen Halbaxen sind; vier stumpfere sechskantige, von den kürzeren und längeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der unverändert gebliebenen halben trigonalen Zwischenaxen sind, wie es im entsprechenden Holoeder der Fall ist, dessen unveränderte Ecken die letztgenannten sind. Die Hauptschnitte sind symmetrische Oktogone, die Nebenschnitte ungleichseitige Hexagone.

Werden die längeren Kanten mit Z, die mittleren mit X und die kürzeren mit Y bezeichnet, so ergeben sich für Y und Z die Kantenwinkel aus dem zu Grunde liegenden Holoeder, da sie dieselben geblieben sind, der Kantenwinkel X aber aus den Gleichungen:

$$\cos. X = -\frac{mn(mn-2)}{m^2n^2+m^2+n^2}, \quad \cos. \tfrac{1}{2} X = \frac{m+n}{\surd 2 \cdot \sqrt{(m^2n^2+m^2+n^2)}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} X = \frac{\sqrt{[2m^2n^2+(m-n)^2]}}{m+n}.$$

Für die trigonalen Zwischenaxen ist $t = \frac{mn\sqrt{3}}{mn+m+n}$, $T = \frac{mn\sqrt{3}}{mn+m-n}$

$$= \frac{mn+m+n}{mn+m-n}.\, t.$$

Als Beispiele dieser hemiedrischen Formen dienen die nachfolgenden drei, welche in der Natur beobachtet worden sind:

	längere	mittlere	kürzere Kanten.	Vorkommen.
$\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$	158° 12′ 48″	110° 55′ 29″	158° 12′ 48″	Fahlerz.
$\frac{4O2}{2}$	144 2 58	124 51 0	162 14 50	Borazit.
$\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$	152 20 22	122 52 42	152 20 22	Borazit.

5) Die Pentagonikositetraeder.

(Syn. Verschobene Leucitoide; Weiss. Pentagonal-Ikositetraeder; Mohs. Gyroide; Haidinger.)

Ein Pentagonikositetraeder ist eine von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen unregelmässigen Fünfseiten umschlossene Gestalt, mit sechzig unregelmässigen Kanten und acht und dreissig Ecken, deren Flächen entweder in acht dreizählige oder in sechs vierzählige Systeme vertheilt erscheinen. Diese Körper entstehen auch durch Hemiedrie der Hexakisoktaeder, aber nach einem anderen Gesetz als die Hexakistetraeder, nämlich durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen. Denkt man sich das Hexakisoktaeder mit dem Deltoidikositetraeder verglichen, so kann man das erstere als ein in seinen symmetrischen Diagonalen gebrochenes Deltoidikositetraeder ansehen, in welchem Falle dann je zwei mOn Flächen, welche über eine Fläche mOm zu liegen kommen, die eine rechts, die andere links von der symmetrischen Diagonale in mOm (der längeren Kante in mOn) zu liegen kommen. Werden nun entweder alle auf gleiche Weise rechts liegenden Flächen herrschend, während die links liegenden verschwinden, oder umgekehrt, so entsteht in jedem Falle ein Körper der angegebenen Art, die für ein und dasselbe Holoeder einander gleich, und nur durch die Lage verschieden sind. Das allgemeine Zeichen der Pentagonikositetraeder muss, als das einer Hemiederform von mOn, $\frac{mOn}{2}$ sein. Zum Unterschiede aber von den Hexakistetraedern, an welche bereits dieses Zeichen vergeben ist, und um die beiden Gegenhemieder zu unterscheiden, wird vor das erwähnte Zeichen entweder der Buchstabe r oder l gesetzt, je nachdem die rechts oder links liegenden Flächen zur Bildung des Hemieders herrschend geworden sind, so dass $r\frac{mOn}{2}$ und $l\frac{mOn}{2}$ die Zeichen für die rechts und für die links gewendeten Pentagonikositetraeder sind.

Dieser Körper kann es möglicherweise so viele geben, als es Hexakisoktaeder giebt, bis jetzt aber ist in der Natur keiner angetroffen worden, jedoch giebt dies keinen Grund, um die Körper selbst aus der Betrachtung der systematisch begründeten Krystallgestalten auszuschliessen, da sowohl einerseits die Möglichkeit nicht abgesprochen werden kann, derartige Körper in der Natur anzutreffen, als auch anderseits durch die Nichtbeachtung derselben ein nothwendiges Glied der Vergleichung und des Zusammenhanges der verschiedenen dreiaxigen Systeme untereinander ausgelassen bleibt.

Zur näheren Beschreibung der Pentagonikositetraeder gehört Folgendes: Die Pentagone sind zwar unregelmässig, aber nicht alle fünf Seiten sind ungleich, sondern es sind zwei von einander verschiedene Paare und eine von diesen verschiedene Seite, von der Lage, dass auf diese letztere zu jeder Seite zwei gleiche Seiten folgen, wodurch der ihr gegenüberliegende Winkel von zwei verschiedenen Seiten der beiden Paare gebildet wird. Diese von den Paaren verschiedene Seite heisse die Hauptseite, so unterscheiden sich die der beiden Paare als die zwei längeren und zwei kürzeren Nebenseiten. Durch diese Verschiedenheit der Pentagonseiten giebt es dreierlei Kanten, welche nach den Namen der Seiten unterschieden werden können. Es giebt demnach zwölf Hauptkanten, deren Kantenlinien durch die Endpunkte der rhombischen Zwischenaxen halbirt werden, vier und zwanzig längere Nebenkanten, zu je vier an jedem Hauptaxenendpunkt, denselben mit den Hauptkanten verbindend, und vier und zwanzig kürzere Nebenkanten, zu je drei von den Endpunkten der trigonalen Zwischenaxen ausgehend, dieselben durch ihre Kantenlinien auch mit den Hauptkanten verbindend. Die Ecken sind auch dreierlei Art: sechs regelmässige vierkantige, von den längeren Nebenkanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der Hauptaxen sind; acht regelmässige dreikantige, von den kürzeren Nebenkanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind, und vier und zwanzig unregelmässige dreikantige Ecken, gebildet von je drei verschiedenen Kanten, deren Scheitelpunkte über die verschwundenen mOn Flächen zu liegen kommen.

Die Länge der Zwischenaxen und die Gestalt der Haupt- und Nebenschnitte sind dieselben wie in dem entsprechenden Holoeder. Bezeichnet man die Hauptkanten mit X, die längeren Nebenkanten mit Z, die kürzeren mit Y, so werden ihre Kantenwinkel durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos. X = -\frac{(2m^2-n)n}{m^2n^2+m^2+n^2},\ \cos. \tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{[m^2(n-1)^2+2n^2]}}{\sqrt{2}\sqrt{(m^2n^2+m^2+n^2)}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}X = \frac{m(n+1)}{\sqrt{[m^2(n-1)^2+2n^2]}};$$

$$\cos. Z = -\frac{m^2n^2}{m^2n^2+m^2+n^2},\ \cos. \tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{(m^2+n^2)}}{\sqrt{2}\sqrt{(m^2n^2+m^2+n^2)}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{(2m^2n^2+m^2+n^2)}}{\sqrt{(m^2+n^2)}};$$

$$\cos. Y = -\frac{mn(m+n+1)}{m^2n^2+m^2+n^2},\ \cos. \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[m^2+n^2+mn(mn-m-n-1)]}}{\sqrt{2}\sqrt{(m^2n^2+m^2+n^2)}},$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{[m^2+n^2+mn(mn+m+n+1)]}}{\sqrt{[m^2+n^2+mn(mn-m-n-1)]}}.$$

Es ergeben sich hieraus für die beispielsweise anzuführenden Pentagonikositetraeder r oder l $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$ und $\frac{4O2}{2}$ folgende Kantenwinkel:

	Hauptkanten	längere	kürzere Nebenkanten.
$\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$	141° 47′ 13″	130° 0′ 18″	141° 47′ 13″
$\frac{4O2}{2}$	135 35 5	139 37 57	131 48 37

b) Hemiedrische Formen mit parallelen Flächen.

1) Die Pentagondodekaeder.

Das Pyritoeder und die Pyritoide.

(Syn. Hexaedrische Pentagonaldodekaeder; Mohs. Domatische Dodekaeder oder dachförmige Zwölfflächner; Breithaupt. Kieszwölfflache; v. Raumer. Pentagonaldodekaeder; Hausmann. Zweimalsechsflache; Bernhardi. Schwefelkiesdodekaeder.)

Ein Pentagondodekaeder ist ein von zwölf gleichen und ähnlichen symmetrischen Pentagonen umschlossener Körper, mit dreissig Kanten und zwanzig Ecken, dessen Flächen in sechs Paare vertheilt sind. Sie gehen aus den Tetrakishexaedern durch Hemiedrie hervor, indem die abwechselnden Flächen herrschend werden, oder mit anderen Worten, indem von den vier Flächen eines jeden vierzähligen Systems zwei abwechselnde so herrschend werden, dass nie zwei an einer Hauptkante liegende Flächen gleichzeitig sich erweitern. Aus jedem ∞On entstehen auf diese Weise zwei völlig gleiche, nur verschieden gestellte Pentagondodekaeder, deren allgemeine Zeichen $\frac{\infty On}{2}$ und $\frac{\infty O'n}{2}$ sind.

Die Pentagone sind symmetrisch in der Weise, wie es bei den Flächengestalten im Allgemeinen oben erwähnt worden ist. Die Kanten sind demnach zweierlei Art: sechs regelmässige längere, über den eingeschriebenen Hexaederflächen liegende; deren Kantenlinien durch die Hauptaxenendpunkte halbirt werden, und deren je zwei durch die Endpunkte einer Hauptaxe in der Ebene eines Hauptschnittes einander parallel und senkrecht gegen die Hauptaxe gelegt sind. Sie heissen Hauptkanten. Die übrigen vier und zwanzig Kanten, Nebenkanten genannt, sind unregelmässig und kürzer als jene und gehen zu je drei von den Endpunkten der trigonalen Zwischenaxen aus. Die Ecken sind auch zweierlei Art: zwölf unregelmässige dreikantige, gebildet von je zwei Nebenkanten und einer Hauptkante, und acht regelmässige dreikantige, gebildet von den Nebenkanten, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind. Die Haupt- und Nebenschnitte sind ungleichseitige Hexagone, und die Länge der Zwischenaxen ist dieselbe, wie in den entsprechenden Holoedern.

Unter den Pentagondodekaedern hatte man dasjenige, bei welchem $n = 2$ ist, am häufigsten gefunden, und da dasselbe beim Schwefelkies und anderen Mineralspecies aus der Familie der Pyrite vorkommt, so hatte man es nach dem synonymen Namen des Schwefelkieses, pyrites, Pyritoeder genannt. Als nun noch andere Formen der Art $\frac{\infty On}{2}$ gefunden wurden, so dehnte man zum Theil jenen Namen auf sie aus, oder nannte einige von ihnen Pyritoide. Am besten ist es, wenn man, wie bei mOm, für das Pentagondodekaeder allein, dessen $n=2$, den Namen Pyritoeder ausschliesslich behält, diejenigen Pentagondodekaeder aber, wo $n>2$, stumpfe Pyritoide, und die, wo $n<2$, scharfe Pyritoide nennt, weil in jenen die Hauptkanten stumpfer, in diesen aber schärfer als im Pyritoeder sind.

Um die Kantenwinkel zu bestimmen, dienen folgende Gleichungen, in denen die Hauptkanten mit Z, die Nebenkanten mit Y bezeichnet sind:

$$\cos. Z = -\frac{n^2-1}{n^2+1}, \ \cos. \tfrac{1}{2}Z = \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)}}, \ \text{tang.} \tfrac{1}{2}Z = n;$$

$$\cos. Y = -\frac{n}{n^2+1}, \ \cos. \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{(n^2-n-1)}}{\sqrt{2}\ \sqrt{(n^2+1)}}, \ \text{tang.} \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{(n^2+n+1)}}{\sqrt{(n^2-n+1)}}.$$

Des Beispiels wegen folgen drei in der Natur beobachtete Pentagondodekaeder mit Angabe ihrer Kantenwinkel:

	Hauptkanten.	Nebenkanten.	Vorkommen.
$\frac{\infty O \frac{3}{2}}{2}$	112° 37′ 12″	117° 29′ 11″	Schwefelkies.
$\frac{\infty O 2}{2}$	126 52 12	113 34 41	Schwefelkies.
$\frac{\infty O 3}{2}$	143 7 48	107 27 27	Glanzkobalt.

2) Die Trapezoidikositetraeder.

Die Diplopyritoeder und Diplopyritoide.

(Syn. Dyakisdodekaeder oder Zweimalsechsflächner; Naumann. Gebrochene Pentagondodekaeder oder Pyritoeder; Weiss. Dreikantige Tetragonal-Ikositetraeder; Mohs. Heterogonale Ikositessaraeder oder ungleichwinklige Vierundzwanzigflächner; Breithaupt. Kiesvierundzwanzigflache; v. Raumer. Trapezoidvierundzwanzigflache; Bernhardi. Diploide; Haidinger. Trapezoiddidodekaeder; v. Glocker. Hemioktakishexaeder.)

Ein Trapezoidikositetraeder ist ein von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen unregelmässigen Trapezoidflächen umschlossener Körper, mit acht und vierzig Kanten und sechs und zwanzig Ecken, dessen Flächen in zwölf Paare, oder in acht dreizählige Systeme vertheilt erscheinen. Diese Körper entstehen auch durch Hemiedrie der Hexakisoktaeder, und zwar dadurch, dass nicht die abwechselnden Flächen überhaupt, sondern die abwechselnden Flächen der sechszähligen

Systeme so herrschend werden, dass je zwei an einer mittleren Kante liegende Flächen zweier Nebensysteme gleichzeitig sich erweitern. Betrachtet man die Hexakisoktaeder als gebrochene Tetrakishexaeder, bestehend aus vier und zwanzig an den mittleren Kanten liegenden Flächenpaaren, so entstehen die Trapezoidikositetraeder durch Herrschendwerden der abwechselnden dieser Flächenpaare. Um das Zeichen dieser Hemieder von den schon angeführten der Hexakistetraeder und der Pentagonikositetraeder zu unterscheiden, dient am einfachsten ein doppelter Theilungsstrich, welcher zu gleicher Zeit auch auf den Parallelismus der Flächen hinweist, wodurch man als allgemeine Zeichen der Trapezoidikositetraeder, und zwar für die beiden Gegenhemieder, die Zeichen $\frac{mOn}{2}$ und $\frac{mO'n}{2}$ erhalten wird.

Die Trapezoide dieser Körper haben dreierlei Seiten, zwei gleiche mittlere an einander stossende, eine längere und eine kürzere. Vergleicht man je zwei an einer längeren Seitenlinie angrenzende Trapezoide mit der symmetrischen Pentagonfläche eines Pentagondodekaeders, über die sie zu liegen kommen, so entspricht die beiden gemeinschaftliche längere Seite der Höhenlinie derselben, die vier mittleren den Nebenseiten und die beiden kürzeren der Hauptseite. Aus der angegebenen Verschiedenheit der Seiten gehen dreierlei Kanten hervor: zwölf längere, welche die mittleren des jedesmaligen Holoeders sind; vier und zwanzig mittlere, deren je drei von einem trigonalen Axenendpunkt ausgehen; endlich zwölf kürzere, die je zwei einer Hauptkante in den Pentagondodekaedern entsprechen. Die Ecken sind auch dreierlei Art: sechs symmetrische vierkantige, von den abwechselnden längeren und kürzeren Kanten gebildete, deren Scheitel die Endpunkte der Hauptaxen sind; acht regelmässige dreikantige, von den mittleren Kanten gebildete, deren Scheitelpunkte die Endpunkte der trigonalen Zwischenaxen sind, und zwölf unregelmässige vierkantige, gebildet von je zwei mittleren, einer längeren und einer kürzeren Kante. Die Haupt- und Nebenschnitte sind ungleichseitige Oktogone, und die Länge der Zwischenaxen ist unverändert dieselbe, wie in dem jedesmaligen entsprechenden Holoeder.

In Bezug auf das Pyritoeder und die Pyritoide, über deren Flächen je zwei Trapezoidflächen zu liegen kommen, kann man auch hier sich der abkürzenden Namen Diplopyritoeder und Diplopyritoide bedienen, je nach dem Werthe n, indem nämlich alle Trapezoidikositetraeder, in denen $n=2$, Diplopyritoeder genannt werden, weil die Neigung ihrer längsten Kanten gegen die Hauptaxe dieselbe ist, wie die der Pentagonflächen des Pyritoeders; alle anderen, wo n grösser oder kleiner als 2, heissen Diplopyritoide, mit dem von n abhängigen Unterschiede, weil mit jedem Pyritoide die Diplopyritoide mit gleichen n in der Neigung der Pentagonflächen und der längsten Kanten übereinstimmen.

Wenn die längsten Kanten mit X, die mittleren mit Y und die kürzeren mit Z bezeichnet werden, so bedarf man bloss der Grössenbestimmung für die letzteren, indem die Grösse der ersteren mit den gleichbenannten mittleren der Hexakisoktaeder, die der mittleren mit den gleichbenannten kürzeren Nebenkanten der Pentagonikositetraeder übereinstimmt, und es ist:

$$\cos. Z = -\frac{m^2n^2 - m^2 + n^2}{m^2n^2 \quad m^2 + n^2}, \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{m}{\sqrt{(m^2n^2 + m^2 + n^2)}}, \text{tang.} \tfrac{1}{2} Z = \frac{n\sqrt{(m^2+1)}}{m}.$$

Als Beispiele in der Natur beobachteter Trapezoidikositetraeder dienen folgende mit ihren Kantenwinkeln:

	längere	mittlere	kürzere Kanten.	Vorkommen.
$\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$	148° 59′ 50″	141° 47′ 13″	115° 22′ 37″	Glanzkobalt.
$\frac{4O2}{2}$	154 47 28	131 48 37	128 14 48	Schwefelkies.
$\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$	160 32 13	131 4 56	119 3 33	Schwefelkies.

C. Tetartoedrische Formen.

Die Pentagontriakistetraeder.

(Syn. Tetraedrische Pentagonaldodekaeder; Mohs. Tetartohexakisoktaeder; v. Glocker. Tetartoide; Haidinger.)

Ein Pentagontriakistetraeder ist ein von zwölf gleichen und ähnlichen unregelmässigen Fünfseiten umschlossener Körper, mit dreissig unregelmässigen Kanten und zwanzig Ecken, dessen Flächen in vier dreizählige Systeme vertheilt erscheinen. Diese Körper entstehen aus den Hexakistetraedern durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen, aus den Pentagonikositetraedern und Trapezoidikositetraedern durch Herrschendwerden der abwechselnden dreizähligen Flächensysteme, sind also Tetartoeder der Hexakisoktaeder, und aus jedem Hexakisoktaeder gehen je vier gleiche Tetartoeder hervor, die allgemein das Zeichen $\frac{mOn}{4}$ führen. Ihrer verschiedenen Stellung nach können sie durch $r\frac{mOn}{4}$, $r\frac{mO'n}{4}$, $l\frac{mOn}{4}$ und $l\frac{mO'n}{4}$ unterschieden werden. In Bezug auf die Pentagonikositetraeder bilden dann $r\frac{mOn}{4}$ und $r\frac{mO'n}{4}$ die beiden Gegenhemieder eines rechts gewendeten, und $l\frac{mOn}{4}$ und $l\frac{mO'n}{4}$ die beiden Gegenhemieder eines links gewendeten Pentagonikositetraeders.

Die Pentagone der genannten Tetartoeder sind unregelmässig und von der Art, wie die Pentagone der Pentagonikositetraeder; demnach zerfallen denn auch die Kanten in drei Arten und bilden sechs Hauptkanten, deren Kantenlinien durch die Endpunkte der Hauptaxen halbirt werden, zwölf längere Nebenkanten, welche zu je drei von den Endpunkten der verlängerten trigonalen Axenhälften ausgehend, dieselben mit den Hauptkanten verbinden, und zwölf kürzere Nebenkanten, welche zu je drei von den Endpunkten der unveränderten trigonalen Axenhälften ausgehend, dieselben auch mit den Hauptkanten verbinden. Die Ecken sind auch dreierlei Art: vier regelmässige dreikantige spitzere und vier dergleichen stumpfere; die ersteren sind von den längeren Nebenkanten gebildet und ihre Scheitelpunkte sind die Endpunkte der verlängerten trigonalen Axenhälften, entsprechend den spitzeren sechskantigen Ecken der Hexakistetraeder; die letzteren sind von den kürzeren Nebenkanten gebildet und haben, den stumpferen sechskantigen Ecken der Hexakistetraeder entsprechend, die Endpunkte der unverändert gebliebenen trigonalen Halbaxen zu ihren Scheitelpunkten. Ausser diesen beiderlei regelmässigen dreikantigen Ecken giebt es noch zwölf unregelmässige dreikantige Ecken, gebildet von je drei verschiedenen Kanten, deren Scheitel über die bei der Hemiedrie verschwundenen Hexakistetraederflächen zu liegen kommen. Die Länge der Axen und die Gestalt der Schnitte ist stets so, wie in dem entsprechenden Hexakistetraeder, durch dessen Hemiedrie das jedesmalige Pentagontriakistetraeder entstanden ist.

Bezeichnet man die Hauptkanten mit X, die längeren Nebenkanten mit Z und die kürzeren mit Y, so stimmen die letzteren mit den gleichbezeichneten der Pentagon- und Trapezoid-Ikositetraeder überein, für die beiden ersteren aber ist:

$$\cos. X = -\frac{m^2 n^2 - m^2 - n^2}{m^2 n^2 + m^2 + n^2},\ \cos. \tfrac{1}{2} X = \frac{\sqrt{(m^2 + n^2)}}{\sqrt{(m^2 n^2 + m^2 + n^2)}},$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} X = \frac{mn}{\sqrt{(m^2 + n^2)}};$$

$$\cos. Z = -\frac{mn(m-n-1)}{m^2 n^2 + m^2 + n^2},\ \cos. \tfrac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{[m^2(n^2 - n + 1) + n(n + m + mn)]}}{\sqrt{2}\ \sqrt{(m^2 n^2 + m^2 + n^2)}}.$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{[m^2(n^2 + n + 1) + n(n - m - mn)]}}{\sqrt{[m^2(n^2 - n + 1) + n(n + m + mn)]}}.$$

Unter den vielen möglichen Pentagontriakistetraedern ist bis jetzt eines am Borazit beobachtet worden, und als Beispiele sollen die nachfolgenden mit ihren Kantenwinkeln dienen:

	Hauptkanten	längere	kürzere Nebenkanten.
$\frac{3O\frac{3}{2}}{4}$	106° 36′ 6″	94° 5′ 46″	141° 47′ 13″
$\frac{4O2}{4}$	121 35 17	95 27 54	131 48 37