



Dipl.-Ing. Martin Wipfler, MSc, BSc, Bakk.rer.soc.oec.

**Regelungstechnische Methoden
zur Dämpfung von Drehschwingungen
bei Prüfständen**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der technischen Wissenschaften

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Em. O. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Nicolaos Dourdoumas

Priv.-Doz. Dr.techn. Robert Bauer

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

Graz, März 2018

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Dissertation identisch.

Graz, am 27.03.2018

Datum

Mart Wipler

Unterschrift

Kurzfassung

Bei Prüfständen für die Automobilindustrie werden einzelne Fahrzeugkomponenten wie der Verbrennungskraftmotor oder Teile des Antriebsstrangs zu deren Prüfung über eine elastische Welle mit einer Belastungsmaschine verbunden. Durch die verhältnismäßig starre Ankopplung der Belastungsmaschine ergeben sich am Prüfstand häufig schwach gedämpfte und dadurch stark ausgeprägte Resonanzfrequenzen, die der Prüfling an seinem tatsächlichen Einsatzort nicht vorfindet. Diese Resonanzfrequenzen können durch oszillierende Belastungen am Prüfling angeregt werden. Die dabei auftretende Drehschwingung kann Messergebnisse verfälschen oder im schlimmsten Fall zur mechanischen Zerstörung von Prüfling oder Teilen des Prüfstands führen. In der Auslegung und im Bau von Prüfständen muss deshalb erhöhtes Augenmerk auf die Dämpfung einer derartigen Schwingung gelegt werden. Neben passiven Schwingungstilgern kommen als Alternative immer häufiger aktive Dämpfungsverfahren zum Einsatz.

In dieser Arbeit werden Konzepte zur aktiven Drehschwingungsdämpfung durch die Regelung der Antriebsmaschine an Prüfständen vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt auf der aktiven Dämpfung mittels Rückkopplung der Differenzdrehzahl zwischen Eintrieb und Abtrieb sowie der Schätzung der in den meisten Fällen nicht direkt messbaren Differenzwinkelgeschwindigkeit durch unterschiedliche Realisierungen eines Kalman-Filters. Um den wechselnden Anforderungen an Prüfständen gerecht zu werden, sind vor allem Verfahren, die eine effektive Dämpfung der Drehschwingung in einem möglichst großen Frequenzbereich ermöglichen und zugleich robust gegenüber Parameterunsicherheiten durch wechselnde Prüflinge und Aufbauten sind, von besonderem Interesse. Im Rahmen der Analyse werden mögliche Parameterunsicherheiten in der Systembeschreibung ausführlich untersucht und eine Methode zu deren Kompensation sowie ein Algorithmus zur sinnvollen Parameterwahl für das Kalman-Filter 3. Ordnung vorgestellt. Durch die aus dem Algorithmus resultierende Filterparametrierung wird die Wirkung der Zusatzdämpfung verbessert und zugleich eine erhöhte Robustheit des Kalman-Filters gegenüber Parameterunsicherheiten erzielt.

Abstract

For test beds in the automotive industry, it is very common to couple components such as the engine or parts of the drive train with an elastic torque shaft to a dynamometer in order to test these parts. The stiff coupling frequently results in weak dampened resonance frequencies, which are not present under normal conditions on the street. The oscillating loads of the test item might excite those resonance frequencies. The resulting torsional vibrations can lead to distortions of the measurement or even to a damage of the test item or parts of the test bed. Therefore, it is crucial to consider sufficient damping of the drive train. In addition to mechanical dampers, active damping methods serve as suitable alternative for torsional vibration damping at test beds.

In this thesis, concepts for the active damping of torsional vibrations through the control of the dynamometer are presented. The focus is on active damping methods through the feedback of the difference speed between dynamometer and load as well as the estimation of the difference speed, which is hardly measureable under normal conditions, with a Kalman-Filter. Therefore, methods that allow the suppression of vibrations in a wide frequency range and which are, moreover, robust against parameter uncertainties are of special interest. During the analysis, parameter uncertainties are thoroughly investigated. For their compensation, a method and an algorithm for the ideal selection of the filter parameters for time continuous and time discrete Kalman-Filters of third order are presented. The algorithm leads to improved damping results and at the same time increases the robustness against parameter uncertainties. The results of the theoretical analysis concerning the choice of parameters as well as the advantages and disadvantages of the outlined damping methods are verified in addition to the theoretical examination with elaborate simulation studies and experiments on commercial test beds.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen einer wissenschaftlichen Kooperation des Institutes für Regelungs- und Automatisierungstechnik (IRT) der Technischen Universität Graz mit der Firma Kristl, Seibt & Co (KS). Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen Kollegen und Wegbegleitern bedanken, die mich durch die zahlreichen Diskussionen und fachlichen Kommentare über die Jahre unterstützt und mir durch das familiäre Klima am IRT viele schöne Stunden beschert haben.

Ohne Herrn Dr. Wilfried Rossegger von KS und dessen unerschütterliche Verbundenheit zum IRT wäre diese Kooperation nie zustande gekommen. Herzlichen Dank für das in mich gesetzte Vertrauen und die Bereitstellung der Versuchsprüfstände sowie die Unterstützung während des gesamten Dissertationsvorhabens. Ganz besonders möchte ich mich an dieser Stelle auch bei meinem Betreuer bei KS, Herrn Priv.-Doz. Dr. Robert Bauer, für die aufopfernde, freundliche und zielgerichtete Betreuung während meiner gesamten Dissertation bedanken. Ohne die enge Zusammenarbeit und seine fortwährende Motivation wäre diese Arbeit sicher nicht möglich gewesen. Weiters möchte ich mich ganz besonders bei meinem Betreuer an der Technischen Universität Graz, Herrn Prof. Dr. Nicolaos Dourdoumas, bedanken, der mir durch unsere zahlreichen fachlichen sowie privaten Diskussionen stets das Ziel vor Augen hielt und seine uneingeschränkte Freude an der Regelungstechnik an mich weitergab. Darüber hinaus bin ich Herrn Prof. Dr. Felix Gausch (Universität Paderborn) für sein Interesse an meiner Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meiner Familie und meinen Freunden, die immer unterstützend hinter mir gestanden sind und mich im Verlauf meines Studiums immer wieder zu Höchstleistungen angespornt haben. Diese Dissertation ist meiner Freundin Sandra und meinen Eltern gewidmet, die mich während meiner gesamten Studienzeit tatkräftig unterstützt haben.

Martin Wipfler

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis	XV
Abbildungsverzeichnis	XX
Tabellenverzeichnis	XXI
Variablenübersicht	XXVI
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Ziele der Arbeit	4
2 Systembeschreibung	7
2.1 Prüfstände	7
2.1.1 Motorprüfstand	8
2.1.2 Rollenprüfstand	15
2.2 Modellierung	20
3 Übersicht gängiger Dämpfungsmethoden	27
3.1 Reduktion der Schwingungsanregung mittels passiver Filter	28
3.2 Verbesserung der Drehzahlregelung	29
3.3 Schwingungsdämpfung durch Zustandsrückführung	32
4 Analyse aktiver Dämpfungsverfahren für Prüfstands Anwendungen	39
4.1 Einfache Zusatzdämpfung	39
4.1.1 Herleitung	39
4.1.2 Simulationsstudie Rollenprüfstand	45
4.1.3 Messergebnisse Rollenprüfstand	48
4.2 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung	50
4.2.1 Herleitung	50
4.2.2 Simulationsstudie Motorprüfstand	56

4.2.3	Messergebnisse Motorprüfstand	58
4.3	Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 2. Ordnung	62
4.3.1	Herleitung	62
4.3.2	Simulationsstudie Motorprüfstand	63
4.3.3	Messergebnisse Motorprüfstand	64
4.4	Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung	65
4.4.1	Herleitung	65
4.4.2	Simulationsstudie Rollenprüfstand	67
4.4.3	Messergebnisse Rollenprüfstand	69
4.4.4	Simulationsstudie Motorprüfstand	72
4.4.5	Messergebnisse Motorprüfstand	72
4.5	Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters als Prädiktor	75
4.5.1	Herleitung	75
4.5.2	Simulationsstudie Rollenprüfstand	77
4.5.3	Messergebnisse Rollenprüfstand	78
4.5.4	Simulationsstudie Motorprüfstand	80
4.5.5	Messergebnisse Motorprüfstand	82
4.6	Variantenvergleich	84
5	Detailbetrachtung Kalman-Filter 3. Ordnung	87
5.1	Systembeschreibung unter Parameterunsicherheit	87
5.2	Analyse der Auswirkungen von Unsicherheiten	88
5.2.1	Simulationsstudie Rollenprüfstand	89
5.2.2	Messergebnisse Rollenprüfstand	90
5.3	Kompensation der Parameterunsicherheit (zeitkont. System)	94
5.3.1	Prinzip der Kompensation	94
5.3.2	Kompensation	98
5.4	Algorithmus zur Parameterwahl (zeitkont. System)	104
5.4.1	Grundlegende Idee für den Algorithmus	104
5.4.2	Algorithmus für das exakte System	105
5.4.3	Algorithmus für das unsichere System	111
5.4.4	Simulationsstudie Rollenprüfstand	122
5.5	Erweiterung auf das zeitdiskrete System	124
5.5.1	Zeitdiskrete Systembeschreibung	124
5.5.2	Kompensation der Parameterunsicherheit	127
5.5.3	Simulationsstudie Rollenprüfstand	134
5.5.4	Messergebnisse Rollenprüfstand	135
5.5.5	Algorithmus zur Parameterwahl für das exakte System	139
5.5.6	Algorithmus zur Parameterwahl für das unsichere System	151

5.5.7	Simulationsstudie Rollenprüfstand	156
5.5.8	Messergebnisse Rollenprüfstand	157
6	Zusammenfassung und Ausblick	161
A	EOL-Motorprüfstand	167
A.1	Versuchsaufbau für die Messungen an der realen Anlage	167
A.2	Simulationsparameter	168
B	Rollenprüfstand	173
B.1	Versuchsaufbau für die Messungen an der realen Anlage	173
B.2	Simulationsparameter	174
C	Koeffizienten von $\Delta(s)$	181
D	Koeffizienten von d_W	183
E	Lösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades	185
F	Alternative Vorgehensweise zur Kompensation von Unsicherheiten	187
G	Adjunkte von W^*	191
H	Analyse einer bilinearen Transformation der Riccati Gleichung	193
	Literaturverzeichnis	201

Abkürzungsverzeichnis

BIBO Bounded Input-Bounded Output

EOL End-of-Line

ITAE Integral of the Time weighted Absolute Error

KF1 Kalman-Filter 1. Ordnung

KF2 Kalman-Filter 2. Ordnung

KF3 Kalman-Filter 3. Ordnung

KFZ Kraftfahrzeug

KS Kristl, Seibt & Co.

LKW Lastkraftwagen

LQR Linear-Quadratic-Regulator

NVH Noise (Geräusch), Vibration (Vibrationen), Harshness (Rauheit)

PI Proportional-Integral

PID Proportional-Integral-Differential

PKW Personenkraftwagen

VKM Verbrennungskraftmaschine

ZD Zusatzdämpfung

Abbildungsverzeichnis

2.1	Kategorisierung von Motorprüfständen nach Anwendungsbereichen . . .	8
2.2	Hauptkomponenten eines Motorprüfstands	10
2.3	Versuchsprüfstand EOL: Prüfwelle mit Prüfling	12
2.4	Versuchsprüfstand EOL: 3D-Modell	12
2.5	Versuchsprüfstand EOL: Wellenstrang	13
2.6	Versuchsprüfstand EOL: Schwingungsmoden	14
2.7	Zweirad-Rollenprüfstand mit autom. Fahrer	15
2.8	Allrad-Rollenprüfstand	15
2.9	Versuchsprüfstand Rolle: 3D-Modell	18
2.10	Versuchsprüfstand Rolle: Wellenstrang	19
2.11	Versuchsprüfstand Rolle: Schwingungsmoden	20
2.12	Modellierung Zwei-Massen-Schwinger	21
2.13	Wurzelortskurve Zwei-Massen-Schwinger	24
3.1	Einsatz passiver Filter	28
3.2	Optimierung der Drehzahlregelung: Varianten der Polvorgabe	30
3.3	Drehzahlregelung inkl. Zustandsrückführung	33
3.4	Drehzahlregelung inkl. Zustandsrückführung: Lage der Pole	34
4.1	Idee der Zusatzdämpfung	39
4.2	Blockschaltbild: einfache Zusatzdämpfung	40
4.3	Blockschaltbild: einfache Zusatzdämpfung mit Tiefpass	42
4.4	Simulation Rolle: Sollwertvorgabe M_{AM} und Wellenmoment M_W	46
4.5	Simulation Rolle: M_W bei direkter und einfacher Zusatzdämpfung	47
4.6	Messdaten Rolle: M_W bei direkter und einfacher Zusatzdämpfung	48
4.7	Messdaten Rolle: M_W bei einfacher Zusatzdämpfung und unterschiedlichen Dämpfungskonstanten d_Z	49
4.8	Messdaten Rolle: M_D bei direkter und einfacher Zusatzdämpfung	49
4.9	Blockschaltbild: Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters	50
4.10	Blockschaltbild: Analogie KF1 und einfache Zusatzdämpfung	55

4.11 Simulation EOL: Frequenzspektrum und M_D beim Durchfahren der 1. Resonanzfrequenz bei Zusatzdämpfung mittels eines KF1	56
4.12 Simulation EOL: n_{AM} und M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF1	57
4.13 Simulation EOL: Sprung M_L bei Zusatzdämpfung mittels eines KF1 . .	59
4.14 Messdaten EOL: Frequenzspektrum und M_D beim Durchfahren der 1. Resonanzfrequenz bei Zusatzdämpfung mittels eines KF1	60
4.15 Messdaten EOL: n_{AM} und M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF1	61
4.16 Blockschaltbild: Zusatzdämpfung mittels eines KF2	62
4.17 Simulation EOL: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF2	63
4.18 Simulation EOL: M_D bei Zusatzdämpfung mittels eines KF2	64
4.19 Messdaten EOL: Frequenzspektrum und M_D bei Zusatzdämpfung mittels eines KF2	64
4.20 Simulation Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3	68
4.21 Simulation Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3	68
4.22 Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 für unter- schiedliche Dämpfungskonstanten d_Z	69
4.23 Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 für unterschiedliche Dämpfungskonstanten d_Z	70
4.24 Messdaten Rolle: M_D bei verschiedenen Verfahren mit unterschiedlichen Dämpfungskonstanten d_Z	71
4.25 Simulation EOL: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3	72
4.26 Simulation EOL: Sprung M_L bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 . .	73
4.27 Messdaten EOL: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3	73
4.28 Messdaten EOL: Frequenzspektrum und M_D beim Durchfahren der 1. Resonanzfrequenz bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3	74
4.29 Simulation Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion für $T_p=2$ ms	77
4.30 Simulation Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei verschiedenen Dämpfungs- varianten	78
4.31 Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ für unterschiedliche Prädikti- onszeiten T_p	79
4.32 Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion für unterschiedliche Prädiktionszeiten T_p	80
4.33 Simulation EOL: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prä- diktion	81
4.34 Simulation EOL: Sprung M_L bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion	81
4.35 Messung EOL: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion	82

4.36	Messung EOL: Frequenzspektrum und M_D beim Durchfahren der 1. Resonanzfrequenz bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion	83
5.1	Simulation Rolle: Fehlerkriterium I normiert auf $\frac{J_L^*}{J_L} = 1$ und Eigenwerte in Abhängigkeit von $\frac{J_L^*}{J_L}$	90
5.2	Simulation Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 in Abhängigkeit von $\frac{J_L^*}{J_L}$	91
5.3	Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei Parameterunsicherheit	92
5.4	Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei Parameterunsicherheit	93
5.5	Blockschaltbild: Kompensation der Modellunsicherheiten	94
5.6	Übersicht der Skalierungsfaktoren	100
5.7	Blockschaltbild: Vollständige Kompensation der Übertragungsfunktionen inkl. Skalierung von u und y	103
5.8	Blockschaltbild: Fehlersystem	105
5.9	Phasengang Wunschübertragungsfunktion 3. Ordnung	109
5.10	Bode-Diagramme von $G_{M_L}(s)$ für die exakte Referenzparametrierung und Parametrierung aus dem Algorithmus	111
5.11	Blockschaltbild: Fehlersystem des unvollständig kompensierten Systems	112
5.12	Phasengang Wunschübertragungsfunktion 5. Ordnung	115
5.13	Bode-Diagramme von $G_{M_L}^*(s)$ für die exakte Referenzparametrierung, Referenzparametrierung bei $J_L^* = 0.2J_L$ mit verschiedenen Kompensationsstufen und Parametrierung aus dem Algorithmus	120
5.14	Bode-Diagramme von $G_{M_{AM}}^*(s)$ für die exakte Referenzparametrierung, Referenzparametrierung bei $J_L^* = 0.2J_L$ mit verschiedenen Kompensationsstufen und Parametrierung aus dem Algorithmus	121
5.15	Simulation Rolle: Fehlerkriterium I und E_S bei Referenzparametrierung in Abhängigkeit von $\frac{J_L^*}{J_L}$ und Parametrierung mittels Algorithmus	122
5.16	Simulation Rolle: Eigenwerte des Kalman-Filters bei Referenzparametrierung in Abhängigkeit von $\frac{J_L^*}{J_L}$ und Parametrierung aus Algorithmus	123
5.17	Simulation Rolle: Fehlerkriterium I und Eigenwerte in Abhängigkeit von $\frac{J_L^*}{J_L}$ bei vollständiger Kompensation der Unsicherheit	135
5.18	Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 0.1$ mit verschiedenen Kompensationsstufen	136
5.19	Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 0.1$ mit verschiedenen Kompensationsstufen	137
5.20	Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 500$ mit verschiedenen Kompensationsstufen	138

5.21	Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 500$ mit verschiedenen Kompensationsstufen	138
5.22	Bode-Diagramme von $G_{M_L}(q)$ für die exakte Referenzparametrierung und Parametrierung aus dem Algorithmus	146
5.23	Blockschaltbild: stationäres Kalman-Filter	147
5.24	Blockschaltbild: Standard-Beobachter	147
5.25	Bode-Diagramme von $G_{M_L}^*(q)$ für die exakte Referenzparametrierung und Parametrierung aus dem Algorithmus	154
5.26	Bode-Diagramme von $G_{M_{AM}}^*(q)$ für die exakte Referenzparametrierung und Parametrierung aus dem Algorithmus	155
5.27	Simulation Rolle: Fehlerkriterium I und E_S bei Referenzparametrierung in Abhängigkeit von $\frac{J_L}{J_L^*}$ und bei Parametrierung mittels zeitdisk. Algorithmus	156
5.28	Simulation Rolle: Eigenwerte des Kalman-Filters bei Referenzparametrierung in Abhängigkeit von $\frac{J_L}{J_L^*}$ und bei Parametrierung mittels zeitdisk. Algorithmus	157
5.29	Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei Referenzparametrierung und Parametrierung mittels zeitdisk. Algorithmus	158
5.30	Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 und Parametrierung mittels zeitdisk. Algorithmus	159
5.31	Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels unterschiedlicher Dämpfungsverfahren	160
A.1	EOL: Versuchsaufbau	167
A.2	EOL: Simulationsmodell Wellenstrang	168
A.3	EOL: Simulationsmodell 2-Massen-Schwinger	170
B.1	Rolle: Versuchsaufbau	173
B.2	Rolle: Simulationsmodell Wellenstrang	174

Tabellenverzeichnis

4.1	Vergleich der unterschiedlichen Dämpfungsvarianten	86
A.1	EOL: Systemparameter 6-Massen-System	169
A.2	EOL: Regelparameter Drehzahlregelung	169
A.3	EOL: Systemparameter 2-Massen-System	169
A.4	EOL: Parametrierung KF1	170
A.5	EOL: Parametrierung KF2	170
A.6	EOL: Parametrierung KF3	171
A.7	EOL: Parametrierung KF3 inkl. Prädiktion	171
B.1	Rolle: Systemparameter 4-Massen-System	175
B.2	Rolle: Systemparameter 2-Massen-System	175
B.3	Rolle: Parametrierung einfache Zusatzdämpfung	176
B.4	Rolle: Parametrierung KF3	176
B.5	Rolle: Parametrierung KF3 inkl. Prädiktion, Variation T_p	176
B.6	Rolle: Referenzparametrierung zeitkont. KF3	177
B.7	Rolle: Parametrierung zeitkont. KF3 durch Algorithmus (ohne Parameterunsicherheit)	177
B.8	Rolle: Parametrierung zeitkont. KF3 durch Algorithmus (mit Parameterunsicherheit)	177
B.9	Rolle: Referenzparametrierung zeitdisk. KF3 inkl. Prädiktion	178
B.10	Rolle: Parametrierung zeitdisk. KF3 inkl. Prädiktion durch Algorithmus (ohne Parameterunsicherheit)	178
B.11	Rolle: Parametrierung zeitdisk. KF3 inkl. Prädiktion durch Algorithmus (mit Parameterunsicherheit)	179

Variablenübersicht

Symbol	Definition	Einheit
φ	Drehwinkel	rad
ω	Winkelgeschwindigkeit	rad/s
n	Drehzahl	1/min
M	Drehmoment	Nm
J	Trägheitsmoment	kg m ²
F	Kraft	N
v	Geschwindigkeit	m/s
m	Masse	kg
g	Erdbeschleunigung	m/s ²
t	Zeit	s
α	Straßensteigung	rad
a_0	Konstanter Widerstandskoeffizient (Straßenlast)	N
a_1	Linearer Widerstandskoeffizient (Straßenlast)	N s/m
a_2	Quadratischer Widerstandskoeffizient (Straßenlast)	N s ² /m
J_{AM}	Massenträgheit Antriebsmaschine	kg m ²
J_L	Massenträgheit Last	kg m ²
M_W	Wellenmoment	Nm
M_{AM}	Eintriebsmoment	Nm
M_L	Lastmoment	Nm
c_W	Wellensteifigkeit	Nm/rad
d_W	Wellendämpfungskoeffizient	Nm s/rad
φ_{AM}	Drehwinkel Antriebsmaschine	rad
φ_L	Drehwinkel Last	rad
ω_{AM}	Winkelgeschwindigkeit Antriebsmaschine	rad/s
ω_L	Winkelgeschwindigkeit Last	rad/s

Symbol	Definition	Einheit
$\Delta\varphi$	Differenzwinkel zwischen Eintrieb und Last	rad
$\Delta\omega$	Differenzwinkelgeschwindigkeit zwischen Eintrieb und Last	rad/s
ω_0	Resonanzfrequenz	rad/s
ζ	Dämpfungsgrad	–
ζ_T	Dämpfungsgrad Führungsübertragungsfunktion	–
τ_{AM}	Zeitkonstante Momentenaufbau Eintriebsmaschine	s
τ_ω	Zeitkonstante Tiefpassfilter einfache Zusatzdämpfung	s
T_d	Abtastzeit	s
r	Führungsgröße	–
k_P	Proportionaler Anteil Drehzahlregler	Nm s/rad
k_I	Integraler Anteil Drehzahlregler	Nm/rad
M_D	Dämpfungsmoment	Nm
d_Z	Zusatzdämpfungskonstante	Nm s/rad
\hat{d}_Z	Zusatzdämpfungskonstante für aperiodischen Grenzfall	Nm s/rad
n	System-, Polynomordnung, Prädiktionsschritte	–
$\tilde{\mathbf{A}}$	zeitkont. Systemmatrix, Strecke	
$\tilde{\mathbf{B}}$	zeitkont. Eingangsmatrix, Strecke	
$\tilde{\mathbf{C}}$	zeitkont. Ausgangsmatrix, Strecke	
$\tilde{\mathbf{D}}$	zeitkont. Durchgriffsmatrix, Strecke	
\mathbf{x}	Zustandsvektor	
\mathbf{u}	Eingangsvektor	
\mathbf{y}	Ausgangsvektor	
\tilde{w}	Zustandsrauschen zeitkont. System	–
\tilde{v}	Messrauschen zeitkont. System	–
$\tilde{\Phi}$	zeitdisk. Systemmatrix, Strecke	
$\tilde{\mathbf{H}}$	zeitdisk. Eingangsmatrix, Strecke	
\mathbf{w}	Zustandsrauschen zeitdisk. System	
\mathbf{v}	Messrauschen zeitdisk. System	
$\Delta\hat{\omega}$	Schätzwert Differenzwinkelgeschwindigkeit	rad/s
$\Delta\bar{\omega}$	Schätzwert Differenzwinkelgeschwindigkeit nach Ausgangsskalierung	rad/s
\mathbf{Q}	Kovarianzmatrix Zustandsrauschen, Kalman-Filter	
R	Kovarianz Messrauschen, Kalman-Filter	–
\mathbf{P}	Kovarianzmatrix des Schätzfehlers, Kalman-Filter	

Symbol	Definition	Einheit
\mathbf{K}	stationäre Kalman-Matrix	
\mathbf{K}^*	stationäre Kalman-Matrix mit Parameterunsicherheit	
h	Skalierungsfaktor für Ausgangsvektor, Kalman-Filter	–
g	Skalierungsfaktor für Eingangsvektor, Kalman-Filter	–
\mathbf{A}_2	zeitkont. Systemmatrix, Kalman-Filter 2. Ordnung	
\mathbf{b}_2	zeitkont. Eingangsvektor, Kalman-Filter 2. Ordnung	
\mathbf{c}_2	zeitkont. Ausgangsvektor, Kalman-Filter 2. Ordnung	
\mathbf{A}	zeitkont. Systemmatrix, Kalman-Filter 3. Ordnung	
\mathbf{B}	zeitkont. Eingangsmatrix, Kalman-Filter 3. Ordnung	
\mathbf{C}	zeitkont. Ausgangsmatrix, Kalman-Filter 3. Ordnung	
J_L^*	Massenträgheit Last mit Parameterunsicherheit	kg m ²
c_W^*	Wellensteifigkeit mit Parameterunsicherheit	Nm/rad
\mathbf{A}^*	zeitkont. Systemmatrix mit Parameterunsicherheit, Kalman-Filter 3. Ordnung	
\mathbf{B}^*	zeitkont. Eingangsmatrix mit Parameterunsicherheit, Kalman-Filter 3. Ordnung	
\mathbf{C}^*	zeitkont. Ausgangsmatrix mit Parameterunsicherheit, Kalman-Filter 3. Ordnung	
\mathbf{Q}^*	Kovarianzmatrix Zustandsrauschen mit Parameterunsicherheit, Kalman-Filter 3. Ordnung	
ϵ	Schätzfehler der Differenzwinkelgeschwindigkeit	rad/s
\mathbf{F}	Systemmatrix des Fehlersystems	
\mathbf{F}^*	Systemmatrix des Fehlersystems mit Parameterunsicherheit	
Φ	zeitdisk. Systemmatrix, Kalman-Filter	
\mathbf{H}	zeitdisk. Eingangsmatrix, Kalman-Filter	
Φ^*	zeitdisk. Systemmatrix mit Parameterunsicherheit, Kalman-Filter	
\mathbf{H}^*	zeitdisk. Eingangsmatrix mit Parameterunsicherheit, Kalman-Filter	
\mathbf{K}_d	stationäre Kalman-Matrix, zeitdisk. Kalman-Filter	
\mathbf{K}_d^*	stationäre Kalman-Matrix mit Parameterunsicherheit, zeitdisk. Kalman-Filter	
\mathbf{P}^*	prädizierte Kovarianzmatrix des Schätzfehlers, zeitdisk. Kalman-Filter	

Symbol	Definition	Einheit
\mathbf{x}^*	prädizierter Zustandsvektor, zeitdisk. Kalman-Filter	
\mathbf{F}_d	zeitdisk. Systemmatrix des Fehlersystems	
\mathbf{F}_d^*	zeitdisk. Systemmatrix des Fehlersystems mit Parameterunsicherheit	

Einleitung

1.1 Motivation

In der Automobilindustrie kommen Prüfstände während der Entwicklung von Fahrzeugen sowie in der Produktion im Rahmen der Funktions- und Qualitätskontrolle für die unterschiedlichsten Prüfaufgaben und Anwendungsbereiche zum Einsatz [61, 76, 79]. Moderne Fahrzeuge verfügen über eine Vielzahl an mit Logik ausgestatteten Sensoren und Aktuatoren. Durch die steigende Komplexität und Vernetzung der einzelnen Komponenten sowie die immer kürzer werdenden Entwicklungszeiten wird die fundierte Erprobung und Entwicklung von Teilkomponenten am Prüfstand immer wichtiger. Fehlfunktionen einzelner Komponenten lassen sich im Gesamtverbund oft nur mit großem Aufwand finden und können erhebliche Kosten verursachen. Aus diesem Grund wird in sehr frühen Entwicklungsphasen mit der Erprobung neuer Module am Prüfstand begonnen. Komponenten, die noch nicht fertig entwickelt oder am Prüfstand aus Komplexitätsgründen nicht aufgebaut sind, werden dabei von Simulationsmodellen ersetzt [25, 64, 106]. Dadurch können die aufgebauten Teilkomponenten trotzdem unter realitätsnahen Bedingungen belastet und untersucht werden. Neben Prüfständen zum Test und der Entwicklung einzelner Komponenten wie beispielsweise Kupplungen, Ölpumpen oder Bremsen reichen die Anwendungsgebiete von Motorprüfständen über Rollenprüfstände zur Emissions- und Verbrauchsmessung bis hin zur Erprobung des gesamten Triebstrangs mittels Antriebsstrangprüfständen [97].

In den meisten Anwendungsbereichen ist das Ziel, den Prüfling möglichst realistisch zu beanspruchen, um das Verhalten auf der Straße nachzustellen. Neben der Interaktion mit dem Gesamtsystem müssen bei den Prüfaufgaben sämtliche Umgebungsbedingungen miteinbezogen werden. Durch die physikalischen Eigenschaften des Prüfstands

und die geänderten Randbedingungen gegenüber dem Einsatz auf der Straße ergeben sich hierbei aber immer wieder Herausforderungen. Bei Motorprüfständen wird beispielsweise eine Verbrennungskraftmaschine am Prüfstand über eine relativ steife Welle an eine elektrische Antriebs- bzw. Belastungsmaschine angeschlossen, anstatt über einen weichen Antriebsstrang und über Reifen mit der Straße in Kontakt zu stehen. Die Prüfstandswellen sind häufig aus mehreren Komponenten wie Flanschen, Kupplungen etc. aufgebaut und beinhalten zur Ermittlung des auftretenden Drehmoments einen Drehmomentmessflansch. Durch die verhältnismäßig starre Ankopplung der Belastungsmaschine ergeben sich am Prüfstand häufig schwach gedämpfte und dadurch stark ausgeprägte Resonanzfrequenzen, die der Prüfling an seinem tatsächlichen Einsatzort nicht vorfindet [79, 139]. Das resultierende System entspricht einem Mehr-Massen-Schwinger. Die einzelnen Resonanzfrequenzen können antriebsseitig durch die Antriebsmaschine bzw. deren Regelung [73, 101] oder abtriebsseitig durch Drehmomentungleichförmigkeiten oder Lastsprünge des Prüflings [65] angeregt werden. Durch die geringe Eigendämpfung des Wellenstrangs können die resultierenden Drehmomentamplituden sehr groß werden. Die auftretende Schwingung beeinflusst das Prüfergebnis und führt zu erhöhtem Verschleiß der Bauteile oder zur Zerstörung des Prüflings und/oder des Prüfstands. Aus diesem Grund sind Maßnahmen zur Dämpfung dieser Resonanzfrequenzen am Prüfstand notwendig [139]. Die naheliegendste Lösung zur Reduktion der auftretenden Schwingung ist der Einsatz einer weicheren, stärker gedämpften Verbindungswelle. Resonanzfrequenzen könnten somit weiter gesenkt und zusätzlich stärker gedämpft werden. Bei dieser Variante wirkt sich die Tiefpasswirkung der weichen Verbindungswelle jedoch nachteilig aus. Das Einsatzgebiet wird durch Prüflinge, die tiefere Resonanzfrequenzen im Normalbetrieb dennoch anregen, sowie in Anwendungsfällen, in denen eine steife Wellenverbindung für eine möglichst genaue Drehmomentmessung gefordert wird, zusätzlich weiter verkleinert [139].

Dieses Schwingungsproblem kann nicht nur bei Prüfständen beobachtet werden, sondern tritt in sämtlichen Anwendungsbereichen auf, in denen eine Last über einen Wellenstrang mit einer Antriebsmaschine gekoppelt ist. So kommt es zu ähnlichen Effekten beispielsweise bei Papiermaschinen [127] oder bei der Regelung von Papierschnidemaschinen [93], bei Wellensträngen von Kraftwerksturbosätzen [146], bei der Regelung hochdynamischer Servoantriebe [78, 83, 126], bei Walzwerken in der Stahlproduktion [48], bei Fahrzeugtriebsträngen [13, 102, 116], bei der Lageregelung von Roboterarmen [53, 125] oder Bandförderanlagen [119]. Verfahren zur Dämpfung einer Drehschwingung in Wellensträngen durch die Regelung der elektrischen Antriebsmaschine sind beliebte Alternativen zu mechanischen Schwingungsdämpfern. Sie kommen in der Automobilindustrie [8], der Rotorschwingungsdämpfung in Stromgeneratoren [146] und der Robotik [120] immer häufiger zum Einsatz. Bei diesen Verfahren wird an der

Antriebsmaschine ein zusätzliches Drehmoment aufgebracht, das die vorhandene Dreh-schwingung dämpft. Im Gegensatz zu fest abgestimmten mechanischen Tilgern kann die Schwingung durch die aktive Dämpfung in einem deutlich größeren Frequenzbereich abgeschwächt werden. Zudem bietet sie die Möglichkeit, auf Änderungen von Systemeigenschaften, wie beispielsweise unterschiedliche Prüflinge, zu reagieren [70, 124]. Für die Implementierung müssen keinerlei mechanische Umbauten vorgenommen werden. Somit eignen sich aktive Verfahren in vielen Fällen zur Nachrüstung an bestehenden Anlagen. Machbarkeit und Dämpfungsergebnis hängen hierbei jedoch stark von den verwendeten Frequenzumrichtern ab.

In der Literatur finden sich verschiedene Störgrößenaufschaltungen bzw. Zustands-rückführungen zur Ermittlung des zusätzlichen Dämpfungsmoments [62, 120]. Be-schrieben werden vor allem die Rückkopplung der Differenzdrehzahl zwischen Antrieb und Last [11, 93], des gemessenen Wellenmoments [91, 142] und der Ableitung des Wellenmoments [37, 115] (siehe Abschnitt 3.3). Bei Prüfstands-anwendungen wird das Wellenmoment im Gegensatz zu anderen Anwendungen direkt gemessen. Die Drehzahl der Last ist aber selten direkt zugänglich, da der Prüfling für eine entsprechende Messstelle adaptiert werden müsste. Aus diesem Grund bietet es sich für derartige Anwendungen an, das gemessene Wellenmoment für die aktive Schwingungsdämp-fung zu verwenden. Nicht zugängliche, notwendige Messgrößen werden häufig durch Zustandsschätzer ermittelt [9, 52, 54, 124]. Auf reale Systeme wirken Störeinflüsse (zB. Messrauschen), die dem System ein stochastisches Verhalten aufprägen und zu schlechteren Schätzergebnissen führen. Hierfür kommen teilweise Kalman-Filter bzw. erweiterte Kalman-Filter zum Einsatz [14, 123, 124]. Kalman-Filter zeichnen sich durch eine Berücksichtigung der Rauscheigenschaften der Systemgrößen aus und verbessern dadurch die Schätzergebnisse. Für den Filterentwurf ist es notwendig, die Parameter des Systems zu kennen. In der Praxis sind diese allerdings nur näherungsweise bekannt und können sich während des Betriebs ändern. In Prüfstands-anwendungen für die Automobilindustrie kann sich beispielsweise die Massenträgheit der Last durch einen Prüflingswechsel ändern. Es stellt sich somit die Frage, wie ein Kalman-Filter mit nur näherungsweise bekannten Parametern sinnvoll parametrisiert werden kann und ob Modellunsicherheiten, insbesondere in der Massenträgheit der Last, durch geeignete Parametrierung des Filters kompensiert werden können.

1.2 Ziele der Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit werden Dämpfungsverfahren für den Einsatz an Prüfständen vorgestellt und hinsichtlich ihrer Praxistauglichkeit analysiert. Für den Einsatz am Prüfstand sollen Verfahren konzipiert werden, die die effektive Drehschwingungsdämpfung in einem möglichst großen Frequenzbereich ermöglichen und zugleich robust gegenüber Parameterunsicherheiten durch wechselnde Prüflinge und Aufbauten sind. Der Schwerpunkt liegt hierbei auf der aktiven Dämpfung mittels Rückkopplung der Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ zwischen Eintrieb und Abtrieb sowie der Schätzung der in den meisten Fällen nicht direkt messbaren Differenzwinkelgeschwindigkeit. Basierend auf der Analyse eines in der Literatur beschriebenen, einfachen Dämpfungsverfahrens wird die Schätzung der Differenzwinkelgeschwindigkeit mittels unterschiedlichen Realisierungen eines Kalman-Filters eingehend untersucht. Die Vor- und Nachteile der jeweiligen Varianten werden neben der theoretisch fundierten Analyse durch Simulationsstudien und Messungen an zwei realen Prüfständen aufgezeigt.

In Kapitel 2 wird eine Übersicht über die im Rahmen der Arbeit verwendeten Prüfstände gegeben. Es handelt sich dabei um einen Motor- und einen Rollenprüfstand. Diese Anwendungsbeispiele stellen einen kleinen Teil der möglichen Anwendungsfälle für die aktive Drehschwingungsdämpfung bei Prüfständen dar. In sämtlichen Prüfanordnungen wird eine Last bzw. ein Prüfling über eine Verbindungswelle an einen Antrieb bzw. eine Belastungsmaschine gekoppelt, um bestimmte Belastungsszenarien für den Prüfling nachstellen zu können. Die im Betrieb auftretende Drehschwingung kann mit den vorgestellten Verfahren unabhängig von der Prüfanwendung gedämpft werden. Für die weiterführenden Analysen der einzelnen Dämpfungsverfahren wird eine allgemeine Systembeschreibung für den Zwei-Massen-Schwinger hergeleitet und das resultierende Modell hinsichtlich dessen Eigenschaften analysiert.

Zum Einstieg werden in Kapitel 3 gängige, in der Literatur beschriebene Methoden zur aktiven Drehschwingungsdämpfung beschrieben und eine Eingliederung der unterschiedlichen Dämpfungsverfahren in grundlegende Konzepte vorgenommen. Neben passiven Filtern und der Schwingungsdämpfung durch die Modifikation bzw. Optimierung der Drehzahlregelung werden unterschiedliche Zustandsrückführungen betrachtet (siehe Kapitel 3). Obwohl die ersten beiden Varianten keiner aktiven Dämpfung im engeren Sinn entsprechen, können diese aber in bestimmten Anwendungsfällen zur Schwingungsdämpfung bzw. Verhinderung der Schwingungsanregung beitragen. Basierend auf diesen Erkenntnissen wird ein einfaches Konzept zur aktiven Schwingungsdämpfung mittels Störgrößenaufschaltung vorgestellt. Anschließend wird ein stationäres Kalman-Filter zur Schätzung der Differenzwinkelgeschwindigkeit eingeführt und unterschiedliche Vari-

anten des Filters untersucht. Die einzelnen Varianten werden hergeleitet und mithilfe von Simulationsstudien und Messungen analysiert. Am Ende von Kapitel 4 werden die Vor- und Nachteile der Verfahren in einer Gesamtübersicht gegenübergestellt

In Kapitel 5 werden Verbesserungen für identifizierte Schwachstellen der Dämpfungsvariante mittels eines zeitdiskreten Kalman-Filters 3. Ordnung zur Schätzung der Differenzwinkelgeschwindigkeit vorgestellt. Mögliche Parameterunsicherheiten in der Systembeschreibung werden analysiert und eine Methode zur Kompensation der Unsicherheiten sowie ein Algorithmus zur sinnvollen Parameterwahl werden präsentiert. Aufgrund der verhältnismäßig hohen Komplexität werden die Kompensation und der Algorithmus in einem ersten Schritt für das zeitkontinuierliche System hergeleitet. Zur Analyse des zeitkontinuierlichen Systems wird die algebraische Riccati Gleichung für das System gelöst. In einem weiteren Schritt wird gezeigt, dass die gewonnenen Erkenntnisse direkt für das zeitdiskrete System übernommen werden können. Die Erkenntnisse und Verbesserungen werden mittels Simulationsstudien und Messergebnissen belegt. Die Arbeit wird in Kapitel 6 mit einer Zusammenfassung der Erkenntnisse und einem Ausblick auf weitere Forschungsfragen und Teilaspekte abgeschlossen.

Systembeschreibung

2.1 Prüfstände

In der Automobilindustrie zeichnet sich verstärkt der Trend ab, Straßenversuche auf Prüfstände zu verlagern und einzelne Komponenten bereits in sehr frühen Entwicklungsphasen zu erproben [26, 97]. Einzelne Komponenten können somit ohne die Integration in das Gesamtsystem vorab getestet werden. Neben der besseren Reproduzierbarkeit durch konstante Umgebungsbedingungen, kann die Effizienz und die Sicherheit durch die Erprobung am Prüfstand erhöht werden. Prüfstände nehmen somit in der modernen Fahrzeugentwicklung und -produktion eine immer wichtigere Rolle ein. Durch die geänderten Anforderungen und die daraus resultierende Komplexität ist eine ständige Weiterentwicklung der eingesetzten Prüfstände unerlässlich geworden. In diesem Zusammenhang spielt auch die effektive Drehschwingungsdämpfung eine immer wichtigere Rolle.

Zur Analyse der in dieser Arbeit vorgestellten Dämpfungsverfahren werden neben Simulationsstudien Versuche an realen Prüfständen durchgeführt. Für die Versuche kommen ein Motorprüfstand (siehe Abschnitt 2.1.1) und ein Rollenprüfstand (siehe Abschnitt 2.1.2) zum Einsatz. Die Prüfstände wurden neben Gründen der zeitlichen Verfügbarkeit aufgrund ihrer vollkommen konträren Prüfaufgaben und des unterschiedlichen Aufbaus ausgewählt, um den weiten Einsatzbereich für Zusatzdämpfungen bei Prüfständen aufzuzeigen. Die beiden ausgewählten Typen dienen als Beispiel für zahlreiche weitere Anwendungsfälle. Der Einsatzbereich kann auf sämtliche Prüfstände, bei denen ein Prüfling über eine Wellenverbindung mit einer Antriebsmaschine gekoppelt ist, ausgeweitet werden. Die erarbeiteten Verfahren können beispielsweise problemlos bei Antriebsstrang-, Kupplungs- oder Ventiltriebprüfständen sowie Prüfständen zur Erprobung von elektrischen Antrieben eingesetzt werden.

In den folgenden beiden Abschnitten wird jeweils zu Beginn eine allgemeine Einführung in den Aufbau, die Funktion und die möglichen Einsatzgebiete der Prüfstände gegeben. Anschließend wird im Detail auf die für die Versuche zur Erprobung der einzelnen Zusatzdämpfungsvarianten verwendeten Prüfstände eingegangen.

2.1.1 Motorprüfstand

Allgemein

Motorprüfstände dienen zur Erprobung von Verbrennungskraftmaschinen (VKM) und werden in Forschung, Entwicklung und der Produktion eingesetzt. Je nach Aufgabenbereich müssen die Prüfstände unterschiedliche Anforderungen erfüllen. Ein Entwicklungsprüfstand muss beispielsweise flexibel sein und innerhalb kurzer Rüstzeiten an neue Versuchsabläufe oder Prüflinge angepasst werden können, während auf Serien- oder Produktionsprüfständen eine geringere Flexibilität notwendig ist [60]. Die im Rahmen der Anwendungsgebiete durchzuführenden Prüfungen können von unterschiedlichen Prüfstandstypen abgedeckt werden (siehe Abb. 2.1) [97]. Einzylindermotorenprüfstände

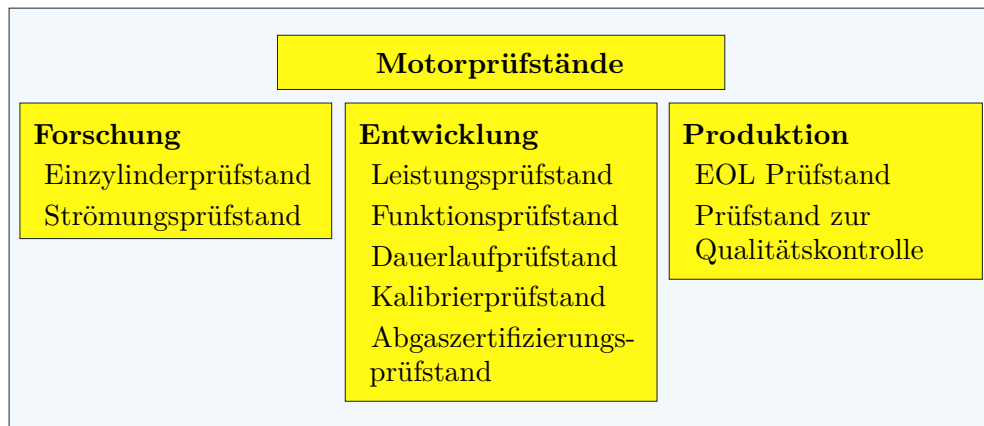


Abbildung 2.1: Kategorisierung von Motorprüfständen nach Anwendungsbereichen

und Strömungsprüfstände werden im Forschungsbereich zur Optimierung des Verbrennungsprozesses und der Ladungsbewegung verwendet. Es wird nur ein einzelner Zylinder des in der Regel aus mehreren Zylindern bestehenden Vollmotors aufgebaut und mit zusätzlichen Messstellen für die Beurteilung des Brennverlaufs ausgestattet. Im Rahmen des Entwicklungsprozesses von Motoren kommen Leistungsprüfstände zur Leistungsbestimmung aus gemessenem Drehmoment und gemessener Drehzahl, Funktionsmotorenprüfstände zur Beurteilung der Gesamtsystemfunktion inkl. Kraftstoffverbrauchsmessung und Abgasanalysen sowie Dauerlaufprüfstände zur Beurteilung

der Haltbarkeit zum Einsatz. Für die Applikation des Motorsteuergeräts werden in der Serienentwicklung Kalibrierprüfstände eingesetzt, um über variable Parameter (z. B. Parameter des Einspritzsystems) ein gewisses Motorverhalten einzustellen.¹ Mit Hilfe von Abgaszertifizierungsprüfständen wird die Erfüllung von gesetzlichen Abgasnormen für Nutzfahrzeuge, Baumaschinen etc. überprüft und zertifiziert.² In den meisten Fällen können mit einem Prüfstandstyp heutzutage aber mehrere Aufgabenstellungen im Entwicklungsprozess abgedeckt werden. Aus Kosten- und Zeitgründen geht der Trend dahin, immer mehr Schritte der Systemintegration und Validierung in frühe Entwicklungsphasen zu verlagern. Hierbei ist es das Hauptziel, den Motor so realistisch wie möglich zu beanspruchen [45]. In der Produktion werden am Ende der Produktionslinie End-of-Line (EOL) Prüfstände zur abschließenden Funktions- und Qualitätskontrolle eingesetzt [137]. Diese Prüfstände stellen somit einen Teil der Produktionskette dar. Bei der unmittelbar nach der Produktion angesiedelten Prüfung kann zwischen Heißtests (der Motor wird im befeuerten Betrieb getestet) und Kalttests (der Motor wird ohne Befuerung durch den Prüfstand geschleppt) unterschieden werden. Um die Taktzeiten der Produktionslinie gering zu halten, wird in modernen Fertigungsstraßen immer häufiger auf den Heißtest verzichtet und am Ende der Produktion lediglich ein Kalttest durchgeführt. Um den Produktionsprozess und die Toleranzen in der Fertigung sowie deren Änderung im Verlauf der Zeit zu beobachten (Conformity of Production) werden stichprobenartig Prüflinge detailliert analysiert. Dazu werden Prüfstände zur Qualitätskontrolle eingesetzt [76, 97].

Abb. 2.2 zeigt einen Motorprüfstand mit den notwendigen Hauptkomponenten. Als Basis für jeden Prüfstand dient ein von der Bausubstanz der Prüfzelle entkoppelter Prüfstandsunterbau bzw. ein Fundament, das die durch den Betrieb auftretende Schwingung nicht an das Gebäude weiterleitet. Hierfür kommen meist Nutenfelder mit einer speziellen Federung zur Entkopplung (z. B. Luftfederung) zum Einsatz. Auf dem Fundament wird die Belastungsmaschine samt Drehmomentmessung (Drehmomentmessflansch oder bei älteren Prüfständen Kraftmesszelle mit Hebelarm) aufgebaut und über einen Wellenstrang mit dem Prüfling verbunden [79, 97]. Die Belastungsmaschine muss dabei für das maximale Drehmoment und die Maximaldrehzahl des Prüflings ausgelegt werden. Für den dynamischen Betrieb sind zusätzliche Reserven vorzusehen. Als Belastungsmaschinen können passive (z. B. Wasserwirbelbremsen, Wirbelstrombremsen) und aktive Typen (z. B. Asynchronmaschinen, Synchronmaschinen, Gleichstrommaschinen) zum Einsatz kommen [12, 63, 79]. Passive Belastungsmaschinen

¹Der Begriff *Kalibrierung* wird in diesem Zusammenhang landläufig falsch verwendet. Definitionsgemäß wird bei der *Kalibrierung* der vom Messgerät angezeigte Messwert mit einem Messnormal verglichen. Die systematische Messabweichung wird unter vorgegebenen Anwendungsbedingungen ohne verändernden Eingriff in die Messeinrichtung ermittelt [33].

²Für Personenkraftwagen (PKW) sowie zwei- und dreirädrige Fahrzeuge bis 3500 kg müssen die Abgastests von Gesetzes wegen an einem Rollenprüfstand durchgeführt werden.

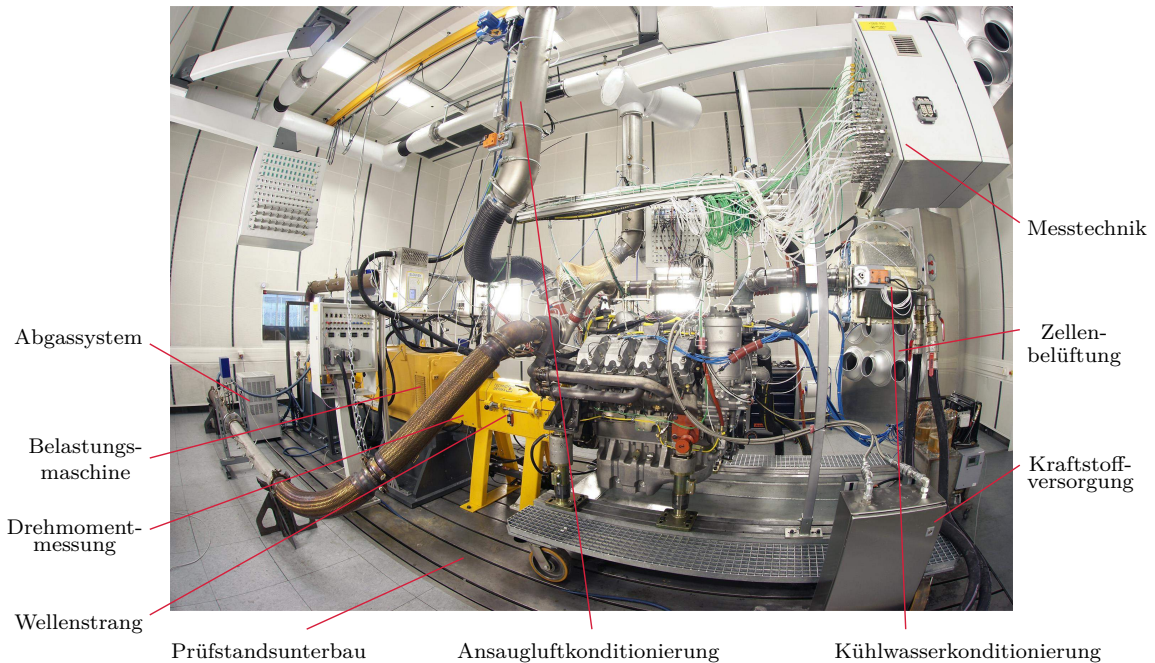


Abbildung 2.2: Hauptkomponenten eines Motorprüfstands

ermöglichen nur eine Bremsung des Prüflings mit einem einstellbaren Drehmoment. Aktive Belastungsmaschinen können im Gegensatz selbständig ein Antriebsmoment einbringen und den Prüfling beschleunigen. Passive Belastungsmaschinen werden neben deren konzeptionellem Nachteil des fehlenden Antriebs zudem hinsichtlich Dynamik, Regelgüte und der fehlenden Netzzurückspeisung der aufgenommenen Energie zunehmend von aktiven Belastungsmaschinen abgelöst. Aktuell kommen bei Motorprüfständen vorwiegend Asynchronmaschinen zum Einsatz. Diese zeichnen sich durch große Robustheit, Regeldynamik und Regelgüte aus. Für Spezialanwendungen und im Motorsport kommen häufig permanenterregte Synchronmaschinen zum Einsatz [97].

Die für den Betrieb notwendigen Medien wie Kraftstoff, Kühlwasser, Öl und Ansaugluft werden durch Konditioniereinrichtungen an die gewünschten Bedingungen angepasst [79]. Je nach Erprobungsziel kann der Prüfstand mit Abgasmesstechnik, einem Indiziersystem, Verbrauchsmessung und unterschiedlichen Temperatur- und Druckmessstellen ausgestattet sein. Das Automatisierungssystem übernimmt die Sollwertvorgabe, Messdatenvisualisierung und -speicherung sowie die Ansteuerung von Konditioniereinrichtungen für diverse Medien und von Messgeräten.

Hinsichtlich der Dynamik der Antriebstechnik und den Anforderungen an das Automatisierungssystem kann zwischen stationären und instationären Prüfständen unterschieden werden [97]. Stationäre Prüfstände werden in der Forschung und Entwicklung typischerweise für Stationärmessungen wie der Aufnahme von Volllastkurven oder Ver-

brauchskenfeldern verwendet [12]. Die Betriebspunkte werden dazu über die Drehzahl der Belastungsmaschine und die Fahrpedalstellung vorgegeben. Instationäre Prüfstände können je nach Dynamik in Transientenprüfstände, dynamische und hochdynamische Prüfstände unterteilt werden. Bei Transientenprüfständen erfolgt die Lastpunktdefinition über Wertepaare von Drehzahl und Fahrpedal mit vergleichsweise geringer Dynamik. Das Einsatzgebiet reicht von der Überprüfung des Ansprechverhaltens bei Lastsprüngen bis hin zur Analyse des Kraftstoffverbrauchs und der ausgestoßenen Emissionen. Bei dynamischen Prüfständen werden die Sollwerte von einem Fahrzeugmodell generiert. Der Benutzer gibt ein Geschwindigkeits- und Steigungsprofil vor. Zusätzlich kann der Fahrzeugtriebstrang simuliert werden, wobei eine niederfrequente Triebstrangschwingung (bis ca. 8 Hz) nachgebildet werden kann [97]. Die Einsatzgebiete sind das Abfahren gesetzlicher Abgaszyklen zur Beurteilung der Emissionen im geplanten Fahrzeugeinsatz sowie die Verbesserung der Reichweite [100]. Im Gegensatz zum dynamischen Prüfstand kann bei einem hochdynamischen Prüfstand auch eine höherfrequente Triebstrangschwingung (bis ca. 40 Hz) sinnvoll nachgestellt werden. Mit dem hochdynamischen Prüfstand kann das Nullmoment während Schaltvorgängen und Leerlaufphasen ebenfalls korrekt eingeregelt werden. Dadurch können das Motorkaltstartverhalten [76] und das Fahrverhalten ohne real vorhandenem Fahrzeug optimiert werden. Zudem können reale Kraftstoffverbrauchsmessungen (Real Driving Emissions) mit echtem Motor und einem virtuellen Antriebsstrang im virtuellen Umfeld durchgeführt werden [98]. Die Antriebstechnik und deren Regelung muss die Anforderungen an die geforderte Dynamik der einzelnen Typen unterstützen. In der Literatur werden für die unterschiedlichsten Anwendungsbereiche beispielsweise zur dynamischen und entkoppelten Regelung von Drehzahl und Drehmoment [41, 75, 96, 109, 141], der Trajektorienplanung inkl. Berücksichtigung der vorhandenen Stellgrößenbeschränkungen [40] oder zum Einregeln von Nullmoment [39, 104] zahlreiche Regelungsstrategien vorgeschlagen.

Versuchsprüfstand

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein stationärer EOL Motorprüfstand für LKW-Motoren betrachtet. Der Prüfstand ist am Ende der Produktionslinie aufgebaut und dient zur Funktionskontrolle und Feinapplikation bzw. Kalibrierung des Steuergeräts. Der Prüfstand besteht aus einer abgeschlossenen Prüfzelle (siehe Abb. 2.3 und Abb. 2.4 linker Bereich) und einem Rüst- und Bedienbereich außerhalb der Zelle (siehe Abb. 2.4 rechter Bereich). Über eine Drehvorrichtung kann der vorgerüstete Prüfling in die Zelle geschwenkt werden. Durch diese Anordnung kann der Abbau des fertig geprüften und die Rüstung des nachfolgenden Motors parallel zum laufenden

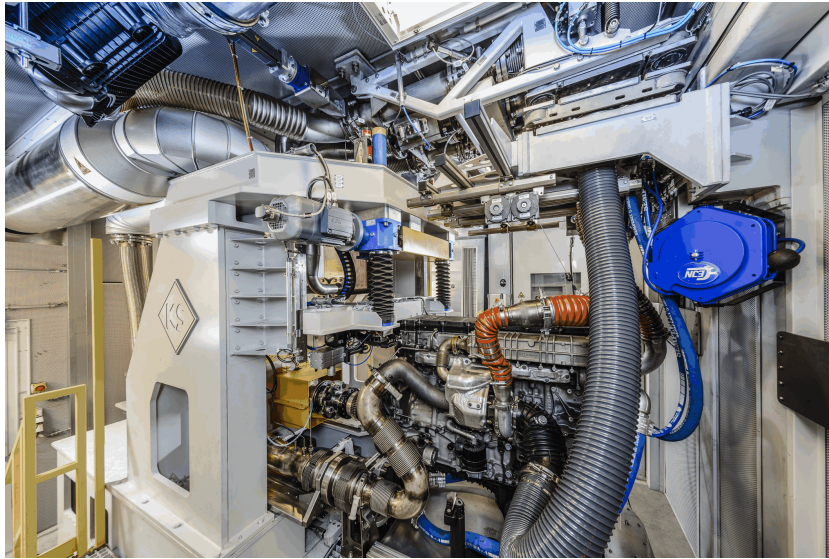


Abbildung 2.3: Versuchsprüfstand EOL: Prüfzelle mit Prüfling

Prüfbetrieb erfolgen. Die Taktzeiten des Prüfstands werden somit kurz gehalten. Für die Prüfung wird der Motor über ein Niederflurfördersystem von der Produktionslinie auf einer Palette vollautomatisch an den Prüfstand geliefert. Der Motor wird im Rüstbereich an die Medienversorgungen Kühlwasser, Motoröl, Ladeluft etc. angeschlossen und es wird eine Verbindung mit dem Motorsteuergerät aufgebaut. Anschließend wird die Palette in die Prüfzelle geschwenkt. Der Motor wird vollautomatisch über eine Bogenzahnkupplung mit dem Wellenstrang des Prüfstands bzw. der Belastungsmaschine verbunden. Die Prüfung der VKM erfolgt in zwei Schritten. Zu Beginn wird der

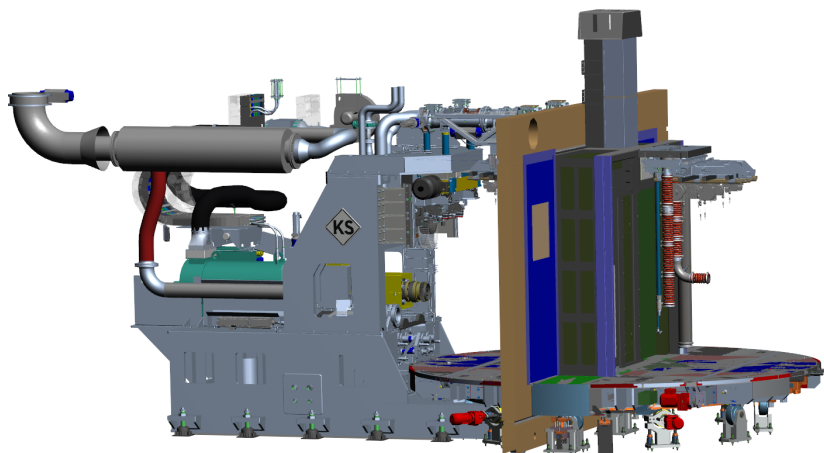


Abbildung 2.4: Versuchsprüfstand EOL: 3D-Modell

Kalttest (geschleppter, ungefeuerter Betrieb) durchgeführt. Die mittels Frequenzumrichter gespeiste Antriebsmaschine wird drehzahl geregelt betrieben. Der Prüfling wird

2.1 Prüfstände

im unteren Drehzahlbereich (Drehzahlen bis 500 1/min) bei abgeschalteter Zündung von der Antriebsmaschine geschleppt. Hierbei wird der Momentenverlauf über einen Drehmomentmessflansch gemessen. Zusätzlich werden einige charakteristische Kenngrößen (beispielsweise Druckverläufe von Ansaugunterdruck, Abgasgedruck, etc.) über den Kurbelwinkel aufgelöst und aufgezeichnet. Aus den aufgenommenen Kenngrößen kann mithilfe statistischer Methoden auf etwaige Fehlerbilder geschlossen werden. Die aufgenommenen Werte geben somit schon im Vorhinein Aufschluss über etwaige Fehler des Prüflings. Im zweiten Prüfschritt wird der Prüfling gestartet und mittels Heißtest (gefeuerter Betrieb) geprüft. Während des Heißtests wird der Motoreinlauf vorgenommen, eine Volllastkurve aufgezeichnet und die Parametrierung des Motorsteuergeräts abgestimmt.

Der Prüfstand muss so ausgelegt sein, dass beide Testläufe für sämtliche Prüflinge mit dem gleichen Wellenstrang betrieben werden können. Die Prüflinge variieren dabei von 4-Zylinder Motoren (Massenträgheit $J_L \approx 1 \text{ kgm}^2$) bis zu 6-Zylinder Motoren (Massenträgheit $J_L \approx 2.8 \text{ kgm}^2$). Der Wellenstrang verfügt über eine elastische Kupplung zur Reduktion der Drehmomentstöße und einen Messflansch zur Messung des auftretenden Drehmoments (siehe Abb. 2.5). Die Anbindung an die Belastungsmaschine erfolgt

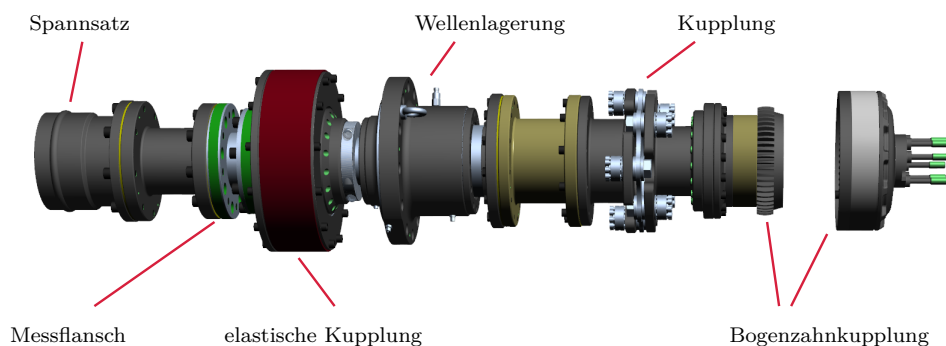


Abbildung 2.5: Versuchsprüfstand EOL: Wellenstrang

über einen Spannsatz. Die Daten der einzelnen Komponenten des Wellenstrangs und die im Rahmen der Simulationsstudien verwendeten Simulationsparameter können Tabelle A.1 im Anhang entnommen werden. Je nach Prüfling liegt die erste Eigenfrequenz des Wellenstrangs bestehend aus Belastungsmaschine, Wellenverbindung und Prüfling zwischen 18 Hz und 23 Hz. Bei dieser Frequenz schwingt die Antriebsmaschine über die elastische Kupplung gegen das Schwungrad des Prüflings (siehe Modenplot³ in Abb. 2.6). Die zweite Eigenfrequenz liegt bei ca. 212 Hz. Der Messflansch schwingt zwischen der Antriebsmaschine und dem restlichen Wellenstrang.

³Für weiter Infos über den Modenplot und dessen Erstellung siehe [43].

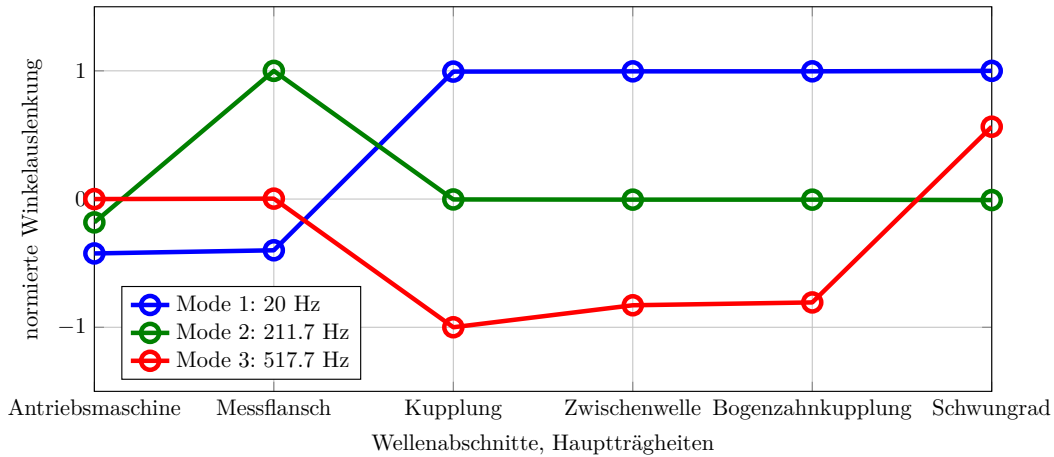


Abbildung 2.6: Versuchsprüfstand EOL: Schwingungsmoden

Bei näherer Betrachtung der beiden Testszenarien zeigt sich, dass der Heißtest hinsichtlich der auftretenden Drehschwingung unkritisch ist. Der Wellenstrang ist so ausgelegt, dass er im Heißtest für sämtliche Prüflinge überkritisch betrieben wird. Die erste Resonanzfrequenz liegt unter der charakteristischen Anregung bei Leerlaufdrehzahl der jeweiligen Motoren und sollte im Heißtest nicht angeregt werden. Die Ordnung der Anregung ist abhängig von der Zylinderanzahl des Prüflings. Durch die Funktionsweise des Viertaktmotors ergibt sich bei einer VKM mit 4 Zylindern eine Hauptanregung 2. Ordnung und bei einer VKM mit 6 Zylindern eine Hauptanregung 3. Ordnung von der Motordrehzahl [82, 86].

Beim Kalttest wird der Prüfling vom Stillstand aus auf die geforderten Drehzahlen geschleppt. Die erste Eigenfrequenz des Wellenstrangs wird durch die Drehmomentungleichförmigkeiten in Folge der Kompression auch bei ungefeuerten Motor unweigerlich angeregt. Wird die Resonanzfrequenz angeregt, kommt es durch die geringe Eigendämpfung des Wellenstrangs zu großen Drehmomentamplituden. Diese können zur Beschädigung des Prüflings oder des Prüfstands führen und Messergebnisse im betreffenden Bereich verfälschen. Insbesondere die Bogenzahnkupplung zur Verbindung des Wellenstrangs mit dem Prüfling wird durch die auftretenden Drehmomentspitzen stark belastet. Dies zeigt sich am erhöhten Verschleiß der Kupplung ohne entsprechende Dämpfungsmaßnahme. Als Abhilfe wird der Wellenstrang während beider Tests mit einer aktiven Zusatzdämpfung gedämpft. Diese soll die Drehmomentspitzen effektiv reduzieren und muss durch die wechselnden Prüflingstypen zugleich sehr robust gegenüber Parameterunsicherheiten sein. Der für die Erprobungen der einzelnen Dämpfungsvarianten verwendete Messaufbau und der detaillierte Versuchsablauf samt Simulationsparametern können Anhang A entnommen werden.

2.1.2 Rollenprüfstand

Allgemein

Bei Rollenprüfständen werden die Räder des Fahrzeugs auf der Rolle bzw. den Rollen des Prüfstands positioniert. Die Kraftübertragung zwischen Fahrzeug und Prüfstand erfolgt über den Reifen (siehe Abb. 2.7 und 2.8). Der Prüfstand nimmt die abgege-



Abbildung 2.7: Zweirad-Rollenprüfstand mit autom. Fahrer

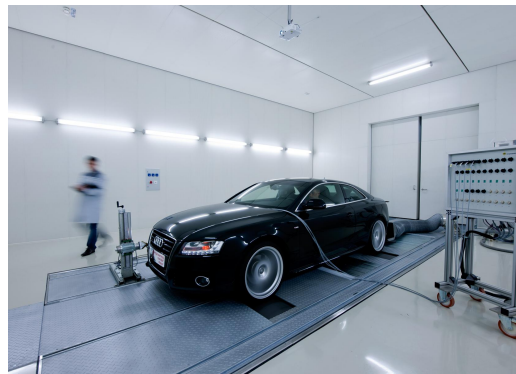


Abbildung 2.8: Allrad-Rollenprüfstand

bene Leistung des Fahrzeugs entweder durch die Schwungmasse der Rolle oder durch eine Kombination aus Schwungmasse der Rolle und einer an die Rolle gekoppelten Belastungs- bzw. Antriebsmaschine auf [12]. Für moderne Prüfstandsanwendungen kommt aufgrund der größeren Flexibilität hauptsächlich zweite Variante zum Einsatz. Die abzubildende Fahrzeugmasse und der Fahrwiderstand können dabei mithilfe der zusätzlichen Antriebsmaschine(n) flexibel eingestellt werden. Die Differenz zwischen real verbauter, äquivalenter Rollenmasse und gewünschter Fahrzeugmasse wird mithilfe der elektrischen Massensimulation aufgebracht. Der abzubildende Fahrwiderstand gehorcht der Straßenlastgleichung

$$F = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + m \frac{dv}{dt} + mg \sin \alpha, \quad (2.1)$$

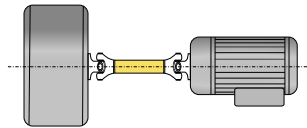
mit der Zugkraft F , der Fahrzeugmasse m , der Geschwindigkeit v , den Widerstandskoeffizienten a_0 bis a_2 , der Erdbeschleunigung g und der Straßensteigung α [79]. Rollenprüfstände können vielseitig eingesetzt werden. Die möglichen Anwendungen reichen von regionenspezifischen Zertifizierungsläufen und Normtests für Abgasemissionen⁴, Analyse von Verbrauch oder Leistung [12], Dauerlauf und Dauerfestigkeit,

⁴Zertifizierungsläufe für Abgasemissionen müssen bis zum aktuellen Zeitpunkt laut Gesetz sogar zwingend auf Rollenprüfständen durchgeführt werden. Durch den aktuellen Abgasskandal wird es aber in Zukunft eine Verlagerung hin zu Straßentests und der Bestimmung von realen Emissionen (Real Driving Emissions) geben [7, 22].

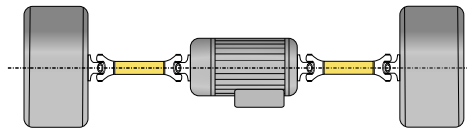
NVH-Messungen [1, 69] bis hin zu Entwicklungstests und Tests zur Systemvalidierung [42, 97]. Obwohl Abgasemissionstests und Homologationstests zur Neuzulassung von Fahrzeugen ohne Zweifel den häufigsten Anwendungsfall darstellen [79], entwickeln sich Rollenprüfstände immer mehr vom reinen Zertifizierungswerkzeug hin zu Entwicklungsplattformen zur Kalibrierung, Systemoptimierung und Systemvalidierung [24, 97] bei denen beliebige Fahrsituationen möglichst realitätsnah nachgebildet werden sollen [85, 129, 136].

Je nach Ausführung können mit Rollenprüfständen verschiedenste Fahrzeugtypen erprobt werden. Das Spektrum reicht von Motorrädern und Kleinstfahrzeugen über PKW, LKW bis hin zu Arbeits- und Sondermaschinen. Der Rollenprüfstand muss an den Fahrzeugtyp bzw. die Prüfaufgabe angepasst sein. Für die Auslegung hinsichtlich Rollengeometrie sind vor allem die Fahrzeugmasse und die zu erwartende Höchstgeschwindigkeit relevant. Als Faustregel sollte die äquivalente Rollenmasse in etwa der Fahrzeugmasse entsprechen. Für größere Geschwindigkeiten werden in der Regel größere Rollendurchmesser verwendet um die Drehzahl geringer zu halten. Die zum Einsatz kommenden Konzepte können in die folgenden grundlegenden Rollen-, Achs- und Antriebsmaschinenkombinationen gegliedert werden [12, 97]:

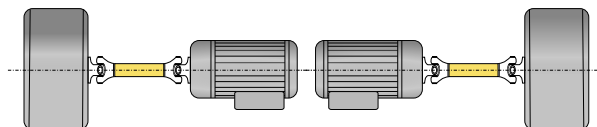
- 1x1x1: Eine Rolle auf einer Achse mit einer Antriebsmaschine (z. B. Zweiradprüfstand für Motorräder)



- 2x1x1: Zwei Rollen auf einer Achse mit einer gemeinsamen Antriebsmaschine (z. B. Fahrzeug mit Heckantrieb und Abgaszertifizierung)

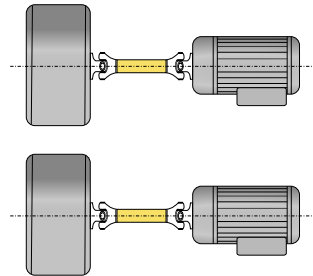


- 2x1x2: Zwei Rollen auf einer Achse mit zwei getrennten Antriebsmaschinen (z. B. Fahrzeug mit Heckantrieb und NVH-Messung)

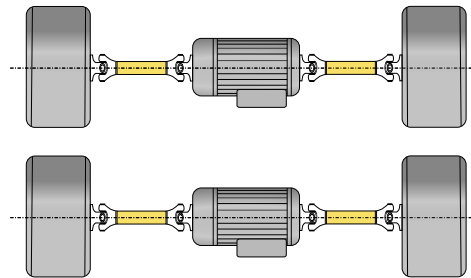


2.1 Prüfstände

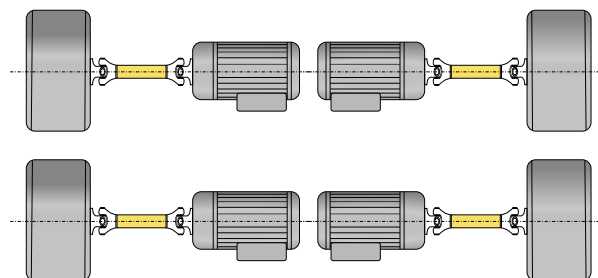
- 2x2x2: Zwei Rollen auf zwei Achsen mit zwei Antriebsmaschinen
(z. B. Prüfstand für Motorräder inkl. mitlaufendem Vorderrad, siehe Abb. 2.7)



- 4x2x2: Vier Rollen auf zwei Achsen mit zwei gemeinsamen Antriebsmaschinen
(z. B. Fahrzeug mit Allradantrieb und Abgaszertifizierung, siehe Abb. 2.8)



- 4x2x4: Vier Rollen auf zwei Achsen mit vier getrennten Antriebsmaschinen
(z. B. Fahrzeug mit Allradantrieb und NVH-Messung)



Die Antriebsmaschinen können dabei neben der Rolle, zwischen den Rollen oder in der Rolle (Motor ist als Außenläufer in die Rolle integriert) angeordnet werden [97]. Zur Fahrzeugkonditionierung vor und während der Prüfläufe kommen Fahrtwindlifter, Betankungsanlagen, Luftkonditionierer etc. zum Einsatz. Das abzuarbeitende Fahrprofil bestehend aus einem Geschwindigkeitssollwert, Steigung und zugehöriger Ganginformation wird dem Fahrer über ein Positionslitsystem vorgegeben. Der Fahrer versucht der Vorgabe innerhalb der zulässigen Toleranzbänder für die Geschwindigkeit

zu folgen. Für Dauerläufe wird häufig auf automatisierte Fahrer zurückgegriffen (siehe z. B. Abb. 2.7).

Versuchsprüfstand

Für die Versuche in dieser Arbeit wurde ein Rollenprüfstand für Motorräder (1x1x1 Konfiguration) mit einem optionalen automatischen Fahrer verwendet (siehe Abb. 2.9).

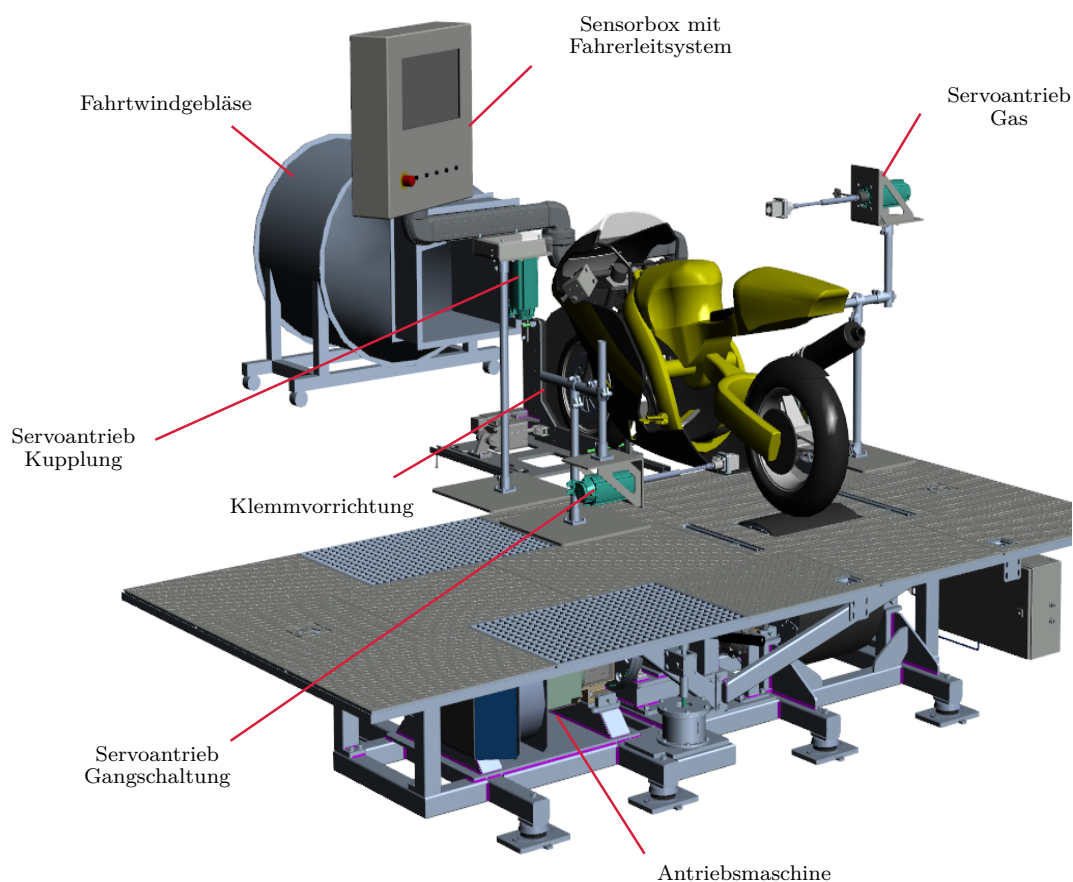


Abbildung 2.9: Versuchsprüfstand Rolle: 3D-Modell

Die Prüfläufe können demnach bemannt oder vom automatischen Fahrer durchgeführt werden. Das Motorrad wird mittels axial adjustierbarer Klemmvorrichtung am Vorderrad fixiert und mit dem Hinterrad auf der Rolle positioniert. Das Motorrad wird am Heck zur Stabilisation zusätzlich durch Spanngurte fixiert. Für die Kühlung des Prüflings steht ein Fahrtwindgebläse zur Verfügung, das zur Nachbildung des Fahrtwindes geschwindigkeitsabhängig geregelt werden kann. Die nachzufahrenden Geschwindigkeitsprofile werden auf dem Fahrerleitsystem direkt vor dem Motorrad

2.1 Prüfstände

visualisiert. Bei Verwendung des automatischen Fahrers werden die Gasstellung, die Kupplung und die Schaltkommandos von Servoantrieben vorgegeben. Prüfläufe können vollautomatisch ohne Bedienpersonal nachgefahren werden. Die Reproduzierbarkeit von Messergebnissen wird dadurch gegenüber dem Betrieb mit manuellem Fahrer signifikant verbessert. Über die Sensorbox können die Motordrehzahl sowie zusätzliche Messgrößen (z. B. Öltemperatur, Kühlwassertemperatur etc.) aufgezeichnet werden.

Der Stahlrollenkörper hat einen Durchmesser von 24 Zoll (0,6096 m) und ist über einen Wellenstrang direkt mit der Antriebsmaschine verbunden (siehe Abb. 2.10). Der Wellenstrang besteht aus einer Gelenkwelle (Kardanwelle), einem Drehmoment-

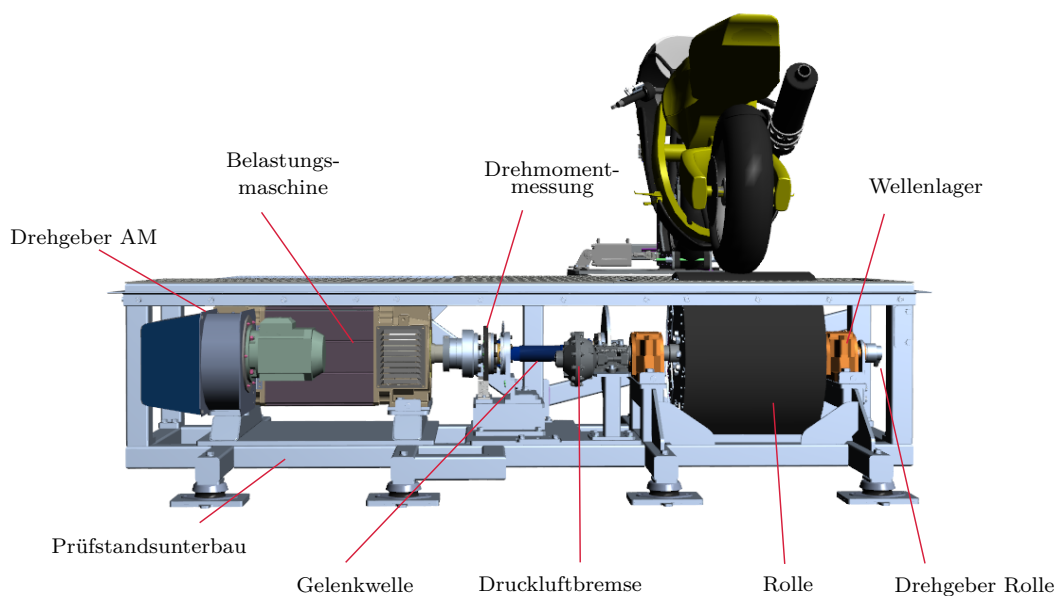


Abbildung 2.10: Versuchsprüfstand Rolle: Wellenstrang

messflansch zur Messung des auftretenden Drehmoments und einer Bremsscheibe mit Druckluftbremseinrichtung zum mechanischen Festbremsen der Rolle im Stillstand. Die Drehzahl wird an zwei Stellen im Wellenstrang gemessen. Ein Drehgeber sitzt direkt an der Antriebsmaschine. Dieser wird für die Drehzahlregelung der Antriebsmaschine verwendet. Am anderen Ende des Wellenstrangs sitzt ein zusätzlicher Drehgeber, mit dem die Drehzahl direkt an der Rolle gemessen wird. Die Anordnung bietet gegenüber der Verwendung nur eines Drehgebers auf der Antriebsmaschine den Vorteil, dass die für die Massen- und Fahrwiderstandssimulation notwendige Rollendrehzahl direkt an der Rolle gemessen wird und nicht durch den Wellenstrang gedämpft wird. Zudem kann die durch Schwingung bzw. bei dynamischem Betrieb auftretende Differenzwinkelgeschwindigkeit direkt berechnet und mit den Schätzergebnissen der vorgestellten

Varianten zur Zustandsschätzung (siehe Kapitel 4 und 5) verglichen werden. Die Daten der einzelnen Komponenten des Wellenstrangs und die verwendeten Simulationsparameter können Tabelle B.1 im Anhang entnommen werden. Die erste Eigenfrequenz des Wellenstrangs liegt bei ca. 40 Hz. Bei dieser Frequenz schwingt die Antriebsmaschine über die Gelenkwelle gegen den Rollenkörper. Die zweite Eigenfrequenz liegt bei ca. 270 Hz. Die Bremsscheibe schwingt zwischen der Rolle und dem restlichen Wellenstrang (siehe Modenplot in Abb. 2.11). Durch dynamische Lastwechsel, beispielsweise bei

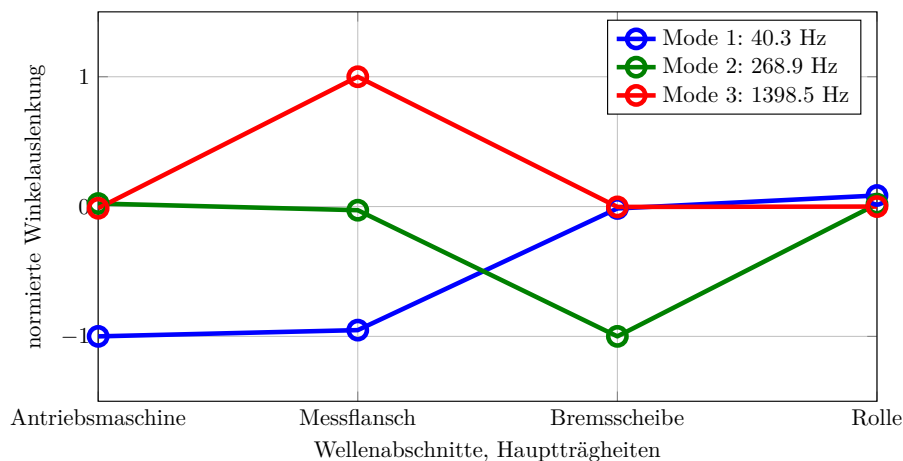


Abbildung 2.11: Versuchsprüfstand Rolle: Schwingungsmoden

einer Vollastbeschleunigung mit Schaltungen oder bei starken Bremsungen mit der Fahrzeugbremse, wird die erste Eigenfrequenz des Wellenstrangs angeregt. Die auftretenden Drehmomentspitzen belasten einerseits die Mechanik des Prüfstands und können andererseits das simulierte Fahrverhalten beeinträchtigen und die Messergebnisse verfälschen. Aus diesem Grund soll für die Entwicklung eines neuen hochdynamischen Antriebskonzepts eine aktive Zusatzdämpfung entwickelt werden, die die für derartige Rollenprüfstände verhältnismäßig hohe erste Resonanzfrequenz effektiv dämpfen kann. Der für die Erprobungen der einzelnen Dämpfungsvarianten verwendete Messaufbau und der detaillierte Versuchsablauf können Anhang B entnommen werden.

2.2 Modellierung

Bei der Verbindung von Antriebsmaschine und Last über eine elastische Welle handelt es sich um ein mechanisches Schwingungssystem. In Abhängigkeit der Massenanzahl n des betrachteten Systems ergeben sich $n - 1$ Resonanzfrequenzen für den Wellenstrang, die zumeist nur eine sehr geringe Dämpfung aufweisen. Kommt es zwischen den Enden des Wellenstrangs zu einer ungleichen Drehmomentbelastung, so wird diese in

2.2 Modellierung

Form einer Torsionsschwingung ausgeglichen. Die auftretende Schwingung dauert so lange an, bis sich ein neues stationäres Gleichgewicht eingestellt hat und weist genau jene Frequenzanteile auf, die durch die mechanischen Eigenfrequenzen beschrieben werden [139, 146].

Für die meisten praktischen Anwendungsfälle im Prüfstandsbereich ist vor allem die erste dominante Eigenfrequenz relevant. Für die Modellbildung im Rahmen einer regelungstechnischen Analyse und der weiterführenden Umsetzung der Schwingungsdämpfung ist es somit ausreichend, den zumeist aus mehreren Einzelmassen und Federelementen bestehenden Wellenstrang als Zwei-Massen-Schwinger zu modellieren. Die Verbindungswelle zwischen den beiden Massen ist dabei masselos und weist lineares Verhalten hinsichtlich Wellensteifigkeit und -dämpfung auf. Etwaige Lagerreibung wird vernachlässigt. Durch die Modellierung wird der Anwendungsbereich der vorgestellten Dämpfungsvarianten nicht eingeschränkt. Sämtliche Prüfstände, bei denen eine Last über einen elastischen Wellenstrang mit einer Antriebsmaschine verbunden ist, können auf diese Weise abgebildet werden, so auch die Wellenstränge der beiden Versuchsprüfstände (siehe Abb. 2.12).

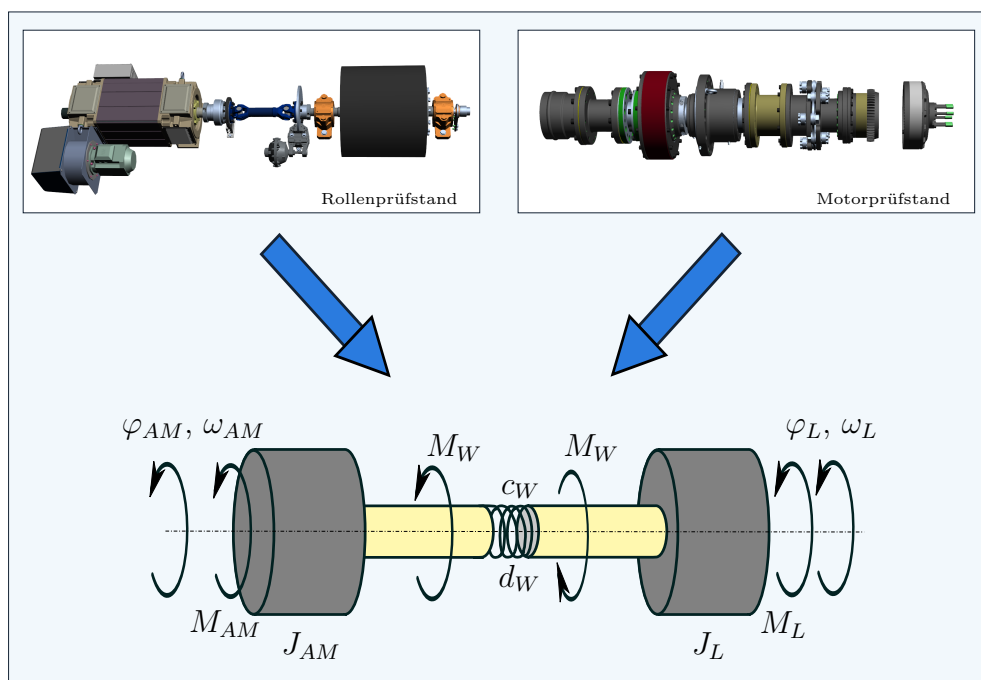


Abbildung 2.12: Modellierung Zwei-Massen-Schwinger

Die Richtung von M_{AM} wird gleich wie die Richtung von φ_{AM} angenommen. Wird für die Drehzahlregelung des Wellenstrangs ein Standardregler verwendet, so führt eine positive Regelabweichung zu einem positiven Antriebs- bzw. Luftspaltpmoment M_{AM} .

Für das vereinfachte Modell ergeben sich mithilfe des Drallsatzes die vier Differentialgleichungen:

$$\frac{d\varphi_{AM}}{dt} = \omega_{AM}, \quad (2.2) \quad J_{AM} \frac{d\omega_{AM}}{dt} = M_W + M_{AM}, \quad (2.4)$$

$$\frac{d\varphi_L}{dt} = \omega_L, \quad (2.3) \quad J_L \frac{d\omega_L}{dt} = M_L - M_W \quad (2.5)$$

mit dem Trägheitsmoment der Antriebsmaschine J_{AM} , dem Trägheitsmoment der Last J_L , dem Antriebsmoment M_{AM} und dem Lastdrehmoment M_L . Das Wellenmoment M_W resultiert aus:

$$M_W = -c_W(\varphi_{AM} - \varphi_L) - d_W(\omega_{AM} - \omega_L), \quad (2.6)$$

wobei die Konstanten c_W und d_W der Drehsteifigkeit und der Dämpfung des Wellenstrangs entsprechen [131]. Das Wellenmoment M_W kann beispielsweise mit einem Drehmomentmessflansch gemessen werden und entspricht der Ausgangsgröße des Systems. Für das Modell 4. Ordnung in Matrixschreibweise ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{AM} \\ \omega_{AM} \\ \varphi_L \\ \omega_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_W}{J_{AM}} & -\frac{d_W}{J_{AM}} & \frac{c_W}{J_{AM}} & \frac{d_W}{J_{AM}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_W}{J_L} & \frac{d_W}{J_L} & -\frac{c_W}{J_L} & -\frac{d_W}{J_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{AM} \\ \omega_{AM} \\ \varphi_L \\ \omega_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{AM}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AM} \\ M_L \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$M_W = \begin{bmatrix} -c_W & -d_W & c_W & d_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{AM} \\ \omega_{AM} \\ \varphi_L \\ \omega_L \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Um die Eigenschaften bzw. charakteristischen Größen (Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Eigenwerte, charakteristisches Polynom, Übertragungsfunktion) des Systems besser zu erkennen, unterwirft man es einer (regulären) Zustandsvariablentransformation. Führt man die Größen ξ_1 und ξ_2 gemäß

$$J_{AM}\varphi_{AM} + J_L\varphi_L =: \xi_1, \quad (2.9)$$

$$J_{AM}\omega_{AM} + J_L\omega_L =: \xi_2 \quad (2.10)$$

2.2 Modellierung

und die Größen x_1, x_2 gemäß

$$x_1 := \varphi_{AM} - \varphi_L, \quad (2.11)$$

$$x_2 := \omega_{AM} - \omega_L \quad (2.12)$$

ein, so ergibt sich das zu (2.7) und (2.8) äquivalente Modell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & -d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{AM}} & -\frac{1}{J_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AM} \\ M_L \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$M_W = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -c_W & -d_W \end{array} \right] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Die Systemmatrix aus (2.13) entspricht einer Matrix in Blockdiagonalstruktur, wobei die jeweilige Systemmatrix der Teilsysteme in Begleitform vorliegt. Es ist ersichtlich, dass sich die Eigenwerte der beiden Teilsysteme unterscheiden und das System steuerbar bezüglich der Eingänge M_{AM} und M_L ist. Das System ist nicht beobachtbar, da aus dem Ausgangssignal M_W nur x_1 und x_2 rekonstruiert werden können.

Die Lage der Eigenwerte kann ebenfalls unmittelbar aus (2.13) abgelesen werden. Das System besitzt einen doppelten Eigenwert bei $s = 0$ und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte. Sie bilden das schwingfähige Verhalten des Wellenstrangs ab. Für eine gewünschte maximale Dämpfung müsste der Winkel, den die Eigenwerte mit dem Ursprung aufspannen, Null sein. In diesem Fall sind alle Eigenwerte rein reell und der Dämpfungsgrad $\zeta = 1$. Dieser Zustand entspricht dem aperiodischen Grenzfall. In der Praxis tritt dieser Fall durch die begrenzte Eigendämpfung des Wellenstrangs nie auf. Trotzdem wird versucht, den Imaginärteil der beiden konjugiert komplexen Eigenwerte durch zusätzliche Dämpfungsmaßnahmen so klein wie möglich zu machen. Die Eigenwerte bewegen sich mit zunehmender Dämpfung auf einer Kreisbahn in Richtung der reellen Achse (siehe Abb. 2.13) [139]. Befinden sich die Eigenwerte auf der reellen Achse ist die maximale Dämpfung erreicht (aperiodischer Grenzfall). Eine

zusätzliche Erhöhung des Dämpfungsgrads würde zu einer Verschiebung der Eigenwerte auf der reellen Achse führen. Dadurch wird die Dämpfung nicht mehr erhöht. Die Systemantwort wird dadurch jedoch verlangsamt. Für das charakteristische Polynom

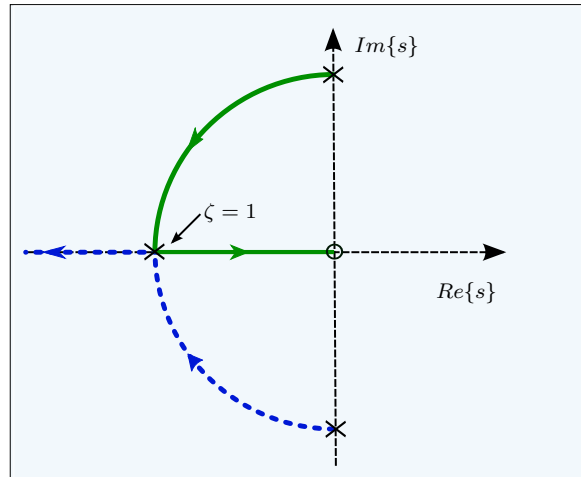


Abbildung 2.13: Wurzelortskurve Zwei-Massen-Schwinger

$\Delta(s)$ der Systemmatrix aus (2.13) ergibt sich unmittelbar:

$$\Delta(s) = s^2 \left[s^2 + d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) s + c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) \right]. \quad (2.15)$$

Die resultierende Übertragungsfunktion zwischen M_L und M_W kann aufgrund der vorteilhaften Struktur von (2.13) leicht abgelesen werden. Das System besitzt zwei Übertragungsnullstellen bei $s = 0$ und eine Übertragungsnullstelle bei $s = -\frac{c_W}{d_W}$. Die Eigenwerte bei $s = 0$ kürzen sich mit den Übertragungsnullstellen bei $s = 0$ und es folgt:

$$P(s) = \frac{M_W(s)}{M_L(s)} \Big|_{AW=0} = \frac{1}{J_L} \frac{d_W s + c_W}{s^2 + d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) s + c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right)}. \quad (2.16)$$

Die Kürzung verdeutlicht, dass die Beobachtbarkeit, wie zuvor beschrieben, nicht gegeben ist.

In der Literatur wird häufig ein Modell 3. Ordnung verwendet, da die Werte der Winkel φ_{AM} und φ_L selten von Interesse sind. In den meisten Fällen ist es ausreichend die Differenz der beiden Winkel $\Delta\varphi = \varphi_{AM} - \varphi_L$ anzusetzen. Dadurch kann das Modell aus (2.7) und (2.8) reduziert werden und es resultiert ein Modell 3. Ordnung. Für das Modell 3. Ordnung mit der neuen Zustandsgröße $\Delta\varphi = \varphi_{AM} - \varphi_L$ folgt:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \omega_{AM} \\ \omega_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{c_W}{J_{AM}} & -\frac{d_W}{J_{AM}} & \frac{d_W}{J_{AM}} \\ \frac{c_W}{J_L} & \frac{d_W}{J_L} & -\frac{d_W}{J_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \omega_{AM} \\ \omega_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{AM}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AM} \\ M_L \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$M_W = \begin{bmatrix} -c_W & -d_W & d_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \omega_{AM} \\ \omega_L \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Diese Vorgehensweise bringt einen entscheidenden Vorteil mit sich. Bei der Verwendung des Modells 4. Ordnung in numerischen Simulationen können die Winkel φ_{AM} und φ_L nach einiger Zeit betragsmäßig große Werte annehmen. Fließen diese Werte in weitere Berechnungen ein, kann es zu numerischen Ungenauigkeiten bei der Simulation kommen. Durch die Verwendung von $\Delta\varphi$ als Zustandsgröße fließt nur die Differenz der beiden Winkel ein. Im Normalfall ist diese betragsmäßig klein und die angesprochenen Probleme bei der numerischen Simulation werden im Allgemeinen vermieden.

Analog zur Analyse der Steuerbarkeit für das Modell 4. Ordnung lässt sich für das Modell 3. Ordnung nachweisen, dass das System steuerbar bezüglich der Eingänge M_{AM} und M_L ist. Das System ist, aus demselben Grund wie für das Modell 4. Ordnung beschrieben, nicht beobachtbar.⁵ Die resultierende Übertragungsfunktion ist ident mit jener des Systems 4. Ordnung aus (2.16).

Für die Schwingungsdämpfung mittels kompensierender Momentenaufschaltung wird der Antriebsmaschine ein der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten zwischen Antrieb und Last $\Delta\omega = \omega_{AM} - \omega_L$ proportionales Dämpfungsmoment aufgeschaltet. Da die beiden Winkelgeschwindigkeiten ω_{AM} und ω_L für diese Art der Zusatzdämpfung nicht explizit benötigt werden, kann das Modell vereinfacht werden, und es folgt direkt aus (2.13) und (2.14):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & -d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{AM}} & -\frac{1}{J_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AM} \\ M_L \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$M_W = \begin{bmatrix} -c_W & -d_W \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.20)$$

⁵Für den Entwurf eines Zustandsbeobachters ist die Beobachtbarkeit eine unabdingbare Systemeigenschaft. Für die Modelle aus (2.7) und (2.8) sowie (2.17) und (2.18) kann aus diesem Grund kein geeigneter Beobachter entworfen werden. Als Abhilfe kann das System um eine zusätzliche Ausgangsgröße ω_{AM} erweitert werden. Dadurch wird das System beobachtbar. Im Laufe von Simulationsstudien hat sich jedoch gezeigt, dass diese Vorgehensweise keine Vorteile gegenüber der nachfolgend beschriebenen bringt.

mit dem Differenzwinkel $\Delta\varphi = \varphi_{AM} - \varphi_L$ und der zugehörigen Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega = \omega_{AM} - \omega_L$ als Zustandsgrößen. Für die Übertragungsfunktion zwischen M_L und M_W erhält man die Übertragungsfunktion aus (2.16). Da die Systemmatrix in Begleitform vorliegt, lautet das charakteristische Polynom:

$$\Delta(s) = s^2 + d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) s + c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) \quad (2.21)$$

$$= s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 \quad (2.22)$$

mit

$$\omega_0 := \sqrt{c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right)} \quad (2.23)$$

und

$$\zeta := \frac{d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right)}{2\sqrt{c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right)}} = \frac{d_W}{2c_W} \omega_0. \quad (2.24)$$

Unter der Voraussetzung $0 < \zeta < 1$ folgt ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar:

$$s_{1,2} = \omega_0 \left(-\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad (2.25)$$

mit ω_0 als Resonanzfrequenz bzw. Kennkreisfrequenz [23] und ζ als Dämpfungsgrad. Durch die geringe Eigendämpfung der Wellenverbindung ist obige Voraussetzung in der Praxis immer erfüllt. Realistische Werte für den Dämpfungsgrad liegen bei 10-20%. Dadurch kann davon ausgegangen werden, dass derartige Wellenstränge immer schwingfähige Systeme mit konjugiert komplexen Eigenwerten darstellen [139]. Um Resonanzüberhöhungen⁶ dennoch effektiv dämpfen zu können, wird der Dämpfungsgrad durch die nachfolgend vorgestellte Zusatzdämpfung künstlich erhöht. Durch die Reduktion auf ein einfaches Modell mit zwei Massen kann die aktive Dämpfung der ersten Resonanzfrequenz gut untersucht werden. Das erhaltene Modell ist durch Wahl der einzelnen Parameter derart zu parametrieren, dass die erste dominante Resonanzfrequenz des Wellenstrangs gut nachgebildet wird [139]. Dieses Modell stellt die Basis für die in den nachfolgenden Abschnitten eingehend erörterte aktive Schwingungsdämpfung dar.

⁶Definition siehe [80] S. 221.

Übersicht gängiger Dämpfungsmethoden

Eine Drehschwingung infolge der Anregung von Resonanzfrequenzen kann nicht nur bei Prüfständen beobachtet werden, sondern tritt in sämtlichen Anwendungsbereichen auf, in denen eine Last über einen Wellenstrang mit einer Antriebsmaschine gekoppelt ist. Es kommt beispielsweise in der Papierindustrie [77, 93, 127, 128], bei Wellensträngen von Kraftwerksturboätzen [146], bei der Regelung hochdynamischer Servoantriebe [78, 83, 126, 132, 138], bei Walzwerken in der Stahlproduktion [48, 95, 135], bei Fahrzeugtriebsträngen [2, 5, 13] oder bei der Lageregelung von Teleskopen [32] zu ähnlichen Effekten. Zur Vermeidung von mechanischen Schäden oder Einschränkungen der Prozessqualität muss die Drehschwingung so gut wie möglich gedämpft werden.

Die Antriebsmaschine wird häufig drehzahl geregelt betrieben und ist an ein schwingfähiges System gekoppelt, dessen Zustände im Allgemeinen nicht direkt messbar sind. Vor dem Hintergrund dieser Ausgangslage stellt die effektive Drehschwingungsdämpfung eine auf dem Gebiet der Regelungstechnik sehr interessante Aufgabenstellung dar. In den letzten Jahrzehnten haben sich viele Wissenschaftler mit dem Thema auseinandergesetzt und zahlreiche Varianten zur Schwingungsdämpfung bzw. -unterdrückung sowie Zustandsschätzung in derartigen Systemen vorgestellt. Die publizierten Verfahren können grob in drei Gruppen unterteilt werden. Obwohl der Einsatz passiver Filter keine Dämpfungsmethode im engeren Sinn darstellt, wird diese Methode in der Literatur durch die Unterbindung bzw. Reduktion der Schwingungsanregung häufig im Zusammenhang mit der Thematik der Schwingungsdämpfung diskutiert und wird der Vollständigkeit halber erwähnt. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Drehzahlregelung durch Platzierung der Eigenwerte mittels Polvorgabe zu optimieren. Die Hauptgruppe stellen aber Varianten mit der Rückkopplung von einer oder mehreren Zustandsgrößen zur Schwingungsdämpfung dar. Neben diesen Gruppen existieren noch weitere Verfahren wie beispielsweise die Dämpfung durch den Einsatz einer modellprädiktiven Regelung [18, 19, 30]. Diese spielen aber eine eher untergeordnete Rolle und

werden deshalb an dieser Stelle nur aus Gründen der Vollständigkeit erwähnt. Die drei Hauptgruppen werden in den folgenden Kapiteln im Detail beschrieben.

3.1 Reduktion der Schwingungsanregung mittels passiver Filter

Als verhältnismäßig einfache Variante im Umgang mit Resonanzfrequenzen kommen Sperrfilter (z. B. Notchfilter, Bandsperren) [55, 93, 110, 132, 134], biquadratische Filter [27] oder Transversal- bzw. digitale FIR-Filter [10, 93, 132] zum Einsatz. Die Filter werden in die Regelschleife inkludiert, um die Verstärkung gewisser Frequenzanteile durch die Regelung zu unterdrücken (siehe Abb. 3.1). Sperrfilter müssen dabei exakt auf

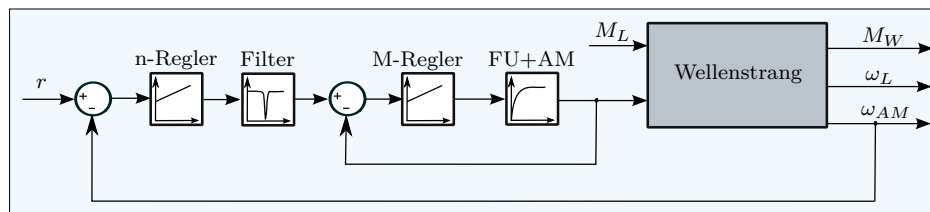


Abbildung 3.1: Einsatz passiver Filter

die zu unterdrückende Resonanzfrequenz abgestimmt sein. Der Frequenzbereich, in dem das Filter aktiv ist, sollte so klein wie möglich gewählt werden, um die vom Filter verursachte Phasenverschiebung auf einen möglichst kleinen Frequenzbereich zu beschränken und die Regelung bei anderen Frequenzen nicht unnötig zu beeinflussen. Die daraus resultierende, geringe Robustheit gegenüber Änderungen der Resonanzfrequenz wirkt sich nachteilig aus. Bei einer Änderung der Resonanzfrequenz z. B. durch einen Prüfungswechsel verlieren die Filter an Effizienz und müssen an die neue Situation angepasst werden. Bei der Anregung von niederfrequenten Resonanzfrequenzen $\omega_0 < 50$ Hz ist die Frequenz der resultierenden Schwingung meist nicht exakt auf die Resonanzfrequenz konzentriert. Neben der eigentlichen Resonanzfrequenz werden weitere Frequenzen in unmittelbarer Nähe der Resonanzfrequenz angeregt. Der Einsatzbereich von Sperrfiltern ist somit eher auf höherliegende Resonanzfrequenzen eingeschränkt. Biquadratische Filter haben typischerweise zwei Pole und zwei Nullstellen, die unabhängig voneinander positioniert werden können. Das Verhalten kommt einem Hochpassfilter in Serie mit einem Tiefpassfilter gleich. Mit diesem Filtertyp können Frequenzanteile effektiv unterdrückt werden. Die Phasenverschiebung ist aber geringer als bei einem Tiefpassfilter [27]. Digitale FIR-Filter können so entworfen werden, dass sie bei der parametrisierten Resonanzfrequenz durch die zeitliche Verschiebung um die halbe Periodendauer gegenphasig zur Resonanz schwingen und die Schwingung dadurch kompensieren bzw. filtern. Die Variante weist eine vergleichsweise geringe Phasenverschiebung auf [93].

Durch den Einsatz von passiven Filtern kann die auftretende Schwingung nicht aktiv gedämpft werden. Es kann lediglich eine mögliche Anregung bzw. Verstärkung der Schwingung durch die Regelung z. B. bei unzureichender Parametrierung des Drehzahlreglers verhindert werden. Je nach Parametrierung des Reglers kann es zu einer Verschlechterung oder Verbesserung kommen. Die Verfahren mit Filter stoßen bei Anregung durch die Last oder variabler Resonanzfrequenz schnell an ihre Grenzen und werden aus diesem Grund für die Anwendung bei Prüfständen nicht weiter verfolgt.

3.2 Verbesserung der Drehzahlregelung

Für die Drehzahlregelung kommt in der Antriebstechnik häufig ein PI-Regler zum Einsatz. Der P- und I-Anteil können mithilfe von Optimierungsverfahren so gewählt werden, dass die Pole des geschlossenen Kreises an günstigen Positionen liegen und das Dämpfungsverhalten verbessert wird. Für die Übertragungsfunktion zwischen der gemessenen Maschinendrehzahl bzw. Winkelgeschwindigkeit w_{AM} und dem durch die Antriebsmaschine eingebrachten Drehmoment M_{AM} des Systems aus (2.17) und (2.18) gilt:

$$\begin{aligned}
 P(s) &= \frac{\omega_{AM}(s)}{M_{AM}(s)} \Big|_{AW=0} \\
 &= \frac{1}{J_{AM}} \frac{s^2 + \frac{d_W}{J_L} s + \frac{c_W}{J_L}}{s \left[s^2 + d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) s + c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) \right]}. \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Geht man von einer vernachlässigbaren Eigendämpfung $d_W = 0$ aus, folgt mit dem PI-Regler

$$R(s) = k_P + k_I \frac{1}{s} \quad (3.2)$$

für die Führungsübertragungsfunktion:

$$\begin{aligned}
 T(s) &= \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \\
 &= \frac{k_P}{J_{AM}} \frac{s^3 + \frac{k_I}{k_P} s^2 + \frac{c_W}{J_L} s + \frac{k_I c_W}{k_P J_L}}{s^4 + \frac{k_P}{J_{AM}} s^3 + \left(\frac{c_W}{J_{AM}} + \frac{c_W}{J_L} + \frac{k_I}{J_{AM}} \right) s^2 + \frac{k_P c_W}{J_{AM} J_L} s + \frac{k_I c_W}{J_{AM} J_L}}. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Definiert man ein allgemeines Wunschpolynom mit zwei konjugiert komplexen Polpaaren

$$p(s) = (s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2)(s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2), \quad (3.4)$$

wobei ω_1 und ω_2 den Resonanzfrequenzen und ζ_1 und ζ_2 den zugehörigen Dämpfungsgraden entsprechen, können die Nullstellen des Polynoms basierend auf verschiedenen Optimierungskriterien festgelegt werden [14]. In der Literatur kommen Verfahren zur Anwendung, mit denen die Pole so positioniert werden, dass sie in der komplexen Ebene den gleichen Radius zum Ursprung d. h. die gleiche Resonanzfrequenz (siehe Abb. 3.2 links oben), den gleichen Dämpfungsgrad (siehe Abb. 3.2 rechts oben) oder den gleichen Realteil (siehe Abb. 3.2 links unten) aufweisen [143]. Bei der Positionierung muss ein

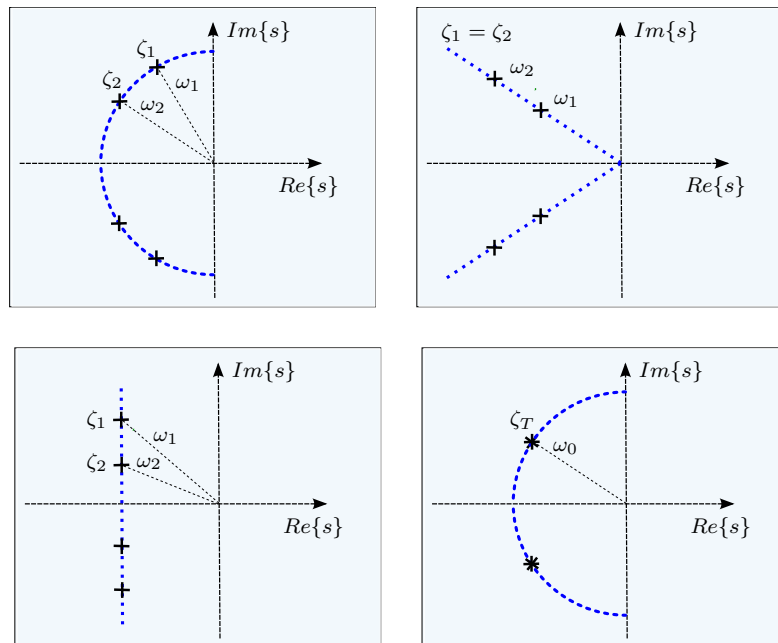


Abbildung 3.2: Optimierung der Drehzahlregelung: Varianten der Polvorgabe

Kompromiss zwischen möglicher Dynamik und Dämpfung eingegangen werden. Der mögliche Einsatzbereich der einzelnen Verfahren wird durch das vorliegende Verhältnis der Massenträgheiten $\frac{J_L}{J_{AM}}$ bestimmt. Bei einem Trägheitsverhältnis $\frac{J_L}{J_{AM}} < 1$ kann das System mit den vorgestellten Pollagen nicht mehr effektiv gedämpft werden [143]. Die Pole können beispielsweise aber auch nach dem Dämpfungsoptimum [111] vorgegeben werden, oder auf einer Ellipse positioniert werden [103]. Die Positionierung auf einer Ellipse soll laut [103] gegenüber der Positionierung auf dem Kreis zu einer effektiveren Dämpfung führen. Der Anwendungsbereich wird aber ebenfalls durch das Verhältnis der Massenträgheiten eingeschränkt [120]. Für kleine Massenträgheitsver-

hältnisse wird in der Literatur alternativ ein PID-Regler vorgeschlagen. Der D-Anteil verändert die Massenträgheit J_{AM} der Antriebsmaschine und in weiterer Folge das Trägheitsverhältnis virtuell und kann somit auch bei kleinen Trägheitsverhältnissen zu guten Ergebnissen führen. Aufgrund der Empfindlichkeit gegenüber Messrauschen ist die erzielbare Dynamik in der Praxis aber eingeschränkt [120, 143].

Anhand der vorgestellten Verfahren zur Positionierung der Pole ist ersichtlich, dass zwei unterschiedliche Resonanzfrequenzen, die sich je nach Wahl der Regelparameter des Drehzahlreglers ändern, resultieren können. Wünscht man sich nur eine konstante Resonanzfrequenz, kann das Wunschpolynom

$$p(s) = (s^2 + 2\zeta_T\omega_0s + \omega_0^2)(s^2 + 2\zeta_T\omega_0s + \omega_0^2) \quad (3.5)$$

mit einem doppelten konjugiert komplexen Polpaar (siehe Abb. 3.2 rechts unten) definiert werden. Aus dem Koeffizientenvergleich von (3.5) mit dem charakteristischen Polynom von (3.3) folgt für die einzelnen Parameter:

$$k_P = 2\sqrt{J_{AM}c_W}, \quad k_I = c_W \frac{J_{AM}}{J_L}, \quad \zeta_T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{J_L}{J_{AM}}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_W}{J_L}}. \quad (3.6)$$

Der resultierende Dämpfungsgrad des geschlossenen Kreises ζ_T ist nur vom Verhältnis der Massenträgheiten $\frac{J_L}{J_{AM}}$ abhängig und kann durch die Wahl von k_P und k_I nicht beeinflusst werden. Die Pole des Systems 4. Ordnung können durch die Vorgabe der beiden Regelparameter nicht unabhängig voneinander platziert werden.

Die Optimierung der Drehzahlregelung weist zusätzlich den entscheidenden Nachteil auf, dass die dämpfende Wirkung nur durch die optimierte Parametrierung erzielt wird. Wird die Antriebsmaschine momentengeregt betrieben, steht diese Art der Dämpfung nicht zur Verfügung. Die Pole des Systems 4. Ordnung können durch die beiden Regelparameter nicht frei vorgegeben werden, da der Grad der Führungsübertragungsfunktion größer als die Anzahl der verfügbaren Parameter ist. Damit die Dämpfung des geschlossenen Regelkreises bei Verwendung eines PI-Drehzahlreglers beliebig modifiziert werden kann, muss zumindest eine Zustandsrückführung eingefügt werden (siehe Abschnitt 3.3). Darüber hinaus stehen die Forderungen nach einer dynamischen Drehzahlregelung und der Schwingungsdämpfung häufig in Konflikt. Beim Entwurf der Drehzahlregelung muss hierbei meist ein Kompromiss eingegangen werden.

3.3 Schwingungsdämpfung durch Zustandsrückführung

Um den Dämpfungsgrad ζ_T effektiv beeinflussen zu können, muss zusätzlich zum PI-Regler zumindest eine Rückkopplung eingeführt werden. Zur freien Platzierung aller Pole müssen mindestens zwei Zustandsgrößen rückgekoppelt werden. Es ist aber darauf zu achten, dass die Resonanzfrequenz des Systems durch die Drehzahlregelung in Verbindung mit der zusätzlichen Rückführung nicht beeinflusst wird. Neben der Rückkopplung eines geschätzten Störmoments [48, 66, 89] kann das notwendige Dämpfungsmoment aus der Rückkopplung unterschiedlicher Zustandsgrößen bestimmt werden. In der Literatur werden das Wellenmoment M_W [142] und dessen Ableitung $\frac{dM_W}{dt}$ [115, 142] die Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ [93] und deren Ableitung $\frac{d\Delta\omega}{dt}$ [120] sowie die Winkelgeschwindigkeit der Last ω_L [93] und deren Ableitung $\frac{d\omega_L}{dt}$ [47, 142] für die Rückführung verwendet [117, 120].¹ Zusätzlich kann zwischen der Rückkopplung in den Drehzahlregler oder in die unterlagerte Drehmomentregelung unterschieden werden. In dieser Arbeit wird aus zuvor genannten Gründen nur die zweite Variante aufgegriffen. Die sechs Rückkopplungen können hinsichtlich deren Dynamik in zwei Gruppen (siehe Abb. 3.3: Gruppe A in blau und Gruppe B in grün) eingeteilt werden [120]. Die Rückführungen aus Gruppe A können durch den aus dem Drallsatz (2.4) und (2.5) resultierenden Zusammenhang der Größen

$$\frac{d\Delta\omega}{dt} \approx M_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right), \quad (3.7)$$

$$\frac{d\omega_L}{dt} \approx -M_W \frac{1}{J_L} \quad (3.8)$$

auf das Wellenmoment M_W reduziert werden und führen zur gleichen Form des charakteristischen Polynoms und somit zur selben Dynamik. Analog dazu können die Rückführungen von Gruppe B bei vernachlässigbarer Dämpfung $d_W \approx 0$ durch den aus (2.6) resultierenden Zusammenhang

$$\Delta\omega \approx -\frac{1}{c_W} \frac{dM_W}{dt} \quad (3.9)$$

auf das differenzierte Wellenmoment $\frac{dM_W}{dt}$ mit der gleichen Dynamik reduziert werden. Unter Berücksichtigung der Rückkopplungen d_{Z1} bis d_{Z6} folgt bei Vernachlässigung

¹Bei den Rückkopplungen der differenzierten Größen handelt es sich eher um theoretische Überlegungen. In der Praxis ist diese Art der Rückführung nicht anwendbar, da vorhandenes Messrauschen beim idealen Differenzieren ebenfalls differenziert und entsprechend verstärkt wird. Für den Einsatz in der Praxis müssten die Verfahren um entsprechende Filter erweitert werden [92].

3.3 Schwingungsdämpfung durch Zustandsrückführung

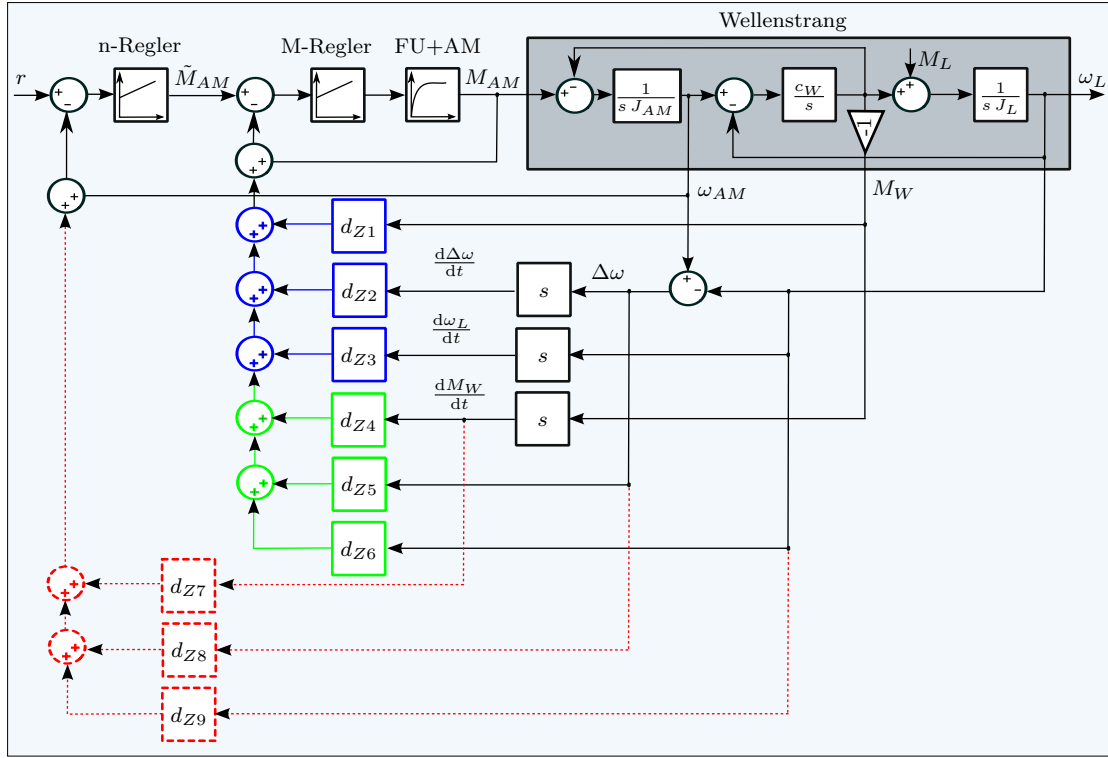


Abbildung 3.3: Drehzahlregelung inkl. Zustandsrückführung

der Eigendämpfung ($d_W \approx 0$), des Momentenreglers und der Maschinendynamik für die Übertragungsfunktion zwischen Antriebsmoment M_{AM} und ω_{AM} für das System (2.17) und (2.18):

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s) &= \left. \frac{\omega_{AM}(s)}{M_{AM}(s)} \right|_{AW=0} \\ &= \frac{1}{J_{AM}} \frac{s^2 + \frac{c_W}{J_L}}{s^3 + \left[-\frac{c_W d_{Z4}}{J_{AM}} + \frac{d_{Z5}}{J_{AM}} \right] s^2 \\ &\quad + \left[\frac{c_W}{J_{AM}} + \frac{c_W}{J_L} - \frac{c_W d_{Z1}}{J_{AM}} - \frac{c_W d_{Z2}}{J_{AM}} \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) + \frac{c_W}{J_{AM}} \frac{d_{Z3}}{J_L} \right] s \\ &\quad + \left[\frac{c_W}{J_L} \frac{d_{Z6}}{J_{AM}} \right]}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für die Führungsübertragungsfunktion folgt mit dem PI-Regler (3.2):

$$\tilde{T}(s) = \left. \frac{\omega_{AM}(s)}{r(s)} \right|_{AW=0} = \frac{R(s) \tilde{P}(s)}{1 + R(s) \tilde{P}(s)}$$

$$\tilde{T}(s) = \frac{\frac{k_P}{J_{AM}} s^3 + \frac{k_I}{J_{AM}} s^2 + \frac{k_P}{J_{AM}} \frac{c_W}{J_L} s + \frac{k_I}{J_{AM}} \frac{c_W}{J_L}}{\left[\begin{array}{l} s^4 + \left[\frac{k_P}{J_{AM}} - \frac{c_W d_{Z4}}{J_{AM}} + \frac{d_{Z5}}{J_{AM}} \right] s^3 \\ + \left[\frac{c_W}{J_{AM}} + \frac{c_W}{J_L} + \frac{k_I}{J_{AM}} - \frac{c_W d_{Z1}}{J_{AM}} - \frac{c_W d_{Z2}}{J_{AM}} \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) + \frac{c_W}{J_{AM}} \frac{d_{Z3}}{J_L} \right] s^2 \\ + \left[\frac{k_P}{J_{AM}} \frac{c_W}{J_L} + \frac{c_W}{J_L} \frac{d_{Z6}}{J_{AM}} \right] s + \frac{k_I}{J_{AM}} \frac{c_W}{J_L} \end{array} \right]}. \quad (3.11)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich des charakteristischen Polynoms von (3.11) für die jeweilige Rückkopplung (alle anderen Faktoren d_{Zx} werden 0 gesetzt) und dem Wunschpolynom (3.5) folgt aus Gruppe A beispielsweise für die Rückkopplung d_{Z1} :

$$k_P = 4J_{AM}\zeta_T \sqrt{\frac{c_W}{J_L}}, \quad k_I = c_W \frac{J_{AM}}{J_L}, \quad (3.12)$$

$$d_{Z1} = 1 - \frac{4\zeta_T^2 J_{AM}}{J_L}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_W}{J_L}}. \quad (3.13)$$

Die Gesamtdämpfung ζ_T kann mithilfe von d_{Z1} bei gleichbleibender Resonanzfrequenz ω_0 frei gewählt werden. Das doppelt auftretende, konjugiert komplexe Polpaar ohne Zustandsrückführung (schwarz) kann so verschoben werden, dass sich die gewünschte Dämpfung bei gleicher Resonanzfrequenz (blau) einstellt (siehe Abb. 3.4). Dies gilt durch

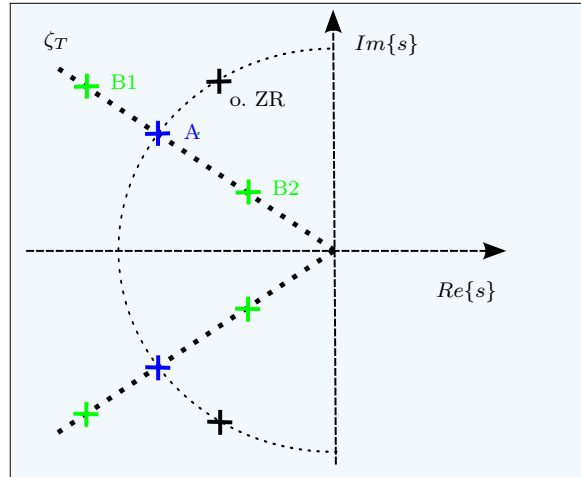


Abbildung 3.4: Drehzahlregelung inkl. Zustandsrückführung: Lage der Pole

die Analogie der rückgekoppelten Größen auch für die anderen beiden Rückführungen in dieser Gruppe. Die Parameter für d_{Z2} und d_{Z3} können aus dem Koeffizientenvergleich der charakteristischen Polynome von (3.11) und (3.5) analog ermittelt werden. Wird auf den PI-Regler verzichtet und nur Übertragungsfunktion (3.10) für Rückführung

3.3 Schwingungsdämpfung durch Zustandsrückführung

d_{Z1} betrachtet folgt:

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{J_{AM}} \frac{s^2 + \frac{c_W}{J_L}}{s^3 + c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} - \frac{d_{Z1}}{J_{AM}} \right) s}. \quad (3.14)$$

Anhand des charakteristischen Polynoms von (3.14) wird ersichtlich, dass die Gesamtdämpfung durch die Rückkopplung alleine nicht beeinflusst werden kann. Erst in Kombination mit dem PI-Regler kann die Dämpfung anhand von (3.12) und (3.13) frei vorgegeben werden. Die Rückführungen aus Gruppe A sind für die Zusatzdämpfung ohne Drehzahlregelung z. B. bei einem momentengeregelten Antrieb somit nicht geeignet.

Betrachtet man aus Gruppe B beispielsweise Rückführung d_{Z5} , folgt aus dem Koeffizientenvergleich des charakteristischen Polynoms (3.11) mit dem Wunschpolynom (3.5) für die einzelnen Parameter:

$$k_P = \frac{4\zeta_T \omega_0 J_{AM}}{1+x}, \quad k_I = \frac{\omega_0^4 J_{AM} J_L}{c_W}, \quad (3.15)$$

$$d_{Z5} = x k_P, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_W}{J_L (1+x)}}, \quad (3.16)$$

wobei x aus

$$\zeta_T = \sqrt{\frac{(J_{AM} + J_L)(1+x)}{4J_{AM}} + \frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

mithilfe der Lösung der quadratischen Gleichung

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.18)$$

mit den Größen

$$a = J_{AM} + J_L, \quad b = 2J_L - 4J_{AM}\zeta_T^2, \quad c = J_L - 4J_{AM}\zeta_T^2 \quad (3.19)$$

berechnet werden kann. Hierbei sind nur reellwertige Ergebnisse von Interesse. Es wird ersichtlich, dass für einen Wert von ζ_T zwei verschiedene Parametersätze B1 und B2 mit unterschiedlichen Resonanzfrequenzen resultieren können (siehe Abb. 3.4) [120]. Betrachtet man hingegen nur die Übertragungsfunktion (3.10) für Rückkopplung d_{Z5}

ohne Drehzahlregler, folgt:

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{J_{AM}} \frac{s^2 + \frac{c_W}{J_L}}{s^3 + \frac{d_{Z5}}{J_{AM}} s^2 + c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) s}. \quad (3.20)$$

Aus (3.20) kann direkt abgelesen werden, dass die Resonanzfrequenz des konjugiert komplexen Polpaars bei entsprechender Änderung der Dämpfung durch die Rückführung nicht verändert wird. Die Verschiebung der Resonanzfrequenz kommt in diesem Fall nur durch den Drehzahlregler zu Stande. Die Parameter der Rückführungen d_{Z4} und d_{Z6} können analog ermittelt werden. Die Rückkopplungen aus Gruppe B eignen sich somit für die Zusatzdämpfung ohne Drehzahlregler. Kommt zusätzlich ein Drehzahlregler zum Einsatz, so muss bei der Ermittlung der Regelparameter auf die mögliche Verschiebung der Resonanzfrequenz Rücksicht genommen werden.

Es können auch Kombinationen der beschriebenen Rückführungen zum Einsatz kommen. Damit die Resonanzfrequenz ω_0 und die Gesamtdämpfung ζ_T unabhängig voneinander vorgegeben werden können, müssen zwei Rückführungen aus den unterschiedlichen Gruppen A und B kombiniert werden. In weiterer Folge könnte der PI-Regler auch durch die Rückführung aller Zustandsgrößen durch einen Zustandsregler (z.B. Integrierender Zustandsregler) ersetzt werden [21, 54, 93]. Von diesem Schritt wird an dieser Stelle aber bewusst abgesehen, da alle notwendigen Zustandsgrößen sehr selten direkt zur Verfügung stehen. Diese müssen aufgrund der fehlenden Messung durch einen geeigneten Beobachter geschätzt werden [118, 122]. Die Komplexität steigt durch die Schätzung sämtlicher Zustandsgrößen und die Robustheit gegenüber Parameterunsicherheiten nimmt stark ab. Ein weiterer Nachteil der Zustandsregelung ist, dass deren Implementierung auf handelsüblichen Frequenzumrichtern nicht ohne weiteres möglich ist, da diese nur mit der internen PI-Regelung betrieben werden können.

Für den Einsatz an Prüfständen ist es das Ziel, eine Schwingungsdämpfung durch die Aufschaltung eines zusätzlichen Dämpfungsmoments zu erreichen. Hierfür eignen sich alle Rückführungen aus Gruppe B. Diese bieten den entscheidenden Vorteil, dass die Dämpfung sowohl in Drehzahlregelung als auch in Drehmomentregelung der Antriebsmaschine einsetzbar ist und das Dämpfungsmoment auch bei handelsüblichen Frequenzumrichtern als Zusatzmoment aufgeschaltet werden kann, ohne die Drehzahlregelung zu modifizieren. Bei den weiterführenden Analysen wird der Drehzahlregler gezielt vernachlässigt. Die Resonanzfrequenz ändert sich in diesem Fall durch die Rückführungen der Gruppe B nicht. Kommt zusätzlich ein Drehzahlregler zum Einsatz, muss bei der Ermittlung der Regelparameter auf die mögliche Verschiebung der Resonanzfrequenz Rücksicht genommen werden.

3.3 Schwingungsdämpfung durch Zustandsrückführung

In Serienanwendungen (z. B. im real verbauten Triebstrang des KFZ, oder bei Servoantrieben) steht das Wellenmoment meist aus Kostengründen nur mit eingeschränkter Genauigkeit oder gar nicht zur Verfügung. Bei Prüfständen ist das Wellenmoment in sämtlichen Prüfanwendungen eine relevante Größe, die messtechnisch exakt erfasst wird. Das Drehzahlsignal des Prüflings steht nur in seltenen Fällen zur Verfügung und eine entsprechende Messstelle kann aus Kosten- und Zeitgründen meist nicht nachgerüstet werden. Es bietet sich also bei Prüfstandsanwendungen an, das Dämpfungsmoment durch die Rückkopplung der Ableitung des gemessenen Wellenmoments $\frac{dM_W}{dt}$ erweitert um eine entsprechende Tiefpassfilterung oder der aus dem Wellenmoment geschätzten Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ zu bestimmen.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird gezielt auf diese, für die Anwendung vorteilhafte Art der Rückführung eingegangen und basierend auf der direkten Rückkopplung von $\frac{dM_W}{dt}$ und $\Delta\omega$ werden unterschiedliche Konzepte zur Schwingungsdämpfung vorgestellt.

Analyse aktiver Dämpfungsverfahren für Prüfstandsanwendungen

4.1 Einfache Zusatzdämpfung

4.1.1 Herleitung

Dieses Kapitel zur Herleitung und Analyse der einfachen Zusatzdämpfung beinhaltet die Erkenntnisse, des im Rahmen der Forschungstätigkeit zur Dissertation veröffentlichten Artikels [139] in detaillierter Form. Zum Einstieg wird ein relativ einfaches Verfahren zur aktiven Schwingungsdämpfung, wie es in Patent DE 3808524 C2 [11] beschrieben wird, untersucht. Abbildung 4.1 beschreibt die zugrunde liegende Idee [139]. Das

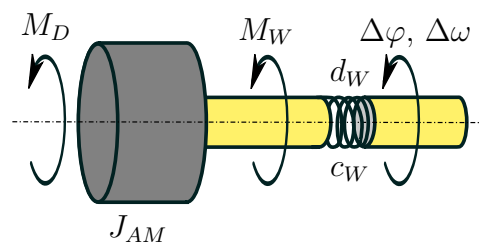


Abbildung 4.1: Idee der Zusatzdämpfung

Wellenmoment M_W setzt sich aus einem dem Differenzwinkel $\Delta\varphi$ proportionalen Anteil $M_{W,c}$ und einem der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten $\Delta\omega$ proportionalen Anteil $M_{W,d}$ zusammen. Für das Wellenmoment M_W folgt somit:

$$M_W = - \underbrace{c_W}_{M_{W,c}} \Delta\varphi - \underbrace{d_W}_{M_{W,d}} \Delta\omega, \quad c_W > 0, \quad d_W > 0 \quad (4.1)$$

wobei (vgl. (2.11) und (2.12))

$$\Delta\varphi := \varphi_{AM} - \varphi_L = x_1, \quad (4.2)$$

$$\Delta\omega := \omega_{AM} - \omega_L = x_2 \quad (4.3)$$

gilt. Wird auf die Antriebsmaschine ein zusätzliches Moment

$$M_D = -d_Z \Delta\omega, \quad d_Z > 0 \quad (4.4)$$

aufgeschaltet, das ebenfalls der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten $\Delta\omega$ proportional ist und durch die virtuelle Zusatzdämpfungskonstante d_Z skaliert wird, so wirkt auf der Seite der Antriebsmaschine das gleiche Drehmoment wie bei einer Welle mit der "Dämpfung" $(d_W + d_Z)$ [139]. Zur Ermittlung des zusätzlichen Drehmoments M_D muss $\Delta\omega$ bekannt sein. Die betreffenden Größen können zumeist nicht in geforderter Qualität oder auch gar nicht messtechnisch erfasst werden. Selbst bei direkter Erfassung der Winkelgeschwindigkeiten der beteiligten Komponenten kann es durch das vorhandene Messrauschen und die meist begrenzte Genauigkeit und Dynamik zu Problemen bei der Ermittlung der Differenzwinkelgeschwindigkeit kommen [37]. Als Abhilfe kann die notwendige Differenzwinkelgeschwindigkeit, wie in EP 1 333 268 A2 [37] beschrieben, über das Wellenmoment abgeschätzt und wie im Blockschaltbild in Abb. 4.2 dargestellt

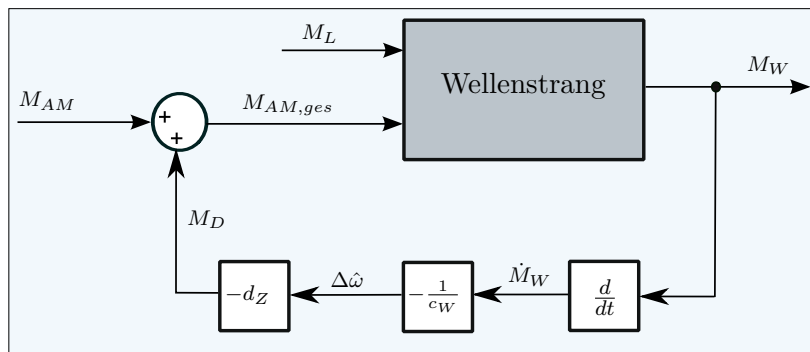


Abbildung 4.2: Blockschaltbild: einfache Zusatzdämpfung

aufgeschaltet werden. Hierbei ist jedoch anzumerken, dass es sich bei der im Patent beschriebenen Vorgehensweise um eine eher theoretische handelt, da das Wellenmoment ohne Filterung differenziert wird. Ideales Differenzieren ist in der Praxis durch das vorhandene Messrauschen nicht sinnvoll.

Nachfolgende Überlegungen basieren auf dem Drallsatz des auf einen Zwei-Massen-Schwinger reduzierten Wellenstrangs (siehe Abschnitt 2.2). Wird die Dämpfung des Wellenstrangs vernachlässigt ($d_W \approx 0$), so folgt aus dem Zusammenhang für das

4.1 Einfache Zusatzdämpfung

Wellenmoment (4.1):

$$M_W = -c_W (\varphi_{AM} - \varphi_L) - \overbrace{d_W (\omega_{AM} - \omega_L)}^{\approx 0}. \quad (4.5)$$

Für die Differenzwinkelgeschwindigkeit ergibt sich dann:

$$\Delta\omega = \omega_{AM} - \omega_L = -\frac{1}{c_W} \frac{dM_W}{dt}. \quad (4.6)$$

Für das gesamte Antriebsmoment inkl. Zusatzdämpfung folgt:

$$M_{AM,ges} = M_{AM} + M_D. \quad (4.7)$$

Für den aktiv gedämpften Wellenstrang mit der zusätzlichen Dämpfung d_Z ergibt sich aus (2.19) und (2.20) das Näherungsmodell:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & -d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) - \frac{d_Z}{J_{AM}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{AM}} & -\frac{1}{J_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AM} \\ M_L \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$M_W = \begin{bmatrix} -c_W & -d_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Die Zustandsrückführung entspricht Zustandsrückführung d_{Z4} aus Abschnitt 3.3 mit $d_Z = -c_W d_{Z4}$. Das charakteristische Polynom aus (2.21) ändert sich durch den zusätzlichen Dämpfungsterm d_Z zu

$$\Delta(s) = s^2 + \left[d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) + \frac{d_Z}{J_{AM}} \right] s + c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right). \quad (4.10)$$

Die Resonanzfrequenz ω_0 des konjugiert komplexen Polpaars (2.25) bleibt unverändert. Für den Dämpfungsgrad ζ ergibt sich:

$$\zeta = \frac{1}{2c_W} \left(d_W + \frac{d_Z}{J_{AM}} \frac{1}{\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L}} \right) \omega_0. \quad (4.11)$$

Beim Vergleich von (4.11) mit dem Dämpfungsrad des Systems (2.24) zeigt sich, dass dieser durch den Einsatz der Zusatzdämpfung bei konstant bleibender Resonanzfrequenz entscheidend erhöht werden kann. Möchte man den aperiodischen Grenzfall ($\zeta = 1$) erreichen, ergibt sich aus (4.11) der Wert für die notwendige Zusatzdämpfung:

$$\hat{d}_Z = 2J_{AM}\sqrt{c_W\left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L}\right) - d_W\left(\frac{J_{AM}}{J_L} + 1\right)}. \quad (4.12)$$

Die maximale Zusatzdämpfung verringert sich mit zunehmender Eigendämpfung d_W der Welle. Nimmt man an, dass die mechanische Dämpfung des Wellenstrangs vernachlässigbar gering ist ($d_W \approx 0$), ergibt sich:

$$\hat{d}_Z = 2J_{AM}\sqrt{c_W\left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L}\right)}. \quad (4.13)$$

Obiges Verfahren bringt beim Vorliegen idealer Bedingungen Verbesserungen mit sich. In der Praxis hingegen ist das gemessene Drehmoment von Rauschen überlagert, das durch die durchgeführte Differentiation zusätzlich verstärkt wird. Dies hat zur Konsequenz, dass es nur bedingt einsetzbar ist. In Abänderung der oben ausgeführten Methode wird das gemessene Moment differenziert und mit einem Tiefpass 1. Ordnung gefiltert (siehe Abb. 4.3). Dadurch wird der Einfluss des Messrauschens verringert und

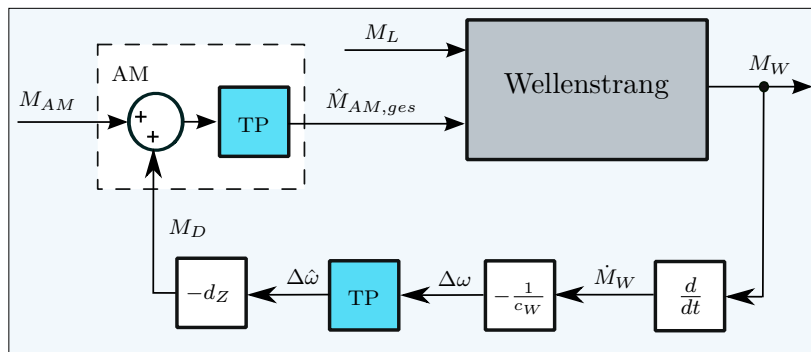


Abbildung 4.3: Blockschaltbild: einfache Zusatzdämpfung mit Tiefpass

das Verfahren ist in der Praxis sinnvoll einsetzbar. Im Rahmen von Simulationsstudien und Anwendungen in der Praxis hat sich gezeigt, dass mit dieser erweiterten Variante der Zusatzdämpfung bis zu einer maximalen, mechanischen Resonanzfrequenz des Wellenstrangs von 50 Hz sehr gute Ergebnisse erzielt werden können [139]. In den meisten praktischen Anwendungen liegt die erste Resonanzfrequenz deutlich unter 50 Hz. Die Zusatzdämpfung kann demzufolge in einem breiten Anwendungsbereich eingesetzt werden. Im nachfolgenden Abschnitt wird untersucht, wodurch die maximale Reso-

4.1 Einfache Zusatzdämpfung

nanzfrequenz, die mit der einfachen Zusatzdämpfung handhabbar ist, eingeschränkt wird. Für die Betrachtung wird der Tiefpassfilter bei der Ermittlung des notwendigen Dämpfungsmoments M_D im Modell berücksichtigt. Das Dämpfungsmoment wird auf das durch eine überlagerte Regelung geforderte Antriebsmoment M_{AM} aufgeschaltet. Zusätzlich wird die Zeitkonstante des Antriebs für den Aufbau des geforderten Drehmoments näherungsweise durch einen Tiefpassfilter berücksichtigt (siehe Abb. 4.3). Für den Tiefpassfilter der Zusatzdämpfung gilt:

$$\tau_\omega \frac{d}{dt} \Delta\hat{\omega} = \Delta\omega - \Delta\hat{\omega}, \quad (4.14)$$

mit der Filterzeitkonstante τ_ω und der gefilterten Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\hat{\omega}$. Für das Soll-Dämpfungsmoment M_D folgt:

$$M_D = -d_Z \Delta\hat{\omega} \quad \text{mit} \quad d_Z > 0. \quad (4.15)$$

Das geforderte Luftspaltmoment der Antriebsmaschine wird in der Realität nicht sofort aufgebaut, sondern zeigt Tiefpassverhalten, für das näherungsweise

$$\tau_{AM} \frac{d\hat{M}_{AM,ges}}{dt} = M_D + M_{AM} - \hat{M}_{AM,ges} \quad (4.16)$$

$$= -d_Z \Delta\hat{\omega} + M_{AM} - \hat{M}_{AM,ges} \quad (4.17)$$

mit der Zeitkonstante τ_{AM} für den Aufbau des Luftspaltmoments und dem geforderten Antriebsmoment M_{AM} gilt. Erweitert man das mechanische Modell des Wellenstrangs aus (4.8) und (4.9) um die notwendige Tiefpassfilterung und die verzögerte Aufschaltung des Antriebs, ergibt sich ein Modell vierter Ordnung:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & -d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & 0 & \frac{1}{J_{AM}} \\ 0 & \frac{1}{\tau_\omega} & -\frac{1}{\tau_\omega} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d_Z}{\tau_{AM}} & -\frac{1}{\tau_{AM}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \\ \Delta\hat{\omega} \\ \hat{M}_{AM,ges} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_L} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_{AM}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AM} \\ M_L \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$M_W = \begin{bmatrix} -c_W & -d_W & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (4.19)$$

Das zugehörige charakteristische Polynom hat die Struktur:

$$\Delta(s) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (4.20)$$

wobei die Berechnung der Größen α_i ($i = 0, 1, 2, 3$) mithilfe der Systemdaten in Anhang C ersichtlich ist. Das System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\Delta(s)$ gemäß (4.20) ein Hurwitz-Polynom ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Koeffizienten positiv sind

$$\alpha_3 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_0 > 0 \quad (4.21)$$

und

$$\alpha_3 \alpha_2 - \alpha_1 > \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \alpha_3^2 \quad (4.22)$$

gilt. Die vier Ungleichungen (4.21) sind für positive Trägheitsmomente, Wellensteifigkeiten, Dämpfungs- und Zeitkonstanten ohnehin erfüllt (siehe Anhang C). Aus (4.22) folgt die Bedingung für die Wellendämpfung d_W :

$$\beta_3 d_W^3 + \beta_2 d_W^2 + \beta_1 d_W + \beta_0 > 0. \quad (4.23)$$

Die Koeffizienten β_i ($i = 0, 1, 2, 3$) können aufgrund der Systemeigenschaften berechnet werden und sind in Anhang D enthalten. Sind alle Pole von d_W größer 0, so kann d_W für die Abschätzung der maximal handhabbaren Resonanzfrequenz vernachlässigt werden. Für die Koeffizienten von d_W^3 , d_W^2 ist dies für Parameterwerte größer 0 gegeben (siehe Anhang D). Für den Koeffizient β_1 muss die Bedingung

$$\beta_1 > 0 \quad (4.24)$$

gelten. Es zeigt sich, dass diese für positive Parameterwerte erfüllt ist (siehe Anhang D). Die Vernachlässigung der ursprünglichen Wellendämpfung mit der Annahme $d_W \approx 0$ stellt den schlimmstmöglichen Fall für die Abschätzung der oberen Schranke für die dämpfbare Resonanzfrequenz dar. Ungleichung (4.23) vereinfacht sich zu

$$\tau_{AM} + \tau_\omega > \tau_{AM} \tau_\omega \left[\frac{c_W}{J} (\tau_{AM} + \tau_\omega) + \frac{d_Z}{J_{AM}} \right]. \quad (4.25)$$

Wird die Bedingung bezüglich J umgeformt und anschließend in (2.23) eingesetzt,

4.1 Einfache Zusatzdämpfung

erhält man:

$$\omega_0 < \sqrt{\frac{1}{\tau_{AM} + \tau_\omega} \left(\frac{1}{\tau_{AM}} + \frac{1}{\tau_\omega} - \frac{d_Z}{J_{AM}} \right)}. \quad (4.26)$$

Führt man zur einfacheren Abschätzung der maximal möglichen Resonanzfrequenz einen Skalierungsfaktor zwischen dem Fall ohne Zusatzdämpfung und der maximal möglichen Zusatzdämpfung ein und ersetzt den Term mit dem frei einstellbaren Zusatzdämpfungsparameter d_Z durch

$$\frac{d_Z}{J_{AM}} := \alpha \frac{1}{\tau} = \alpha \left(\frac{1}{\tau_{AM}} + \frac{1}{\tau_\omega} \right), \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (4.27)$$

so folgt:

$$\omega_0 < \frac{1}{\sqrt{\tau_{AM}\tau_\omega}} \sqrt{1 - \alpha}. \quad (4.28)$$

Es zeigt sich, dass die maximal handhabbare Resonanzfrequenz nur von τ_{AM} und τ_ω abhängig ist und einen Kompromiss zwischen maximaler Zusatzdämpfung ($\alpha = 1$) und minimaler Zusatzdämpfung ($\alpha = 0$) darstellt. Mit realistischen Werten ($\tau_{AM} > 1$ ms und $\tau_\omega = 2$ ms) ergibt sich bei einer Aufschaltung von 80% der möglichen Zusatzdämpfung ($\alpha = 0.8$) eine maximale Resonanzfrequenz von etwa 50 Hz. Je größer die Zusatzdämpfung umso kleiner wird die bedämpfbare Resonanzfrequenz. Zudem wird die maximale Resonanzfrequenz maßgeblich durch die Filterzeitkonstante des Tiefpassfilters bzw. die resultierende Phasenverschiebung beeinflusst. Um Stabilität bei größeren Resonanzfrequenzen zu garantieren, müsste das aufzuschaltende Dämpfungsmoment reduziert werden. Dadurch verringert sich die mögliche Dämpfung. Der sinnvolle Einsatzbereich ist somit auf Resonanzfrequenzen kleiner 50 Hz eingeschränkt [139].

4.1.2 Simulationsstudie Rollenprüfstand

Die vorgestellte, einfache Zusatzdämpfung wird durch Simulationen (für nähere Details zum Simulationsmodell siehe Tabelle B.1 bis B.3 in Anhang B.2) und Messungen am Rollenprüfstand verifiziert. Das Simulationsmodell bildet den Wellenstrang des Prüfstands durch einen Vier-Massen-Schwinger nach (siehe Anhang B.2). Die Totzeiten bei der Messsignalverarbeitung und der Aufschaltung des Dämpfungsmoments werden ebenfalls berücksichtigt. Um einen möglichst dynamischen Betrieb nachzustellen, wird die Antriebsmaschine für die Tests mit Momentenvorgabe betrieben und positive und

negative Momentensprünge von $M_{AM} = \pm 100 \text{ Nm}$ vorgegeben (siehe Abb. 4.4). Das

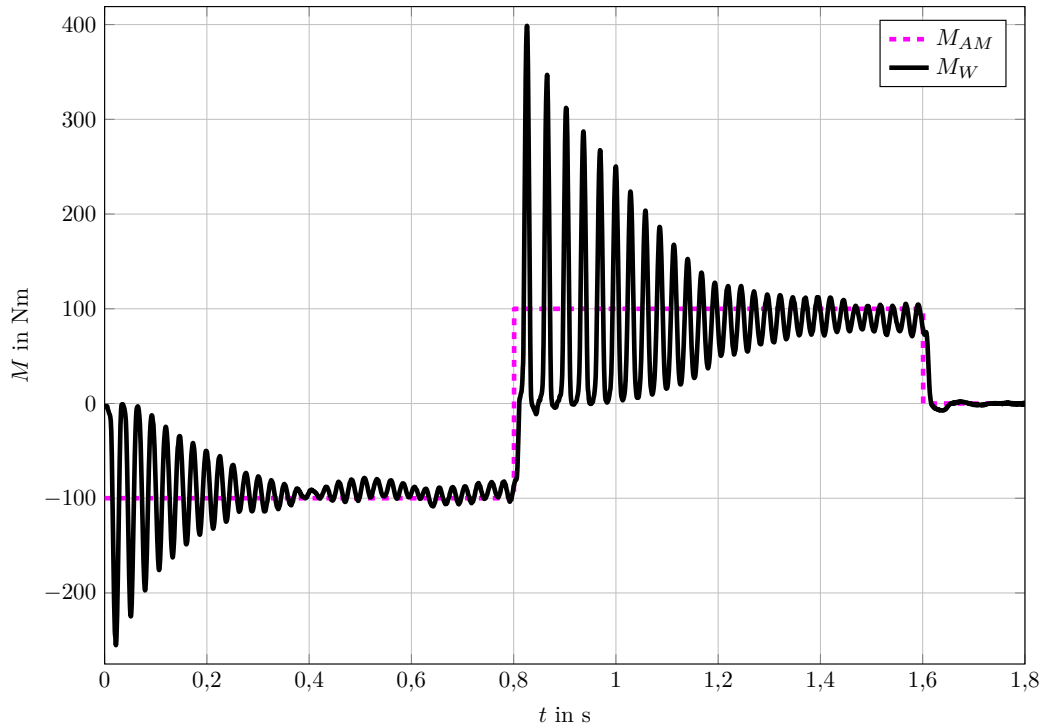


Abbildung 4.4: Simulation Rolle: Sollwertvorgabe M_{AM} und Wellenmoment M_W

gewünschte Moment liegt jeweils für 0,8 s an. Während dieser Zeit beschleunigt die Rolle entsprechend des aufgeschalteten Moments. Durch die generierten Drehmomentstöße wird die erste Eigenfrequenz bei 40 Hz angeregt. Die Drehmomentspitzen steigen bis auf das Vierfache des Sollwertes an und klingen durch die geringe Eigendämpfung des Wellenstrangs nur langsam ab (siehe Abb. 4.4). Auffallend ist, dass die Momentenschwingung nicht symmetrisch um den Sollwert verteilt ist, sondern bei 0 Nm abgeflacht ist. Dieses Phänomen ergibt sich durch das Spiel in der Gelenkwelle und muss in der Simulation ebenfalls berücksichtigt werden. Für die Modellierung des Spiels gibt es in der Literatur unterschiedliche Ansätze mit variierendem Detaillierungsgrad [87, 88, 130]. Für die angestellten Simulationen wurde das Spiel in der Gelenkwelle mithilfe einer Totzone modelliert [87].

Im Gegensatz zu den meisten Prüfständen kann am betrachteten Prüfstand eine direkte Zusatzdämpfung eingesetzt werden, da die Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ mittels (2.12) mit ausreichender Genauigkeit und Dynamik direkt aus den gemessenen Drehzahlen von Rolle und Antrieb ermittelt werden kann. Das Dämpfungsmoment kann entsprechend (4.4) bestimmt und aufgeschaltet werden. Die Rückkopplung entspricht Zustandsrückführung d_{Z5} aus Abschnitt 3.3. Dieser Vorteil wird im Rahmen

4.1 Einfache Zusatzdämpfung

der weiteren Versuche genutzt. Die von den einzelnen Varianten geschätzte Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\hat{\omega}$ kann dadurch auf einfachem Weg mit der realen Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ verglichen werden. Die Dämpfungsergebnisse der direkten Zusatzdämpfung dienen somit als Referenz für sämtliche weitere Verfahren.

Für sämtliche Versuche wird der positive Drehmomentsprung von $M_{AM} = -100$ Nm auf $M_{AM} = 100$ Nm ab Sekunde 0.8 betrachtet. Abb. 4.5 zeigt den Vergleich der sich in Folge des Drehmomentsprungs ausbildenden Schwingung des Wellenmoments M_W ohne Zusatzdämpfung, mit einfacher Zusatzdämpfung und bei direkter Zusatzdämpfung. In

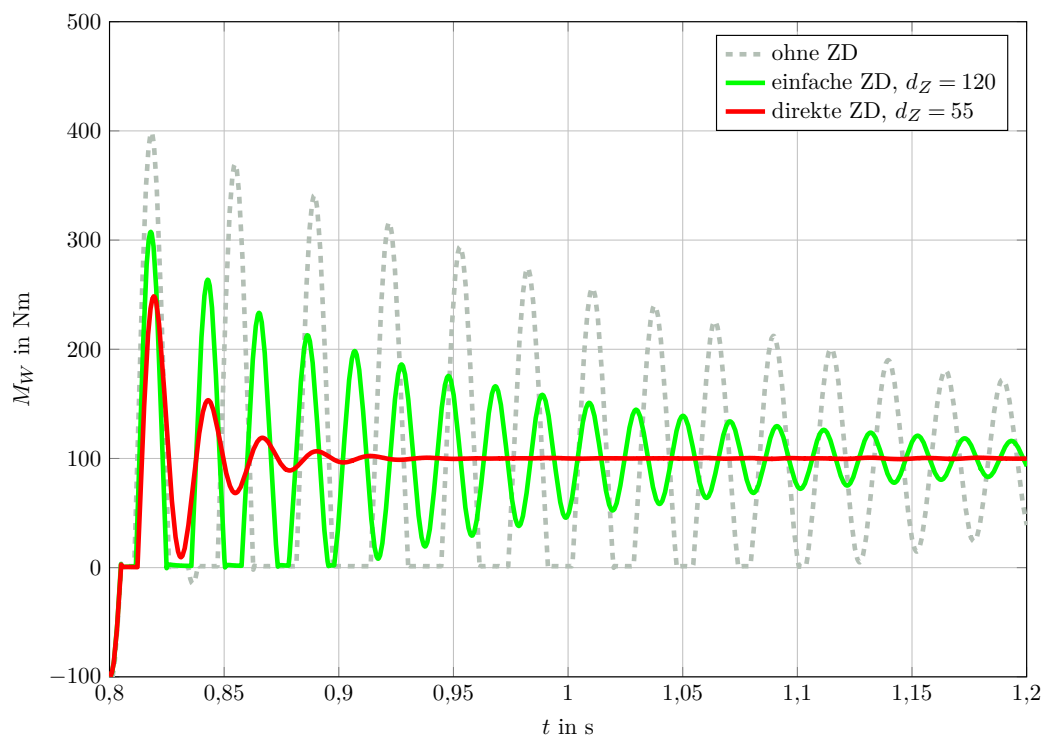


Abbildung 4.5: Simulation Rolle: M_W bei direkter und einfacher Zusatzdämpfung

der Simulation wird d_Z für beide Verfahren derart gewählt, dass die maximal mögliche Dämpfung erreicht wird. Bei größeren Werten nimmt die Dämpfungswirkung wieder ab. Bei der einfachen Zusatzdämpfung muss die Zusatzdämpfungskonstante d_Z durch die verfahrensbedingte Tiefpassfilterung größer gewählt werden als bei der direkten Variante. Anhand der Simulationsergebnisse ist zu erkennen, dass die auftretende Schwingung mit beiden Varianten gedämpft wird und dadurch schneller als ohne Zusatzdämpfung abklingt. Die Amplitude der Schwingung kann nahezu halbiert werden. Bei der einfachen Zusatzdämpfung dauert es allerdings deutlich länger bis die Schwingung abklingt. Hingegen ist bei der direkten Zusatzdämpfung die Schwingung bereits nach 0,1 s vollständig abgeklungen.

4.1.3 Messergebnisse Rollenprüfstand

Die Messungen am Prüfstand werden mit denselben Parametern für die Zusatzdämpfung wie in der Simulation durchgeführt. Die Simulationsergebnisse aus Abschnitt 4.1.2 werden durch die Messungen bestätigt. Beide Verfahren führen zu einer guten Dämpfung der Schwingung (siehe Abb. 4.6). Die direkte Zusatzdämpfung kann die

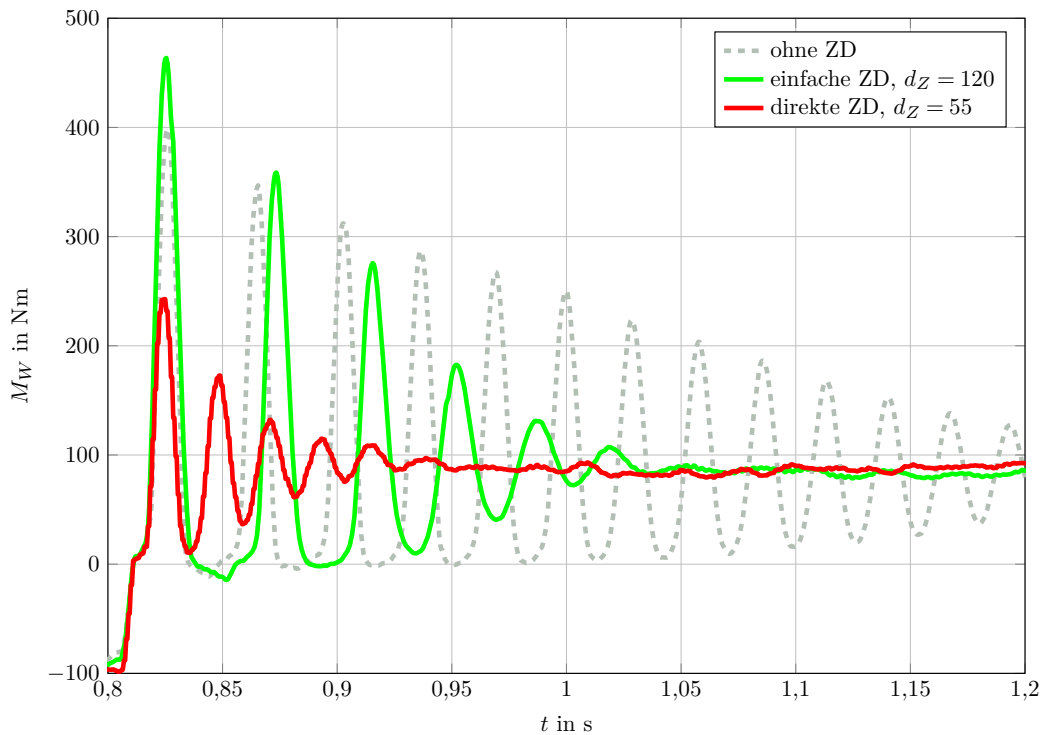


Abbildung 4.6: Messdaten Rolle: M_W bei direkter und einfacher Zusatzdämpfung

Schwingung auch in der Praxis bereits nach 0,15 s vollständig dämpfen, während die einfache Zusatzdämpfung 0,25 s benötigt. Ohne Zusatzdämpfung schwingt das System nach 0,4 s noch mit einer Amplitude von 50 Nm. Der Sollwert des Momentensprungs wird nur gestellt vorgegeben. Von der Antriebsmaschine wird ein Luftspalmmoment in der Höhe des Sollwertsprungs von 100 Nm aufgebracht. Da es keine Rückführung des gemessenen Drehmoments gibt, weicht das gemessene Wellenmoment durch parasitäre Effekte wie Reibung oder die Verstimmung des Rotorwiderstands geringfügig vom Sollwert ab. Dies spielt für die Beurteilung der einzelnen Dämpfungsverfahren keine Rolle. Weiters zeigt sich, dass die erste Amplitude der Schwingung mit der direkten Zusatzdämpfung besser gedämpft wird. Die Zusatzdämpfungskonstante d_Z wurde dabei für beide Varianten wie in der Simulation gewählt. Bei Messungen mit unterschiedlichen Werten für d_Z (siehe Abb. 4.7) zeigt sich, dass die Dämpfungskonstante für

4.1 Einfache Zusatzdämpfung

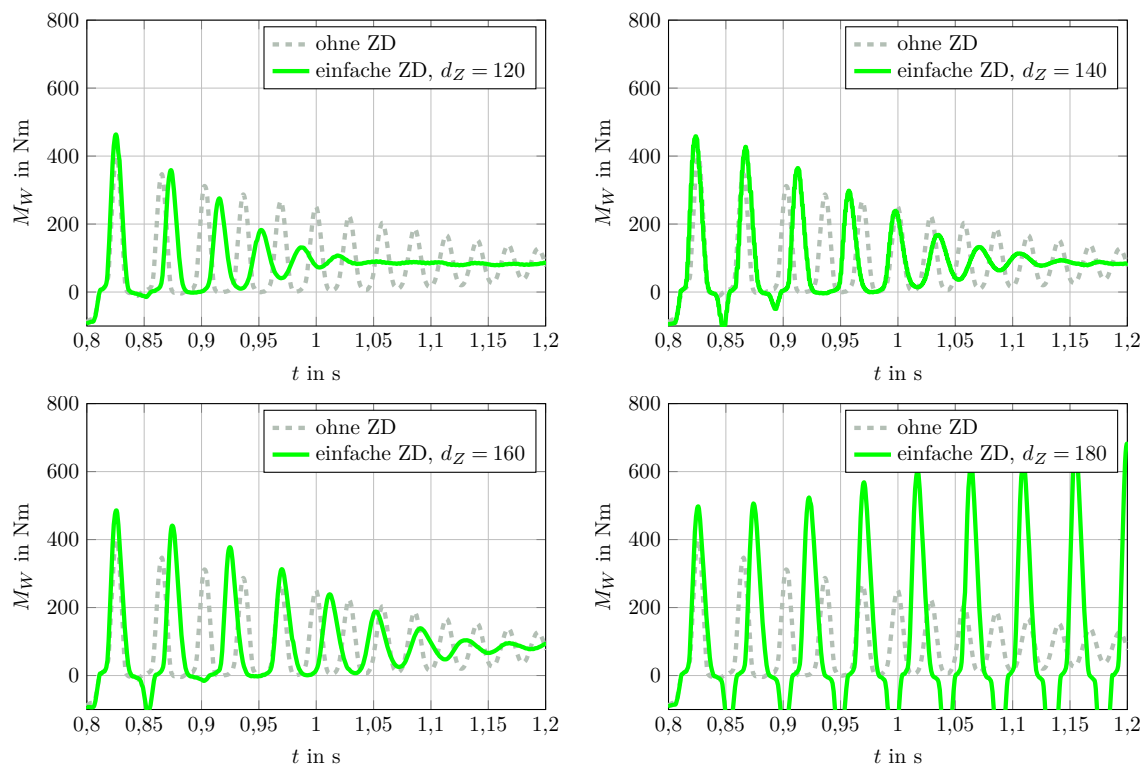


Abbildung 4.7: Messdaten Rolle: M_W bei einfacher Zusatzdämpfung und unterschiedlichen Dämpfungskonstanten d_Z

die maximale Dämpfung gut mit den Werten aus der Simulation übereinstimmt. Ab $d_Z = 180$ klingt die Schwingung auf und das System wird instabil (siehe Abb. 4.7 rechts unten). Die beste Dämpfung resultiert bei der einfachen Zusatzdämpfung mit einer Dämpfungskonstante von $d_Z = 120$. Bei größeren Werten für d_Z nimmt die resultierende Dämpfung wieder ab. Abb. 4.8 zeigt die aufgeschalteten Dämpfungsmomente M_D und die gemessenen Wellenmomente M_W für die direkte und einfache Zusatzdämpfung. Bei der direkten Zusatzdämpfung muss bei besserer Dämpfung ein geringeres Dämpfungsmoment aufgeschaltet werden.

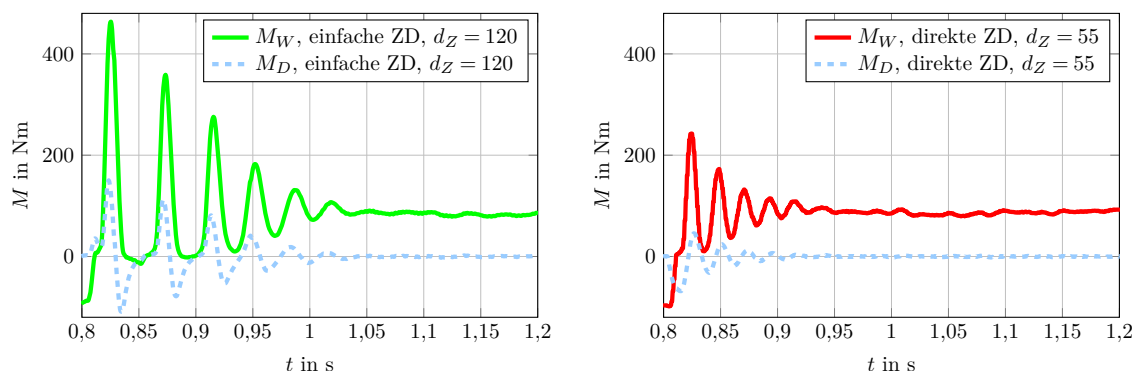


Abbildung 4.8: Messdaten Rolle: M_D bei direkter und einfacher Zusatzdämpfung

Insgesamt zeigt sich, dass die einfache Zusatzdämpfung bei dynamischen Vorgängen hinsichtlich der möglichen Dämpfung und des dafür notwendigen Dämpfungsmoments noch Verbesserungspotential aufweist.

4.2 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung

4.2.1 Herleitung

Bei der nachfolgend vorgestellten Methode wird die dämpfende Wirkung ebenfalls durch zusätzliche Aufschaltung der Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ auf die Belastungsmaschine erreicht. $\Delta\omega$ wird aber mithilfe eines Kalman-Filters geschätzt [139]. Der erhaltene Schätzwert wird mit d_Z skaliert und aufgeschaltet (siehe Abb. 4.9). Bei

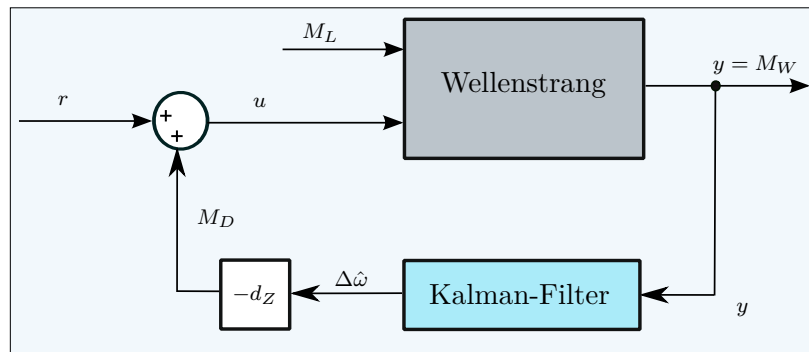


Abbildung 4.9: Blockschaltbild: Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters

der Analyse der einfachen Zusatzdämpfung in Abschnitt 4.1 wurde festgestellt, dass ein Tiefpassfilter zur vernünftigen Differentiation des gemessenen Drehmoments notwendig ist. Obwohl die im vorangegangenen Abschnitt demonstrierte Variante gute Ergebnisse liefert, kann es durch das Messrauschen und die wenig intuitive Parametrierung des Tiefpass-Filters zu unbefriedigenden Dämpfungsergebnissen kommen. Durch den Einsatz eines Kalman-Filters zur Schätzung von $\Delta\omega$ kann der Differenzierer und die damit verbundene Tiefpassfilterung entfallen. Diese Methode führt zu einer vereinfachten, intuitiveren Parametrierung und durch die Berücksichtigung der Rauscheigenschaften während des Filter-Entwurfs zu guten Schätzergebnissen für $\Delta\omega$.

Hinsichtlich der notwendigen zeitdiskreten Realisierung in der Praxis basiert die nachfolgende Herleitung auf der zeitdiskreten Systembeschreibung

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_i + \mathbf{H}\mathbf{u}_i + \mathbf{w}_i \quad (4.29)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C}\mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \quad (4.30)$$

mit der deterministischen Eingangsgröße \mathbf{u}_i , dem Messrauschen \mathbf{v}_i mit der Kovarianzmatrix \mathbf{R} und dem Zustandsrauschen \mathbf{w}_i mit der Kovarianzmatrix \mathbf{Q} . Für das zeitinvariante System lauten die allgemeinen Kalman-Filtergleichungen:

$$\mathbf{P}_i^* = \Phi \mathbf{P}_{i-1} \Phi^T + \mathbf{Q}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{K}_{d,i} = \mathbf{P}_i^* \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_i^* \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{P}_i = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{d,i} \mathbf{C}) \mathbf{P}_i^*, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{x}_i^* = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \mathbf{H} \mathbf{u}_{i-1}, \quad (4.34)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i^* + \mathbf{K}_{d,i} (\mathbf{y}_i - \mathbf{C} \mathbf{x}_i^*). \quad (4.35)$$

Die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers \mathbf{P}_i konvergiert gegen einen stationären Wert und entspricht der positiven, symmetrischen Lösung der zeitdiskreten algebraischen Riccati Gleichung [38, 112]:

$$\mathbf{P} = \Phi \mathbf{P} \Phi^T - \Phi \mathbf{P} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} \Phi^T + \mathbf{Q}. \quad (4.36)$$

Die algebraische Riccati Gleichung spielt neben dem Kalman-Filter in zahlreichen regelungstechnischen Anwendungen wie beispielsweise dem LQR-Entwurf, dem H_2 - oder H_∞ -Reglerentwurf eine wesentliche Rolle [20, 107, 144, 145] und wird aus diesem Grund in der Literatur ausführlich behandelt. Die Gleichung existiert in zeitdiskreter und zeitkontinuierlicher Form, wobei die Lösung der Gleichung der invarianten Lösung der Matrix Riccati Differentialgleichung bzw. der Matrix Riccati Differenzgleichung entspricht. Trotz tiefgreifender Untersuchungen und zahlreicher Beiträge in Bezug auf die theoretischen Eigenschaften [105] und die geschlossene analytische Lösung wird die Lösung meist mithilfe effizienter numerischer Verfahren gefunden [3, 94, 107].

Die zeitdiskrete algebraische Riccati Gleichung besitzt unter der Annahme $\mathbf{Q} \geq 0$ und $\mathbf{R} > 0$ eine eindeutige positiv semidefinite Lösung \mathbf{P} wenn die nachfolgenden Bedingungen erfüllt sind [68, 81, 112]:

1. Das Paar (Φ, \mathbf{C}) ist detektierbar, d.h. alle nicht beobachtbaren Moden müssen asymptotisch stabil sein.
2. Das Paar (Φ, \mathbf{G}) , wobei $\mathbf{G} \mathbf{G}^T = \mathbf{Q}$ gilt, ist stabilisierbar, d.h. alle nicht steuerbaren Moden müssen asymptotisch stabil sein.

Wird für das Kalman-Filter \mathbf{P} anstatt von \mathbf{P}_i und \mathbf{K}_d anstatt $\mathbf{K}_{d,i}$ verwendet, spricht man von einem stationären Kalman-Filter. Unter den genannten Bedingungen für

eine eindeutige Lösung ist das zugehörige, stationäre zeitdiskrete Kalman-Filter stabil, d. h. die Eigenwerte von $(\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \Phi$ liegen innerhalb des Einheitskreises. Für dieses System lauten die Gleichungen des stationären Kalman-Filters [112]:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i^* + \mathbf{K}_d (\mathbf{y}_i - \mathbf{C} \mathbf{x}_i^*) \quad (4.37)$$

mit

$$\mathbf{x}_i^* = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \mathbf{H} \mathbf{u}_{i-1}. \quad (4.38)$$

Die konstante Kalman-Matrix \mathbf{K}_d ergibt sich anhand der Relation [112]:

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{P} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (4.39)$$

und kann vorweg berechnet werden.

Für das zeitkontinuierliche System 2. Ordnung aus (2.19) und (2.20) soll ein Beobachter für die Differenzwinkelgeschwindigkeit $x_2 =: \Delta\omega$ entworfen werden. Nimmt man an, dass die Wellendämpfung d_W sehr klein ist ($d_W \approx 0$), dann folgt für das System:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{AM}} & -\frac{1}{J_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AM} \\ M_L \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$M_W = \begin{bmatrix} -c_W & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (4.41)$$

In der Ausgangsgleichung kommt nur $x_1 =: \Delta\varphi$ vor. Man möchte den Schätzwert für $\Delta\omega$ möglichst einfach, ohne Kenntnis von weiteren Modellparametern und unter Vernachlässigung der Eingangsgrößen M_{AM} und M_L nur aus der Messung von M_W ermitteln. Hierbei hat es sich bewährt, im Modell des Beobachters $\Delta\varphi$ als Zustandsgröße und M_W als Ausgangsgröße zu wählen [139]. Es entsteht ein Störgrößenbeobachter. Der auftretende Modellfehler wird durch Messrauschen \tilde{v} und Zustandsrauschen \tilde{w} kompensiert. Für das Kalman-Filter 1. Ordnung (KF1) ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \Delta\varphi = 0 + \tilde{w} \quad (4.42)$$

$$M_W = -c_W \Delta\varphi + \tilde{v}. \quad (4.43)$$

4.2 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung

Für die Verwendung in einem digitalen Regler wird das Kalman-Filter zeitdiskret realisiert. Dazu wird das System aus (4.42) und (4.43) diskretisiert. Das äquivalente, zeitdiskrete System lautet

$$x_{i+1} = x_i + w_i \quad (4.44)$$

$$y_i = -c_W x_i + v_i \quad (4.45)$$

mit den diskretisierten Größen

$$x_i = \Delta\varphi(iT_d) = \varphi_{AM}(iT_d) - \varphi_L(iT_d) \quad (4.46)$$

$$y_i = M_W(iT_d). \quad (4.47)$$

T_d entspricht hierbei der Diskretisierungszeit. Werden die allgemeinen Filtergleichungen (4.31) bis (4.35) bzw. (4.37) bis (4.39) auf das skalare System aus (4.44) und (4.45) angewendet, folgt mit den zugehörigen Größen $\mathbf{\Phi} = 1$, $\mathbf{H} = 0$ und $\mathbf{C} = -c_W$:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{i-1} + K_d(y_i + c_W \hat{x}_{i-1}), \quad (4.48)$$

$$P = P - \frac{P^2 c_W^2}{c_W^2 P + R} + Q, \quad (4.49)$$

$$K_d = -P c_W (c_W P c_W + R)^{-1}. \quad (4.50)$$

Aus der algebraischen Riccati Gleichung (4.49) folgt die quadratische Gleichung

$$P^2 - QP - \frac{QR}{c_W^2} = 0 \quad (4.51)$$

mit der positiven Lösung

$$P = \frac{Q}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{R}{Q} \frac{4}{c_W^2}} \right] > 0. \quad (4.52)$$

Aus (4.50) folgt:

$$K_d = -\frac{1}{c_W} \underbrace{\frac{P}{P + \frac{R}{c_W^2}}}_{< 1} < 0. \quad (4.53)$$

Anhand von (4.53) wird ersichtlich, dass die aus (4.48) resultierende Bedingung

$$-1 < K_d c_W < 0 \quad (4.54)$$

für ein asymptotisch stabiles Kalman-Filter erfüllt ist. Man erhält das stationäre, asymptotisch stabile Kalman-Filter

$$\hat{x}_i = (1 + K_d c_W) \hat{x}_{i-1} + K_d y_i. \quad (4.55)$$

Mit dem gesuchten Schätzwert für $\Delta\omega$ (gilt näherungsweise für kleine Werte von T_d)

$$\Delta\hat{\omega}_i \approx \frac{\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}}{T_d} = \frac{K_d}{T_d} (y_i + c_W \hat{x}_{i-1}). \quad (4.56)$$

Das aufzuschaltende Dämpfungsmoment errechnet sich aus

$$M_{D,i} = -d_Z \Delta\hat{\omega}_i. \quad (4.57)$$

Die Kovarianzen Q und R werden bei der Auslegung passend gewählt und der Filterentwurf liefert einen Zustandsschätzer für $\Delta\omega$ mit der konstanten Kalman-Matrix K_d . Die Wahl von Q und R lässt sich durch das gute Verständnis für die Parameter und deren Wirkung verhältnismäßig einfach bewerkstelligen. Für die Kovarianz R des Messrauschens kann oft ein Ansatz, der auf den Rauscheigenschaften des Sensors beruht, gefunden werden. Über die Gewichtung der Kovarianz kann somit zwischen zuverlässigen und weniger zuverlässigen Messungen unterschieden werden.

Wird zur weiteren Analyse aus dem System (4.55) und (4.56) die Übertragungsfunktion zwischen dem Wellenmoment M_W und dem Schätzwert $\Delta\hat{\omega}$ berechnet, folgt:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{\Delta\hat{\omega}(z)}{M_W(z)} = \frac{K_d}{T_d} c_W [z - (1 + c_W K_d)]^{-1} K_d + \frac{K_d}{T_d} \\ &= \frac{K_d}{T_d} \frac{z - 1}{z - (1 + c_W K_d)} = -\frac{1}{c_W} D(z) \end{aligned} \quad (4.58)$$

mit dem zeitdiskret realisierbaren Differenzierer

$$D(z) = \frac{1}{\tau} \frac{z - 1}{z - (1 - \frac{T_d}{\tau})} \quad \text{mit} \quad \frac{T_d}{\tau} = -c_W K_d. \quad (4.59)$$

Durch Gl. (4.54) ist sichergestellt, dass sich der Pol der zeitdiskreten Übertragungs-

4.2 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung

funktion im Einheitskreis befindet.

Bei genauerer Betrachtung des Ergebnisses wird ersichtlich, dass die erhaltene Struktur (siehe Blockschaltbild in Abb. 4.10) mit dem zeitdiskreten Differenzierer Gl. (4.59)

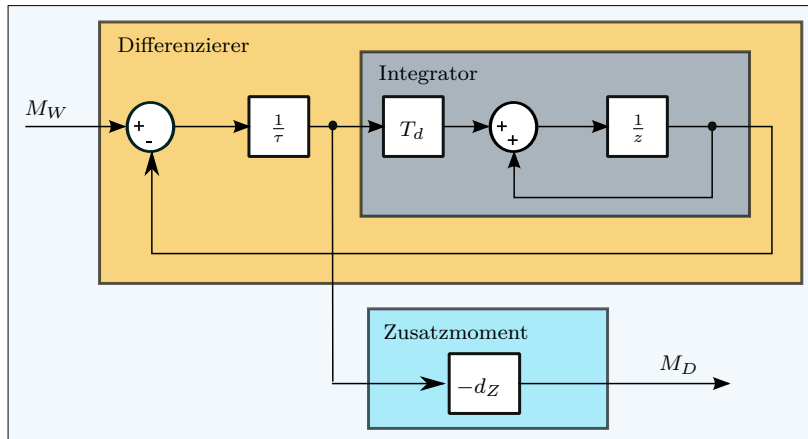


Abbildung 4.10: Blockschaltbild: Analogie KF1 und einfache Zusatzdämpfung

genau der einfachen Zusatzdämpfung mit der zusätzlichen Filterung der Messwerte aus Abschnitt 4.1 entspricht. Setzt man

$$K_d = -\frac{T_d}{c_W \tau} \quad (4.60)$$

aus (4.59) in (4.50) ein, erhält man durch Umformen:

$$P = \frac{T_d R}{c_W^2 (\tau - T_d)}. \quad (4.61)$$

Durch Einsetzen von (4.61) in (4.51) kann die erforderliche Parametrierung für Q bestimmt werden, sodass die einfache Zusatzdämpfung und die Dämpfung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung identisch sind:

$$Q = \frac{T_d^2 R}{c_W^2 (\tau - T_d) \tau}. \quad (4.62)$$

Die Einschränkungen hinsichtlich der maximal handhabbaren Resonanzfrequenz und das verbesserungswürdige Verhalten im dynamischen Betrieb gelten somit analog zur einfachen Zusatzdämpfung.

4.2.2 Simulationsstudie Motorprüfstand

Die soeben vorgestellte Variante wird vor deren Erprobung unter realen Bedingungen eingehend simuliert und analysiert. Sämtliche Simulationen basieren auf dem Modell des in Abschnitt 2.1.1 beschriebenen Versuchsprüfstands. Das Modell bildet den Wellenstrang zwischen Antrieb und Prüfling durch einen Sechs-Massen-Schwinger nach und beinhaltet zusätzlich die Drehzahlregelung für die Antriebsmaschine samt Aufschaltung des ermittelten Dämpfungsmoments. Die Totzeiten bei der Messsignalverarbeitung und bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments werden ebenfalls im Modell nachgebildet (die detaillierten Simulationsparameter können Tabelle A.1 bis A.4 in Anhang A.2 entnommen werden). Im Rahmen eines typischen Prüflaufs wird der Verbrennungsmotor durch die Antriebsmaschine im unbefeuerten Zustand von 100 1/min auf 500 1/min geschleppt. Durch die Kompression in den Zylindern kommt es zu deutlich ausgeprägten Drehmomentstößen, die die erste schwach gedämpfte Resonanzfrequenz des Wellenstrangs anregen. Bei den vergleichsweise geringen Drehzahlen sind die Drehunförmigkeiten des Prüflings besonders stark ausgeprägt. Die Ordnung der Hauptanregung ist hierbei von der Anzahl der Zylinder des Prüflings abhängig [35].

Die erste Resonanzfrequenz liegt aufgrund des simulierten Prüflings bei 20 Hz und wird vor allem durch die dritte und sechste Ordnung der Drehzahl angeregt (VKM mit 6 Zylindern). Dies führt zu den charakteristischen Resonanzüberhöhungen im Drehzahl- und Drehmomentverlauf zwischen Sekunde 4 und 6 und zwischen Sekunde 14 und 16 (siehe Abb. 4.12). Die zweite mechanische Resonanzfrequenz des Wellenstrangs liegt bei ca. 212 Hz. Durch den Einsatz der Zusatzdämpfung mittels eines KF1 als Schätzer für $\Delta\omega$ kann die Amplitude der Drehmomentschwingung beim Durchfahren der Resonanzfrequenz auf etwa die Hälfte reduziert werden (siehe Abb. 4.11 links). Das

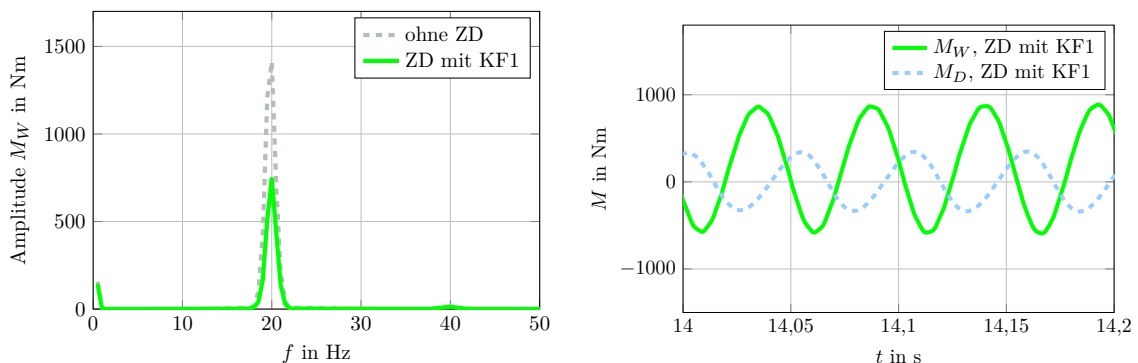


Abbildung 4.11: Simulation EOL: Frequenzspektrum und M_D beim Durchfahren der 1. Resonanzfrequenz bei Zusatzdämpfung mittels eines KF1

aufzuschaltende Dämpfungsmoment (vor der Totzeit durch die Signalverarbeitung und

4.2 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung

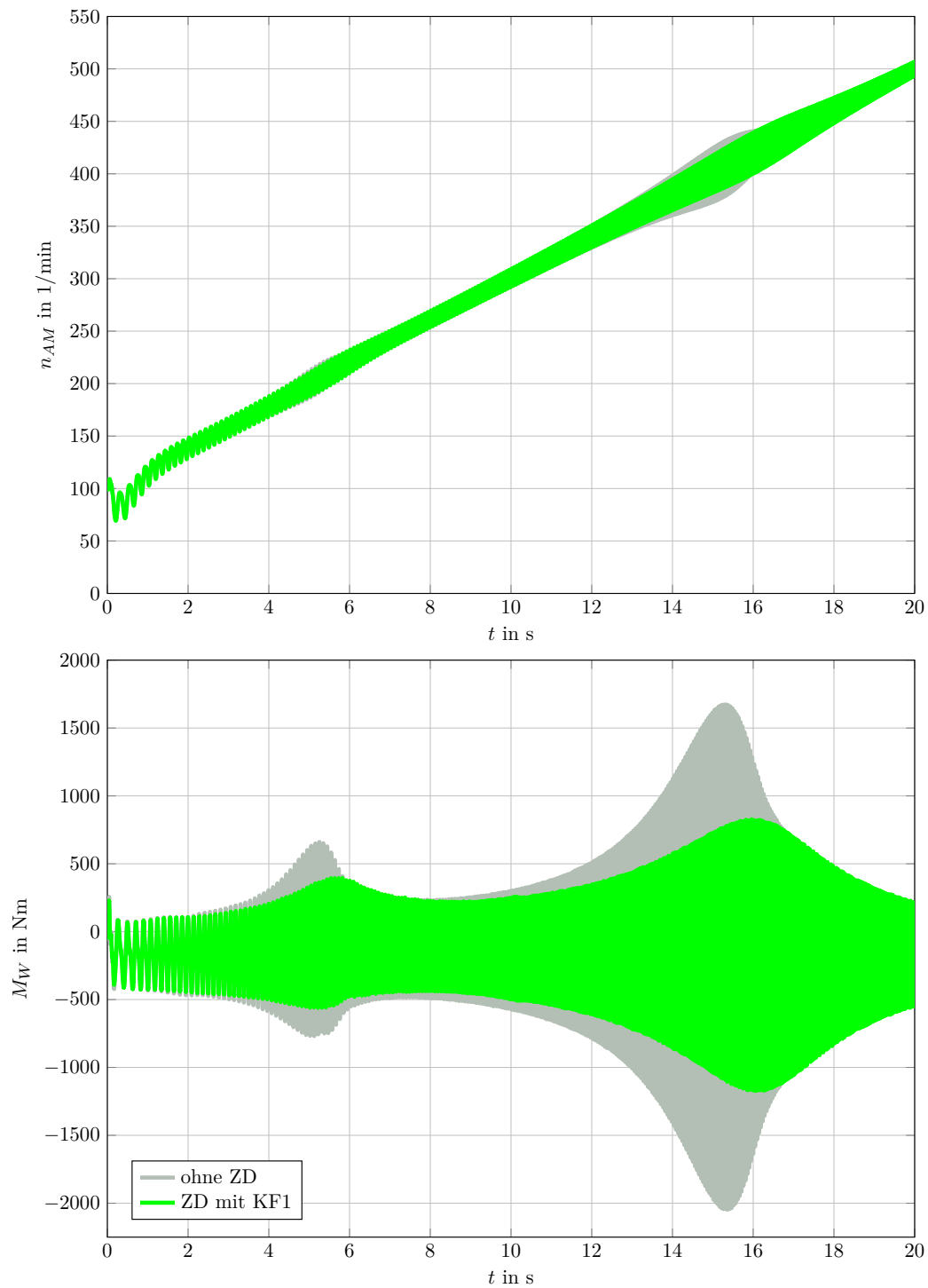


Abbildung 4.12: Simulation EOL: n_{AM} und M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF1

den verzögerten Momentenaufbau in der Antriebsmaschine) am Beginn der zweiten Resonanzüberhöhung ist in Abb. 4.11 (rechts) dargestellt. Die Drehzahlschwankungen nehmen ebenfalls ab (siehe Abb. 4.12). Durch die Kombination von Drehzahlregelung und Zustandsrückführung zur Schwingungsdämpfung wird die ursprüngliche Resonanzfrequenz geringfügig verschoben (siehe Kapitel 3.3). Die zu dämpfende Resonanzfrequenz liegt in diesem Fall deutlich unter 50 Hz. Dies führt zu sehr guten Dämpfungsergebnissen bei vergleichsweise einfacher Parametrierung und geringem Implementierungsaufwand. Bei größeren Resonanzfrequenzen sowie größeren Totzeiten bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments verliert die Variante aber an Effektivität.

Zur Analyse des dynamischen Verhaltens der Zusatzdämpfung wird in einem weiteren Versuch während einer Drehzahlrampe von 250 1/min auf 500 1/min eine sprunghafte Laständerung von 2000 Nm simuliert (siehe Abb. 4.13). Der simulierte Vorgang entspricht einem ungewollten Anspringen des Motors im geschleppten Betrieb über der Starterdrehzahl und stellt einen Misuse-Versuch für den Prüfstand dar. Durch den Momentensprung wird die 1. Resonanzfrequenz des Wellenstrangs angeregt. Die ersten Amplituden der auftretenden Schwingung werden nur mäßig gedämpft und es dauert verhältnismäßig lange, bis die Schwingung auf das normale Niveau der Anregung abklingt. In diesem Testszenario zeigt sich erneut die Verbesserungsmöglichkeit der einfachen Zusatzdämpfung bzw. der Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung bei dynamischen Lastsprüngen (siehe auch Abschnitt 4.1.3).

4.2.3 Messergebnisse Motorprüfstand

Die Messungen am Versuchsprüfstand (für eine detaillierte Beschreibung des Messaufbaus und die Filterparametrierung siehe Anhang A.1 und Tabelle A.4) zeigen, dass die erste Resonanzfrequenz wie in der Simulation beim betreffenden Prüfling bei ca. 20 Hz liegt und vor allem mit der dritten und sechsten Ordnung der Drehzahl angeregt wird. Dies führt zu charakteristischen Resonanzüberhöhungen im Drehzahl- und Drehmomentverlauf zwischen Sekunde 4 und 6 sowie 14 und 16 (siehe Abb. 4.15). Die Messergebnisse stimmen bis auf kleine Abweichungen durch die näherungsweise Modellierung des Spiels in der Bogenzahnkupplung gut mit den zuvor durchgeführten Simulationen überein (siehe Abschnitt 4.2.2). Das Modell bildet das System mit hinreichender Genauigkeit ab. Abb. 4.15 bestätigt die zuvor angestellten Simulationen und es zeigt sich, dass die Zusatzdämpfung basierend auf der Zustandsschätzung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung gut funktioniert. Die Momentenspitzen beim Durchfahren der Resonanzfrequenz können effektiv gedämpft werden. Das Frequenzspektrum in Abb. 4.14 (links) verdeutlicht, dass die Amplituden bei der kritischen ersten Resonanzfrequenz von 1250 Nm auf 800 Nm reduziert werden können. Durch die geringeren Schwankungen

4.2 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung

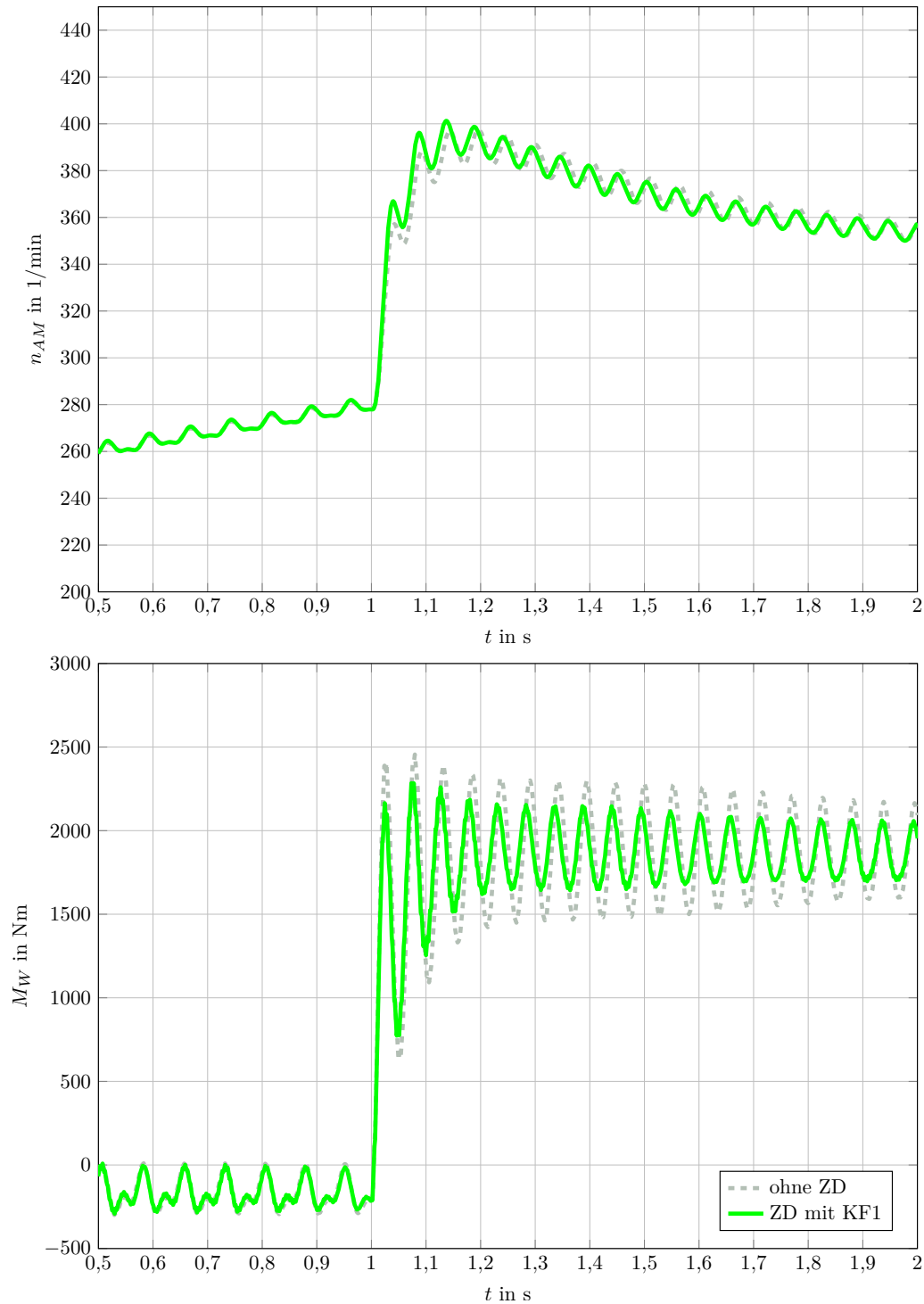


Abbildung 4.13: Simulation EOL: Sprung M_L bei Zusatzdämpfung mittels eines KF1

im Drehmoment sind die Drehzahlschwankungen zudem deutlich geringer und die Solldrehzahl kann besser "eingeregelt" werden. Abb. 4.14 (rechts) zeigt einen Vergleich des für die Aufschaltung auf die Antriebsmaschine errechneten Dämpfungsmoments (vor der Totzeit durch die Signalverarbeitung und den verzögerten Momentenaufbau in der Antriebsmaschine) und des gemessenen Wellenmoments im Bereich der Resonanzfrequenz. Durch die Zusatzdämpfung wird das ermittelte Dämpfungsmoment in etwa gegengleich zum gemessenen Wellenmoment auf die Antriebsmaschine aufgeschaltet. Die Amplituden des Dämpfungsmoments entsprechen ca. der Hälfte des gemessenen Wellenmoments. Die Zusatzdämpfung wurde mit unterschiedlichsten Motortypen

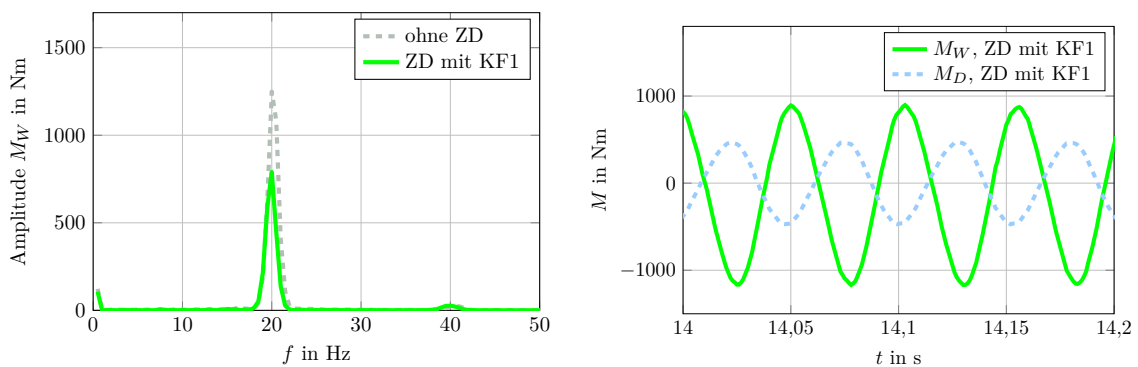


Abbildung 4.14: Messdaten EOL: Frequenzspektrum und M_D beim Durchfahren der 1. Resonanzfrequenz bei Zusatzdämpfung mittels eines KF1

(4 Zylinder und 6 Zylinder - daraus ergeben sich Resonanzfrequenzen von 18 Hz bis 23 Hz) verifiziert und hat bei gleichbleibender Parametrierung in allen Betriebspunkten zu guten Ergebnissen geführt. Der Vorteil liegt in der einfachen Parametrierung ohne die Notwendigkeit von detailliertem Modellwissen, der großen Robustheit gegenüber Parameterschwankungen und der sehr guten Resistenz gegenüber Störungen. Bei den simulierten Sprungversuchen des Lastmoments handelt es sich um Misuse-Fälle, die durch die Limitierungen des Prüflings am realen Prüfstand nicht ohne Weiteres durchgeführt werden können. Die Simulationsergebnisse der Sprungversuche können dadurch leider nicht mit Messergebnissen belegt werden. Die Ergebnisse sollten sich aber mit den Simulationsstudien aus Abschnitt 4.2.2 und Erkenntnissen vom Rollenprüfstand aus Abschnitt 4.1 decken.

4.2 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung

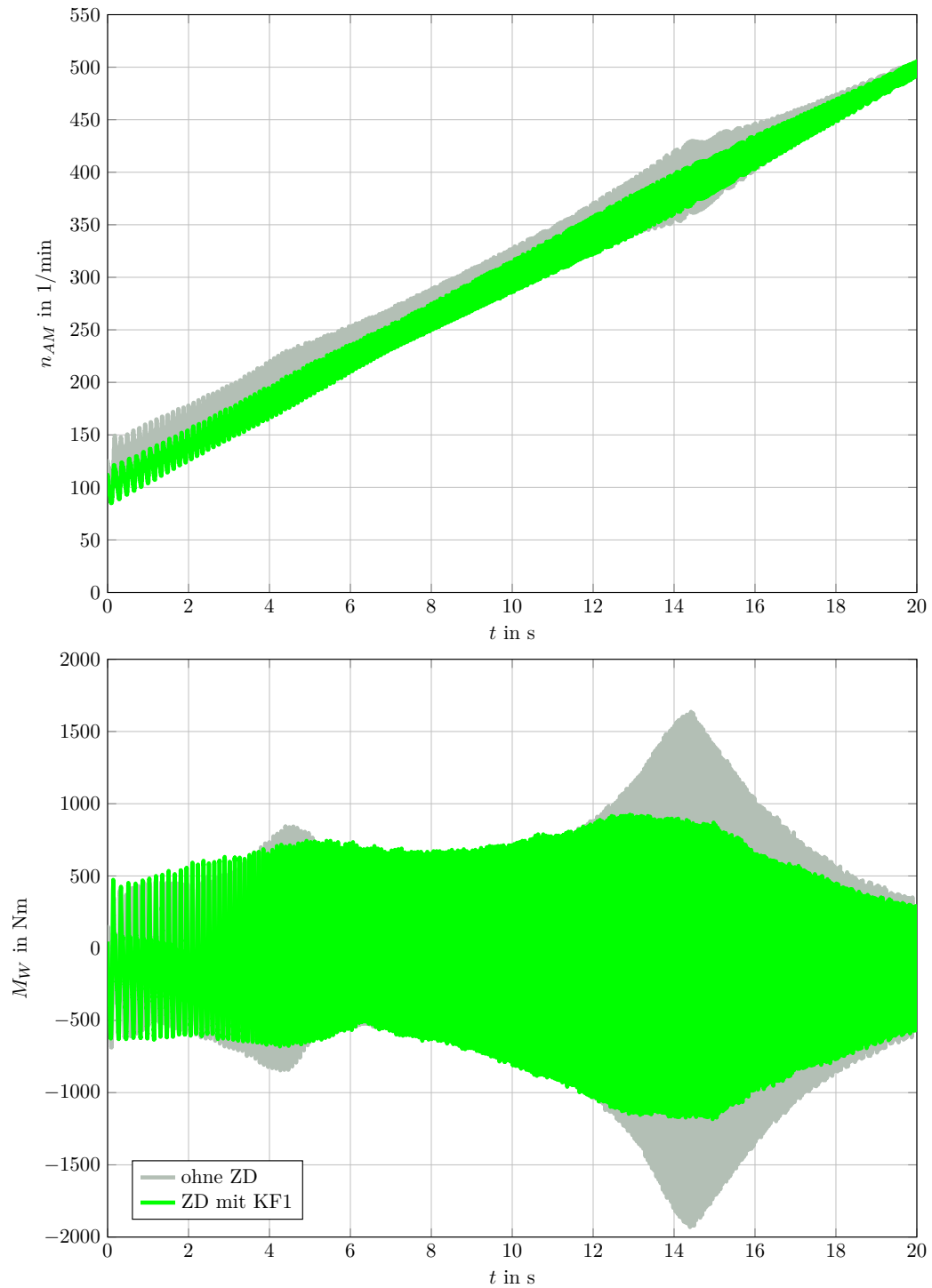


Abbildung 4.15: Messdaten EOL: n_{AM} und M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF1

4.3 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 2. Ordnung

4.3.1 Herleitung

Das Verhalten der im vorangehenden Abschnitt entworfenen Zusatzdämpfung soll bei dynamischen Betriebspunkten weiter verbessert werden. Dazu wird das Kalman-Filter 1. Ordnung um einen Zustand erweitert und Eingangsgröße u im Filter verwendet (siehe Abb. 4.16). Durch das zusätzliche Modellwissen sollen die Dämpfungsergebnisse verbessert werden. Für das Kalman-Filter 2. Ordnung (KF2) wird das Modell (4.40)

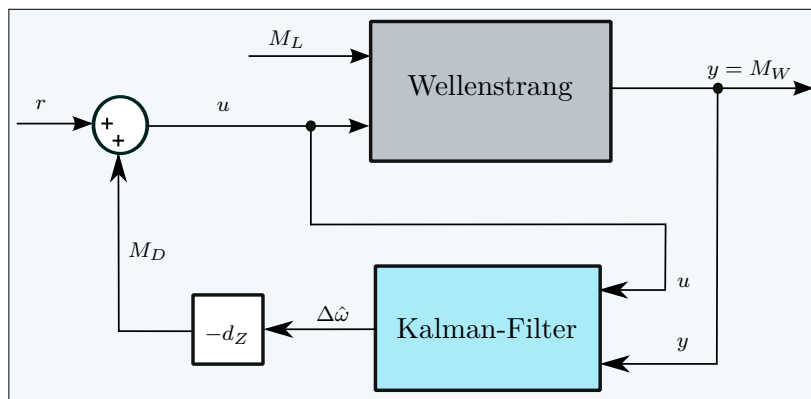


Abbildung 4.16: Blockschaltbild: Zusatzdämpfung mittels eines KF2

und (4.41) ohne das unbekannte Lastmoment M_L verwendet. Für das Modell gilt:

$$\mathbf{A}_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{AM}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 := [-c_W \quad 0]. \quad (4.63)$$

Diskretisiert man das Zustandsraummodell mit der Diskretisierungszeit T_d , folgt:

$$\Phi = e^{\mathbf{A}_2 T_d}, \quad (4.64)$$

$$\mathbf{H} = \int_0^{T_d} e^{\mathbf{A}_2 \tau} \mathbf{b}_2 d\tau. \quad (4.65)$$

Das Kalman-Filter 2. Ordnung kann aus den stationären Kalman-Filtergleichungen (4.37) bis (4.39) ermittelt werden. Für den Schätzwert des Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}_i$ folgt:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{H} u_i + \Phi \mathbf{K}_d (y_i - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_i). \quad (4.66)$$

Das entworfene Filter ist im Gegensatz zum Kalman-Filter 1. Ordnung kein Störgrößenbeobachter. Etwaige Modellfehler sowie die unbekannte Eingangsgröße M_L können

dadurch nicht mithilfe des Störzustands kompensiert werden. Die Schätzergebnisse für $\Delta\omega$ hängen über die neu eingeführte Zustandsgröße $\Delta\varphi$ unmittelbar vom Lastmoment M_L ab. Der Mittelwert des ermittelten Dämpfungsmoments M_D kann einen Gleichanteil aufweisen und ungleich Null sein. Diese Abweichung muss durch den Drehzahlregler kompensiert werden. Zusätzlich müssen die Parameter J_{AM} , J_L und c_W für den Filterentwurf bekannt sein.

4.3.2 Simulationsstudie Motorprüfstand

Anhand der durchgeführten Simulationen (für die detaillierte Filterparametrierung siehe Tabelle A.5 im Anhang) zeigt sich, dass die Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 2. Ordnung zur Schätzung von $\Delta\omega$ auf den ersten Blick recht gut funktioniert (siehe Abb. 4.17). Bei näherer Betrachtung des Dämpfungsmoments M_D

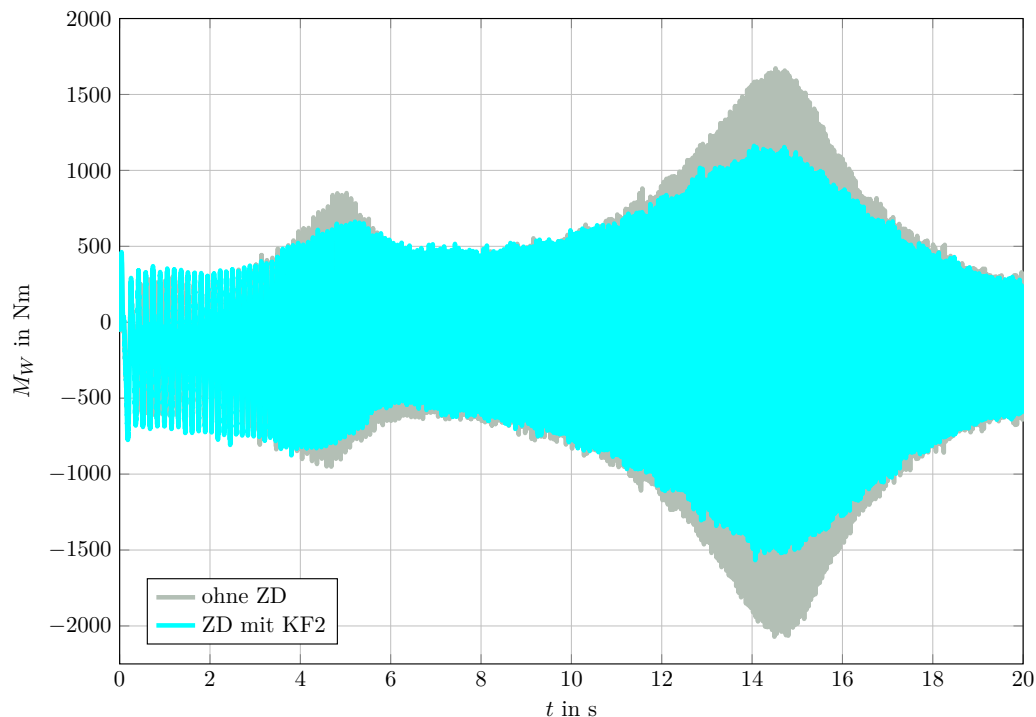


Abbildung 4.17: Simulation EOL: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF2

bestätigt sich, dass das Dämpfungsmoment einen Gleichanteil aufweist und nicht mehr direkt proportional zu $\Delta\omega$ ist (siehe Abb. 4.18). Durch das im Modell des Filters nicht berücksichtigte Lastmoment M_L kommt es zu einer scheinbaren Verdrehung des im Filter modellierten Wellenstrangs und $\Delta\varphi$ ist dauerhaft größer Null. Der beobachtete Gleichanteil bei der Schätzung von $\Delta\omega$ und in weiterer Folge bei M_D ist

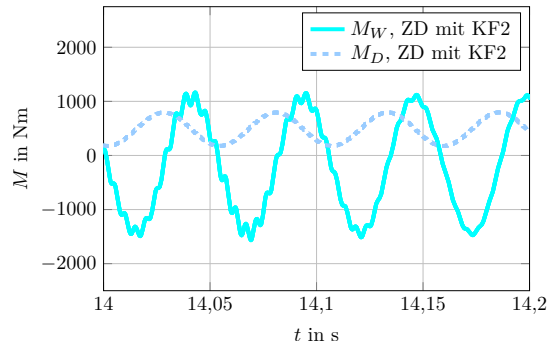


Abbildung 4.18: Simulation EOL: M_D bei Zusatzdämpfung mittels eines KF2

die unmittelbare Folge daraus. Bei den vorliegenden Simulationen wird der Gleichanteil im Dämpfungsmoment im stationären Betrieb durch den Drehzahlregler kompensiert und die Schwingung wird gedämpft. Ändert sich das Lastmoment sprunghaft, so ändert sich auch der Gleichanteil von M_D in gleichem Maße und der Regler ist nicht in der Lage, den Gleichanteil mit der erforderlichen Dynamik zu kompensieren. Dies führt dazu, dass das Dämpfungsverfahren durch Lastsprünge oder Lastanregungen mit größeren Amplituden verhältnismäßig leicht instabil werden kann.

4.3.3 Messergebnisse Motorprüfstand

Für den Versuch am realen Prüfstand wird eine konstante Drehzahl von 100 1/min angefahren und die Zusatzdämpfung durch langsames Vergrößern der Zusatzdämpfungskonstante d_Z sukzessive aktiviert. Das System wird unmittelbar nach der Aufschaltung instabil und der Test muss abgebrochen werden. Im Amplitudenspektrum von M_W in Abb. 4.19 (links) wird ersichtlich, dass das Wellenmoment M_W mit der zweiten

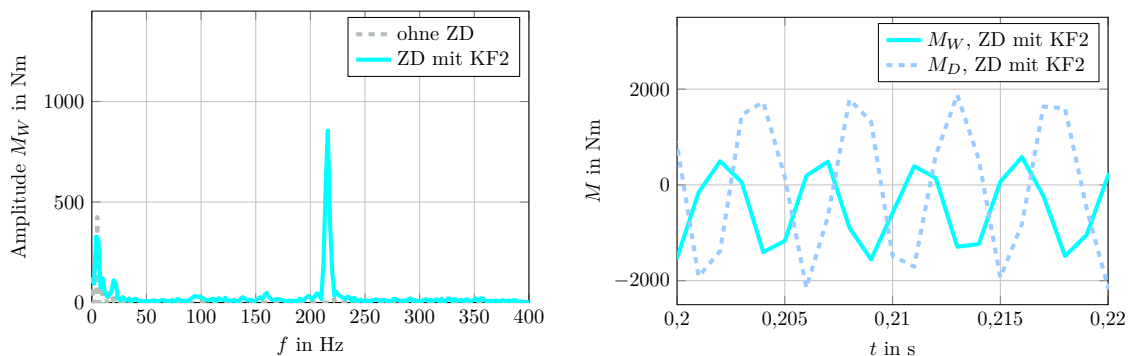


Abbildung 4.19: Messdaten EOL: Frequenzspektrum und M_D bei Zusatzdämpfung mittels eines KF2

Eigenfrequenz des Wellenstrangs bei 212 Hz schwingt. Die ausgeprägte Anregung des

Prüflings bei niedrigen Drehzahlen, die fehlende Berücksichtigung des Lastmoments im Kalman-Filter 2. Ordnung sowie die Totzeit bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments führen zur Instabilität des Systems. Ohne Zusatzdämpfung wird die zweite Resonanzfrequenz des Wellenstrangs nicht angeregt. Im Bereich der Instabilität kommt es durch die ungünstige Phasenlage des Dämpfungsmoments M_D zu einer Verstärkung der Schwingung (siehe Abb. 4.19 rechts). Der durch die Variante bedingte Gleichanteil im Dämpfungsmoment ist aufgrund der Vollaussteuerung des Dämpfungsmoments durch die Instabilität nicht mehr sichtbar. Die Messungen unterstreichen die in Abschnitt 4.3.2 aufgezeigten Schwachstellen der Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 2. Ordnung zur Zustandsschätzung. Durch die fehlende Berücksichtigung des Lastmoments im Filter und die Anfälligkeit für Instabilität eignet sich die Variante nicht für den Einsatz in der Praxis.

4.4 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung

4.4.1 Herleitung

Die vorgestellten Varianten zur Schätzung von $\Delta\omega$ mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung und 2. Ordnung weisen den Nachteil auf, dass sie bei sprunghaftigen Änderungen des Lastmoments zu verhältnismäßig großen Schätzfehlern führen bzw. im Fall der Dämpfung mittels eines Kalman-Filters 2. Ordnung instabil werden können. Dies ist vor allem durch die fehlende Information über das Lastmoment in den zugrundeliegenden Modellen bedingt. Um diesem Nachteil entgegenzuwirken, wird das Modell des Kalman-Filters (4.63) um eine Zustandsgröße erweitert. Da das Lastmoment M_L unbekannt ist und nicht messtechnisch erfasst werden kann, wird es im Kalman-Filter geschätzt [47]. Hierzu wird von einem konstanten Lastmoment

$$\frac{dM_L}{dt} = 0 \quad (4.67)$$

ausgegangen und ein entsprechender, konstanter Störzustand in die Systemmatrix eingefügt. Man erhält für das Zustandsmodell des Kalman-Filters ein System 3. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (4.68)$$

$$y = \mathbf{C}x \quad (4.69)$$

mit dem Moment der Antriebsmaschine als Eingangsgröße u und mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \\ M_L \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Für die Systemmatrix \mathbf{A} , den Eingangsvektor \mathbf{B} und den Ausgangsvektor \mathbf{C} des Systems folgt aus den Größen des Wellenstrangs:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & -d_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & -\frac{1}{J_L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.71)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{AM}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [-c_W \quad -d_W \quad 0]. \quad (4.72)$$

Diskretisiert man das Zustandsraummodell mit der Diskretisierungszeit T_d , folgt für die zeitdiskrete Systemmatrix Φ und den zeitdiskreten Eingangsvektor \mathbf{H} :

$$\Phi = e^{\mathbf{A}T_d}, \quad (4.73)$$

$$\mathbf{H} = \int_0^{T_d} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau. \quad (4.74)$$

Das Kalman-Filter kann aus den Filter-Gleichungen (4.37) bis (4.39) berechnet werden. Für den Schätzwert des Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}_i$ folgt:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{H}u_i + \Phi \mathbf{K}_d (y_i - \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{x}}_i). \quad (4.75)$$

Das aufzuschaltende Antriebsmoment ergibt sich laut (4.4) zu

$$M_{D,i} = -d_Z \Delta \hat{\omega}_i. \quad (4.76)$$

Bei der Berechnung von \mathbf{K}_d kann im Allgemeinen über die Gewichtung der Einträge von \mathbf{R} zwischen zuverlässigen und weniger zuverlässigen Messungen unterschieden werden. Weniger zuverlässige Messungen können durch große Einträge in der Hauptdiagonale der Kovarianzmatrix \mathbf{R} im Vergleich zu anderen Messungen bei der Zustandsschätzung

weniger stark gewichtet werden. Für die Systemstörung \mathbf{w} und damit \mathbf{Q} gelten diese Annahmen im Allgemeinen nicht. Die Annahme, dass es sich bei \mathbf{w} um weißes Rauschen handelt, ist in den meisten Fällen nicht zutreffend. Die Auswirkung der einzelnen Elemente von \mathbf{Q} ist bei größeren Systemen nicht mehr so intuitiv interpretierbar. Große Gewichtungsfaktoren in der Hauptdiagonale deuten auf große Änderungen in der realen Zustandsvariable hin und führen dadurch zu einer stärkeren Gewichtung der Messwerte für die Zustandsschätzung. Wenn die Rauscheigenschaften des Systems nicht genau bestimmt werden können, werden \mathbf{Q} und \mathbf{R} häufig im Rahmen von Simulationsstudien festgelegt. Hierfür können neben herkömmlichen Simulationen genetische Verfahren, wie in [121] vorgestellt, zum Einsatz kommen. Die resultierenden Parametrierungen hängen aber stark von der Qualität der Modellierung ab. Eine Feineinstellung wird deshalb während der Inbetriebnahme an der realen Anlage vorgenommen.

Durch die Erweiterung des Zustandsraummodells fließt mehr Information über den zu dämpfenden Wellenstrang ein. Dies führt zu einem besseren Schätzergebnis, unter der einschränkenden Voraussetzung, dass die einzelnen Modellparameter in ausreichender Genauigkeit zur Verfügung stehen. In Kapitel 5 wird analysiert, inwieweit sich Modellunsicherheiten bzw. Parameterschwankungen auf die Ergebnisse der Zustandsschätzung auswirken und ob etwaige Modellfehler durch die Wahl von \mathbf{Q} kompensiert werden können. In weiterer Folge wird eine Strategie für eine robuste Parametrierung des Filters vorgestellt. Die Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung (KF3) wird für beide Versuchsprüfstände entworfen und anhand von Simulationen und Messungen an den Prüfständen verifiziert.

4.4.2 Simulationsstudie Rollenprüfstand

Bei den Simulationen des Rollenprüfstands (für die detaillierte Filterparametrierung siehe Tabelle B.4 in Anhang B.2) zeigt sich, dass die Dämpfungsergebnisse durch die Erweiterung des Kalman-Filters gegenüber der einfachen Zusatzdämpfung bzw. Dämpfung mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung zur Zustandsschätzung bei dynamischen Vorgängen signifikant verbessert werden können (siehe Abb. 4.20). Der Spitzenwert des ersten Momentenanstieges entspricht jenem der einfachen Zusatzdämpfung, die Schwingung wird in weiterer Folge aber deutlich schneller gedämpft. Die Schwingung ist wie bei der direkten Zusatzdämpfung nach ca. 0,1 s vollständig abgeklungen. Die direkte Variante bietet nur mehr bei der Dämpfung der ersten Momentenspitze leichte Vorteile. Die geschätzte Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\hat{\omega}$ stimmt gut mit der exakten Winkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ überein (siehe Abb. 4.21 rechts). Durch das im Modell des Filters nicht berücksichtigte Spiel der Gelenkwelle kommt es unmittelbar nach dem Aufschalten des Momentensprungs beim Durchfahren des Spiels zu einer Abweichung

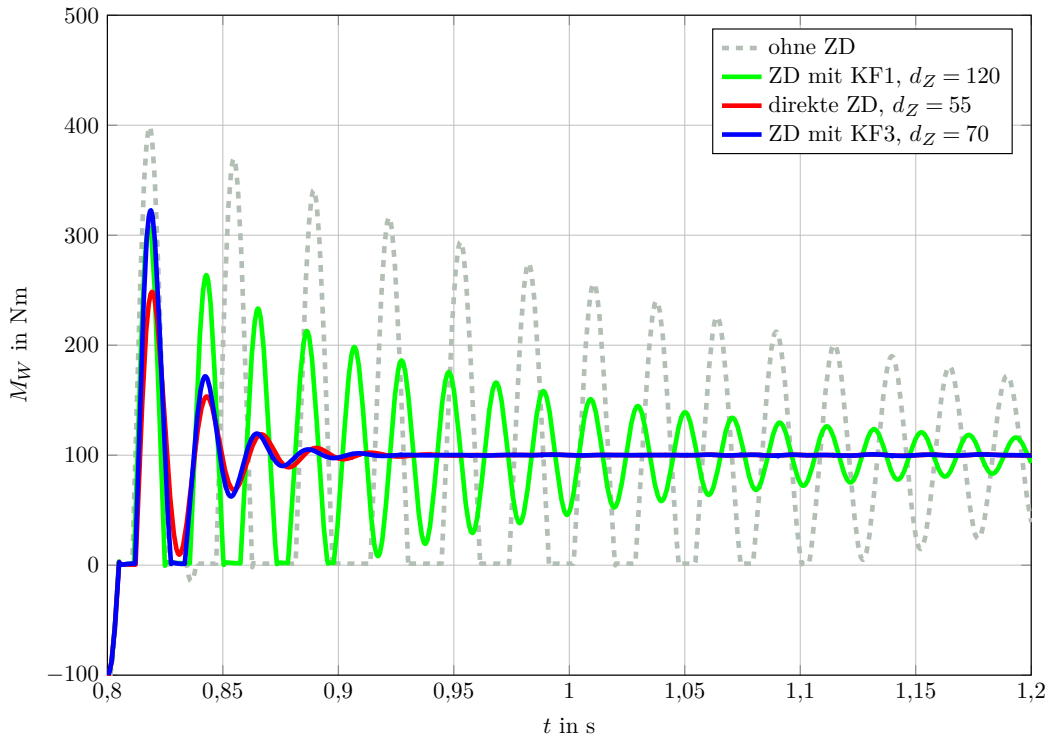


Abbildung 4.20: Simulation Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3

zwischen geschätztem und realem $\Delta\omega$. Der Schätzfehler in diesem Bereich führt dazu, dass der erste Momentenanstieg etwas schlechter als mit der direkten Zusatzdämpfung gedämpft wird. Dies wirkt sich aber im weiteren Verlauf nicht weiter aus. Die Dämpfungskonstante muss gegenüber der direkten Zusatzdämpfung geringfügig erhöht werden, um die gleichen Dämpfungsergebnisse zu erzielen. Bei der einfachen Zusatzdämpfung ist der Schätzfehler von $\Delta\hat{\omega}$ hinsichtlich Amplitude und Phasenlage durch den Einsatz des Tiefpassfilters deutlich größer (siehe Abb.4.21 links).

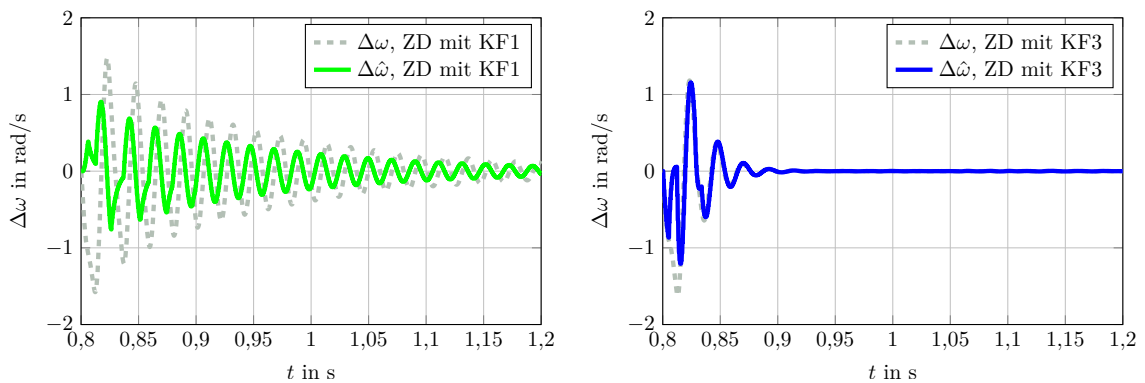


Abbildung 4.21: Simulation Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3

4.4.3 Messergebnisse Rollenprüfstand

Die Messungen an der realen Anlage mit gegenüber der Simulation unveränderter Filterparametrierung bestätigen, dass die Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung zur Schätzung von $\Delta\omega$ gut funktioniert (siehe Abb. 4.22). Die Schwingung wird wie in der Simulation deutlich schneller als im Fall der einfachen Zusatzdämpfung gedämpft. Die Werte für d_Z bei den Versuchen mit den einzelnen Verfahren wurden so gewählt, dass eine maximale Dämpfung resultiert. Eine weitere Erhöhung von d_Z führt wieder zu schlechteren Ergebnissen. Die Erhöhung der Dämpfungskonstante d_Z von 70 auf 100 bringt beispielsweise keine merkliche Verbesserung. Die zweite Momentenspitze ist dann zwar geringfügig kleiner, die Schwingung braucht aber länger um abzuklingen. Abb. 4.23 zeigt die gemessenen und geschätzten Differenzwinkelgeschwindigkeiten $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei verschiedenen Werten für die Dämpfungskonstante. In Abb. 4.24 sind

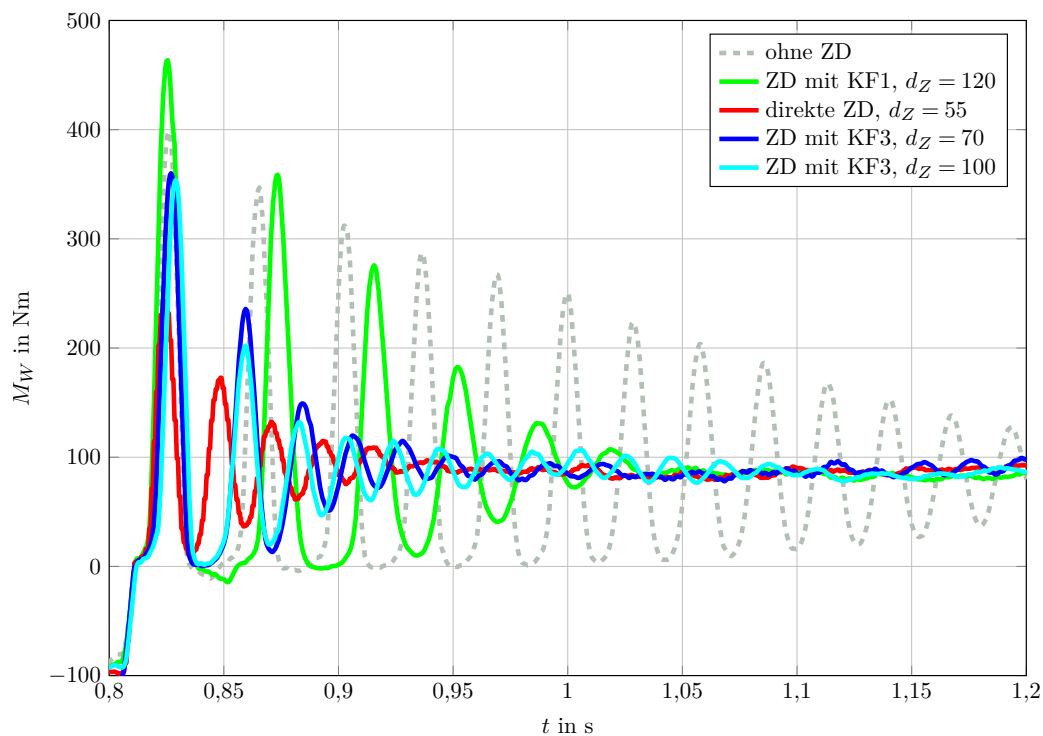


Abbildung 4.22: Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 für unterschiedliche Dämpfungskonstanten d_Z .

die zugehörigen Dämpfungsmomente M_D (vor der Totzeit durch die Signalverarbeitung und den verzögerten Momentenaufbau in der Antriebsmaschine) dargestellt. Bei größeren Werten für d_Z wird zwar ein größeres Dämpfungsmoment aufgeschaltet, die Schwingung wird dadurch aber nicht mehr besser gedämpft. Durch die Erweiterung des Kalman-Filters auf ein Modell 3. Ordnung kann der Schätzfehler für $\Delta\omega$ noch

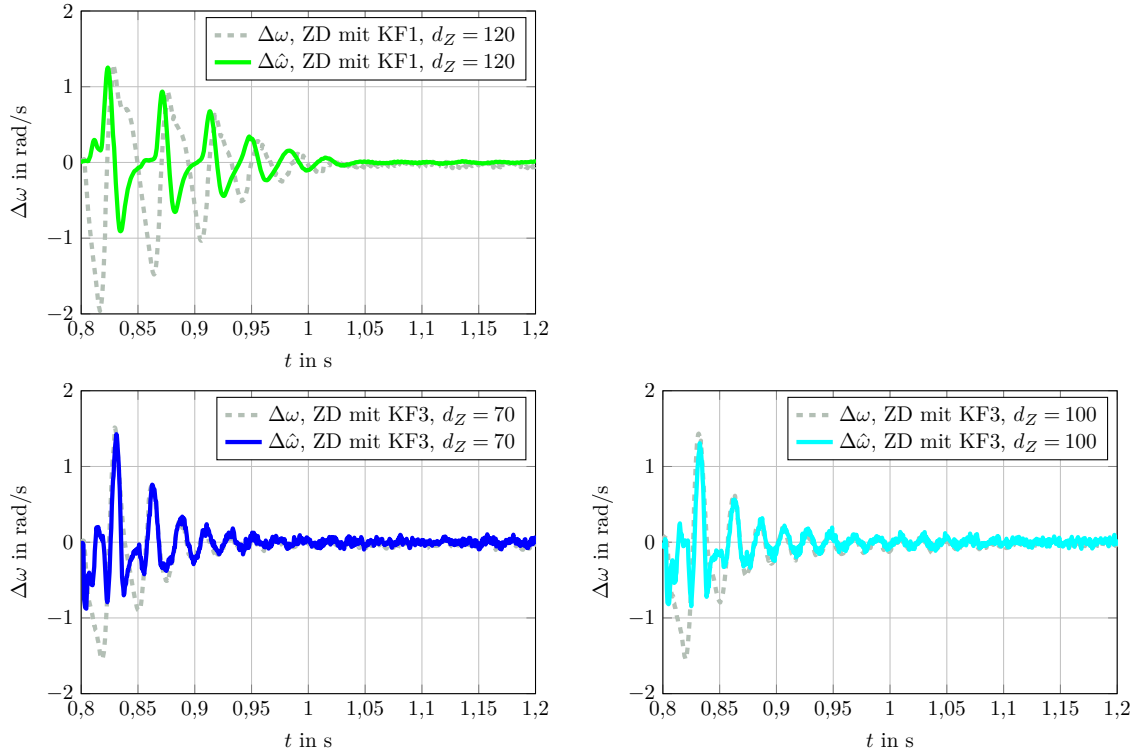


Abbildung 4.23: Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 für unterschiedliche Dämpfungskonstanten d_Z

weiter verringert und das Dämpfungsergebnis weiter verbessert werden. Die Ergebnisse spiegeln das zuvor simulierte Verhalten wider und unterstreichen die Wichtigkeit des Störzustandes bei der Zustandsschätzung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung. Durch den Störzustand wird das Lastmoment entsprechend geschätzt und die Reaktion auf schnelle Änderungen des Lastmoments verbessert. Obwohl das Verfahren durch die Erweiterung des Kalman-Filters mehr Wissen über die einzelnen Parameter des Wellenstrangs erfordert, ist es erstaunlich robust gegenüber Modellfehlern. Bei größeren Totzeiten führt jedoch auch diese Variante zu keinen zufriedenstellenden Dämpfungsergebnissen. Die Dämpfungsergebnisse der Variante mit Kalman-Filter 3. Ordnung sind bei den Messungen am Rollenprüfstand durch vorhandene Parameterunsicherheiten und die vorherrschende Totzeit bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments im Gegensatz zur Simulation geringfügig schlechter als bei Verwendung der direkten Zusatzdämpfung.

4.4 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung

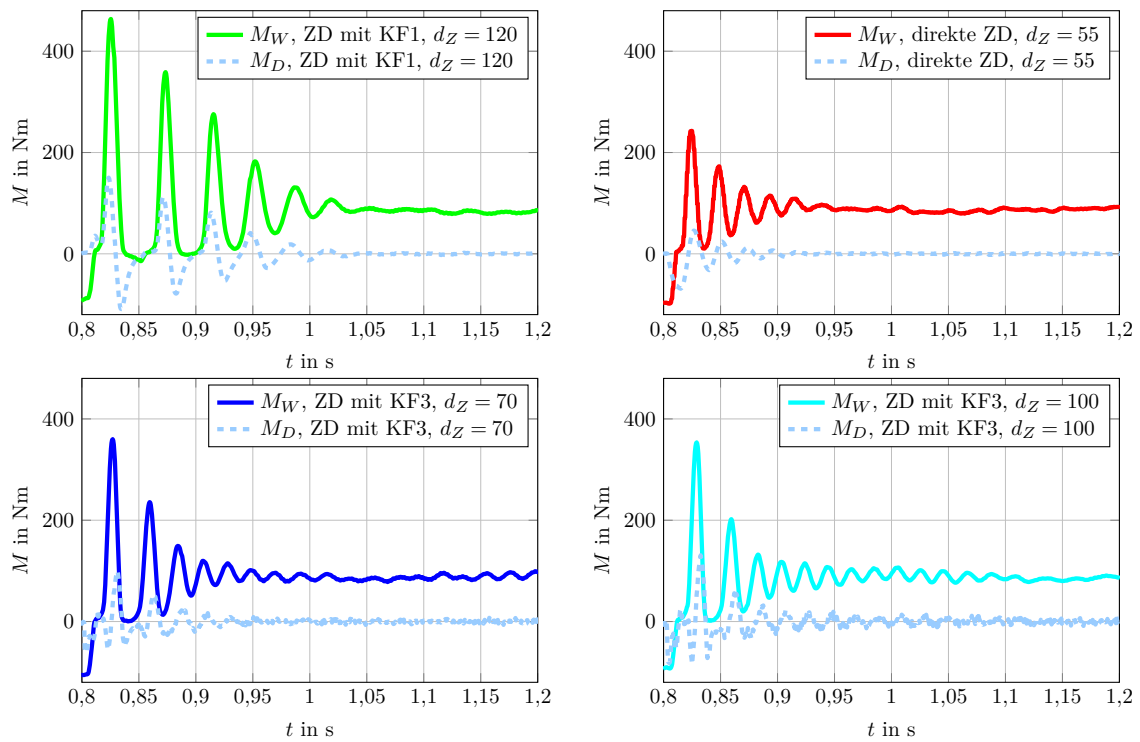


Abbildung 4.24: Messdaten Rolle: M_D bei verschiedenen Verfahren mit unterschiedlichen Dämpfungskonstanten d_Z

4.4.4 Simulationsstudie Motorprüfstand

Die Dämpfungsvariante mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung wird für den Motorprüfstand simuliert und an der realen Anlage validiert (für die detaillierte Filterparametrierung siehe Tabelle A.6 in Anhang A.2). Abb. 4.25 zeigt die simulierten

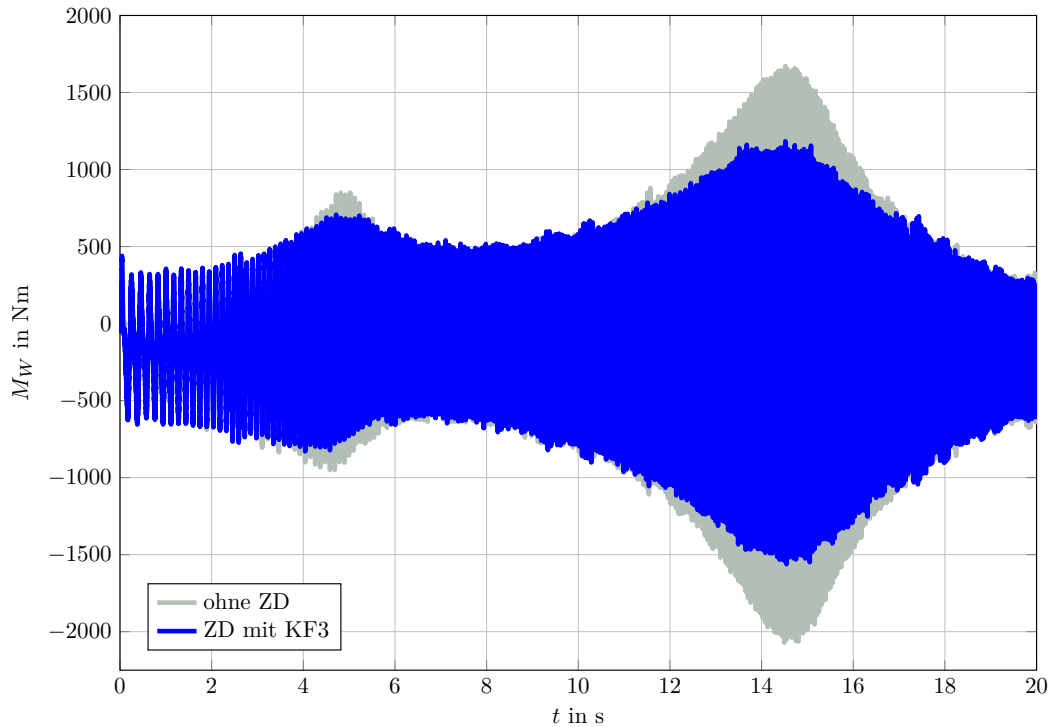


Abbildung 4.25: Simulation EOL: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3

Drehmomentverläufe. Durch die verhältnismäßig große Totzeit ($T_t > 4$ ms) bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments bedingt durch den eingesetzten Frequenzumrichter funktioniert die Variante mit der Erweiterung auf ein Kalman-Filter 3. Ordnung geringfügig schlechter als die Variante mit einem Kalman-Filter 1. Ordnung (vgl. Abb. 4.12) oder gegenüber den Versuchen am Rollenprüfstand mit geringerer Totzeit. Es kann dennoch ein guter Dämpfungswert erreicht werden. Bei den simulierten Sprüngen des Lastmoments M_L können trotz großer Totzeit annähernd die gleichen Ergebnisse wie mit der einfachen Zusatzdämpfung erzielt werden (siehe Abb. 4.26).

4.4.5 Messergebnisse Motorprüfstand

Die Parametrierung der Zusatzdämpfung im Rahmen der Messungen am Prüfstand erfolgt mit den Parameterwerten aus der zugehörigen Simulationsstudie in Abschnitt 4.4.4.

4.4 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung

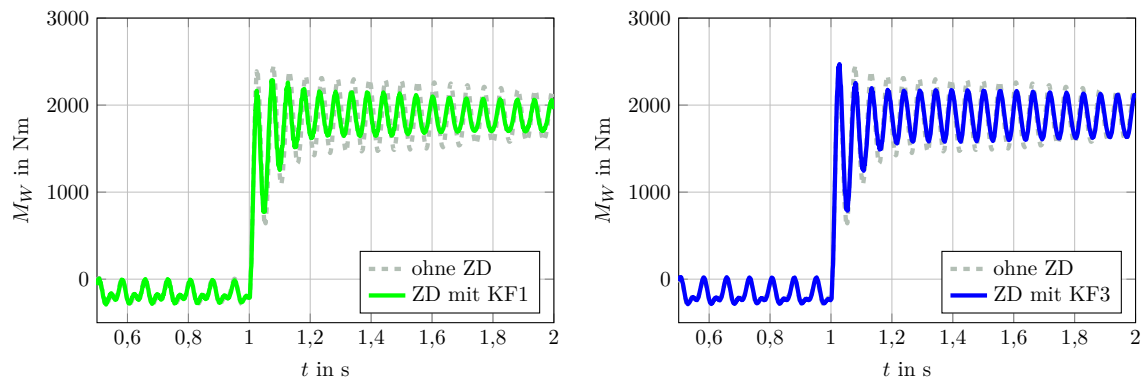


Abbildung 4.26: Simulation EOL: Sprung M_L bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3

In Abb. 4.27 ist der zugehörige Drehmomentverlauf ersichtlich. Die Drehmomentspitzen im Bereich der Resonanzfrequenz können von 1550 Nm im ungedämpften Fall auf 1100 Nm gesenkt werden. Durch die Zusatzdämpfung in Kombination mit der Drehzahlregelung kommt es zu einer geringen Verschiebung der Resonanzfrequenz (siehe Abschnitt 3.3). Die erzielbare Dämpfungswirkung ist im Vergleich zur Variante basierend auf dem Kalman-Filter 1. Ordnung bzw. gegenüber den Versuchen am Rollenprüfstand mit geringerer Totzeit etwas schlechter. Die Ursache liegt in der, durch Totzeiten bei der

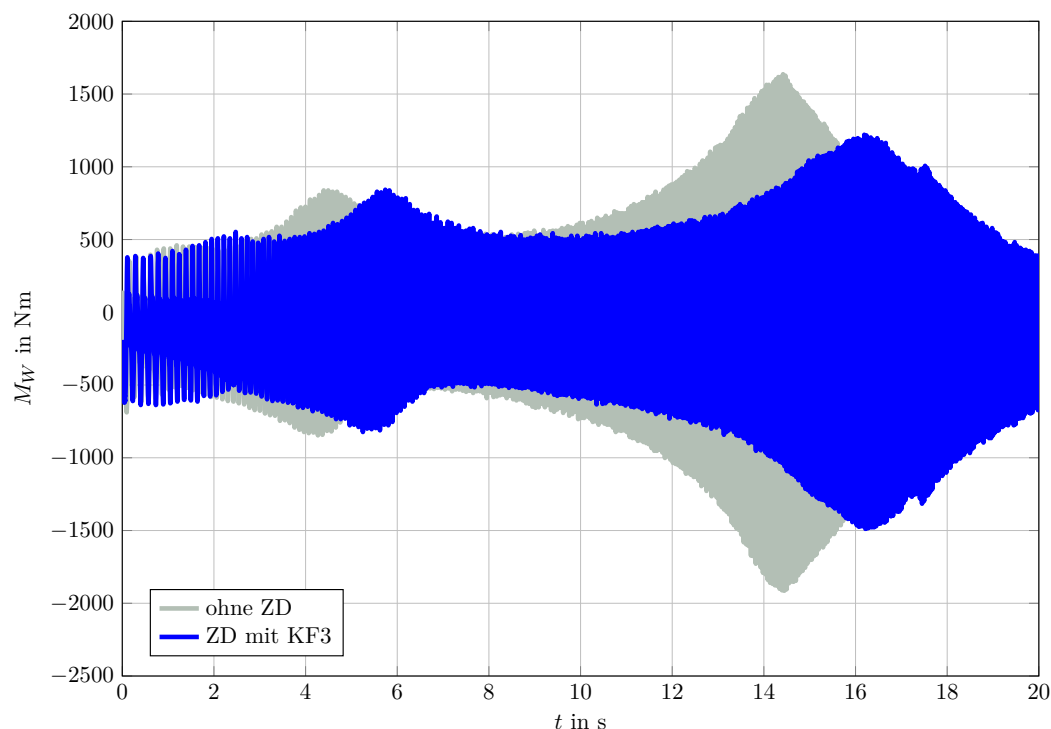


Abbildung 4.27: Messdaten EOL: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3

Signalübertragung und die darauffolgende Verarbeitung durch den Frequenzumrichter

bedingten, zu langsamen Aufschaltung des zusätzlichen Dämpfungsmoments. Vergleicht man das Dämpfungsmoment der Variante mit Kalman-Filter 1. Ordnung (Abb. 4.14 rechts) mit dem jetzt aufgeschalteten Dämpfungsmoment vor der Totzeit in Abb. 4.28 (rechts), wird ersichtlich, dass die Aufschaltung nicht mehr genau gegengleich zum gemessenen Wellenmoment, sondern geringfügig nach hinten verschoben erfolgt. Durch die Totzeit bei der Signalverarbeitung und der Momentenaufschaltung im Frequenzumrichter kommt es zu einer weiteren leichten Verschiebung des Dämpfungsmoments bis zur eigentlichen Aufschaltung. Im Amplitudenspektrum in Abb. 4.28 (links) wird die leichte Dämpfung beim Durchfahren der ersten Resonanzfrequenz zwischen Sekunde 13 und 17 gegenüber dem Ausgangszustand ebenfalls sichtbar. Insgesamt zeigt sich,

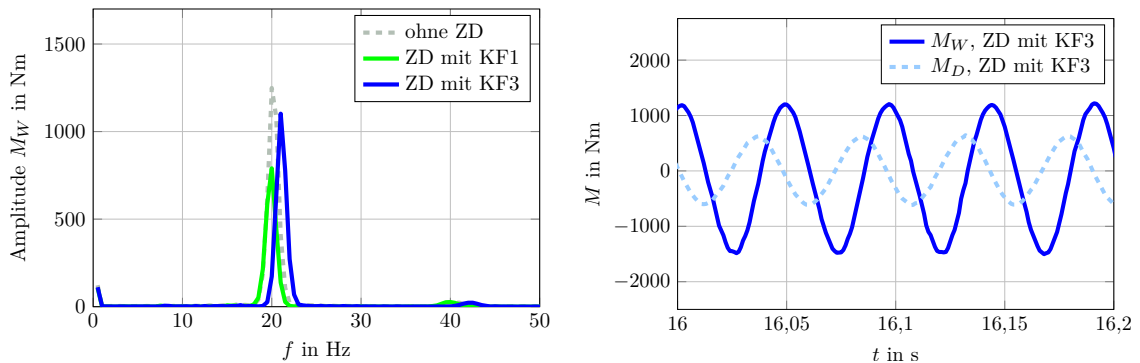


Abbildung 4.28: Messdaten EOL: Frequenzspektrum und M_D beim Durchfahren der 1. Resonanzfrequenz bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3

dass die vorgestellte Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung bei größeren Totzeiten zu schlechteren Ergebnissen führt. Bei kleinen Totzeiten können hingegen gute Ergebnisse erzielt werden (siehe Abschnitt 4.4.3). Die Versuche werden bei konstanter Filterparametrierung mit unterschiedlichen Motortypen durchgeführt. Trotz vorherrschender Parameterabweichung zwischen zugrundeliegendem Modell und realer Anlage variieren die Ergebnisse nur geringfügig. Obwohl der Filter-Entwurf auf einem mathematischen Modell d. h. der Kenntnis der Streckenparameter basiert, ist das Verfahren erstaunlich robust gegenüber Modellunsicherheiten. Bei größeren Totzeiten und Parameterunsicherheiten kommt es jedoch bei der Anwendung in der Praxis zu Problemen. Die Auswirkungen von Parameterunsicherheiten sowie Möglichkeiten zur sinnvollen Parametrierung des Filters bei vorliegenden Unsicherheiten werden in Abschnitt 5 im Detail betrachtet. Die Dämpfungsvariante eignet sich durch eine größere Empfindlichkeit gegenüber Totzeiten vorwiegend für integrierte Lösungen mit performanten Frequenzumrichtern und schränkt die Nachrüstung bei vorhandener Standardhardware ein. Als Abhilfe hierfür wird in weiterer Folge eine zusätzliche Prädiktion des aufzuschaltenden Dämpfungsmoments untersucht.

4.5 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters als Prädiktor

4.5.1 Herleitung

In diesem Abschnitt wird eine Erweiterung des bereits diskutierten Kalman-Filters 3. Ordnung vorgestellt. Diese ermöglicht eine Prädiktion des geschätzten Zustandsvektors in die Zukunft. Durch die Prädiktion wird eine gezielte Kompensation der in der Strecke auftretenden Totzeiten möglich. Im Fall der Zusatzdämpfung sind dies vor allem Totzeiten bei der Signalübertragung und Aufschaltung des geforderten Dämpfungsmoments M_D . Wie bei den bereits zuvor analysierten modellbasierten Varianten müssen die Parameter des zugrundeliegenden Modells (4.68) und (4.69) zumindest näherungsweise bekannt sein.

Das zeitdiskrete Kalman-Filter besteht aus einem Prädiktionsschritt (4.34) und einem Korrekturschritt (4.35). Man spricht von einem sog. Prädiktor-Korrektorverfahren. Der Schätzwert wird in jedem Zeitschritt mithilfe des Prädiktionsschritts in die Zukunft prädiziert und anschließend mit dem Korrekturschritt korrigiert. Wird der Prädiktionsschritt vor der Ausgabe des Schätzwertes rekursiv auf das Schätzergebnis $\hat{\mathbf{x}}_i$ angewendet, kann der geschätzte Zustandsvektor um eine beliebige Anzahl von Zeitschritten in die Zukunft prädiziert werden. Für die Prädiktion um n Zeitschritte mit einer Prädiktionszeit $T_p = n T_d$ folgt aus (4.34) durch rekursives Einsetzen:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{H}u_i \quad (4.77)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+2} = \Phi^2 \hat{\mathbf{x}}_i + \Phi \mathbf{H}u_i + \mathbf{H}u_{i+1} \quad (4.78)$$

⋮

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+n} = \Phi^n \hat{\mathbf{x}}_i + \sum_{j=1}^n \Phi^{n-j} \mathbf{H}u_{i+j-1}. \quad (4.79)$$

Wird für $\hat{\mathbf{x}}_i$ das Ergebnis aus dem Korrekturschritt (4.35) für das stationäre Kalman-Filter eingesetzt, folgt:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+n} = \Phi^n (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \mathbf{x}_i^* + \Phi^n \mathbf{K}_d y_i + \sum_{j=1}^n \Phi^{n-j} \mathbf{H}u_{i+j-1}. \quad (4.80)$$

Man beachte, dass zur Ermittlung des prädizierten Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}_{i+n}$ bereits zum Berechnungszeitpunkt die zukünftigen Werte der Eingangsgrößen u_i bis u_{i+n-1} bekannt sein müssen. Da diese Forderung im Regelfall nicht erfüllt ist, könnte das Eingangssignal u_i ebenfalls mit der Resonanzfrequenz periodisch in die Zukunft prädiziert und

anschließend für die Ermittlung der prädizierten Schätzgröße verwendet werden. Eine naheliegende und deutlich einfachere Abhilfe besteht darin, das Eingangssignal u_i während des Prädiktionshorizonts als konstant anzunehmen. Diese Annahme ist durchaus gerechtfertigt, solange der Prädiktionshorizont nT_d im Verhältnis zur Periodendauer der vorliegenden Resonanzfrequenz klein ist. Die Eingangsgröße, die sich im Resonanzfall ebenfalls mit der betreffenden Frequenz ändert, kann dann für kleine Prädiktionshorizonte als näherungsweise konstant angenommen werden. Zudem hat sich gezeigt, dass der Einfluss der Eingangsgröße auf den Schätzwert in den meisten Fällen recht gering ist. Simulationen zeigen, dass ein konstantes Eingangssignals $u_{i+n-j} \approx u_i$ für $1 \leq j \leq n$ bei einem Prädiktionshorizont von $nT_d = 5$ ms und einer Resonanzfrequenz von 50 Hz zu den gleichen Prädiktionsergebnissen wie die Verwendung der exakten Eingangssignale im jeweiligen Zeitschritt führt und die getroffene Annahme somit durchaus legitim ist. Mit der Annahme einer konstanten Eingangsgröße $u_{i+n-j} \approx u_i$ für $1 \leq j \leq n$ folgt aus (4.80) für den prädizierten Zustandsvektor:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+n} = \Phi^n (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \mathbf{x}_i^* + \Phi^n \mathbf{K}_d y_i + \sum_{j=1}^n \Phi^{n-j} \mathbf{H} u_i. \quad (4.81)$$

Das Zustandsraummodell des stationären Kalman-Filters inkl. Prädiktion des Schätzwerts $\Delta \hat{\omega}$ um n Zeitschritte lautet:

$$\mathbf{x}_{i+1}^* = \Phi (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \mathbf{x}_i^* + \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \Phi \mathbf{K}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

$$\Delta \hat{\omega}_{i+n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Phi^n (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \mathbf{x}_i^* + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \Phi^{n-j} \mathbf{H} & \Phi^n \mathbf{K}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ y_i \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

Für das aufzuschaltende Dämpfungsmoment folgt aus (4.4):

$$M_{D,i+n} = -d_Z \Delta \hat{\omega}_{i+n}. \quad (4.84)$$

Das Kalman-Filter wird durch die zusätzliche Prädiktion im Anschluss an die Zustandsschätzung nicht beeinflusst. Das System verhält sich aufgrund der Kompensation der vorliegenden Totzeit gleich wie das äquivalente System ohne Totzeit. Der Entwurf des Kalman-Filters ist gegenüber jenem des Filters ohne Prädiktion unverändert und sämtliche Analysen des Filters können wie gewohnt, ohne die Berücksichtigung der Totzeit und deren Prädiktion, erfolgen.

Durch die vorgestellte Prädiktion kann die vorhandene Totzeit bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments vollständig kompensiert werden. Der Prädiktionshorizont kann

dabei in ganzzahligen Vielfachen der Abtastzeit T_d an die anlagenspezifische Situation angepasst werden. Die Totzeiten durch die Messtechnik und die Drehmomentaufschaltung sind im Regelfall konstant. Dadurch kann die notwendige Prädiktionszeit im Rahmen der Erstinbetriebnahme festgelegt werden und muss im Nachhinein nicht mehr verändert werden. Mithilfe der Erweiterung kann die Zusatzdämpfung auch bei Frequenzumrichtern und Messketten mit signifikanten Totzeiten eingesetzt werden. Durch die exakte Aufschaltung des Dämpfungsmoments führt die Prädiktion selbst bei geringen Totzeiten zu einer Verbesserung des Dämpfungsergebnisses (siehe Abschnitt 4.5.2 bis 4.5.5).

4.5.2 Simulationsstudie Rollenprüfstand

In der Simulation des Rollenprüfstands (für die detaillierte Filterparametrierung siehe Tabelle B.5 in Anhang B.2) kann das Dämpfungsergebnis bei gleicher Dämpfungskonstante durch zusätzliche Prädiktion mit Prädiktionszeit $T_p = 2$ ms noch geringfügig verbessert werden (siehe Abb. 4.29). Aufgrund der verhältnismäßig kleinen Totzeit sind

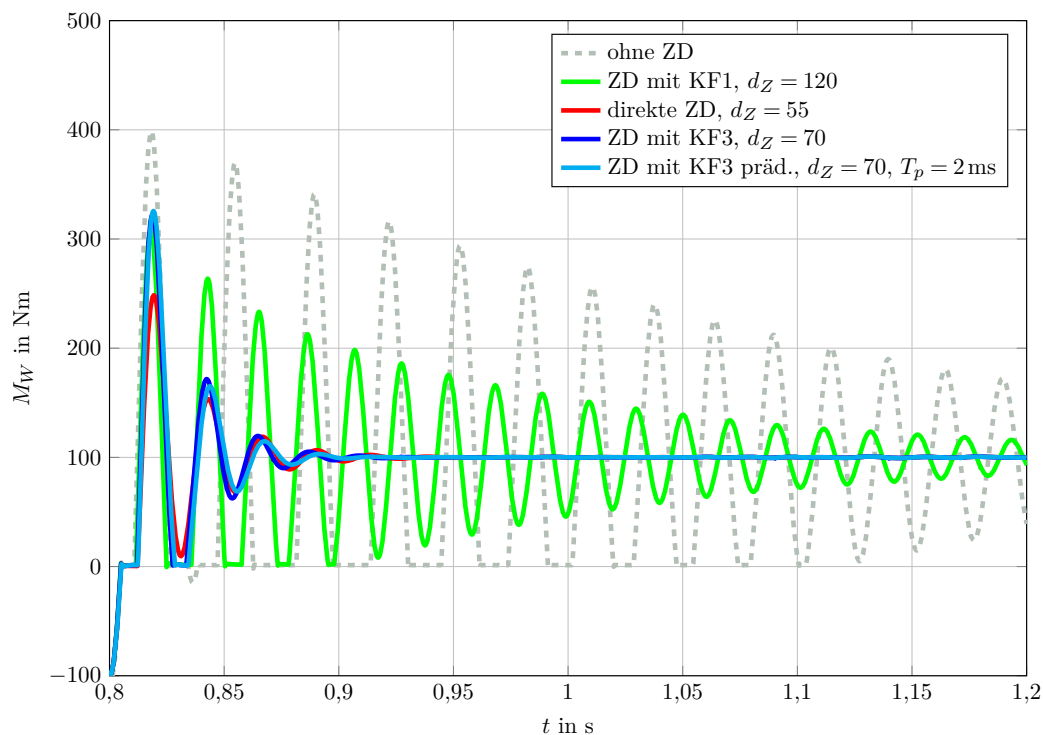


Abbildung 4.29: Simulation Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion für $T_p=2$ ms

die Verbesserungen aber eher gering. Durch die Annahme einer konstanten Eingangsgröße u über den Prädiktionshorizont in Kombination mit dem im Filter nicht modellierten

Wellenspiel kann die erste Momentenspitze gegenüber der Variante ohne Prädiktion nicht weiter gedämpft werden. Danach kommt es zu einer sehr guten Dämpfung. In Abb. 4.30 sind die zugehörigen Verläufe für $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ für verschiedene Dämpfungsverfahren dargestellt. Die Verschiebung von $\Delta\hat{\omega}$ gegenüber $\Delta\omega$ um die parametrisierte Prädiktionszeit von 2 ms ist im Zoom zu erkennen. Die Prädiktion funktioniert wie im

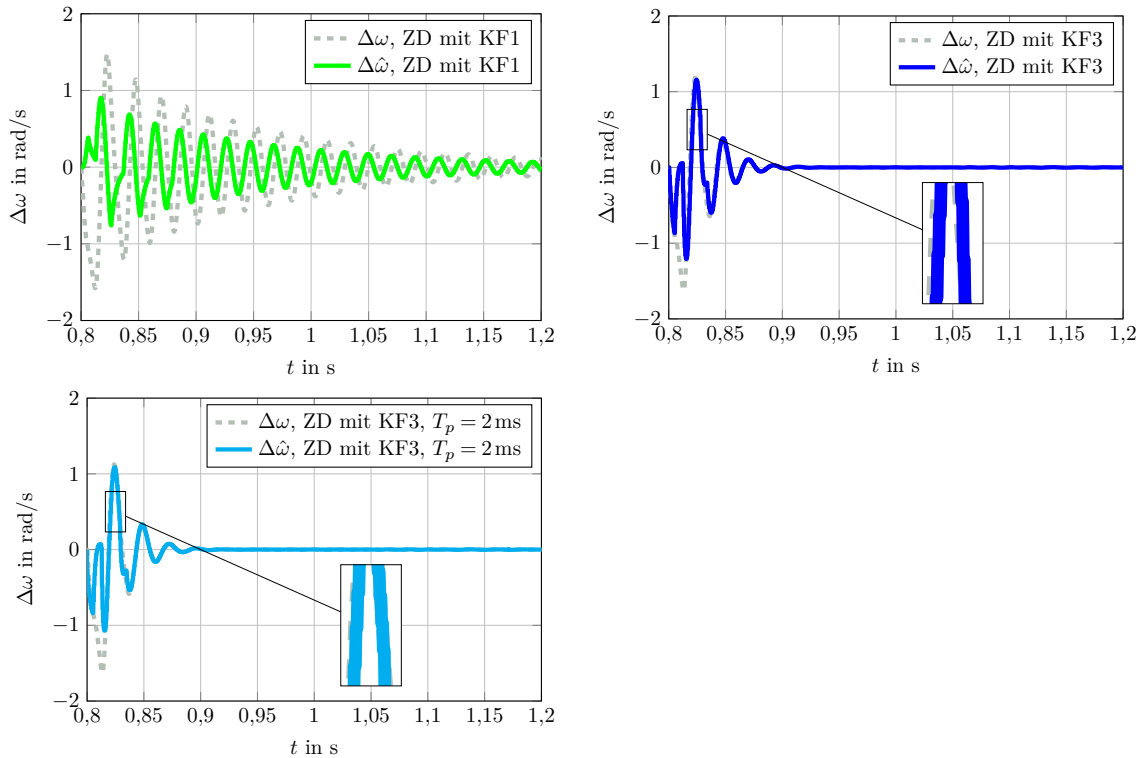


Abbildung 4.30: Simulation Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei verschiedenen Dämpfungsvarianten

Rahmen der Entwurfsphase gefordert und kann zu einer weiteren Verbesserung der Zusatzdämpfung beitragen. Vor allem bei weniger dynamischen Vorgängen sollte das Verbesserungspotential noch deutlich größer sein.

4.5.3 Messergebnisse Rollenprüfstand

Die Dämpfungsvariante mit zusätzlicher Prädiktion wird auch an der realen Anlage implementiert und getestet. Für die Versuche wird die Parametrierung aus der Simulation verwendet (siehe Tabelle B.5). Die Prädiktionszeit wird zwischen 2 ms und 6 ms variiert. Abb. 4.31 zeigt den Vergleich zwischen $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ für unterschiedliche Prädiktionszeiten T_p . Die geschätzte und prädizierte Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\hat{\omega}$ verschiebt sich gegenüber dem gemessenen $\Delta\omega$ mit zunehmender Prädiktionszeit

4.5 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters als Prädiktor

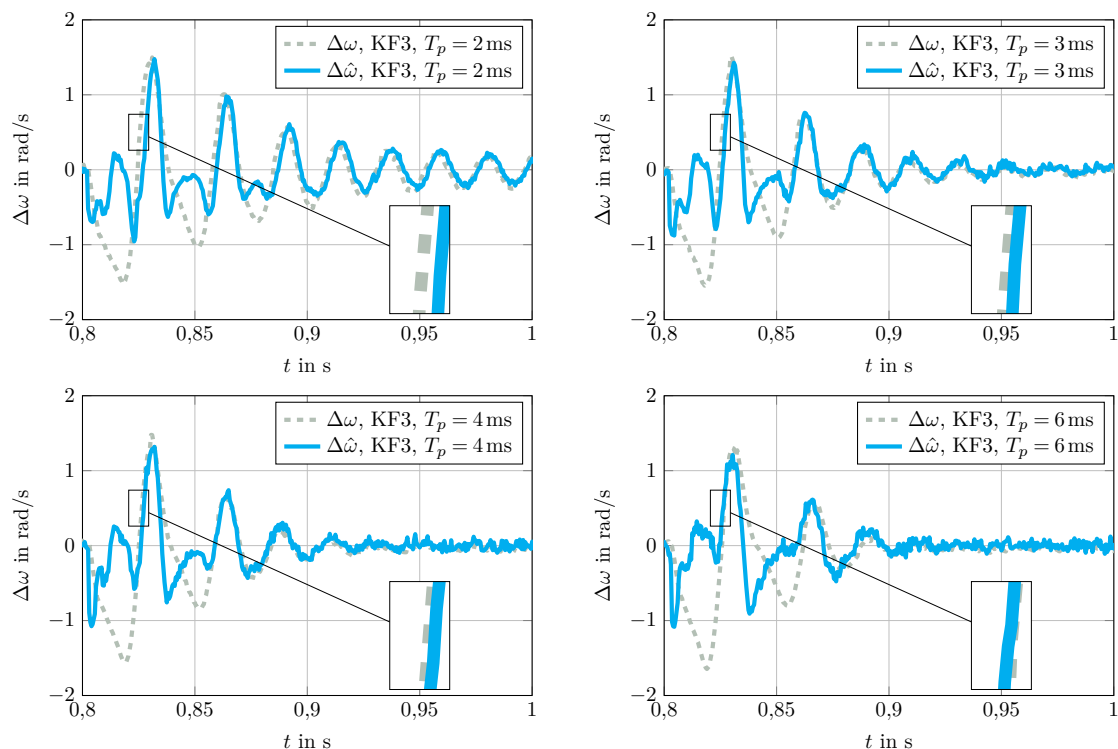


Abbildung 4.31: Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ für unterschiedliche Prädiktionszeiten T_p .

immer weiter nach links in die Zukunft. Es ist anzumerken, dass die gemessene Winkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ aufgrund der Totzeiten bei der Signalverarbeitung des gemessenen Wellenmoments M_W und des Eingangssignals u gegenüber dem Schätzwert $\Delta\hat{\omega}$ ohne Prädiktion geringfügig vorseilt. Durch die Prädiktion kann der Schätzwert zeitlich an die reale Messung angepasst werden. Bei einer Prädiktionszeit von $T_p = 4$ ms ergibt sich bereits eine gute Übereinstimmung. Bei $T_p = 6$ ms stimmt zwar die steigende Flanke im Zoom noch besser überein, der restliche Verlauf von $\Delta\hat{\omega}$ deckt sich aber schlechter mit $\Delta\omega$ als bei $T_p = 4$ ms.

In Abb. 4.32 sind die resultierenden Wellenmomente dargestellt. Als Referenz dient das Wellenmoment mit direkter Zusatzdämpfung. Die erste Momentenspitze wird mit zunehmender Prädiktionszeit schlechter gedämpft. Dies ist auf das im Filter nicht modellierte Wellenspiel im Kombination mit der verzögerten Reaktion auf den Momentensprung durch die vereinfachende Annahme der konstanten Eingangsgröße u zurückzuführen. Die Schwingung wird mit steigender Prädiktionszeit aber sukzessive besser gedämpft und klingt immer schneller ab. Das beste Ergebnis wird bei $T_p = 4$ ms erreicht. Diese Einstellung stellt den besten Kompromiss zwischen der Höhe der ersten Momentenspitze und der Zeit bis zum vollständigen Abklingen der Schwingung dar. Bei dieser Einstellung stimmen $\Delta\hat{\omega}$ und $\Delta\omega$ ebenfalls am besten überein.

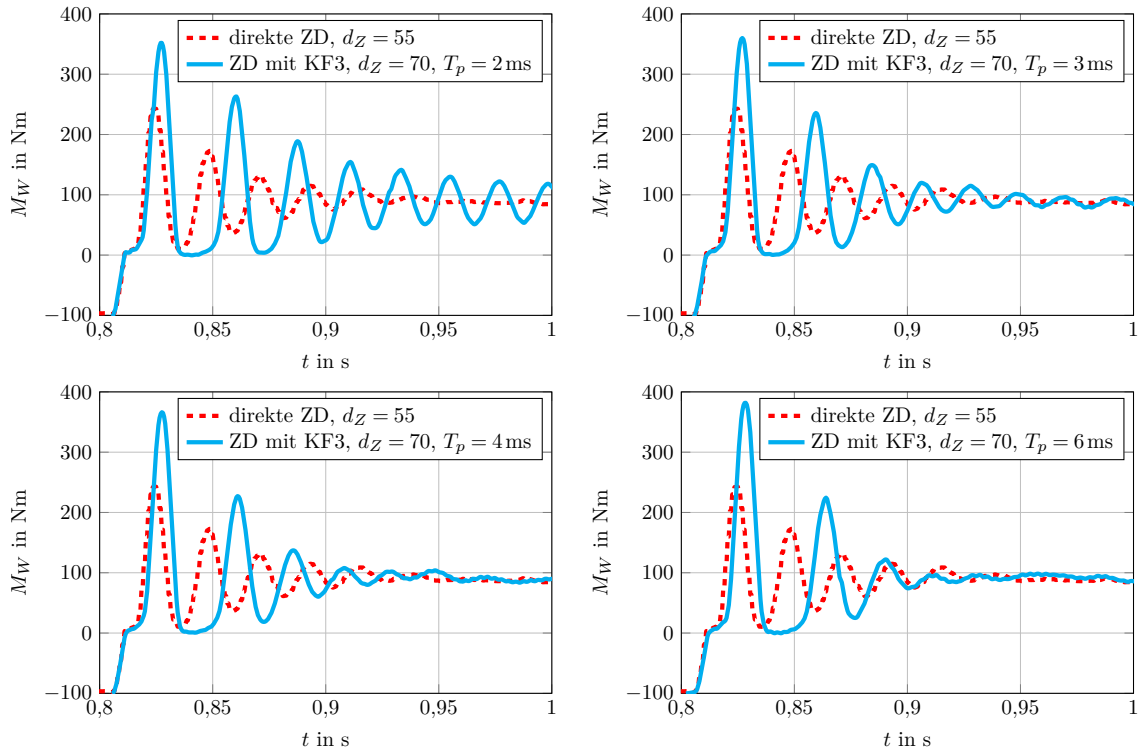


Abbildung 4.32: Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion für unterschiedliche Prädiktionszeiten T_p .

Die in den Messungen sichtbare Totzeit an der realen Anlage ist gegenüber den Simulationsstudien durch im Simulationsmodell nicht oder nur näherungsweise berücksichtigte Effekte noch geringfügig größer. Insgesamt zeigt sich aber, dass die Dämpfungsergebnisse mithilfe der zusätzlichen Prädiktion noch weiter verbessert werden können. Die Annahme einer konstanten Eingangsgröße über den gesamten Prädiktionshorizont verringert zwar die Dämpfung der ersten Momentenspitze, funktioniert in weiterer Folge aber sehr gut. Der verhältnismäßig kleine Nachteil bei der Dämpfung der ersten Momentenspitze bei hochdynamischen Vorgängen wird von dem großen Vorteil der Einfachheit des Konzepts mehr als aufgewogen.

4.5.4 Simulationsstudie Motorprüfstand

Die Prädiktion wird derart parametrisiert, dass der Schätzwert für $\Delta\omega$ um die Totzeit des Systems in die Zukunft prädiziert wird (für die detaillierte Filterparametrierung siehe Tabelle A.7 in Anhang A.2). Die Verzögerung bei der Aufschaltung kann kompensiert werden. Die restliche Filterparametrierung bleibt gegenüber dem Kalman-Filter 3. Ordnung unverändert. Mithilfe der Prädiktion können die Drehmomentspitzen beim

4.5 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters als Prädiktor

Durchfahren der Resonanzfrequenz während der Drehzahlrampe effektiv gedämpft werden (siehe Abb. 4.33). Die Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung

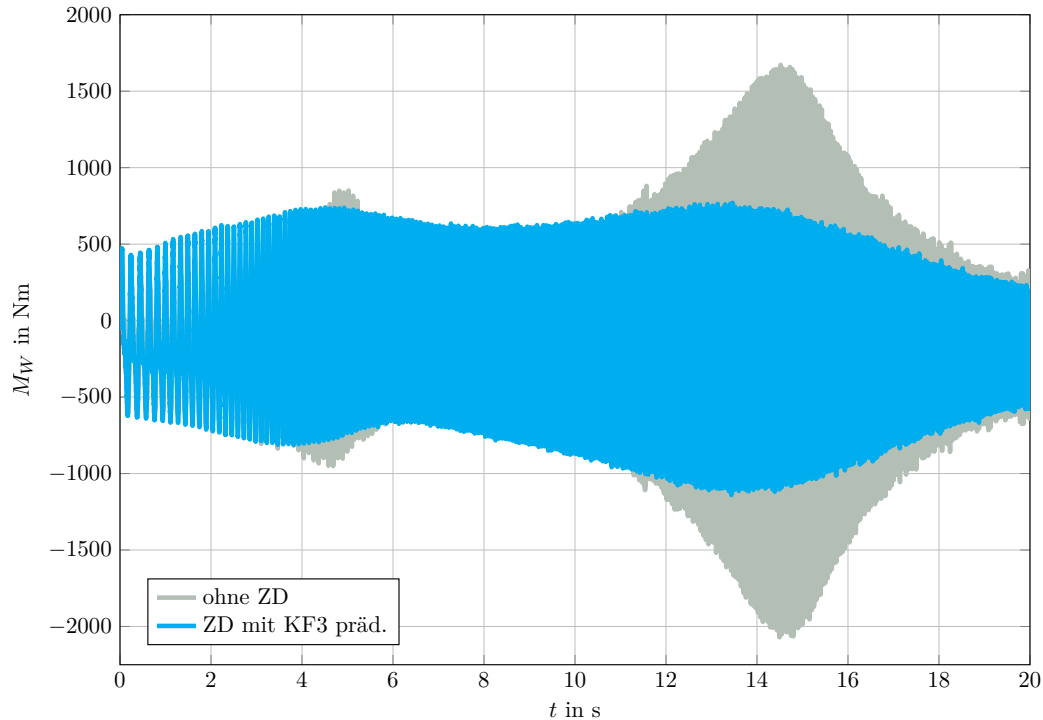


Abbildung 4.33: Simulation EOL: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion

führt durch die Erweiterung zu einer besseren Dämpfung als die ursprüngliche Variante ohne Kompensation und bei Dämpfung mittels eines Kalman-Filter 1. Ordnung (vgl. Abb. 4.12). Neben der Verbesserung während der langsamen Drehzahlrampe kommt es auch beim simulierten Sprung des Lastmoments M_L zu einer deutlichen Verbesserung (siehe Abb. 4.34). Die erste Momentenspitze wird zwar aufgrund der großen

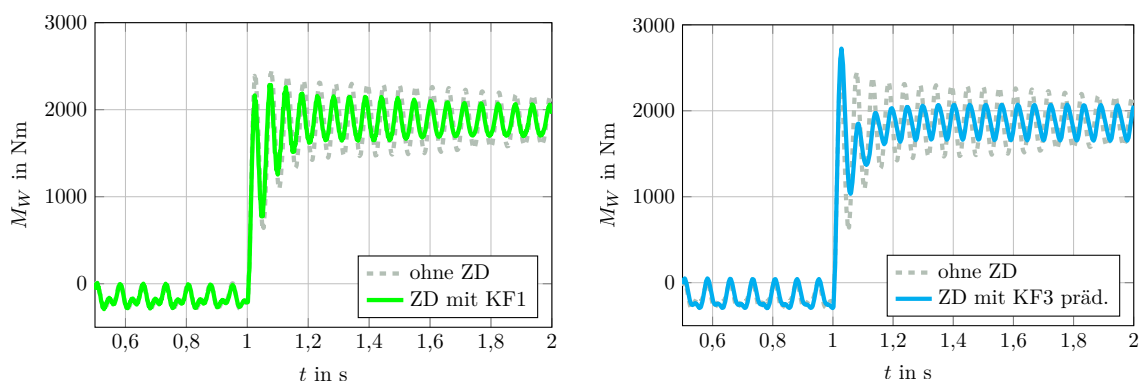


Abbildung 4.34: Simulation EOL: Sprung M_L bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion

Totzeit und des entsprechenden Prädiktionshorizonts nur geringfügig gedämpft, die

weitere Schwingung wird aber schnell bis auf das Niveau der Grundanregung durch das Lastmoment gesenkt. Die Schwingung kann bei dynamischen Vorgängen durch den Einsatz eines Kalman-Filters 3. Ordnung und die notwendige Kompensation der Totzeit effektiver gedämpft werden als mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung.

4.5.5 Messergebnisse Motorprüfstand

Abb. 4.35 zeigt das resultierende Wellenmoment M_W während der Drehzahlrampe bei aktiver Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung inkl. Prädiktion als Zustandsschätzer bei gleicher Parametrierung wie in der Simulation. Das Dämpfungs-

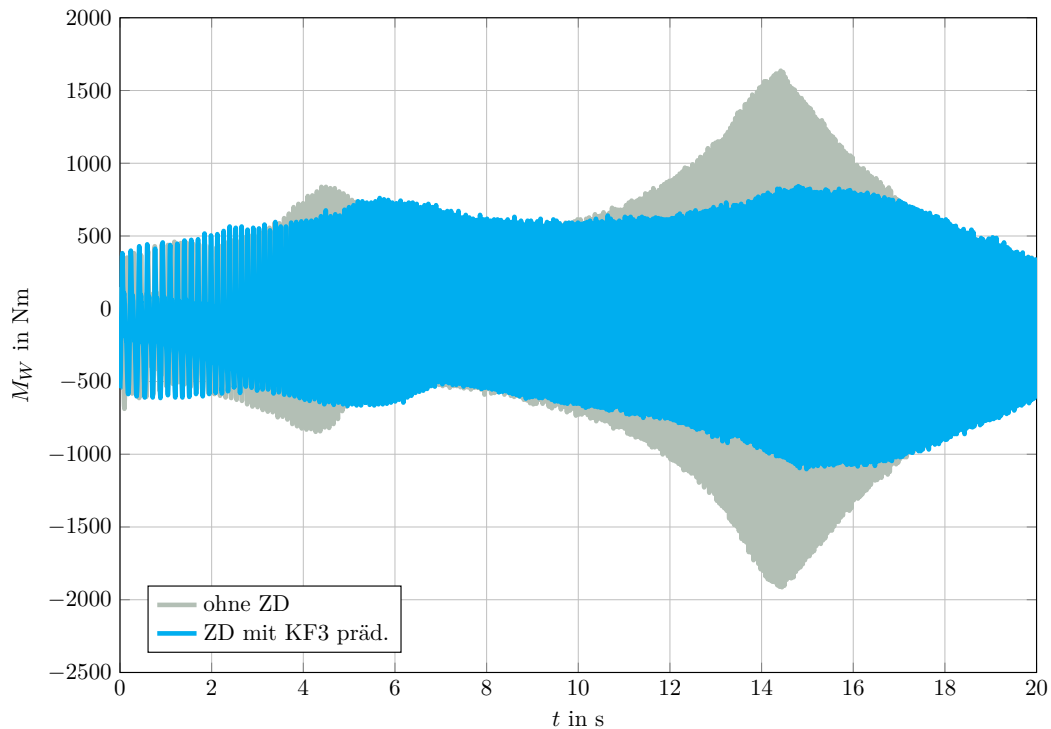


Abbildung 4.35: Messung EOL: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion

ergebnis kann durch die Prädiktion von fünf Zeitschritten ($T_p = 5$ ms) im Vergleich zur Variante ohne Prädiktion (vgl. Abb. 4.27) entscheidend verbessert werden. Vergleicht man die Aufschaltung des Dämpfungsmoments in Abb. 4.28 (rechts) mit der neuen Aufschaltung in Abb. 4.36 (rechts), zeigt sich, dass das ermittelte Dämpfungsmoment (vor der Totzeit der Signalverarbeitung und Momentenaufschaltung im Frequenzumrichter) durch die Prädiktion in die Zukunft früher aufgeschaltet wird und die vorhandene Totzeit der analogen Signalvorgabe ($T_t \approx 1,6$ ms) und des verzögerten Aufbaus des Luftspaltemoments ($T_t \approx 3$ ms) sehr gut kompensiert werden kann. Insgesamt gelingt es

4.5 Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters als Prädiktor

mit dieser Variante, die Drehmomentspitzen im Vergleich zur Zusatzdämpfung mittels Kalman-Filter 3. Ordnung ohne Prädiktion signifikant zu reduzieren. Durch die Prädiktion kann das Ergebnis gegenüber der Variante mittels eines Kalman-Filters 1. Ordnung noch geringfügig verbessert werden. (siehe Amplitudenspektrum in Abb. 4.36 links). Die maximalen Drehmomentspitzen können auf 750 Nm gesenkt werden. Die Messun-

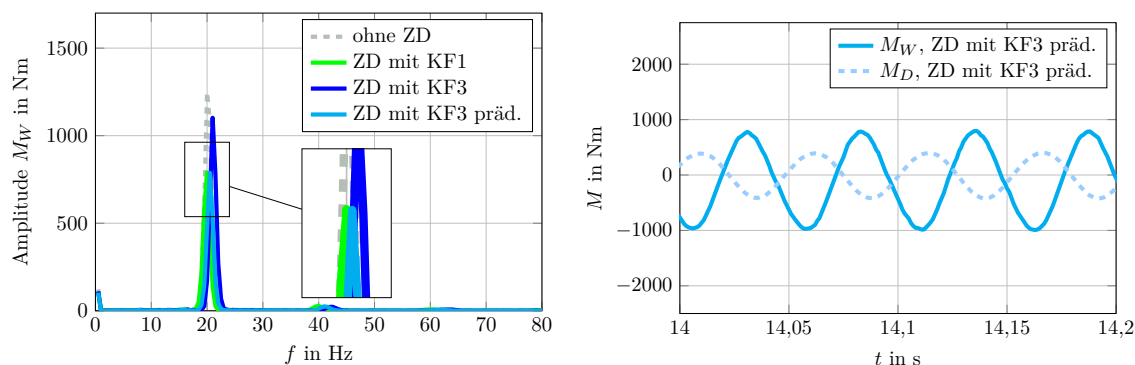


Abbildung 4.36: Messung EOL: Frequenzspektrum und M_D beim Durchfahren der 1. Resonanzfrequenz bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 inkl. Prädiktion

gen bestätigen die Simulationsergebnisse im vorangegangenen Abschnitt. Durch die zusätzliche Prädiktion gelingt es, selbst große Totzeiten zu kompensieren und das Ergebnis maßgeblich zu verbessern. Durch das vorhandene Modellwissen führt diese Dämpfungsvariante am Motorprüfstand bei den Drehzahlrampen und den simulierten Lastmomentsprüngen zu den besten Ergebnissen der untersuchten Verfahren.

Obwohl das Kalman-Filter 3. Ordnung sein volles Potential erst bei Anwendung in schnellen, integrierten Frequenzumrichtern ausspielen kann, führt es durch die zusätzliche Prädiktion auch bei Erweiterungen von bestehenden Anlagen mit vergleichsweise langsamen Frequenzumrichtern zu guten Ergebnissen. Die durchgeführten Analysen am Rollen- und Motorprüfstand zeigen, dass die Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung inkl. Prädiktion bei dynamischen und stationären Anwendungen sehr gut funktioniert. Durch das notwendige Modellwissen haben Parameterunsicherheiten, wie bei der Variante ohne Prädiktion, einen gewissen Einfluss auf das Schätzergebnis bzw. in weiterer Folge auf das Dämpfungsergebnis. In Abschnitt 5 wird dieser Einfluss sowie der Umgang mit Modellunsicherheiten im Rahmen der Parametrierung für das Kalman-Filter 3. Ordnung im Detail untersucht. Im nachfolgenden Kapitel werden die untersuchten Dämpfungsvarianten mit deren Vor- und Nachteile zusammengefasst und noch einmal gegenübergestellt.

4.6 Variantenvergleich

Im Verlauf von Kapitel 4 wurden unterschiedliche Dämpfungsvarianten vorgestellt. Ausgehend von der direkten Zusatzdämpfung wurden sukzessive Erweiterungen vorgestellt, um auftretende Hürden wie die fehlende Messung von w_L durch eine geeignete Zustandsschätzung mittels eines Kalman-Filters oder etwaige Totzeiten bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments durch eine zusätzliche Prädiktion zu überwinden.

Da sämtliche Varianten auf der Rückkopplung von $\Delta\omega$ beruhen, kann die direkte Zusatzdämpfung als eine Art "Referenzvariante" gesehen werden. Bei der direkten Zusatzdämpfung wird die mittels Dämpfungskonstante d_Z skalierte, gemessene Differenzwinkelgeschwindigkeit rückgekoppelt. Die Differenzwinkelgeschwindigkeit wird dazu aus den gemessenen Winkelgeschwindigkeiten ω_{AM} und ω_L bestimmt. Durch die direkte Verwendung der Messwerte sind die Dämpfungsergebnisse in Systemen mit hochauflösender Drehzahlmessung und geringer Totzeit sehr gut und es gibt keine Einschränkungen hinsichtlich der Lage der Resonanzfrequenzen. Die direkte Zusatzdämpfung kann nur angewendet werden, wenn neben ω_{AM} auch ω_L bzw. die Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ messtechnisch erfasst werden kann. Diese Voraussetzung ist auf Prüfständen nur in seltenen Fällen erfüllt, da der Prüfling meist nicht adaptiert werden kann. Bei Systemen mit signifikanten Totzeiten ($T_t > 4$ ms) in Verbindung mit großen Resonanzfrequenzen kann die direkte Zusatzdämpfung durch die fehlende Möglichkeit einer Prädiktion zudem schnell instabil werden.

Bei sämtlichen Prüfständen wird das Wellenmoment gemessen. Aus diesem Grund bieten sich Verfahren zur Schätzung von $\Delta\omega$ aus dem gemessenen Wellenmoment an. Im Abschnitt 4.1 wurde eine einfache Zusatzdämpfung vorgestellt, bei der die Differenzwinkelgeschwindigkeit aus dem gemessenen Drehmoment rekonstruiert wird. Durch die notwendige numerische Differentiation kommt es in Kombination mit auftretendem Messrauschen zu Problemen. Die Variante ist zwar sehr einfach, kann aber nicht direkt in der Praxis eingesetzt werden.

In einem weiteren Schritt wurde die einfache Zusatzdämpfung um einen Tiefpassfilter erweitert. Die adaptierte Variante kann auch bei auftretendem Messrauschen eingesetzt werden. Bedingt durch das einfache Konzept ist zur Schätzung von $\Delta\omega$ kein Modellwissen notwendig. Durch die Verwendung des Tiefpassfilters kommt es jedoch aufgrund der zusätzlich eingebrachten Phasenverschiebung bei Resonanzfrequenzen über 50 Hz zu Problemen. Der sinnvolle Einsatzbereich ist auf Resonanzfrequenzen unter 50 Hz begrenzt. Auftretende Totzeiten in der Aufschaltung des Dämpfungsmoments können nicht sinnvoll kompensiert werden. Zudem führt die Variante bei dynamischen Vorgängen (z. B. Sprung des Lastmoments) nur zu unbefriedigenden Ergebnissen. In

einem weiteren Schritt wurde für die Schätzung von ω_L ein Kalman-Filter 1. Ordnung eingeführt. Bei genauerer Analyse kann gezeigt werden, dass die resultierende Realisierung exakt jener der einfachen Zusatzdämpfung mit Differenzierer und Tiefpassfilter entspricht (siehe Abschnitt 4.2.1).

Um die Dämpfungsergebnisse bei dynamischen Vorgängen zu verbessern, wird die Systemordnung des Kalman-Filters in einem ersten Schritt auf $n = 2$ erhöht. Durch die fehlende Berücksichtigung von M_L im Filter wird das Dämpfungsmoment M_D selbst bei stationären Betriebspunkten falsch bestimmt. Als Folge davon kann das Kalman-Filter 2. Ordnung durch Lastwechsel oder Lastanregungen schnell instabil werden. Die Variante kann in der Praxis nicht eingesetzt werden. Wird das Lastmoment als näherungsweise konstant angenommen und ebenfalls mit dem Kalman-Filter geschätzt, resultiert ein Filter 3. Ordnung. Die Simulationsstudien und Messergebnisse zeigen, dass diese Variante selbst bei dynamischen Vorgängen zu sehr guten Schätzergebnissen für $\Delta\omega$ führt und auch bei Resonanzfrequenzen von $\omega_0 > 50$ Hz gute Dämpfungsergebnisse erzielt werden. Dieser Vorteil wird allerdings damit erkauft, dass man die Modellparameter J_{AM} , J_L und c_W recht genau kennen muss. Während J_{AM} aus Datenblättern meist recht gut bekannt ist und c_W aus der bekannten Resonanzfrequenz ω_0 und den Massenträgheiten J_{AM} und J_L bestimmt werden kann, ist J_L in den meisten Fällen nicht bekannt oder kann sich durch einen Prüflingswechsel ändern. Ein weiterer Nachteil der Dämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung ist, dass die Dämpfung sehr sensibel gegenüber Totzeiten ist.

Zur Berücksichtigung der auftretenden Totzeiten bei der Momentenaufschaltung wurde das Kalman-Filter 3. Ordnung um einen Prädiktor erweitert. Der Schätzwert für $\Delta\omega$ kann somit um eine ganzzahlige Anzahl an Zeitschritten in die Zukunft prädiziert werden. Dadurch können auftretende Totzeiten im System effektiv berücksichtigt werden. Die anderen Vorteile der Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung bleiben erhalten. Durch die Prädiktion kann das Verfahren auch bei bestehenden Anlagen mit langsamerer Signalverarbeitung bzw. langsamerer Frequenzumrichtertechnik eingesetzt werden.

Es zeigt sich, dass die Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung inkl. Prädiktion sämtliche positive Eigenschaften für den Einsatz zur Drehschwingungsdämpfung an Prüfständen vereint. Einzig die geringe Robustheit gegenüber Parameterunsicherheiten bleibt als großes Manko des Verfahrens bestehen. Aus diesem Grund wird das Kalman-Filter 3. Ordnung in Abschnitt 5 detailliert hinsichtlich Parameterunsicherheiten untersucht. Basierend auf den gewonnenen Erkenntnissen wird ein Algorithmus zur Parametrierung des Filters vorgestellt, der den Schätzfehler für $\Delta\omega$ reduziert und das Filter robust gegenüber Parameterunsicherheiten macht. In Tabelle 4.1 sind die

vorgestellten Varianten noch einmal zusammengefasst und hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile sowie des resultierenden Anwendungsbereichs bewertet. In der Praxis nicht sinnvoll einsetzbare Varianten sind in Rot gekennzeichnet.

Tabelle 4.1: Vergleich der unterschiedlichen Dämpfungsvarianten

Verfahren	Vorteil	Nachteil	Einsatzgebiet
direkte ZD	einfach, direkte Messung von $\Delta\omega$, kein Messflansch notwendig, kein Modellwissen notwendig	Totzeiten können nicht kompensiert werden	dynamischer Betrieb, Resonanzfrequenzen $\omega_0 > 50$ Hz möglich
einfache ZD	-	Probleme durch num. Differentiation	-
einfache ZD mit TP/ KF1	einfach, robust, kein Modellwissen notwendig	wenig intuitive Filterparametrierung, $\omega_{0,max} = 50$ Hz	stationärer Betrieb, $\omega_0 < 50$ Hz
ZD mit KF2	-	M_D durch fehlende Schätzung von M_L stationär ungenau, instabil	-
ZD mit KF3	gute Schätzergebnisse von $\Delta\omega$ auch im dynamischen Betrieb	Modellwissen notwendig, geringe Robustheit gegenüber Parameterunsicherheit und Totzeit	dynamischer Betrieb, Resonanzfrequenzen $\omega_0 > 50$ Hz möglich, System ohne Totzeiten
ZD mit KF3 inkl. Präd.	gute Schätzergebnisse von $\Delta\omega$ auch im dynamischen Betrieb, Kompensation der Totzeit	Modellwissen notwendig, geringe Robustheit gegenüber Parameterunsicherheit	dynamischer Betrieb, Resonanzfrequenzen $\omega_0 > 50$ Hz möglich

Detailbetrachtung Kalman-Filter

3. Ordnung

Für den Entwurf des Kalman-Filters 3. Ordnung müssen die Parameter des Systems bekannt sein. Die Systemparameter c_W , d_W und J_L sind in der Praxis meist nur näherungsweise bekannt und unterliegen gewissen Unsicherheiten und Schwankungen. Insbesondere kommt es in der Massenträgheit J_L der Last und in der Dämpfung d_W des Wellenstrangs zu Parameterunsicherheiten.¹ Die Eigendämpfung d_W spielt aber eine untergeordnete Rolle, da in den meisten Fällen schwach gedämpfte Wellenstränge vorliegen. Das Trägheitsmoment der Last J_L kann sich hingegen am Prüfstand durch einen Prüflingswechsel stark ändern. Die Zusatzdämpfung sollte derart robust sein, dass die Funktion selbst bei wechselnden Bedingungen weitgehend ohne Umparametrierung des Filters gewährleistet ist. In den nachfolgenden Kapiteln wird eine Systembeschreibung für das unsichere System aufgestellt und die Auswirkungen der Parameterunsicherheiten werden analysiert. Zusätzlich wird ein Algorithmus zur robusten Parametrierung des Filters vorgestellt.

5.1 Systembeschreibung unter Parameterunsicherheit

Durch die Modellierung des Wellenstrangs als Zwei-Massen-Schwinger kann die erste Resonanzfrequenz (2.23) des durch die Eigendämpfung schwach gedämpften Wellenstrangs $d_W \approx 0$ nachgebildet werden. Sie kann am Prüfstand verhältnismäßig einfach aus Versuchen ermittelt werden. Das Kalman-Filter wird so parametrierung, dass die resultierende Resonanzfrequenz des Zwei-Massen-Schwingers mit der in den Versuchen

¹In weiterer Folge werden alle Größen des Kalman-Filters mit Modellunsicherheiten mit einem * gekennzeichnet. Die entsprechenden Größen des Originalsystems werden ohne * geschrieben.

ermittelten ersten Resonanzfrequenz des Wellenstrangs übereinstimmt. Hierbei ist zu beachten, dass man aus der gemessenen Resonanzfrequenz nicht eindeutig auf die einzelnen Parameterwerte schließen kann. Ein bestimmter Wert der Resonanzfrequenz kann sich aus mehreren unterschiedlichen Parameterkombinationen ergeben. Für eine gut funktionierende Zusatzdämpfung ist in erster Linie die Nachbildung der gemessenen Resonanzfrequenz aus einer beliebigen Parameterkombination entscheidend, wobei die zugrundeliegenden Parameter nicht exakt mit den realen übereinstimmen müssen. Große Parameterabweichungen zwischen realer Strecke und der Modellierung im Filter führen jedoch zu schlechteren Dämpfungsergebnissen.

Zur Vereinfachung wird weiterhin von einem ungedämpften Wellenstrang ($d_W = 0$) ausgegangen. Für das Modell des Kalman-Filters mit unsicheren Parametern folgt aus (4.71) und (4.72):

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c_W^* \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L^*} \right) & 0 & -\frac{1}{J_L^*} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{B}, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{C}^* = [-c_W^* \quad 0 \quad 0], \quad (5.2)$$

wobei \mathbf{A}^* der Systemmatrix mit fehlerbehafteter Massenträgheit der Last J_L^* und unsicherer Wellensteifigkeit c_W^* entspricht. J_{AM} entspricht der bekannten Massenträgheit der Antriebsmaschine. Mithilfe der ermittelten Resonanzfrequenz ω_0 kann aus (2.23) auf die passende unsichere Wellensteifigkeit c_W^* geschlossen werden, falls J_L^* bekannt ist:

$$c_W^* = \frac{\omega_0^2}{\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L^*}}. \quad (5.3)$$

Dadurch kann die gesamte Modellunsicherheit auf eine Unsicherheit in J_L reduziert werden, die in weiterer Folge zu Schätzfehlern für die Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ führt.

5.2 Analyse der Auswirkungen von Unsicherheiten

Für die Betrachtung von Parameterunsicherheiten werden in der Literatur für das stationäre Kalman-Filter häufig Sensitivitätsanalysen durchgeführt, in denen die Sensitivität

der suboptimalen, stationären Kalman-Matrix gegenüber wechselnden Eigenschaften des Prozess- und Messrauschens untersucht wird [34, 56, 57, 58]. Teilweise wird ein erweitertes Kalman-Filter verwendet, um die in einem Störzustand konzentrierten Störungen zu schätzen und zur Adaption des Regelgesetzes zu verwenden [36]. Die Auswirkungen von Unsicherheiten in der Parametrierung der Systemmatrix des Filters werden für allgemeine Systeme aufgrund der hohen Komplexität bislang hingegen kaum analytisch untersucht. Im nachfolgenden Kapitel werden die Auswirkungen der Parameterunsicherheit mithilfe von Simulationen und Messungen an der realen Anlage aufgezeigt und im weiteren Verlauf der Arbeit detailliert analysiert.

5.2.1 Simulationsstudie Rollenprüfstand

Die Auswirkungen der Parameterunsicherheit von J_L werden anhand von Simulationen des Sollwertsprungs (siehe Abb. 4.4) am Rollenprüfstand analysiert. Für die Simulationen wird das gleiche Modell wie in den vorangegangenen Kapiteln verwendet. Der Sollwertsprung wird für die einzelnen Versuche mit der bereits in Abschnitt 4.5.2 verwendeten Referenzparametrierungen des Kalman-Filters 3. Ordnung (siehe Tabelle B.5 im Anhang) für verschiedene Werte der unsicheren Massenträgheit J_L^* wiederholt. Die Kovarianzen \mathbf{Q} und R bleiben unverändert gegenüber der für das exakte System ermittelten Referenzparametrierung. Für den jeweiligen positiven Sollwertsprung wird zwischen 0,8 s und 1,6 s das Integral des zeitgewichteten, absoluten Schätzfehlers, das sog. Integral of the Time weighted Absolute Error (ITAE), berechnet [74]. Dieses Kriterium hat gegenüber dem quadratischen mittleren Fehler [50, 108] oder dem Integral über der absoluten Abweichung den Vorteil, dass länger andauernde Abweichungen mit der Zeit stärker gewichtet werden. Bleibende Regelabweichungen werden durch das Fehlermaß stärker bestraft. Das ITAE Kriterium zwischen $\Delta\omega$ und dem Schätzwert $\Delta\hat{\omega}$ wird anhand der Relation

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (t - t_1) | \Delta\omega(t) - \Delta\hat{\omega}(t) | dt \quad (5.4)$$

ermittelt, wobei für den durchgeführten Versuch $t_1 = 0,8$ s und $t_2 = 1,6$ s gilt. Abb. 5.1 zeigt den auf den ohne Parameterunsicherheit ($J_L^* = J_L$) normierten Verlauf von I und die zugehörigen Eigenwerte des Filters für verschiedene Massenträgheiten J_L^* . Die Referenzparametrierung wurde für das exakte System derart gewählt, dass ein geringer Schätzfehler resultiert. Aus diesem Grund ist der Schätzfehler bei exakten Parameterwerten recht gering. Dieser Schätzfehler wird als Normierungsbasis für das Fehlerkriterium I verwendet. Der Schätzfehler ist bei kleinen Werten von J_L^* groß und nimmt mit zunehmendem Werten von J_L^* ab. Übersteigt J_L^* einen bestimmten

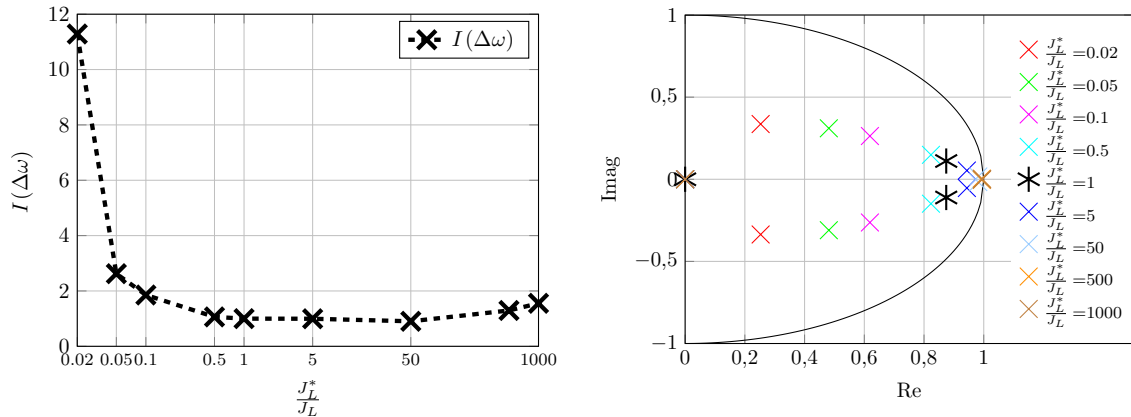


Abbildung 5.1: Simulation Rolle: Fehlerkriterium I normiert auf $\frac{J_L^*}{J_L} = 1$ und Eigenwerte in Abhängigkeit von $\frac{J_L^*}{J_L}$

Wert, nimmt der Schätzfehler durch die geringere Dynamik in Folge der Verschiebung der Eigenwerte wieder zu. Das Filter besitzt ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar und einen reellen Eigenwert nahe 0. Mit zunehmendem J_L^* wandert das konjugiert komplexe Eigenwertpaar nach rechts. Der Imaginärteil wird dabei immer kleiner und die dämpfende Wirkung steigt. Anhand des Vergleichs von $\Delta\omega$ mit $\Delta\hat{\omega}$ ist gut zu erkennen, dass die Amplitude von $\Delta\omega$ sowie der Schätzfehler mit zunehmendem J_L^* abnehmen (siehe Abb. 5.2). Vor allem während der ersten Phase beim Durchfahren des Wellenspiels kommt es bei größerem J_L^* zu einem kleineren Schätzfehler für $\Delta\omega$. Bei $J_L^* = 500J_L$ dauert es durch die geringere Dynamik bereits recht lange, bis sich der Endwert nach dem Sprung einstellt. Das Kriterium für den Schätzfehler $I(\Delta\omega)$ steigt durch die Gewichtung des absoluten Schätzfehlers mit der Zeit an. Insgesamt ist gut zu erkennen, wie die Parameterunsicherheit von J_L die Eigenwerte des Filters und die resultierenden Schätzergebnisse beeinflusst. Für eine gute Zusatzdämpfung kann die Nachbildung der Resonanzfrequenz also nicht mit beliebigen Parameterwerten erfolgen.

5.2.2 Messergebnisse Rollenprüfstand

Die angestellten Simulationen werden in der Praxis überprüft. Mit zunehmenden Werten der im Filter verwendeten Massenträgheit J_L^* wird das Wellenmoment bei konstanter Dämpfungskonstante $d_Z = 70$ und konstanten Kovarianzen \mathbf{Q} und R immer besser gedämpft (siehe Abb. 5.3). Wird J_L^* auf ein Zehntel der realen Massenträgheit gesetzt, kann die Schwingung bei unveränderter Zusatzdämpfungskonstante d_Z nicht mehr sinnvoll gedämpft werden. Wird J_L^* noch weiter verkleinert und auf $J_L^* = 0.05J_L$ gesetzt, wird das System instabil. Durch eine Reduktion der Dämpfungskonstante auf $d_Z = 30$

5.2 Analyse der Auswirkungen von Unsicherheiten

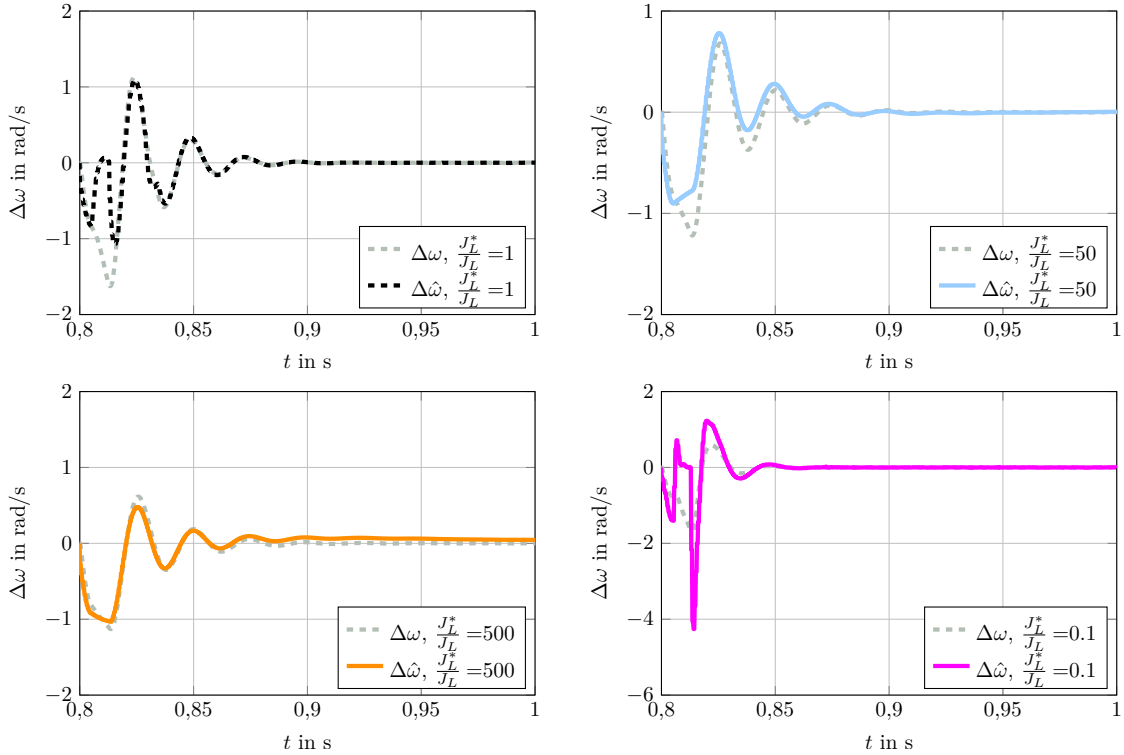


Abbildung 5.2: Simulation Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 in Abhängigkeit von $\frac{J_L^*}{J_L}$

kann das System etwa gleich gut gedämpft werden wie bei der Verwendung der exakten Massenträgheit. Bei großen Werten für J_L^* kommt es wie in der Simulation zu einer Reduktion der Dynamik. Es dauert sehr lange, bis sich das Moment nach dem Sprung eingestellt hat. Es liegt die Vermutung nahe, dass es durch die Abweichung zwischen der im Filter parametrisierten Massenträgheit J_L^* und der realen Massenträgheit J_L neben der Änderung der Eigenwerte vor allem zu einer Skalierung von $\Delta\hat{\omega}$ kommt. Beim Vergleich der gemessenen Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ und dem Schätzwert $\Delta\hat{\omega}$ in Abb. 5.4 zeigt sich ein ähnliches Ergebnis. Der Schätzfehler wird mit zunehmendem J_L^* geringer. Bei kleinen Werten für J_L^* stimmt der zeitliche Verlauf zwar recht gut überein, es kommt aber zu einer Skalierung des Schätzwertes.

In den weiterführenden Kapiteln wird untersucht, wie das Kalman-Filter parametrisiert werden kann, damit die Unsicherheit in der Massenträgheit J_L kompensiert wird. Ziel ist es, dass die Eigenwerte und der resultierende Schätzfehler durch eine entsprechende Kompensation auch bei Abweichung zwischen der im Filter verwendeten Massenträgheit J_L^* und der realen Massenträgheit J_L weitgehend konstant bleiben.

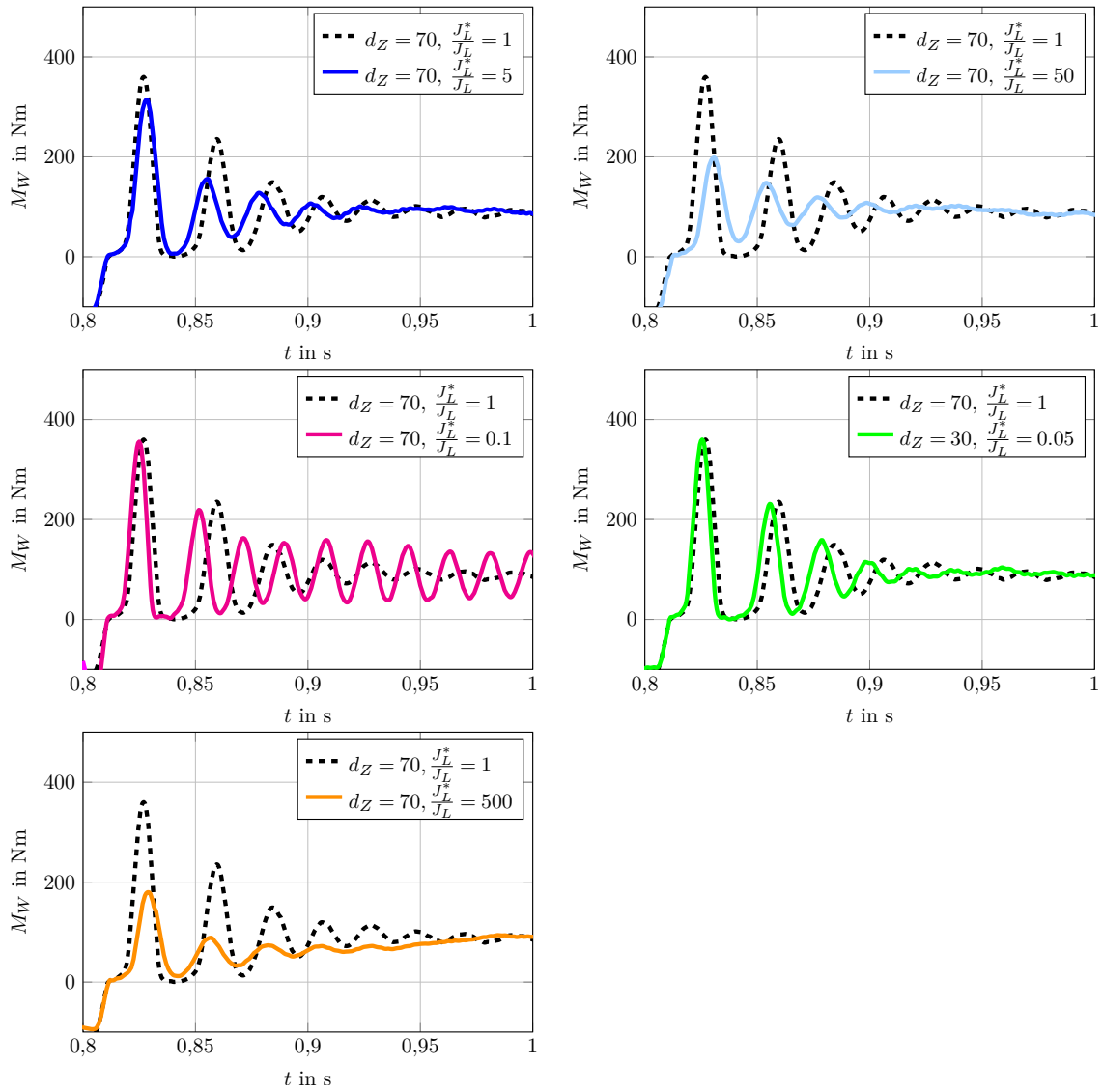


Abbildung 5.3: Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei Parameterunsicherheit
 (Anmerkung: Bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 0.05$ wird das System mit $d_Z = 70$ instabil. Es wurde $d_Z = 30$ gewählt.)

5.2 Analyse der Auswirkungen von Unsicherheiten

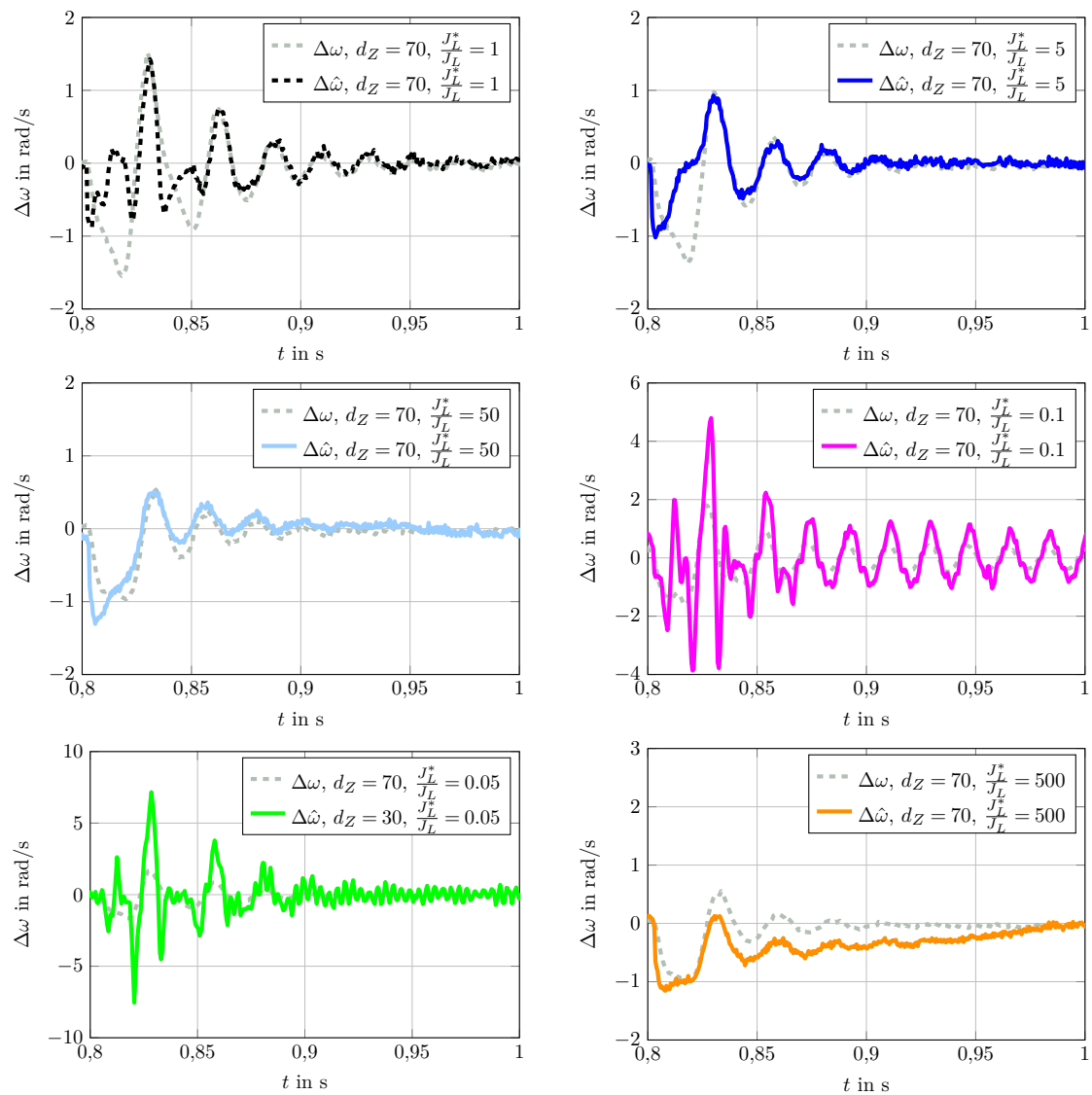


Abbildung 5.4: Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei Parameterunsicherheit (Anmerkung: Bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 0.05$ wird das System mit $d_Z = 70$ instabil. Es wurde $d_Z = 30$ gewählt.)

5.3 Kompensation der Parameterunsicherheit (zeitkont. System)

Für die Schätzung der Differenzwinkelgeschwindigkeit kommt in der Regel ein zeitdiskretes Kalman-Filter zum Einsatz (siehe Abschnitt 4.2 bis 4.5). Die zeitdiskreten Filtergleichungen führen zu unübersichtlichen Gleichungen. Deshalb wird für die weitere Analyse zu Beginn aus Komplexitätsgründen von einem zeitkontinuierlichen Kalman-Filter ausgegangen. Die im Rahmen dieser Analyse gewonnenen Erkenntnisse lassen sich aber wie in Kapitel 5.5 beschrieben auf den zeitdiskreten Fall übertragen.

5.3.1 Prinzip der Kompensation

Die grundlegende Idee für eine Kompensation der Auswirkungen von Modellunsicherheiten bezüglich J_L besteht darin, auftretende Modellfehler durch geeignete Wahl des Entwurfparameters \mathbf{Q}^* zu kompensieren. Analog könnte man R^* einführen. Da das Messrauschen gleichermaßen auf das Originalsystem und das unsichere System wirkt, wird darauf verzichtet und vereinfachend von $R^* = R$ ausgegangen. Dabei entspricht \mathbf{Q}^* der Kovarianzmatrix des Zustandsrauschens $\tilde{\mathbf{w}}$ und R der Kovarianz des Messrauschens \tilde{v} des unsicheren Systems (siehe Abb. 5.5). Zur Bestimmung der

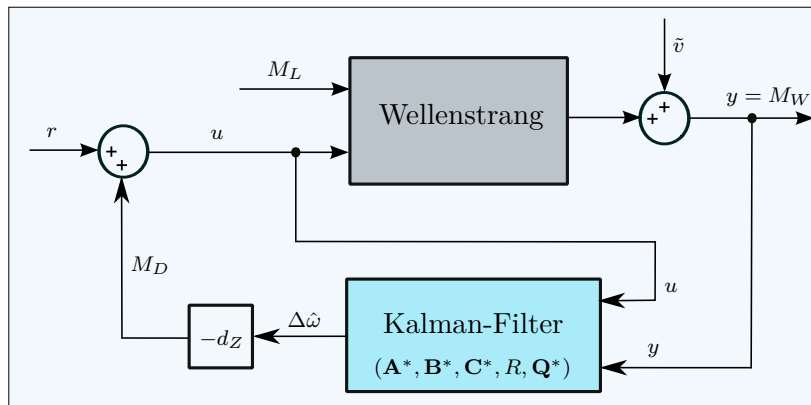


Abbildung 5.5: Blockschaltbild: Kompensation der Modellunsicherheiten

Kompensation werden die Eigenwerte des Kalman-Filters mit exakten Modellparametern mit jenen des Kalman-Filters mit fehlerbehafteten Parametern verglichen. Aus diesem Vergleich resultiert eine Berechnungsvorschrift für \mathbf{Q}^* , sodass die Eigenwerte der beiden Systeme übereinstimmen. Es wird also ermittelt, wie sich die Kovarianzmatrix \mathbf{Q}^* gegenüber der Kovarianzmatrix \mathbf{Q} des Originalsystems verändern muss, damit die Eigenwerte beider Systeme identisch sind. Damit ein Zusammenhang zwischen der Kovarianzmatrix \mathbf{Q}^* und den Eigenwerten des Kalman-Filters hergestellt werden kann, müssen die Elemente von \mathbf{P}^* durch Lösen der algebraischen Riccati Gleichung und in

5.3 Kompensation der Parameterunsicherheit (zeitkont. System)

weiterer Folge die Kalman-Matrix ermittelt werden [4]. Nachfolgend wird die Lösung der zeitkontinuierlichen Riccati Gleichung für das Originalsystem ($J_L^* = J_L$, $d_W = 0$) analysiert.

Ausgehend vom Modell des Kalman-Filters 3. Ordnung (4.71) und (4.72) folgt für das stationäre, zeitkontinuierliche Kalman-Filter [38, 72]:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \quad (5.5)$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}y. \quad (5.6)$$

Die konstante Kalman-Matrix \mathbf{K} ergibt sich aus

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T R^{-1}, \quad (5.7)$$

wobei die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers \mathbf{P} die positiv definite Lösung der (nichtlinearen) algebraischen Riccati Gleichung [6, 44, 59]

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{P}\mathbf{C}^T R^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

ist. Die Kovarianzen \mathbf{Q} und R werden im Rahmen des Filterentwurfs passend gewählt. Zur Berechnung der Kalman-Matrix \mathbf{K} muss die algebraische Riccati Gleichung (5.8) gelöst werden. Hierbei gilt allgemein $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ und $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$. Die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} wird als Diagonalmatrix

$$\mathbf{Q} := \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

gewählt, für \mathbf{P} folgt unmittelbar:

$$\mathbf{P} := \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

und für die Kalman-Matrix (5.7) gilt:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T R^{-1} := \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Für die Einträge von \mathbf{K} folgt mit den entsprechenden Einträgen der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers p_{11} , p_{12} und p_{13} :

$$\mathbf{K} = -\frac{c_W}{R} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Die Kovarianzmatrix \mathbf{P} muss positiv definit sein um ein asymptotisch stabiles Kalman-Filter zu erhalten. Um positive Definitheit zu garantieren, ist es laut dem Kriterium von Sylvester [29] notwendig und hinreichend, dass alle führenden Hauptminoren von \mathbf{P} positiv sind. Diese Bedingungen führen zu komplizierten Relationen für die Elemente von \mathbf{P} :

$$0 < p_{11}, \quad (5.13)$$

$$0 < p_{11}p_{22} - p_{12}^2, \quad (5.14)$$

$$0 < p_{11} (p_{22}p_{33} - p_{23}^2) - p_{12} (p_{12}p_{33} - p_{13}p_{23}) + p_{13} (p_{12}p_{23} - p_{22}p_{13}). \quad (5.15)$$

Aussagen über die Elemente können nur schwer getroffen werden. Als Abhilfe können aus den für das Kalman-Filter erforderlichen Stabilitätsbedingungen auf einfacherem Wege notwendige und hinreichende Bedingungen für \mathbf{K} und in weiterer Folge für die Elemente von \mathbf{P} abgeleitet werden. Zur Ermittlung von \mathbf{K} ist es folglich (5.12) ausreichend, die Einträge p_{11} , p_{12} und p_{13} zu bestimmen. Damit das charakteristische Polynom des Kalman-Filters

$$\det [s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})] = s^3 + \mu_2 s^2 + \mu_1 s + \mu_0 \quad (5.16)$$

mit den Koeffizienten

$$\mu_2 = -c_W k_1, \quad (5.17)$$

$$\mu_1 = w_0^2 - c_W k_2, \quad (5.18)$$

$$\mu_0 = \frac{c_W}{J_L} k_3 \quad (5.19)$$

ein Hurwitz-Polynom ist, müssen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$\mu_2 > 0, \quad (5.20)$$

$$\mu_1 > 0, \quad (5.21)$$

$$\mu_0 > 0, \quad (5.22)$$

5.3 Kompensation der Parameterunsicherheit (zeitkont. System)

$$\mu_2\mu_1 - \mu_0 > 0 \quad (5.23)$$

erfüllt sein. Für die Einträge der Kalman-Matrix lassen sich daraus die Bedingungen

$$k_1 < 0, \quad (5.24)$$

$$k_2 < \frac{w_0^2}{c_W}, \quad (5.25)$$

$$0 < k_3 < -k_1 J_L (w_0^2 - c_W k_2) \quad (5.26)$$

ableiten. Aus (5.24) und (5.12) sowie (5.26) und (5.12) folgt für die Elemente p_{11} und p_{13} unmittelbar:

$$p_{11} > 0 \quad \text{und} \quad p_{13} < 0 \quad (5.27)$$

für ein asymptotisch stabiles, stationäres Kalman-Filter. Es verbleibt nur mehr das Element p_{12} . Aus der algebraischen Riccati Gleichung (5.8) ergeben sich sechs nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung der Elemente von \mathbf{P} :

$$0 = f(p_{11}, p_{12}) := 2p_{12} - \frac{1}{\varphi} p_{11}^2 + q_1 \quad (5.28)$$

$$0 = f(p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}) := p_{22} - \frac{1}{J_L} p_{13} - w_0^2 p_{11} - \frac{1}{\varphi} p_{11} p_{12} \quad (5.29)$$

$$0 = f(p_{11}, p_{13}, p_{23}) := p_{23} - \frac{1}{\varphi} p_{11} p_{13} \quad (5.30)$$

$$0 = f(p_{12}, p_{23}) := -2 \left(\frac{1}{J_L} p_{23} + w_0^2 p_{12} \right) - \frac{1}{\varphi} p_{12}^2 + q_2 \quad (5.31)$$

$$0 = f(p_{12}, p_{13}, p_{33}) := -\frac{1}{J_L} p_{33} - w_0^2 p_{13} - \frac{1}{\varphi} p_{12} p_{13} \quad (5.32)$$

$$0 = f(p_{13}) := -\frac{1}{\varphi} p_{13}^2 + q_3 \quad (5.33)$$

wobei

$$\varphi := \frac{R}{c_W^2} > 0 \quad (5.34)$$

gilt. Gleichung (5.33) enthält nur p_{13} und kann sofort gelöst werden. Aufgrund von (5.27) folgt:

$$p_{13} = -\sqrt{q_3 \varphi}. \quad (5.35)$$

Zur Ermittlung von p_{11} , p_{12} und p_{23} müssen Gleichungen (5.28), (5.31) und (5.30) gelöst werden. Für eine möglichst einfache Lösung bietet es sich an, p_{23} als Funktion von p_{12} und p_{12} als Funktion von p_{11} auszudrücken und anschließend p_{11} mithilfe von (5.30) zu bestimmen. Aus (5.31) folgt:

$$p_{23} = \frac{J_L}{2} \left(q_2 - 2w_0^2 p_{12} - \frac{1}{\varphi} p_{12}^2 \right) \quad (5.36)$$

und für p_{12} erhält man aus (5.28)

$$p_{12} = \frac{1}{2} \left(-q_1 + \frac{1}{\varphi} p_{11}^2 \right). \quad (5.37)$$

Setzt man (5.35), (5.36) und (5.37) in (5.30) ein, ergibt sich eine Gleichung 4. Grades

$$p_{11}^4 + a_2 p_{11}^2 + a_1 p_{11} + a_0 = 0 \quad (5.38)$$

mit den Koeffizienten:

$$a_2 = 2\varphi (2\varphi w_0^2 - q_1), \quad (5.39)$$

$$a_1 = -\frac{8}{J_L} \varphi^2 \sqrt{q_3 \varphi}, \quad (5.40)$$

$$a_0 = \varphi^2 \left[-4\varphi (q_2 + \omega_0^2 q_1) + q_1^2 \right] \quad (5.41)$$

zur Bestimmung von p_{11} . Diese Gleichung kann mithilfe des in Anhang E beschriebenen Lösungswegs analytisch gelöst werden. Die Elemente p_{22} und p_{33} können dann mithilfe von (5.29) und (5.32) ermittelt werden. Die konzeptionelle Lösung der Riccati Gleichung kann somit berechnet werden. Durch den recht hohen Grad ist die numerische Lösung jedoch nicht trivial. Zudem trägt sie durch die fehlende Einsicht in das System nur wenig zur Analyse bzw. Lösung des Problems auftretender Modellunsicherheiten bei. Wie sich im nächsten Abschnitt noch herausstellen wird, ist die numerische Lösung für die Analyse der Kompensation der Modellunsicherheit nicht notwendig.

5.3.2 Kompensation

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (5.16) sind die Eigenwerte des Kalman-Filters. Sollen die Eigenwerte des fehlerbehafteten Systems mit jenen ohne Modellfehler übereinstimmen, so müssen die Koeffizienten der beiden charakteristischen Polynome

5.3 Kompensation der Parameterunsicherheit (zeitkont. System)

übereinstimmen. Vergleicht man die Koeffizienten (5.17) bis (5.19) des originalen mit jenen des unsicheren Systems:

$$\mu_2^* = -c_W^* k_1^*, \quad \mu_1^* = w_0^2 - c_W^* k_2^*, \quad \mu_0^* = \frac{c_W^*}{J_L^*} k_3^*, \quad (5.42)$$

ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{k_1^*}{k_1} = \frac{k_2^*}{k_2} = \frac{c_W}{c_W^*}, \quad (5.43)$$

$$\frac{k_3^*}{k_3} = \frac{c_W}{c_W^*} \frac{J_L^*}{J_L}. \quad (5.44)$$

Sind die Einträge von \mathbf{K}^* entsprechend (5.43) und (5.44) skaliert und wird c_W^* entsprechend (5.3) gewählt, ändern sich die Eigenwerte des Kalman-Filters trotz der Parameterunsicherheit von J_L^* nicht. Berechnet man, wie sich die Einträge von \mathbf{P}^* verhalten müssen, damit die Eigenwerte erhalten bleiben, so ergeben sich aus (5.43) und (5.44) mithilfe von (5.12) die Bedingungen:

$$-\frac{c_W^*}{R} p_{11}^* = -\frac{c_W}{c_W^*} \frac{c_W}{R} p_{11}, \quad (5.45)$$

$$-\frac{c_W^*}{R} p_{12}^* = -\frac{c_W}{c_W^*} \frac{c_W}{R} p_{12}, \quad (5.46)$$

$$-\frac{c_W^*}{R} p_{13}^* = -\frac{c_W}{c_W^*} \frac{c_W}{R} \frac{J_L^*}{J_L} p_{13}. \quad (5.47)$$

bzw.

$$\frac{p_{11}^*}{p_{11}} = \frac{p_{12}^*}{p_{12}} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2, \quad (5.48)$$

$$\frac{p_{13}^*}{p_{13}} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \frac{J_L^*}{J_L}. \quad (5.49)$$

Durch Einsetzen dieser Skalierungen in (5.29), (5.30) und (5.32) folgen die Skalierungen für die restlichen Elemente der Kovarianzmatrix:

$$\frac{p_{22}^*}{p_{22}} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2, \quad (5.50)$$

$$\frac{p_{23}^*}{p_{23}} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \frac{J_L^*}{J_L}, \quad (5.51)$$

$$\frac{p_{33}^*}{p_{33}} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \left(\frac{J_L^*}{J_L} \right)^2. \quad (5.52)$$

Abb. 5.6 zeigt, wie die einzelnen Elemente der Matrix \mathbf{P} skaliert werden müssen. Die

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{ij}^* \\ \mathbf{P}_{ij} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 & \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 & \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \frac{J_L^*}{J_L} \\ & \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 & \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \frac{J_L^*}{J_L} \\ & & \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \left(\frac{J_L^*}{J_L} \right)^2 \end{bmatrix}$$

Abbildung 5.6: Übersicht der Skalierungsfaktoren (grün: notwendige Elemente zur Berechnung von \mathbf{Q}^*)

Skalierungsfaktoren, die zur Kompensation der Auswirkungen der Unsicherheiten auf die Eigenwerte notwendig sind, sind in grün hervorgehoben und können mit (5.48), (5.49) und (5.51) berechnet werden. Die Skalierungsfaktoren für die restlichen Elemente resultieren aus Gl. (5.50) und (5.52). Mithilfe der hervorgehobenen Skalierungsfaktoren kann \mathbf{Q}^* so gesetzt werden, dass sich die Eigenwerte gegenüber dem Originalsystem nicht ändern. Benützt man (5.35) für p_{13}^* und p_{13} in (5.49), folgt für q_3^* in Abhängigkeit von q_3 unmittelbar:

$$-\sqrt{\frac{q_3^* R}{c_W^{*2}}} = -\left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \frac{J_L^*}{J_L} \sqrt{\frac{q_3 R}{c_W^2}}$$

$$\frac{q_3^*}{q_3} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \left(\frac{J_L^*}{J_L} \right)^2. \quad (5.53)$$

Mithilfe von (5.48) und (5.51) folgt aus (5.31) für den Eintrag der Kovarianzmatrix q_2 des Originalsystems:

$$q_2 = 2 \left(w_0^2 p_{12} + \frac{1}{J_L} p_{23} \right) + \frac{c_W^2}{R} p_{12}^2 \quad (5.54)$$

und für jenen des unsicheren Systems:

$$q_2^* = 2 \left[w_0^2 \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 p_{12} + \frac{1}{J_L^*} \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \frac{J_L^*}{J_L} p_{23} \right] + \frac{c_W^{*2}}{R} \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^4 p_{12}^2. \quad (5.55)$$

Für die erforderliche Skalierung ergibt sich nach Umformungen:

$$\frac{q_2^*}{q_2} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2. \quad (5.56)$$

Analog dazu folgt mithilfe von (5.48) aus (5.28) für den Eintrag der Kovarianzmatrix q_1 des Originalsystems:

$$q_1 = -2p_{12} + \frac{c_W^2}{R} p_{11}^2 \quad (5.57)$$

und für jenen des unsicheren Systems:

$$q_1^* = -2 \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 p_{12} + \frac{c_W^{*2}}{R} \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^4 p_{11}^2. \quad (5.58)$$

Für die erforderliche Skalierung ergibt sich ebenfalls:

$$\frac{q_1^*}{q_1} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2. \quad (5.59)$$

Das bedeutet, dass die Modellunsicherheit bezüglich der Massenträgheit der Last durch geeignete Wahl von \mathbf{Q}^* durch (5.53), (5.56) und (5.59) bei Kenntnis der Unsicherheit vollständig kompensiert werden kann und die Eigenwerte des Kalman-Filters trotz Modellunsicherheit unverändert bleiben. Neben den Eigenwerten müssen die relevanten Übertragungsfunktionen des Systems übereinstimmen. Für die Übertragungsfunktionen des Kalman-Filters zwischen Messwert y und Dämpfungsmoment M_D sowie zwischen Eingangsgröße u und M_D folgt gemäß \mathbf{A} mit $d_W = 0$:

$$\begin{aligned} G_y(s) &= \left. \frac{M_D(s)}{y(s)} \right|_{A_W=0} = [0 \quad -d_Z \quad 0] [s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})]^{-1} \mathbf{K} \\ &= -d_Z \frac{k_2 s^2 - \left(k_1 \omega_0^2 + \frac{k_3}{J_L} \right) s}{s^3 - c_W k_1 s^2 + (\omega_0^2 - c_W k_2) s + \frac{c_W k_3}{J_L}} \end{aligned} \quad (5.60)$$

und

$$\begin{aligned}
 G_u(s) &= \left. \frac{M_D(s)}{u(s)} \right|_{AW=0} = \begin{bmatrix} 0 & -d_Z & 0 \end{bmatrix} [s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})]^{-1} \mathbf{B} \\
 &= -d_Z \frac{\frac{1}{J_{AM}} s^2 - \frac{c_W k_1}{J_{AM}} s}{s^3 - c_W k_1 s^2 + (\omega_0^2 - c_W k_2) s + \frac{c_W k_3}{J_L}}.
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Beim Vergleich der beiden Übertragungsfunktionen (5.60), (5.61) mit jenen des Filters mit unsicheren Parametern:

$$\begin{aligned}
 G_y^*(s) &= \left. \frac{M_D(s)}{y(s)} \right|_{AW=0} = \begin{bmatrix} 0 & -d_Z h & 0 \end{bmatrix} [s\mathbf{E} - (\mathbf{A}^* - \mathbf{K}^* \mathbf{C}^*)]^{-1} \mathbf{K}^* \\
 &= -d_Z h \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right) \frac{k_2 s^2 - \left(k_1 \omega_0^2 + \frac{k_3}{J_L} \right) s}{s^3 - c_W k_1 s^2 + (\omega_0^2 - c_W k_2) s + \frac{c_W k_3}{J_L}}
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

und

$$\begin{aligned}
 G_u^*(s) &= \left. \frac{M_D(s)}{u(s)} \right|_{AW=0} = \begin{bmatrix} 0 & -d_Z h & 0 \end{bmatrix} [s\mathbf{E} - (\mathbf{A}^* - \mathbf{K}^* \mathbf{C}^*)]^{-1} \mathbf{B}^* g \\
 &= -d_Z h g \frac{\frac{1}{J_{AM}} s^2 - \frac{c_W k_1}{J_{AM}} s}{s^3 - c_W k_1 s^2 + (\omega_0^2 - c_W k_2) s + \frac{c_W k_3}{J_L}},
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

wobei für \mathbf{K}^*

$$\mathbf{K}^* = \frac{c_W}{c_W^*} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \frac{J_L^*}{J_L} k_3 \end{bmatrix} \tag{5.64}$$

eingesetzt wird, zeigt sich, dass aufgrund der verbleibenden Modellunsicherheit noch Unterschiede vorliegen. Diese können durch das Einführen zusätzlicher Skalierungen h und g der geschätzten Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\hat{\omega}$ und des Eingangssignals u ebenfalls kompensiert werden (siehe Abb. 5.7). Durch diese Maßnahme entspricht $\Delta\bar{\omega}$ bei vorliegender Parameterunsicherheit dem Schätzwert $\Delta\hat{\omega}$ des Originalsystems.

5.3 Kompensation der Parameterunsicherheit (zeitkont. System)

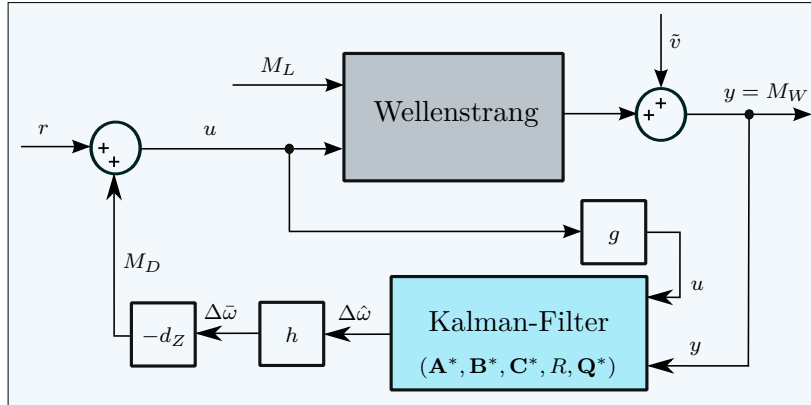


Abbildung 5.7: Blockschaltbild: Vollständige Kompensation der Übertragungsfunktionen inkl. Skalierung von u und y

Die Eigenwerte des unsicheren Systems stimmen durch die Skalierungen (5.43) und (5.44) mit jenen des exakten Systems überein und die Nennerpolynome der exakten und unsicheren Übertragungsfunktionen entsprechen dem charakteristischen Polynom aus (5.16). Aus den Forderungen

$$G_y^*(s) \stackrel{!}{=} G_y(s), \quad (5.65)$$

$$G_u^*(s) \stackrel{!}{=} G_u(s) \quad (5.66)$$

können die beiden Skalierungen h und g bestimmt werden. Bei näherer Betrachtung von (5.60) bis (5.63) wird ersichtlich, dass für die Skalierungen

$$h = \frac{c_W^*}{c_W}, \quad (5.67)$$

$$g = \frac{1}{h} \quad (5.68)$$

gelten muss. Skalierung g kann durch eine Skalierung mit $\frac{1}{h}$ ersetzt werden. Mithilfe von Skalierung h kann garantiert werden, dass $\Delta\bar{\omega}$ richtig geschätzt wird, obwohl das Kalman-Filter intern eine fehlerhafte Schätzung $\Delta\hat{\omega}$ ermittelt.

Die Skalierungsfaktoren für \mathbf{Q}^* und h sind jedoch abhängig von der Massenträgheit der Last J_L bzw. der Wellensteifigkeit c_W , die in der Praxis nicht genau bekannt sind. Als erste Abhilfe kann bei der Skalierung des geschätzten Zustandsvektors die während der Inbetriebnahme der Zusatzdämpfung einstellbare Zusatzdämpfungskonstante d_Z als

$$\hat{d}_Z = \frac{d_Z}{c_W} \quad (5.69)$$

gewählt werden. Die Skalierung des geschätzten Zustandsvektors ist damit unabhängig von der exakten Wellensteifigkeit c_W und kann ohne die Kenntnis von c_W bewerkstelligt werden. Die Skalierung entspricht dann $h = c_W^*$. Diese Vorgehensweise bietet sich auch für die Skalierungsfaktoren für \mathbf{Q}^* an. Für die Skalierung von u bzw. \mathbf{B}^* ist dies aber nicht ohne weiteres möglich. Diese Skalierung kann nur unter Kenntnis der exakten Wellensteifigkeit c_W ermittelt werden.

Da die exakten Parameterwerte in der Praxis zumeist nicht genau bekannt sind und eine vollständige Kompensation somit nicht möglich ist, wird in den nächsten beiden Kapiteln ein Algorithmus vorgestellt, um das Filter dennoch robust zu parametrieren und eine Kompensation von Parameterunsicherheiten zu erreichen. Eingangs wird ein Algorithmus zur effektiven Parametrierung für das Kalman-Filter mit exakten Parametern entworfen. Basierend darauf wird der Algorithmus auf das unsichere System mit unbekanntem Streckenparametern erweitert.

5.4 Algorithmus zur Parameterwahl (zeitkont. System)

5.4.1 Grundlegende Idee für den Algorithmus

Bei der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Kompensation wird davon ausgegangen, dass das Kalman-Filter sinnvoll parametrierbar ist. In der Praxis ist die geeignete Wahl von \mathbf{Q} zur Minimierung des Schätzfehlers selbst bei Vorliegen exakter Streckenparameter, beispielsweise durch die Einflüsse von Rauschen, allerdings nicht trivial.

Im Rahmen der Untersuchungen zur Kompensation von Parameterunsicherheiten durch die Parametrierung des Kalman-Filters wurde anfangs ein genetischer Algorithmus [51, 90, 118] zur Parametrierung des zeitkontinuierlichen Kalman-Filters verwendet. Mit dessen Hilfe wurde die Parametrierung von \mathbf{Q} derart gewählt, dass der Schätzfehler für $\Delta\omega$ während eines Referenzzyklus minimiert wird. Die daraus resultierende Filterparametrierung kann Tabelle B.6 im Anhang entnommen werden. Die Ergebnisse des genetischen Algorithmus sind stark von der Qualität des zugrundeliegenden Modells abhängig. Der genetische Algorithmus liefert zwar eine Referenzlösung und vermittelt eine Vorstellung wie das Filter für unterschiedliche Systeme parametrierbar sein kann, erlaubt aber keinerlei Einsicht in das Innenleben bzw. die einzelnen Zusammenhänge des Filters. Dadurch kann kein allgemeingültiger, analytischer Zusammenhang zur Parametrierung für beliebige Systeme gewonnen werden.

5.4 Algorithmus zur Parameterwahl (zeitkont. System)

Basierend auf den Ergebnissen der genetischen Optimierung wird im nachfolgenden Abschnitt ein Algorithmus zur Parametrierung von \mathbf{Q} für das Kalman-Filter 3. Ordnung vorgestellt, mit dem der Schätzfehler für $\Delta\omega$ für das exakte System "klein" wird. Der Algorithmus liefert aus den gegebenen Streckenparametern als Ergebnis die Parametrierung von \mathbf{Q} . In weiterer Folge wird die Vorgehensweise auf das unsichere System angewendet, um die Parametrierung von \mathbf{Q}^* und J_L^* auch ohne Wissen der exakten Parameter J_L bzw. c_W möglichst "gut" zu wählen. Die für das zeitkontinuierliche System gewonnenen Erkenntnisse werden in Abschnitt 5.5 auf das zeitdiskrete Kalman-Filter 3. Ordnung inkl. Prädiktion übertragen.

Damit beim Einsatz der Zusatzdämpfung möglichst gute Dämpfungsergebnisse erzielt werden, sollte der Schätzfehler des Kalman-Filters bei der Schätzung von $\Delta\omega$ "möglichst gering" sein. Vor allem der korrekten Phasenlage des Schätzwertes $\Delta\hat{\omega}$ kommt bei der Zusatzdämpfung erhöhte Bedeutung zu. Wird der Phasenfehler zu groß, kann es zu einer ungewollten Verstärkung der Schwingung kommen. Der Betrag des Schätzfehlers spielt durch die freie Skalierung mit der Zusatzdämpfungskonstante d_Z eine eher untergeordnete Rolle. Für den Algorithmus wird genau diese Idee aufgegriffen. Es soll der Phasenfehler von $\Delta\hat{\omega}$ im geschlossenen Kreis in einem möglichst großen Frequenzbereich so klein wie möglich gemacht werden. Aus dieser Vorgabe kann auf die notwendigen Parametrierungen für \mathbf{Q}^* und J_L^* geschlossen werden.

5.4.2 Algorithmus für das exakte System

Um eine Aussage über die Phasenlage des Schätzfehlers treffen zu können, ist es zweckmäßig, das Gesamtsystem aus Wellenstrang (Strecke), Kalman-Filter und Rückkopplung des Dämpfungsmoments (siehe Abb. 5.8) näher zu betrachten. Die Gesamtbetrachtung

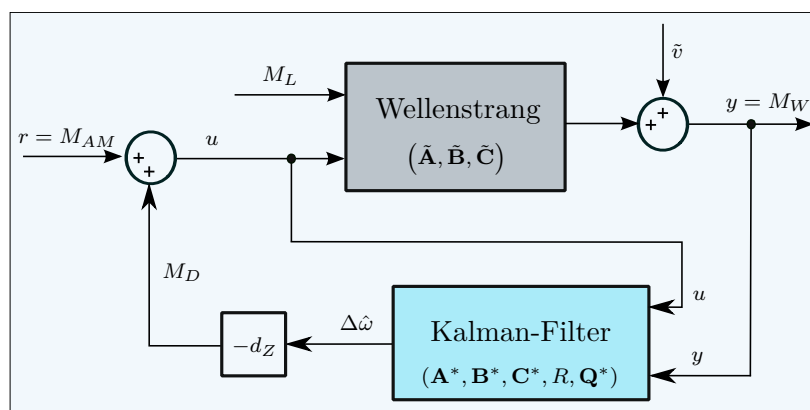


Abbildung 5.8: Blockschaltbild: Fehlersystem

erlaubt es, Aussagen über das Stabilitätsverhalten des geschlossenen Kreises und die Schätzfehler der einzelnen Zustandsgrößen zu treffen. Die Struktur des Gesamtsystems kann als Kontrollbeobachter (Beobachter kombiniert mit Zustandsregler) [23] aufgefasst werden. Das Gesamtsystem wird durch $2n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung beschrieben, wobei n der Systemordnung entspricht. Da vor allem die Übertragungsfunktion zwischen Lastmoment M_L und dem Schätzfehler von $\Delta\omega$ von Interesse ist, muss die Streckenbeschreibung um den expliziten Eingang M_L erweitert werden, und es folgt:

Strecke:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{b}}_1 u + \tilde{\mathbf{b}}_2 M_L \quad (5.70)$$

$$y = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} \quad (5.71)$$

mit $d_W = 0$ und

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.72)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{AM}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = [-c_W \quad 0 \quad 0]. \quad (5.73)$$

Die dritte Differentialgleichung ($\dot{x}_3 = 0$) ist an dieser Stelle nicht notwendig, wird aber zur Bestimmung des Fehlersystems der Einfachheit halber eingeführt, damit die Dimensionen der Matrizen mit jenen des Kontrollbeobachters übereinstimmen.

Kontrollbeobachter:

Für das zeitkontinuierliche, stationäre Kalman-Filter (5.6) gilt:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_1 u + \mathbf{K}y \quad (5.74)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c_W \left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L} \right) & 0 & -\frac{1}{J_L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [-c_W \quad 0 \quad 0], \quad \mathbf{b}_1 = \tilde{\mathbf{b}}_1. \quad (5.75)$$

5.4 Algorithmus zur Parameterwahl (zeitkont. System)

Unter Berücksichtigung der Rückkopplung folgt für u :

$$u = M_{AM} - \mathbf{d}_Z \hat{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_Z = \begin{bmatrix} 0 & d_Z & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.76)$$

Führt man den Schätzfehler $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ ein, kann das System mithilfe der regulären Zustandstransformation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

transformiert werden. Die neue Darstellung erleichtert die Analyse der Eigenschaften des Regelkreises. Für das transformierte System folgt:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \frac{d\mathbf{e}}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2 \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AM} \\ M_L \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

mit der Systemmatrix

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}_1 \mathbf{d}_Z & \tilde{\mathbf{b}}_1 \mathbf{d}_Z \\ \hline \Delta \mathbf{A} & \mathbf{A} - \mathbf{K} \mathbf{C} \end{array} \right], \quad (5.79)$$

wobei $\Delta \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}$ gilt.

Um eine Aussage über den Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen M_{AM} und M_L des Systems und dem Schätzfehler² $\epsilon = \Delta \hat{\omega} - \Delta \omega$ treffen zu können, werden die zugehörigen Übertragungsfunktionen:

$$\begin{aligned} G_{M_L}(s) &= \left. \frac{\epsilon(s)}{M_L(s)} \right|_{AW=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} [s\mathbf{E} - \mathbf{F}]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_2 \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\frac{1}{J_L} s^2 - \frac{c_W k_1}{J_L} s}{s^3 - c_W k_1 s^2 + (\omega_0^2 - c_W k_2) s + \frac{c_W k_3}{J_L}} = -G_u(s) \frac{J_{AM}}{J_L} \frac{1}{d_Z} \end{aligned} \quad (5.80)$$

²Für die Betrachtungen der Zusatzdämpfung spielt es keine Rolle, ob der Schätzfehler positiv oder negativ ist. Der Einfachheit halber wird der Schätzfehler $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ negiert, um für die weitere Vorgehensweise positive Übertragungsfunktionen und somit einen Phasenverlauf ausgehend von 0° zu erhalten.

und

$$G_{M_{AM}}(s) = \frac{\epsilon(s)}{M_{AM}(s)} \Big|_{AW=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} [s\mathbf{E} - \mathbf{F}]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.81)$$

aufgestellt. Übertragungsfunktion $G_{M_L}(s)$ ist 3. Ordnung und besitzt 2 Übertragungsnullstellen bei $s = 0$ und $s = c_W k_1$. Die Dämpfungskonstante d_Z kommt nicht vor und hat somit keinen Einfluss auf den Schätzfehler. Anhand von $G_{M_{AM}}(s)$ wird ersichtlich, dass die Eingangsgröße M_{AM} bei Verwendung der exakten Streckenparameter im Modell des Kalman-Filters bzw. durch die in Abschnitt 5.3.2 beschriebenen Skalierungen (5.67) und (5.68) wie zu erwarten keinen Einfluss auf den Schätzfehler von $\Delta\omega$ hat.

Wie eingangs erwähnt, spielt für die Funktionsweise der Zusatzdämpfung vor allem die richtige Phasenlage des Schätzwertes für $\Delta\omega$ eine wesentliche Rolle, während der Absolutwert des Schätzwertes eine eher untergeordnete Rolle spielt. Aus diesem Grund besteht die Idee für den Algorithmus zur Parametervorgabe darin, den Phasenfehler des Schätzwertes von $\Delta\omega$ in einem möglichst großen Frequenzbereich durch die Vorgabe einer Wunschübertragungsfunktion 3. Ordnung für $G_{M_L}(s)$:

$$G_{M_L, Wunsch}(s) = \frac{a s \left(\frac{s}{\omega_k} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left[\left(\frac{s}{\omega_k} \right)^2 + \frac{2d_q}{\omega_k} s + 1 \right]} \quad (5.82)$$

möglichst gering zu halten. Die Wunschübertragungsfunktion für G_{M_L} des exakten Systems ist aus einem Linearfaktor [23, 133] im Zähler mit Knickfrequenz ω_k , einem Linearfaktor im Nenner mit Knickfrequenz ω_1 und einem quadratischen Faktor [23, 133] im Nenner mit Knickfrequenz ω_k und Dämpfungsgrad d_q derart konzipiert, sodass ein Pol bei ω_1 liegt und es zu einer Überlagerung der Übertragungsnullstelle bei ω_k und dem konjugiert komplexen Polpaar im Nenner kommt. Mit der intuitiven Wahl von $d_q = 1$ existiert keine Lösung. Es muss der allgemeine Fall betrachtet werden. Im Rahmen der Polvorgabe wird versucht, ω_1 möglichst weit links und ω_k möglichst weit rechts des Optimierungsbereichs für den Phasenfehler zu platzieren. Durch diese Vorgabe fällt die Phase durch den ersten Pol bei ω_1 auf 0° ab. Bei ω_k fällt die Phase am Ende des Betrachtungsbereichs weiter auf -90° ab (siehe Phasengang in Abb. 5.9). Durch einen Koeffizientenvergleich von Zähler und Nenner der Übertragungsfunktionen $G_{M_L}(s) \stackrel{!}{=} G_{M_L, Wunsch}(s)$ können die Größen k_1, k_2, k_3 bestimmt werden. Für den Koeffizientenvergleich sind 5 Gleichungen mit den 5 Unbekannten k_1, k_2, k_3, a, d_q zu lösen.

5.4 Algorithmus zur Parameterwahl (zeitkont. System)

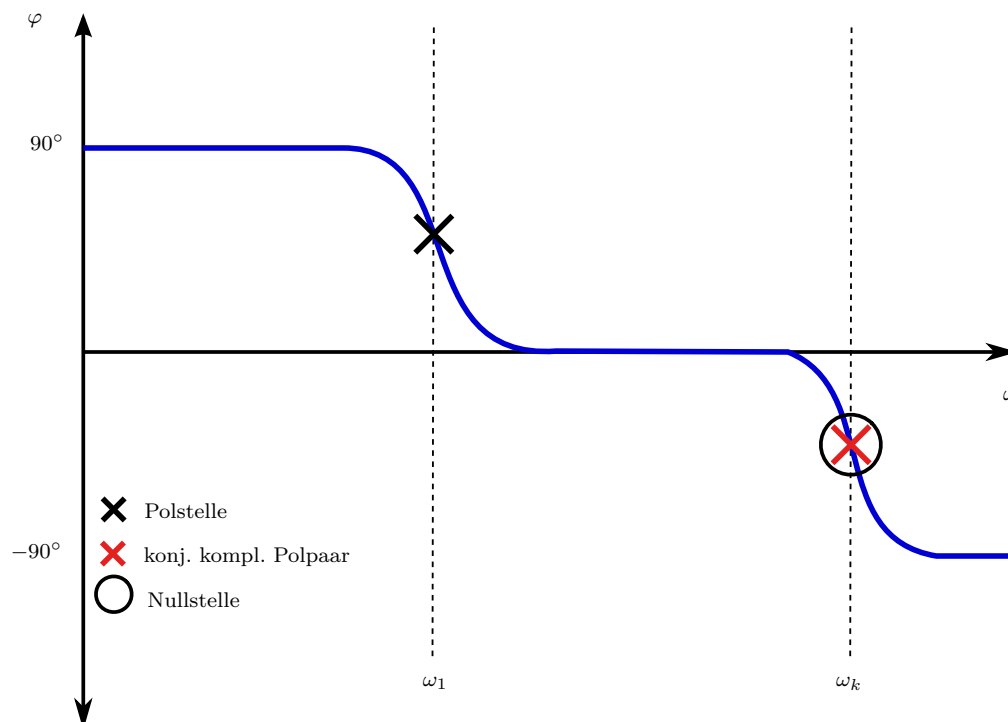


Abbildung 5.9: Phasengang Wunschübertragungsfunktion 3. Ordnung

Aus dem Koeffizientenvergleich der Zähler folgt:

$$k_1 = -\frac{\omega_k}{c_W}, \quad (5.83)$$

$$a = \frac{1}{J_L \omega_k \omega_1}. \quad (5.84)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich der Nenner folgt:

$$k_2 = -\frac{\omega_k^2 + \omega_1 \omega_k - \omega_1^2 - \omega_0^2}{c_W}, \quad (5.85)$$

$$k_3 = \frac{J_L \omega_1 \omega_k^2}{c_W}, \quad (5.86)$$

$$d_q = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_k}\right) \leq \frac{1}{2}. \quad (5.87)$$

Die Bedingungen für ein stabiles Kalman-Filter (5.24) bis (5.26) sind mit positiven Werten für ω_1 , ω_k und positiven Streckenparametern immer erfüllt. Durch die Vorgabe von ω_1 und ω_k können die Elemente der notwendigen Kalman-Matrix ermittelt werden, damit das System den gewünschten Phasenverlauf aus Abb. 5.9 aufweist. Aus den

ermittelten Elementen der Kalman-Matrix kann mithilfe der Kovarianz R auf die erforderliche Parametrierung der Kovarianzmatrix \mathbf{Q} rückgerechnet werden. Aus (5.57) und (5.12) folgt:

$$q_1 = R \left(k_1^2 + \frac{2}{c_W} k_2 \right). \quad (5.88)$$

Aus (5.54), (5.12) und (5.30) folgt:

$$q_2 = R \left(\frac{2}{J_L} k_1 k_3 - \frac{2\omega_0^2}{c_W} k_2 + k_2^2 \right). \quad (5.89)$$

Aus (5.33) und (5.12) folgt:

$$q_3 = R k_3^2. \quad (5.90)$$

Die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} kann je nach Wahl von ω_1 und ω_k auch "nicht positiv definit" sein. Für eine positiv definite Kovarianzmatrix \mathbf{Q} ($q_1, q_2, q_3 > 0$) folgen aus (5.85) bis (5.90) die Bedingungen

$$\omega_k^2 + 2\omega_1\omega_k - 2(\omega_1^2 + \omega_0^2) < 0, \quad (5.91)$$

$$\omega_k^4 - \omega_1^2\omega_k^2 - 2\omega_1^3\omega_k + (\omega_1^4 - \omega_0^4) > 0. \quad (5.92)$$

Da das Kalman-Filter (5.24) bis (5.26) zufolge immer stabil ist, handelt es sich bei (5.91) und (5.92) um hinreichende Bedingungen für ein stabiles Kalman-Filter. Der mögliche Bereich ohne Phasenfehler wird durch die zusätzlichen Bedingungen weiter eingeschränkt. In weiterer Folge wird deshalb von der Forderung nach einem positiv definiten \mathbf{Q} abgesehen. Wird die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} entsprechend (5.88) bis (5.90) mit positiven Werten für ω_1 und ω_k gewählt, ergibt sich eine Kalman-Matrix \mathbf{K} , mit der der Wunschphasenverlauf des Schätzfehlers exakt der Vorgabe aus Abb. 5.9 entspricht. An dieser Stelle ist anzumerken, dass man auf den Kalman-Filter-Entwurf durch die direkte Berechnung der Kalman-Matrix \mathbf{K} über den Algorithmus theoretisch verzichten kann. Bei direkter Verwendung der berechneten Kalman-Matrix könnte die Rückrechnung auf die für den Filterentwurf notwendige Kovarianzmatrix \mathbf{Q} entfallen. Da der Algorithmus nur als zusätzliche Hilfestellung für die Parametrierung des Kalman-Filters dienen soll, ist die Bestimmung von \mathbf{Q} aber durchaus sinnvoll. Es kann weiterhin die gewohnte Vorgehensweise zur Filterparametrierung über die Rauscheigenschaften des Systems durchgeführt werden. Die resultierende Parametrierung für \mathbf{Q} kann anschließend mit den Ergebnissen aus dem Algorithmus verglichen bzw. an diese angepasst werden.

5.4 Algorithmus zur Parameterwahl (zeitkont. System)

Abb. 5.10 zeigt den Vergleich der Bode-Diagramme der Übertragungsfunktion $G_{ML}(s)$ für das exakte System mit der Referenzparametrierung aus Tabelle B.6 und das mittels Algorithmus mit Parametern $\omega_1 = 10^{-5}$ rad/s und $\omega_k = 10^5$ rad/s optimierte System. Die Parametrierung aus dem Algorithmus kann Tabelle B.7 im Anhang entnommen werden. Der Bereich, in dem der Phasenfehler verschwindet, kann durch den Algorithmus

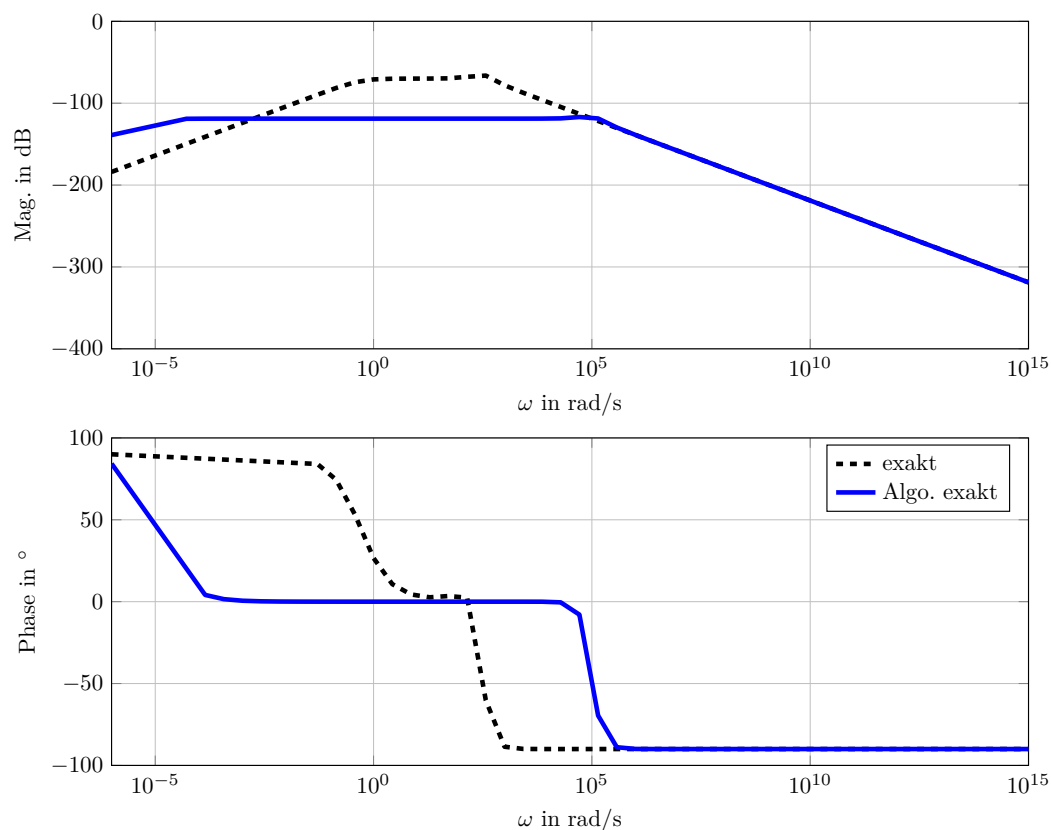


Abbildung 5.10: Bode-Diagramme von $G_{ML}(s)$ für die exakte Referenzparametrierung und Parametrierung aus dem Algorithmus

signifikant vergrößert werden und die Verstärkung des Schätzfehlers kann noch weiter gesenkt werden. Die Eingangsgröße M_{AM} hat beim System ohne Unsicherheit keinen Einfluss auf den Schätzfehler von $\Delta\omega$. Dies wird auch in (5.81) ersichtlich.

5.4.3 Algorithmus für das unsichere System

Durch Parameterfehler stimmen die Daten des Kalman-Filters nicht exakt mit jenen der Strecke überein. Die im Abschnitt 5.3.2 beschriebene vollständige Kompensation inkl. Skalierung des Eingangsvektors im Kalman-Filter ist nicht möglich, da die exakten Werte für J_L bzw. c_W nicht bekannt sind. Es kann nur die, ohne Kenntnis von J_L

mögliche, unvollständige Kompensation mithilfe der Ausgangsskalierung (5.67) bzw. (5.69) angewendet werden (siehe Abb. 5.11). Für das Gesamtsystem aus Strecke (5.70)

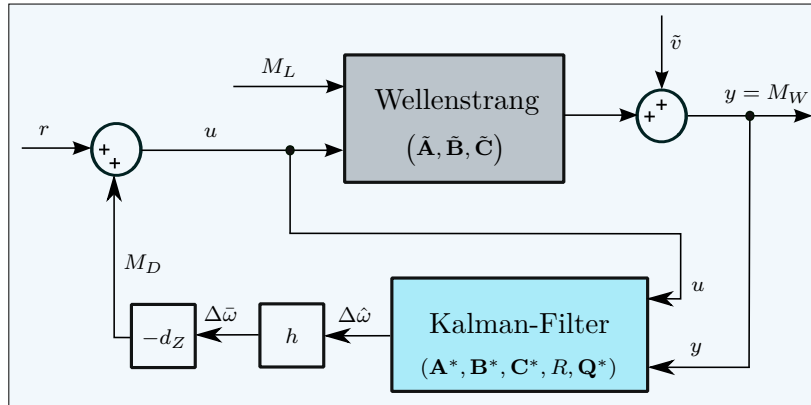


Abbildung 5.11: Blockschaltbild: Fehlersystem des unvollständig kompensierten Systems

und (5.71) sowie dem Kalman-Filter mit unsicheren Parametern (vgl. (5.1) und (5.2)) folgt unter Berücksichtigung der Rückkopplung:

Strecke:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{b}}_1 u + \tilde{\mathbf{b}}_2 M_L \quad (5.93)$$

$$y = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} \quad (5.94)$$

Kontrollbeobachter:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = h \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = h [(\mathbf{A}^* - \mathbf{K}^* \mathbf{C}^*) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_1^* (M_{AM} - d_Z \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}^* y] \quad (5.95)$$

mit \mathbf{A}^* , \mathbf{C}^* laut (5.1), (5.2) und

$$\mathbf{b}_1^* = \tilde{\mathbf{b}}_1. \quad (5.96)$$

Führt man den Schätzfehler $\mathbf{e}^*(t) = \mathbf{x}(t) - h\hat{\mathbf{x}}(t)$ ein, kann das System durch die reguläre Zustandstransformation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -h \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

5.4 Algorithmus zur Parameterwahl (zeitkont. System)

transformiert werden. Für das transformierte System folgt:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e}^* \end{bmatrix} = \mathbf{F}^* \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 & | & \tilde{\mathbf{b}}_2 \\ \hline \tilde{\mathbf{b}}_1 - h\mathbf{b}_1^* & | & \tilde{\mathbf{b}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AM} \\ M_L \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

mit der Systemmatrix

$$\mathbf{F}^* = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}_1 \mathbf{d}_Z & \tilde{\mathbf{b}}_1 \mathbf{d}_Z \\ \hline \Delta \mathbf{A} - (\tilde{\mathbf{b}}_1 - h\mathbf{b}_1^*) \mathbf{d}_Z & \mathbf{A}^* - \mathbf{K}^* \mathbf{C}^* + (\tilde{\mathbf{b}}_1 - h\mathbf{b}_1^*) \mathbf{d}_Z \end{array} \right], \quad (5.99)$$

wobei $\Delta \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^*$ und $\mathbf{C}^* = h\tilde{\mathbf{C}}$ gilt.

Für die zugehörigen Übertragungsfunktionen zwischen den Eingangsgrößen M_{AM} und M_L und $\epsilon^* = h\Delta\hat{\omega} - \Delta\omega$, dem Schätzfehler³ für $\Delta\omega$ folgt:

$$\begin{aligned} G_{M_L}^*(s) &= \frac{\epsilon^*(s)}{M_L(s)} \Big|_{AW=0} \\ &= \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] [s\mathbf{E} - \mathbf{F}^*]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_2 \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 \end{bmatrix} =: \frac{g_{b,ML}^*(s)}{g_a^*(s)} \end{aligned} \quad (5.100)$$

mit

$$g_{b,ML}^*(s) = \frac{1}{J_L} s \left[s^3 + \left(\frac{dzh}{J_{AM}} - c_W^* k_1^* \right) s^2 + \left(\omega_0^2 - \frac{c_W^* dzh k_1^*}{J_{AM}} \right) s - c_W^* k_1^* \omega_0^2 \right], \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} g_a^*(s) &= s^5 + \left(\frac{dzh}{J_{AM}} - c_W^* k_1^* \right) s^4 + \left(2\omega_0^2 - \frac{c_W^* dzh k_1^*}{J_{AM}} - c_W^* k_2^* \right) s^3 + \\ &\quad \left(-\frac{c_W^* dzh k_2^*}{J_{AM}} + \frac{dzh\omega_0^2}{J_{AM}} + \frac{c_W^* k_3^*}{J_L^*} - c_W^* \omega_0^2 k_1^* \right) s^2 + \\ &\quad \left(\frac{c_W^* dzh k_3^*}{J_{AM} J_L^*} - \frac{c_W^* dzh (h-1) k_1^* \omega_0^2}{J_{AM}} - c_W^* k_2^* \omega_0^2 + \omega_0^4 \right) s + \frac{c_W^* k_3^* \omega_0^2}{J_L^*} \end{aligned} \quad (5.102)$$

³Für die Betrachtungen der Zusatzdämpfung spielt es keine Rolle, ob der Schätzfehler positiv oder negativ ist. Der Einfachheit halber wird der Schätzfehler $\mathbf{e} = \mathbf{x} - h\hat{\mathbf{x}}$ negiert, um für die weitere Vorgehensweise positive Übertragungsfunktionen und somit einen Phasenverlauf ausgehend von 0° zu erhalten.

und

$$\begin{aligned} G_{M_{AM}}^*(s) &= \left. \frac{\epsilon^*(s)}{M_{AM}(s)} \right|_{AW=0} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] [s\mathbf{E} - \mathbf{F}^*]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ \tilde{\mathbf{b}}_1 - h\mathbf{b}_1^* \end{bmatrix} =: \frac{g_{b,M_{AM}}^*(s)}{g_a^*(s)} \end{aligned} \quad (5.103)$$

mit

$$g_{b,M_{AM}}^*(s) = \frac{h-1}{J_{AM}} (s^4 - c_W^* k_1^* s^3 + \omega_0^2 s^2 - c_W^* k_1^* \omega_0^2 s). \quad (5.104)$$

Im Gegensatz zum exakten System ergeben sich bedingt durch die unvollständige Kompensation Übertragungsfunktionen 5. Ordnung. Da $G_{M_{AM}}^*(s) \neq 0$ hat auch M_{AM} einen Einfluss auf den Schätzfehler von $\Delta\omega$. Für die Übertragungsfunktion $G_{M_L}^*(s)$ des unvollständig kompensierten Systems mit den Nullstellen

$$s_1 = 0, \quad s_2 = c_W^* k_1^*, \quad s_{3,4} \text{ von Polynom } s^2 + \frac{d_Z h}{J_{AM}} s + \omega_0^2 = 0 \quad (5.105)$$

wird eine Wunschübertragungsfunktion 5. Ordnung vorgegeben, deren Zähler sich aus einem Linearfaktor mit Knickfrequenz ω_2 , und einem quadratischen Faktor mit Knickfrequenz ω_k und Dämpfungsgrad d_q zusammensetzt. Der Nenner setzt sich aus einem Linearfaktor mit Knickfrequenz ω_1 , einem quadratischen Faktor mit Knickfrequenz ω_k und Dämpfungsgrad d_{q1} sowie einem quadratischen Faktor mit Knickfrequenz ω_2 und Dämpfungsgrad d_{q2} zusammen:

$$G_{M_L, Wunsch}^*(s) = \frac{b s \left(\frac{s}{\omega_2} + 1 \right) \left[\left(\frac{s}{\omega_k} \right)^2 + \frac{2d_q}{\omega_k} s + 1 \right]}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left[\left(\frac{s}{\omega_k} \right)^2 + \frac{2d_{q1}}{\omega_k} s + 1 \right] \left[\left(\frac{s}{\omega_2} \right)^2 + \frac{2d_{q2}}{\omega_2} s + 1 \right]}. \quad (5.106)$$

Auf mögliche Kürzungen von Pol- und Nullstellen wird an dieser Stelle bewusst verzichtet, um die entsprechende Ordnung für den Koeffizientenvergleich mit (5.100) zu erhalten. Durch diese Vorgabe kommt es zu einer Überlagerung des konjugiert komplexen Nullstellenpaars und des konjugiert komplexen Polpaars bei der Knickfrequenz ω_k . Zusätzlich überlagern sich die Nullstelle und das konjugiert komplexe Polpaar bei ω_2 . Im Rahmen der Einstellung wird versucht, ω_1 möglichst weit links und ω_2 möglichst weit rechts des Untersuchungsbereichs für den Phasenfehler zu platzieren. Dadurch fällt die Phase durch den ersten Pol bei ω_1 auf 0° ab. Durch die Überlagerung des konjugiert

5.4 Algorithmus zur Parameterwahl (zeitkont. System)

komplexen Nullstellenpaars und des konjugiert komplexen Polpaars bei ω_k kommt es in diesem Bereich zu keiner Phasenänderung. Erst im Bereich von ω_2 fällt die Phase wieder auf -90° ab (siehe Phasengang in Abb. 5.12). Durch Koeffizientenvergleich von Zähler-

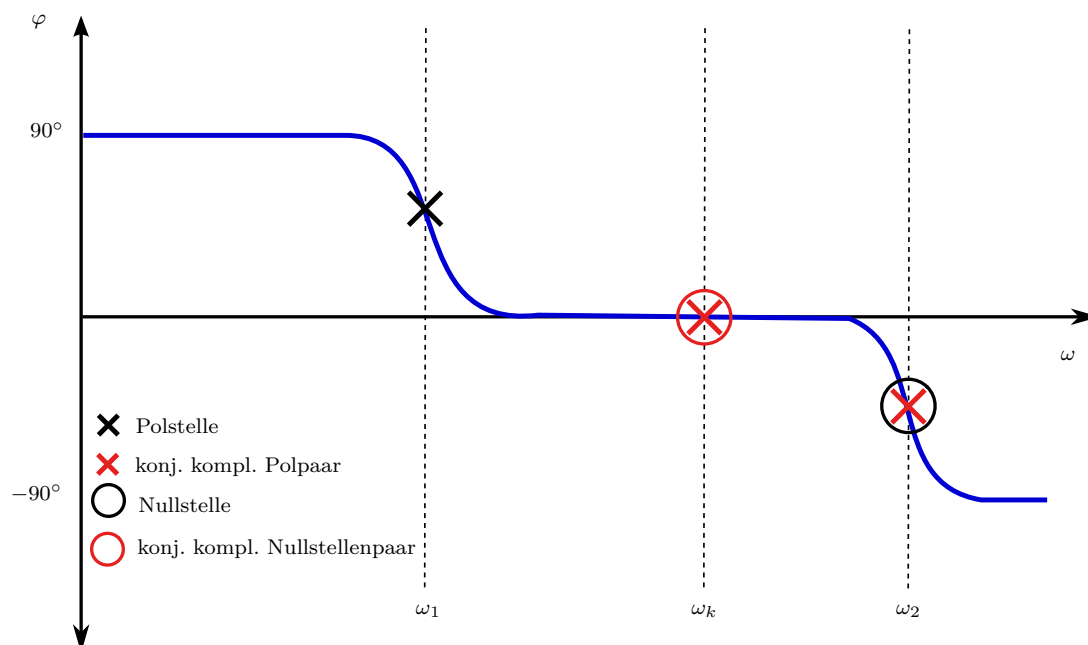


Abbildung 5.12: Phasengang Wunschübertragungsfunktion 5. Ordnung

und Nennerpolynom der Übertragungsfunktionen $G_{M_L}^*(s)$ und $G_{M_L, Wunsch}^*(s)$ können aus den 8 Gleichungen die 8 Unbekannten $k_1, k_2, k_3, d_q, d_{q1}, d_{q2}, \omega_k$ und b bestimmt werden. Aus dem Koeffizientenvergleich der Zähler ergibt sich die Bedingung:

$$\omega_k = \omega_0. \quad (5.107)$$

Die Knickfrequenz der quadratischen Faktoren muss der 1. Resonanzfrequenz ω_0 des Wellenstrangs entsprechen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, kann die Wunschübertragungsfunktion (5.106) nicht realisiert werden. Aus dem Koeffizientenvergleich der Zähler folgt weiters:

$$k_1^* = -\frac{\omega_2}{c_W^*}, \quad (5.108)$$

$$d_q = \frac{d_z h}{2J_{AM}\omega_0}, \quad (5.109)$$

$$b = \frac{1}{J_L\omega_1\omega_2}. \quad (5.110)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich des Nenners für die Potenz s^0 folgt:

$$k_3^* = \frac{J_L^* \omega_1 \omega_2^2}{c_W^*}. \quad (5.111)$$

Wird (5.111) in die Übertragungsfunktionen eingesetzt, kann aus dem Koeffizientenvergleich für die Potenz s^4

$$d_{q1} = \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{d_Z h}{J_{AM}} - \omega_1 + \omega_2 (1 - 2d_{q2}) \right] \quad (5.112)$$

ermittelt werden. Nach der Substitution von (5.112) in die Übertragungsfunktionen kann aus dem Koeffizientenvergleich für die Potenz s^1

$$k_2^* = \frac{d_Z (h-1) \omega_2 (\omega_0^2 - \omega_1 \omega_2)}{c_W^* J_{AM} \omega_0^2} + \frac{1}{c_W^* \omega_0^2} \left[\omega_0^4 + \omega_1 \omega_2^2 (\omega_1 + 2d_{q2} \omega_2 - \omega_2) - \omega_0^2 \omega_2 (\omega_2 + 2d_{q2} \omega_1) \right] \quad (5.113)$$

bestimmt werden. Der Einfachheit halber wird k_2^* in der Übertragungsfunktion nicht substituiert. Aus dem Koeffizientenvergleich für s^2 folgt:

$$d_{q2} = \frac{d_Z h}{4J_{AM} \omega_2} + \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_1 \omega_2}{4\omega_2 \omega_1} + \sqrt{\frac{[d_Z h \omega_1 - J_{AM} (\omega_0^2 - \omega_2^2 - \omega_2 \omega_1 + \omega_1^2)]^2}{16\omega_2^2 J_{AM}^2 \omega_1^2} + \frac{d_Z c_W^* k_2^*}{4\omega_2^2 J_{AM} \omega_1}}. \quad (5.114)$$

Wird für den zu betrachtenden Frequenzbereich $\omega_1 = \frac{1}{\omega_2}$ angenommen und wird $\omega_2 \gg 1$ gewählt, dann kann d_{q2} aus (5.114) wie folgt abgeschätzt werden:

$$d_{q2} \approx \underbrace{\frac{hd_Z}{4\omega_2 J_{AM}}}_{\approx 0} + \frac{\omega_0^2 - \omega_2^2 + 1}{4} + \sqrt{\frac{[-J_{AM} (\omega_0^2 - \omega_2^2 - 1)]^2}{16J_{AM}^2} + \underbrace{\frac{d_Z c_W^* k_2^*}{4\omega_2 J_{AM}}}_{\approx 0}} \\ \approx \frac{\omega_0^2 - \omega_2^2 + 1}{4} + \frac{-\omega_0^2 + \omega_2^2 + 1}{4} = \frac{1}{2}. \quad (5.115)$$

Durch die beschriebene Wahl von ω_1 und ω_2 und unter Ausnützung von (5.115) können auch die anderen ermittelten Größen abgeschätzt werden. Für die Elemente der Kalman-Matrix folgt:

$$k_1^* = -\frac{\omega_2}{c_W^*}, \quad (5.116)$$

$$k_2^* \approx \frac{d_Z (h-1) \omega_2 (\omega_0^2 - 1) + J_{AM} (\omega_0^4 - \omega_0^2 \omega_2^2 + 1)}{c_W^* J_{AM} \omega_0^2}, \quad (5.117)$$

$$k_3^* \approx \frac{J_L^* \omega_2}{c_W^*}. \quad (5.118)$$

Für die Größen der Wunschübertragungsfunktion folgt:

$$b \approx \frac{1}{J_L}, \quad (5.119)$$

$$d_q = \frac{d_Z h}{2 J_{AM} \omega_0}, \quad (5.120)$$

$$d_{q1} \approx \frac{d_Z h}{2 J_{AM} \omega_0}, \quad (5.121)$$

$$d_{q2} \approx \frac{1}{2}. \quad (5.122)$$

Die Elemente der Kalman-Matrix (5.116) bis (5.118) können unabhängig von den exakten Größen J_L und c_W bestimmt werden. Zur Bestimmung sind nur die im Kalman-Filter verwendeten Streckenparameter J_L^* , c_W^* , ω_0 , die bekannte Massenträgheit J_{AM} und die einstellbare Skalierung d_Z bzw. $d_Z h$ notwendig. Durch die Vorgabe von ω_1 und ω_2 - entsprechend der gewählten Vereinfachung - können die Elemente der notwendigen Kalman-Matrix ermittelt werden, damit das System den gewünschten Phasenverlauf aufweist. Die im Filter verwendete Massenträgheit J_L^* kann beliebig gewählt werden. Die Elemente der Kalman-Matrix werden dann derart berechnet, dass sich immer die gewünschte Übertragungsfunktion ergibt. Basierend auf den Erkenntnissen bei der Analyse der Unsicherheit in Abschnitt 5.2, laut denen es bei einem Kalman-Filter ohne Kompensation bei Standardparametrierung mit zunehmender Massenträgheit J_L^* zu einem geringeren Schätzfehler kommt, wird J_L^* groß gewählt (z. B. $J_L^* = 10^5 J_L$).

Zur Überprüfung der Stabilität des resultierenden Kalman-Filters werden die Elemente der Kalman-Matrix (5.116) bis (5.118) in die Stabilitätsbedingungen (5.24) bis (5.26) für das unsichere Filter eingesetzt:

$$k_1^* = -\frac{\omega_2}{c_W^*} < 0, \quad (5.123)$$

$$k_2^* \approx \frac{d_Z (h-1) \omega_2 (\omega_0^2 - 1) + J_{AM} (\omega_0^4 - \omega_0^2 \omega_2^2 + 1)}{c_W^* J_{AM} \omega_0^2} < \frac{\omega_0^2}{c_W^*}, \quad (5.124)$$

$$0 < k_3^* \approx \frac{J_L^* \omega_2}{c_W^*} < -k_1^* J_L^* (\omega_0^2 - c_W^* k_2^*). \quad (5.125)$$

Bedingung (5.123) ist für positive Werte ω_2 und c_W^* immer erfüllt. Die Bedingung aus (5.124) kann in

$$k_2^* \approx \frac{d_Z (h-1) \omega_2 (\omega_0^2 - 1)}{c_W^* J_{AM} \omega_0^2} + \frac{1}{c_W^* \omega_0^2} - \frac{\omega_2^2}{c_W^*} < 0 \quad (5.126)$$

umgeschrieben werden. Wird die Skalierung

$$h = \frac{c_W^*}{c_W} = \frac{J_L^* (J_L + J_{AM})}{J_L (J_L^* + J_{AM})} = \frac{1 + \frac{J_{AM}}{J_L}}{1 + \frac{J_{AM}}{J_L^*}} \quad (5.127)$$

für große Werte $J_L^* \gg J_L$ und $J_L^* \gg J_{AM}$ abgeschätzt, folgt:

$$h = \frac{J_L^*}{(J_L^* + J_{AM})} + \frac{J_L^* J_{AM}}{J_L (J_L^* + J_{AM})} \approx 1 + \frac{J_{AM}}{J_L}. \quad (5.128)$$

Mit (5.128) folgt aus (5.126):

$$\begin{aligned} k_2^* &= \frac{d_Z \omega_2 (\omega_0^2 - 1)}{c_W^* J_L \omega_0^2} + \frac{1}{c_W^* \omega_0^2} - \frac{\omega_2^2}{c_W^*} < 0 \\ k_2^* &= d_Z \omega_2 (\omega_0^2 - 1) + J_L - J_L \omega_0^2 \omega_2^2 < 0 \\ k_2^* &\approx -J_L \omega_0^2 \omega_2^2 < 0 \end{aligned} \quad (5.129)$$

und es wird ersichtlich, dass die Bedingung bei großen Werten für $\frac{\omega_2}{\omega_0} \gg 1$ ebenfalls immer erfüllt ist. Für (5.125) folgt durch Einsetzen von (5.123) und (5.129):

$$0 < J_L^* < J_L^* \underbrace{\left(\omega_0^2 + c_W^* J_L \omega_0^2 \omega_2^2 \right)}_{>1}. \quad (5.130)$$

Diese Bedingung ist ebenfalls erfüllt. Mit der Parametrierung aus dem Algorithmus erhält man immer ein stabiles Kalman-Filter.

Bei näherer Betrachtung der ermittelten Größen (5.119) bis (5.122) der Wunschübertragungsfunktion zeigt sich, dass diese weitgehend unabhängig von der Massenträgheit

J_L ist. Nur der positive Verstärkungsfaktor b ändert sich in Abhängigkeit von der Lastträgheit J_L . Die Verstärkung spielt aber, wie eingangs erwähnt, eine eher untergeordnete Rolle, da die Aufschaltung des Dämpfungsmoments ohnehin über die Dämpfungskonstante d_Z skaliert wird. Der viel wichtigere Phasenfehler bleibt von den Streckenparametern J_L und c_W weitgehend unbeeinflusst. Der Wunschverlauf und somit auch die Lage der Pol- und Nullstellen ändert sich in Abhängigkeit der realen Streckenparameter kaum. Die gefundene Parametrierung ist damit sehr robust gegenüber Änderungen der Streckenparameter.

Wird die Übertragungsfunktion $G_{M_{AM}}^*(s)$ betrachtet, folgt aus (5.104) mit (5.116) für den Zähler:

$$\begin{aligned} g_{b,M_{AM}}^*(s) &= \frac{h-1}{J_{AM}} s \left(s^3 - c_W^* k_1^* s^2 + \omega_0^2 s - c_W^* k_1^* \omega_0^2 \right) \\ &= \frac{h-1}{J_{AM}} s \left(s^2 + \omega_0^2 \right) (s + \omega_2). \end{aligned} \quad (5.131)$$

Der Nenner entspricht jenem von $G_{M_L}^*$. Die Übertragungsfunktion $G_{M_{AM}}^*(s)$ weist somit ebenfalls die Struktur der Wunschübertragungsfunktion (5.106) mit $d_q = 0$ auf. Durch die identische Struktur resultiert der gleiche Phasenverlauf.

Analog zu (5.88) bis (5.90) für das exakte System kann auf die erforderliche Parametrierung der Kovarianzmatrix \mathbf{Q}^* für das unsichere System rückgerechnet werden. Aus (5.57) und (5.12) folgt:

$$q_1^* = R \left(\frac{2}{c_W^*} k_2^* + k_1^{*2} \right). \quad (5.132)$$

Aus (5.54), (5.12) und (5.30) folgt:

$$q_2^* = R \left(\frac{2}{J_L^*} k_1^* k_3^* - \frac{2\omega_0^2}{c_W^*} k_2^* + k_2^{*2} \right). \quad (5.133)$$

Aus (5.33) und (5.12) folgt:

$$q_3^* = R k_3^{*2}. \quad (5.134)$$

Wird die Kovarianzmatrix \mathbf{Q}^* entsprechend (5.132) bis (5.134) gewählt, ergibt sich eine Kalman-Matrix mit der der Wunschphasenverlauf des Schätzfehlers für die Übertragungsfunktionen $G_{M_L}^*(s)$ und $G_{M_{AM}}^*(s)$ der Vorgabe aus Abb. 5.12 entspricht. Abb. 5.13 und 5.14 zeigen die Bode-Diagramme der beiden Übertragungsfunktionen für das Filter

mit Referenzparametrierung bei einer Unsicherheit $J_L^* = 0.2J_L$ mit verschiedenen Kompensationsstufen und bei Parametrierung mittels Algorithmus mit der Wahl $J_L^* = 10^5 J_L$ und Q^* nach (5.132) bis (5.134). Die Referenzparametrierung des Filters für das ex-

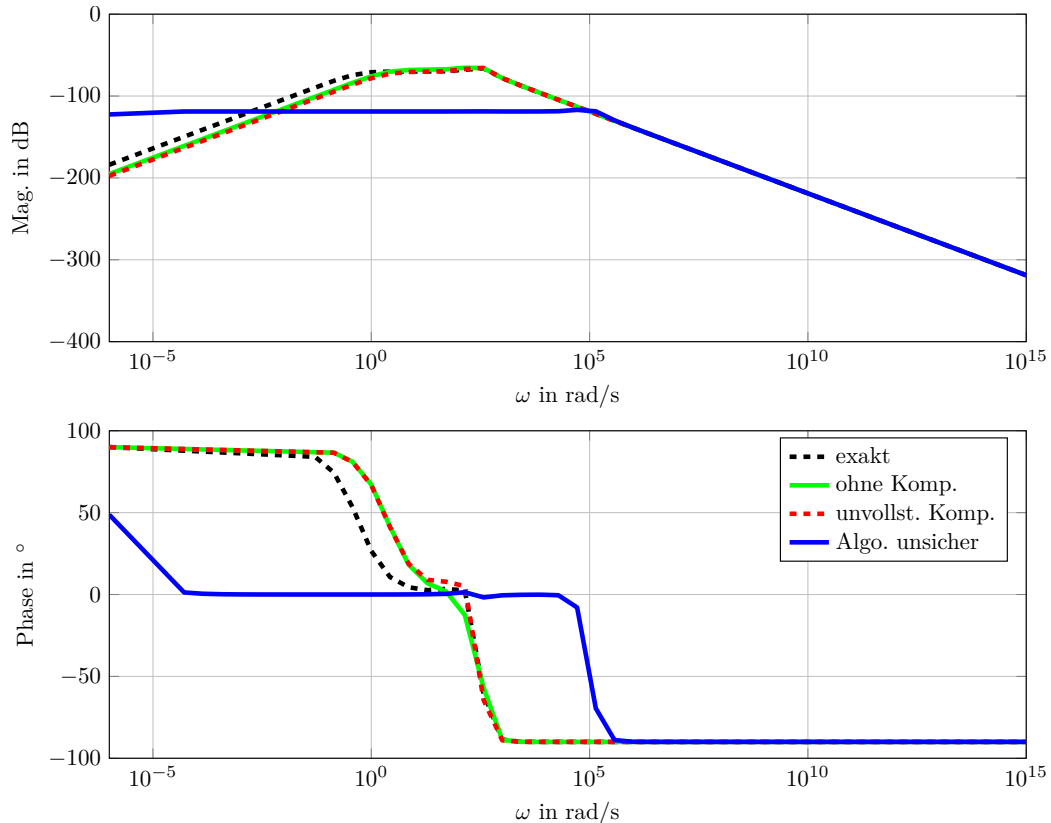


Abbildung 5.13: Bode-Diagramme von $G_{ML}^*(s)$ für die exakte Referenzparametrierung, Referenzparametrierung bei $J_L^* = 0.2J_L$ mit verschiedenen Kompensationsstufen und Parametrierung aus dem Algorithmus

akte System (siehe Tabelle B.6 im Anhang) entspricht der mithilfe eines genetischen Algorithmus gewählten Referenzparametrierung aus Abschnitt 5.4.2. Bei $G_{ML}^*(s)$ wird der Bereich ohne Phasenfehler durch die Parameterunsicherheit im Filter (grün) gegenüber dem exakten System mit der Referenzparametrierung (schwarz strichliert) kleiner (siehe Abb. 5.13). Mithilfe der über die freie Parametrierung von d_Z auch ohne exakte Kenntnis von J_L möglichen, unvollständigen Kompensation durch die Skalierung des Ausgangsvektors (5.67) kann der Verlauf des Phasenfehlers für die beiden Übertragungsfunktionen $G_{ML}^*(s)$ und $G_{MAM}^*(s)$ durch die fehlende Kompensation der Eigenwerte nur geringfügig verbessert werden (rot strichliert). Im Gegensatz dazu kann mit der Parametrierung aus dem Algorithmus (siehe Tabelle B.8 im Anhang) ein sehr großer Bereich mit verschwindendem Phasenfehler erzielt werden (blau). Der Phasenfehler bei $G_{MAM}^*(s)$ (siehe Abb. 5.14) startet bei der Referenzparametrierung durch die Unsicherheit bereits bei -90° und sinkt dann bei der Resonanzfrequenz noch

5.4 Algorithmus zur Parameterwahl (zeitkont. System)

weiter ab (grün). Die Skalierung des Ausgangsvektors (rot) ändert das Verhalten kaum. Bei Anwendung des Algorithmus (blau) kann der Phasenfehler von $G_{MAM}^*(s)$ in einem weiten Bereich zu Null gemacht und somit mit dem exakten System (schwarz) übereingestimmt werden. Obwohl die Verstärkungen der Schätzfehler ohne den Algorithmus bei beiden Übertragungsfunktionen betragsmäßig recht gering sind, funktioniert die Dämpfung durch den vorherrschenden Phasenfehler bei der Schätzung von $\Delta\omega$ wenig zufriedenstellend. Durch die Wahl von J_L^* und \mathbf{Q}^* entsprechend des beschriebenen Algorithmus kann der Bereich ohne Phasenfehler für beide Übertragungsfunktionen signifikant vergrößert werden und die Dämpfung funktioniert sehr gut.

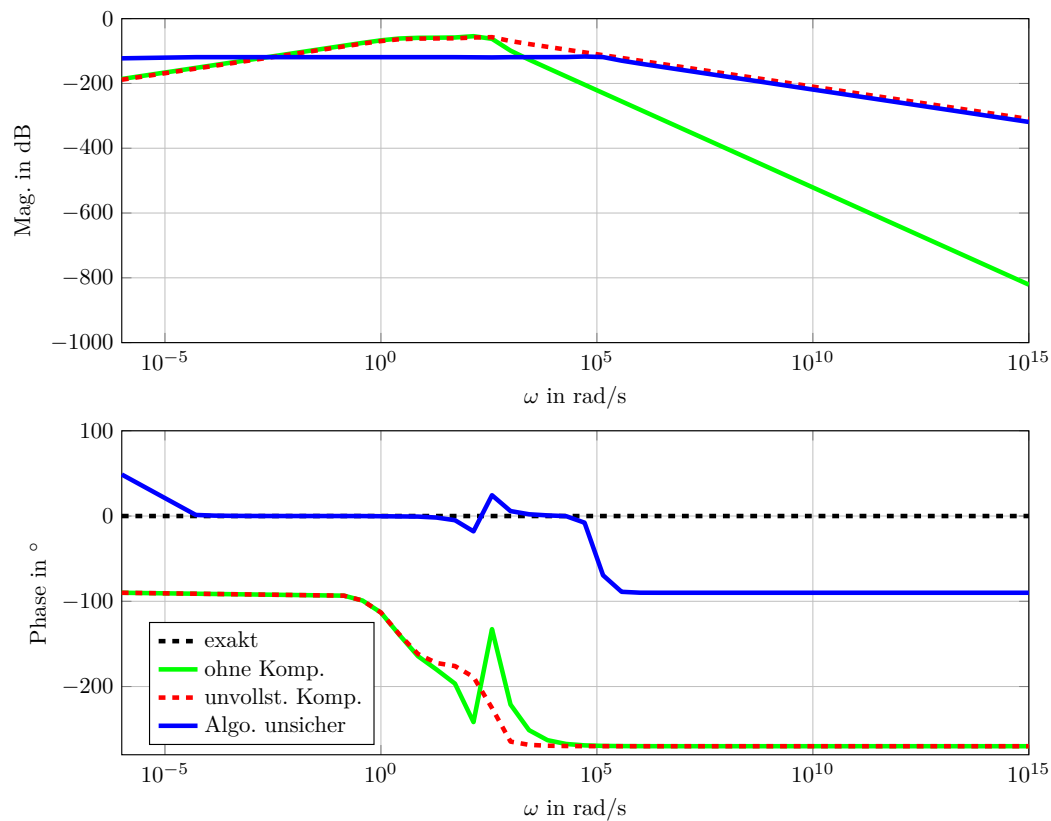


Abbildung 5.14: Bode-Diagramme von $G_{MAM}^*(s)$ für die exakte Referenzparametrierung, Referenzparametrierung bei $J_L^* = 0.2J_L$ mit verschiedenen Kompensationsstufen und Parametrierung aus dem Algorithmus

5.4.4 Simulationsstudie Rollenprüfstand

Die Ergebnisse des Algorithmus werden mithilfe von Simulationen des zeitkontinuierlichen Systems validiert. Der Sollwertsprung am Rollenprüfstand (vgl. Abschnitt 5.2.1) wird mit dem zeitkontinuierlichen Kalman-Filter (5.5) bis (5.7) und der aus dem Algorithmus resultierenden Filterparametrierung erneut simuliert und hinsichtlich der auftretenden Schätzfehler analysiert. Die verwendete Filterparametrierung für das Referenzsystem und die aus dem Algorithmus resultierende Parametrierung sind in Tabelle B.6 und B.8 im Anhang dargestellt. Die Simulationen mit dem Algorithmus werden bei konstanter Filterparametrierung (d. h. $J_L^* = \text{konst.}$, $\mathbf{Q}^* = \text{konst.}$) für verschiedene Werte für die reale Massenträgheit der Last J_L wiederholt. Die Simulationen mit der Referenzparametrierung werden ebenfalls mit der konstanten Parameterwerten aus Tabelle B.6 und veränderlicher Last J_L durchgeführt. Abb. 5.15 zeigt links die resul-

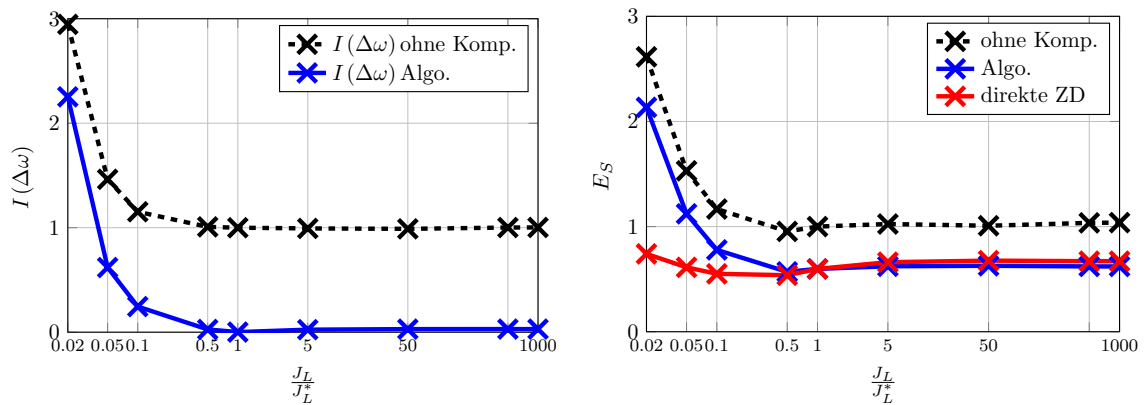


Abbildung 5.15: Simulation Rolle: Fehlerkriterium I und E_S bei Referenzparametrierung in Abhängigkeit von $\frac{J_L}{J_L^*}$ und Parametrierung mittels Algorithmus (normiert auf die jeweiligen Werte der Referenzparametrierung bei $\frac{J_L}{J_L^*} = 1$)

tierenden Schätzfehler für die verschiedenen Werte von J_L bei der Referenzparametrierung und der mittels Algorithmus optimierten Parametrierung. In der Abbildung rechts sind das normierte Maß für die Schwingneigung E_S für die Referenzparametrierung, die aus dem Algorithmus resultierende Parametrierung und die direkte Zusatzdämpfung gegenübergestellt. Als Maß für die Schwingneigung ist dabei

$$E_S = \int_{t_1}^{t_2} |M_W(t) - M_{AM}(t)| dt \quad (5.135)$$

mit dem gemessenen Wellenmoment M_W und dem Sollwert M_{AM} des Momentensprungs definiert. Die absolute Abweichung wird für positive Sprünge zwischen $t_1 = 0,8\text{ s}$ und $t_2 = 1,6\text{ s}$ aufintegriert. Die x-Achse in den Plots beschreibt das Verhältnis der sich

5.4 Algorithmus zur Parameterwahl (zeitkont. System)

ändernden, realen Massenträgheit J_L in der Strecke zur konstanten, im Filter mit Referenzparametrierung verwendeten Massenträgheit J_L^* . Das Maß für die Schwingneigung und der Schätzfehler sind in den Plots auf die Werte bei Referenzparametrierung mit exakten Parametern $\frac{J_L}{J_L^*} = 1$ normiert. Durch die Parameterunsicherheit nimmt der Schätzfehler bei kleinen Werten von J_L zu. Mit der aus dem Algorithmus resultierenden Parametrierung ist der Schätzfehler gegenüber der konstanten Parametrierung signifikant kleiner. Selbst bei $J_L = 0.05J_L^*$ ist der Schätzfehler noch geringer als bei der Referenzparametrierung ohne Kompensation. Durch den Algorithmus ist das Kalman-Filter robuster gegenüber der Unsicherheit von J_L . Bei der Betrachtung von E_S wird deutlich, dass die Schwingneigung und somit die Schwingung bei kleinen Werten von J_L zunimmt. Sogar bei der direkten Zusatzdämpfung, die durch die direkte Messung von $\Delta\omega$ von Parameterunsicherheiten nicht beeinflusst wird, kommt es durch den geänderten mechanischen Aufbau zu einer leichten Zunahme der Schwingung. Entspricht die Massenträgheit des realen Systems der im Kalman-Filter bei der Referenzparametrierung verwendeten ($\frac{J_L}{J_L^*} = 1$), stimmen die Maße für die Schwingneigung mit direkter Zusatzdämpfung und Kalman-Filter mit Algorithmus gut überein. Bei größeren Werten für J_L ist die dämpfende Wirkung durch das Kalman-Filter vergleichbar mit der direkten Zusatzdämpfung. In Abb. 5.16 sind die zugehörigen Eigenwerte des äquivalenten, abgetasteten zeitdiskreten Kalman-Filters dargestellt. Die Eigenwerte

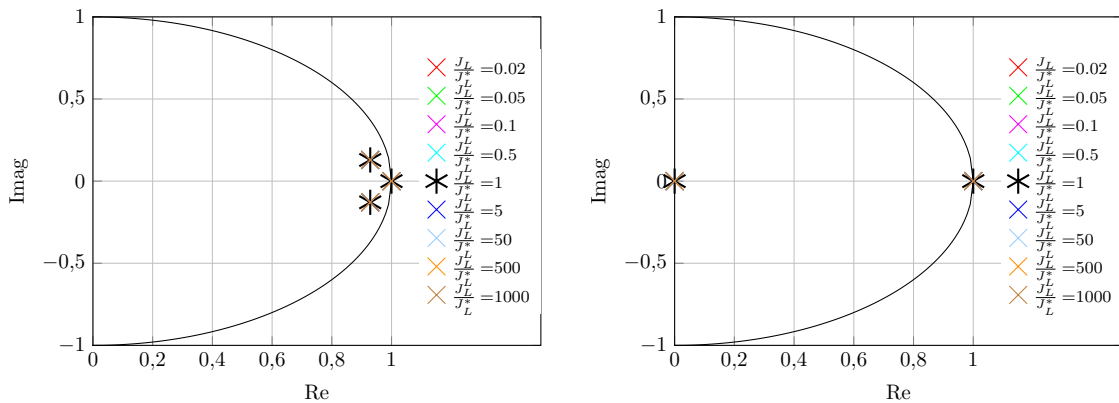


Abbildung 5.16: Simulation Rolle: Eigenwerte des Kalman-Filters bei Referenzparametrierung in Abhängigkeit von $\frac{J_L}{J_L^*}$ und Parametrierung aus Algorithmus (Anmerkung: Durch die konstante Filterparametrierung liegen alle Eigenwerte übereinander.)

z_i des zeitdiskreten Systems werden aus den Eigenwerten s_i des zeitkontinuierlichen Systems mithilfe der Relation

$$z_i = e^{s_i T_d} \quad (5.136)$$

berechnet [23]. Für die Abtastzeit wird $T_d = 0,0005$ s gewählt. Ändert sich die reale Massenträgheit J_L gegenüber der im Filter parametrisierten Trägheit J_L^* , ändern sich die Eigenwerte des Kalman-Filters nicht. Diese bleiben durch die konstante Parametrierung des Filters unverändert gegenüber der Ausgangsparametrierung. Mit der Referenzparametrierung liegt ein reeller Eigenwert des Filters nahe 1 und das konjugiert komplexe Polpaar bei ca. 0.9. Durch die Anwendung des Algorithmus wird das konjugiert komplexe Polpaar in die Nähe des Ursprungs verschoben und der reelle Eigenwert liegt weiterhin nahe 1 (siehe Abb. 5.16). Die Eigenwerte nähern sich mit steigenden Werten von ω_2 bzw. der Vergrößerung des betrachteten Frequenzbereichs dem Ursprung und dem Einheitskreis an. Der Imaginärteil des konjugiert komplexen Polpaars geht dabei gegen Null. Mit dem gewählten Wert von $\omega_2 = 10^5$ rad/s liegen die Eigenwerte nahe an, aber nicht direkt auf Ursprung und Einheitskreis. Die Robustheit gegenüber der Parameterunsicherheit von J_L kann durch den vorgestellten Algorithmus maßgeblich verbessert werden.

Die in Abschnitt 5.3 und 5.4 für das zeitkontinuierliche System gewonnenen Erkenntnisse müssen für die Anwendung in der Praxis auf zeitdiskrete Systeme umgelegt werden. In den folgenden Kapiteln wird die Kompensation von Parameterunsicherheiten sowie der Algorithmus zur Parametrierung basierend auf der zeitdiskreten Systembeschreibung hergeleitet.

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

5.5.1 Zeitdiskrete Systembeschreibung

Zur Beantwortung der Frage, ob sich die für das zeitkontinuierliche, stationäre Kalman-Filter gewonnenen Erkenntnisse auf das zeitdiskrete übertragen lassen, müssen das zeitdiskrete System und die zugehörige algebraische Riccati Gleichung näher betrachtet werden. Wird das unsichere System für das Kalman-Filter aus (5.1) und (5.2) mit der Diskretisierungszeit T_d diskretisiert, folgt:

$$\Phi^* = e^{\mathbf{A}^* T_d}, \quad (5.137)$$

$$\mathbf{H}^* = \int_0^{T_d} e^{\mathbf{A}^* \tau} \mathbf{B}^* d\tau = \mathbf{H}, \quad (5.138)$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} -c_W^* & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.139)$$

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

wobei Φ^* als

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 T_d) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_d) & \frac{1}{\omega_0^2 J_L^*} (\cos(\omega_0 T_d) - 1) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 T_d) & \cos(\omega_0 T_d) & -\frac{1}{\omega_0 J_L^*} \sin(\omega_0 T_d) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.140)$$

angeschrieben werden kann. Für die weitere Analyse bietet es sich an, die Systemmatrix (5.140) noch weiter umzuformen, sodass die unsichere Massenträgheit J_L^* der Last als Faktor alleine steht und die restlichen Elemente unbeeinflusst von Unsicherheiten sind. Mithilfe der trigonometrischen Beziehungen

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad (5.141)$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad (5.142)$$

kann die Systemmatrix (5.140) in

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \frac{1 - \tan^2(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)}{1 + \tan^2(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)} & \frac{2 \tan(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)}{\omega_0 [1 + \tan^2(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)]} & \frac{-2 \tan^2(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)}{\omega_0^2 J_L^* [1 + \tan^2(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)]} \\ \frac{-2\omega_0 \tan(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)}{1 + \tan^2(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)} & \frac{1 - \tan^2(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)}{1 + \tan^2(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)} & \frac{-2 \tan(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)}{\omega_0 J_L^* [1 + \tan^2(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)]} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.143)$$

umgeformt werden. Definiert man $b := \tan(\frac{1}{2}\omega_0 T_d)$ und hebt J_L^* heraus, folgt aus (5.143):

$$\Phi^* = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} + \underbrace{\frac{2b}{\omega_0 (1 + b^2)}}_k \underbrace{\begin{bmatrix} -b\omega_0 & 1 & -\frac{b}{\omega_0} \\ -\omega_0^2 & -b\omega_0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Psi} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_L^*} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^*}. \quad (5.144)$$

Für das zeitdiskrete, stationäre Kalman-Filter mit Parameterunsicherheit (vgl. (4.34) und (4.35)) gilt:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i^* + \mathbf{K}_d^* (y_i - \mathbf{C}^* \mathbf{x}_i^*), \quad (5.145)$$

$$\mathbf{x}_i^* = \Phi^* \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \mathbf{H}^* u_{i-1}. \quad (5.146)$$

Durch Einsetzen von (5.145) in (5.146) kann die zugehörige Zustandsraumdarstellung:

$$\mathbf{x}_{i+1}^* = \Phi^* (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^*) \mathbf{x}_i^* + \Phi^* \mathbf{K}_d^* y_i + \mathbf{H}^* u_i, \quad (5.147)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^*) \mathbf{x}_i^* + \mathbf{K}_d^* y_i. \quad (5.148)$$

abgeleitet werden. Die konstante Kalman-Matrix \mathbf{K}_d^* ergibt sich aus:

$$\mathbf{K}_d^* := \begin{bmatrix} k_1^* \\ k_2^* \\ k_3^* \end{bmatrix} = \mathbf{P}^* \mathbf{C}^{*T} \left(\mathbf{C}^* \mathbf{P}^* \mathbf{C}^{*T} + R \right)^{-1}, \quad (5.149)$$

wobei die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers \mathbf{P}^* die positiv definite Lösung der (nicht-linearen) zeitdiskreten, algebraischen Riccati Gleichung für das unsichere System:

$$\Phi^* \mathbf{P}^* \Phi^{*T} - \mathbf{P}^* - \underbrace{\Phi^* \mathbf{P}^* \mathbf{C}^{*T} \left(\mathbf{C}^* \mathbf{P}^* \mathbf{C}^{*T} + R \right)^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{P}^* \Phi^{*T}}_{=: \mathbf{L}^*} + \mathbf{Q}^* = 0 \quad (5.150)$$

ist. Die Eigenwerte des zeitdiskreten Kalman-Filters können aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\Delta_Z^* = \det [z\mathbf{E} - \Phi^* (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^*)] \quad (5.151)$$

ermittelt werden. Neben den Eigenwerten sind für die Analyse der Kompensation von Unsicherheiten auch relevante Übertragungsfunktionen von Interesse. Für die Übertragungsfunktion zwischen Wellenmoment M_W und dem aufzuschaltenden Dämpfungsmoment M_D folgt aus (5.147) und (5.148) mithilfe der Skalierungen g und h :

$$\begin{aligned} G_y^*(z) &= \left. \frac{M_D(z)}{y(z)} \right|_{AW=0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -d_Z h & 0 \end{bmatrix} \{ (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^*) [z\mathbf{E} - \Phi^* (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^*)]^{-1} \Phi^* \mathbf{K}_d^* + \mathbf{K}_d^* \} \end{aligned} \quad (5.152)$$

und für die Übertragungsfunktion zwischen Eingangsgröße u und dem aufzuschaltenden Dämpfungsmoment M_D folgt:

$$\begin{aligned} G_u^*(z) &= \left. \frac{M_D(z)}{u(z)} \right|_{AW=0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -d_Z h & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^*) [z\mathbf{E} - \Phi^* (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^*)]^{-1} \mathbf{H}^* g. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Für eine vollständige Kompensation müssen die Eigenwerte bzw. das charakteristische Polynom (5.151) sowie die Übertragungsfunktionen (5.152) und (5.153) des unsicheren Systems mit jenen des exakten Systems übereinstimmen.

5.5.2 Kompensation der Parameterunsicherheit

Für das zeitdiskrete, stationäre Kalman-Filter muss die algebraische Riccati Gleichung (5.150) analysiert werden. Aufgrund der Symmetrie von \mathbf{P}^* ergeben sich 6 Gleichungen zur Bestimmung der Elemente von \mathbf{P}^* . Die resultierenden Gleichungen sind im Allgemeinen sehr komplex. Da jede Gleichung mehrere gesuchte Elemente von \mathbf{P}^* enthält, ist eine analytische Lösung auf einfachem Weg nicht möglich. Wie aber schon für die zeitkontinuierliche Variante in Abschnitt 5.3.2 demonstriert, ist eine vollständige Lösung der Riccati Gleichung für die Analyse der Kompensation von Modellunsicherheiten gar nicht notwendig. Es ist ausreichend zu zeigen, dass sich die Lösung der zeitdiskreten Riccati Gleichung (5.150) und in weiterer Folge die Eigenwerte des Kalman-Filters durch die Skalierung von \mathbf{P}^* und \mathbf{Q}^* nicht ändern.

Ausgehend von der zeitdiskreten, algebraischen Riccati Gleichung (5.150) mit Parameterunsicherheit werden sukzessive Skalierungsfaktoren eingefügt, sodass sämtliche Unsicherheiten kompensiert werden und letztendlich die skalierte, zeitdiskrete algebraische Riccati Gleichung ohne Unsicherheit resultiert. Die notwendigen Skalierungen, um die unsichere Gleichung in die exakte überzuführen, können dann direkt abgelesen werden. Setzt man in (5.150) für Φ^* (5.144) ein, folgt:

$$0 = (\mathbf{E} + k\mathbf{\Psi}\mathbf{T}^*) \mathbf{P}^* (\mathbf{E} + k\mathbf{\Psi}\mathbf{T}^*)^T - \mathbf{P}^* - \underbrace{(\mathbf{E} + k\mathbf{\Psi}\mathbf{T}^*) \mathbf{P}^* \mathbf{C}^{*T} (\mathbf{C}^* \mathbf{P}^* \mathbf{C}^{*T} + R)^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{P}^* (\mathbf{E} + k\mathbf{\Psi}\mathbf{T}^*)^T}_{\mathbf{L}^*} + \mathbf{Q}^*, \quad (5.154)$$

wobei zur Vereinfachung

$$\mathbf{L}^* := \mathbf{C}^{*T} (\mathbf{C}^* \mathbf{P}^* \mathbf{C}^{*T} + R)^{-1} \mathbf{C}^* \quad (5.155)$$

definiert wird. Da \mathbf{T}^* eine Diagonalmatrix ist gilt $\mathbf{T}^{*T} = \mathbf{T}^*$. Multipliziert man die Klammern aus, folgt:

$$0 = k\mathbf{P}^* \mathbf{T}^* \mathbf{\Psi}^T + k^2 \mathbf{\Psi} \mathbf{T}^* \mathbf{P}^* \mathbf{T}^* \mathbf{\Psi}^T + k\mathbf{\Psi} \mathbf{T}^* \mathbf{P}^* - k\mathbf{P}^* \mathbf{L}^* \mathbf{P}^* \mathbf{T}^* \mathbf{\Psi}^T - k^2 \mathbf{\Psi} \mathbf{T}^* \mathbf{P}^* \mathbf{L}^* \mathbf{P}^* \mathbf{T}^* \mathbf{\Psi}^T - \mathbf{P}^* \mathbf{L}^* \mathbf{P}^* - k\mathbf{\Psi} \mathbf{T}^* \mathbf{P}^* \mathbf{L}^* \mathbf{P}^* + \mathbf{Q}^*. \quad (5.156)$$

In einem ersten Schritt wird die Parameterunsicherheit bezüglich c_W^* analysiert. Da c_W^* nur in Matrix \mathbf{L}^* vorkommt, muss für die Kompensation mittels Skalierung von \mathbf{P}^* nur der quadratische Ausdruck $\mathbf{P}^* \mathbf{L}^* \mathbf{P}^*$ betrachtet werden:

$$\mathbf{P}^* \mathbf{L}^* \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^* \frac{c_W^{*2}}{c_W^{*2} p_{11}^* + R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}^*. \quad (5.157)$$

Um die Einflüsse der Unsicherheit von c_W zu kompensieren, muss die gesamte Matrix \mathbf{P}^* mit dem skalaren Faktor $\left(\frac{c_W}{c_W^*}\right)^2$ skaliert werden. Mit der Skalierung folgt:

$$\mathbf{P}^* \mathbf{L}^* \mathbf{P}^* = \left(\frac{c_W}{c_W^*}\right)^2 \frac{c_W^2}{c_W^2 p_{11} + R} \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P} = \left(\frac{c_W}{c_W^*}\right)^2 \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P}. \quad (5.158)$$

Durch den quadratischen Term verbleibt der Faktor $\left(\frac{c_W}{c_W^*}\right)^2$. Dieser spielt aber, wie in weiterer Folge noch ersichtlich wird, keine Rolle, da sämtliche Terme des Gleichungssystems um denselben Faktor erweitert werden.

Um die Einflüsse der Unsicherheit von J_L in den Matrizen \mathbf{T}^* zu kompensieren, wird \mathbf{P}^* durch einen zusätzlichen Faktor skaliert. Matrix \mathbf{T}^* wird in Gleichung (5.156) immer von links oder rechts mit \mathbf{P}^* multipliziert. Aus diesem Grund muss Matrix \mathbf{P}^* von links und rechts mit Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_L^*}{J_L} \end{bmatrix} \quad (5.159)$$

multipliziert werden. Mit diesen beiden Skalierungen folgt:

$$\mathbf{P}^* = \underbrace{\left(\frac{c_W}{c_W^*}\right)^2}_l \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}. \quad (5.160)$$

Wird \mathbf{P}^* entsprechend (5.160) gewählt, werden die Einflüsse der Unsicherheiten vollständig kompensiert. Es muss jedoch noch sichergestellt werden, dass die Skalierung das Gleichungssystem bzw. dessen Lösungen nicht beeinflusst. Setzt man die Skalierung

in (5.156) ein, folgt:

$$\begin{aligned}
 0 = & kl \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S} \mathbf{T}^*}_{\mathbf{T}} \Psi^T + k^2 l \underbrace{\Psi \mathbf{T}^* \mathbf{S} \mathbf{P}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{T}^*}_{\mathbf{T}} \Psi^T + kl \underbrace{\Psi \mathbf{T}^* \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}}_{\mathbf{T}} - kl \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S} \mathbf{L}^* \mathbf{S} \mathbf{P}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{T}^*}_{\mathbf{T}} \Psi^T - \\
 & k^2 l \underbrace{\Psi \mathbf{T}^* \mathbf{S} \mathbf{P}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{L}^* \mathbf{S} \mathbf{P}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{T}^*}_{\mathbf{T}} \Psi^T - l \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S} \mathbf{L}^* \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}}_{\mathbf{L}} - kl \underbrace{\Psi \mathbf{T}^* \mathbf{S} \mathbf{P}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{L}^* \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}}_{\mathbf{L}} + \mathbf{Q}^*.
 \end{aligned} \tag{5.161}$$

Aufgrund der Struktur von Ψ und \mathbf{S} gilt:

$$\Psi = \mathbf{S} \Psi, \tag{5.162}$$

$$\Psi^T = \Psi^T \mathbf{S}. \tag{5.163}$$

Wird (5.161) entsprechend umgeschrieben, folgt:

$$\begin{aligned}
 0 = & kl \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T \mathbf{S} + k^2 l \mathbf{S} \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T \mathbf{S} + kl \mathbf{S} \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{S} - kl \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T \mathbf{S} - \\
 & k^2 l \mathbf{S} \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T \mathbf{S} - l \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{S} - kl \mathbf{S} \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{S} + \mathbf{Q}^* \\
 0 = & l \mathbf{S} \left(k \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T + k^2 \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T + k \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} - k \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T - \right. \\
 & \left. k^2 \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T - \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} - k \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \right) \mathbf{S} + \mathbf{Q}^*.
 \end{aligned} \tag{5.164}$$

Multipliziert man alle Elemente des Gleichungssystems mit dem gleichen Faktor, bleibt die Lösung des Gleichungssystems unverändert. Um dies zu gewährleisten wird \mathbf{Q}^* entsprechend

$$\mathbf{Q}^* = \underbrace{\left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2}_l \mathbf{S} \mathbf{Q} \mathbf{S} \tag{5.165}$$

gewählt. Damit folgt für (5.164):

$$\begin{aligned}
 0 = & l \mathbf{S} \left(k \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T + k^2 \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T + k \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} - k \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T - \right. \\
 & \left. k^2 \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{T} \Psi^T - \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} - k \Psi \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} + \mathbf{Q} \right) \mathbf{S}.
 \end{aligned} \tag{5.166}$$

(5.166) entspricht (5.156) für das exakte System und es folgt:

$$0 = l \mathbf{S} \left[\Phi \mathbf{P} \Phi^T - \mathbf{P} - \Phi \mathbf{P} \mathbf{C}^T \left(\mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T + R \right)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} \Phi^T + \mathbf{Q} \right] \mathbf{S}. \tag{5.167}$$

Es zeigt sich, dass durch entsprechende Wahl der Skalierungen für \mathbf{P}^* und \mathbf{Q}^* die Riccati Gleichung (5.150) für das exakte System rekonstruiert werden kann und alle Unsicherheiten kompensiert werden. Alle Elemente des Gleichungssystems ändern sich durch die Skalierungen um denselben Faktor. Aus (5.160) und (5.165) folgt für die Skalierung der einzelnen Elemente von \mathbf{P}^* und \mathbf{Q}^* :

$$\frac{p_{11}^*}{p_{11}} = \frac{p_{12}^*}{p_{12}} = \frac{p_{22}^*}{p_{22}} \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2, \quad (5.168)$$

$$\frac{p_{13}^*}{p_{13}} = \frac{p_{23}^*}{p_{23}} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \frac{J_L^*}{J_L}, \quad (5.169)$$

$$\frac{p_{33}^*}{p_{33}} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \left(\frac{J_L^*}{J_L} \right)^2 \quad (5.170)$$

und

$$\frac{q_1^*}{q_1} = \frac{q_2^*}{q_2} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2, \quad (5.171)$$

$$\frac{q_3^*}{q_3} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \left(\frac{J_L^*}{J_L} \right)^2. \quad (5.172)$$

Die Skalierungen für die Kompensation der Unsicherheit in der Kovarianzmatrix \mathbf{P}^* des zeitdiskreten Kalman-Filters entsprechen genau jenen für das zeitkontinuierliche Kalman-Filter aus (5.48) bis (5.52) und (5.53), (5.56), (5.59). Setzt man in (5.149) die ermittelte Skalierung für \mathbf{P}^* aus (5.160) ein, folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_d^* &= l \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}^{\mathbf{C}^*T} \left(l \mathbf{C}^* \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}^{\mathbf{C}^*T} + R \right)^{-1} \\ &= \frac{c_W}{c_W^*} \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}^{\mathbf{C}^T} \left(\mathbf{C} \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{S}^{\mathbf{C}^T} + R \right)^{-1} \\ &= \frac{c_W}{c_W^*} \mathbf{S} \mathbf{K}_d, \end{aligned} \quad (5.173)$$

wobei

$$\mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{S}, \quad (5.174)$$

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{S} \mathbf{C}^T, \quad (5.175)$$

$$l \mathbf{C}^{\mathbf{S}^*T} = \frac{c_W}{c_W^*} \mathbf{C}^T \quad (5.176)$$

gilt.

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

Die Eigenwerte des zeitdiskreten Kalman-Filters können durch Einsetzen von (5.144) und (5.173) in das charakteristische Polynom (5.151):

$$\begin{aligned}
\Delta_Z^* &= \det \left[(z-1) \mathbf{E} - k \Psi \mathbf{T}^* + \mathbf{S} \mathbf{K}_d \frac{c_W}{c_W^*} \mathbf{C}^* + k \Psi \mathbf{T}^* \mathbf{S} \mathbf{K}_d \frac{c_W}{c_W^*} \mathbf{C}^* \right] = 0 \\
&= \det \left[(z-1) \mathbf{E} - k \Psi \mathbf{T}^* + \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{C} + k \Psi \mathbf{T} \mathbf{K}_d \mathbf{C} \right] = 0 \\
&=: \det [\mathbf{W}^*] = 0
\end{aligned} \tag{5.177}$$

berechnet werden, wobei \mathbf{W}^* als

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^* &:= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13}^* \\ w_{21} & w_{22} & w_{23}^* \\ w_{31}^* & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} z-1 - c_W k k_2 + \frac{bc_W k k_3}{J_L \omega_0} - c_W k_1 + bk\omega_0 + bk\omega_0 c_W k_1 & -k & \frac{bk}{J_L^* \omega_0} \\ \frac{c_W k k_3}{J_L} + k\omega_0^2 + c_W k k_1 \omega_0^2 + bc_W k k_2 \omega_0 - c_W k_2 & z-1 + bk\omega_0 & \frac{k}{J_L^*} \\ -\frac{c_W J_L^* k_3}{J_L} & 0 & z-1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.178}$$

definiert ist. Die zugehörige Adjunkte ist in Anhang G dargestellt. Durch die besondere Struktur von \mathbf{W}^* sind sämtliche unsichere Größen in der Adjunkten nur in den Elementen der 3. Zeile und 3. Spalte konzentriert (siehe (G.2) bis (G.10) in Anhang G). Entwickelt man die Determinante von \mathbf{W}^* nach der zweiten Spalte, ist nur die zweite Zeile der Adjunkten von \mathbf{W}^* :

$$\text{Adj}[\mathbf{W}^*] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{Adj}_{21} & \text{Adj}_{22} & \text{Adj}_{23}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{5.179}$$

von Interesse. Für die Berechnung der Determinante fallen sämtliche unsicheren Größen weg, und es resultiert das charakteristische Polynom des exakten Systems:

$$\begin{aligned}
\Delta_Z^* &= \Delta_Z = w_{12} \text{Adj}_{21} + w_{22} \text{Adj}_{22} + 0 \text{Adj}_{23}^* \\
&= -k \text{Adj}_{21} + (z-1 + bk\omega_0) \text{Adj}_{22} + 0 \text{Adj}_{23}^*.
\end{aligned} \tag{5.180}$$

Die Modellunsicherheit bezüglich der Massenträgheit der Last kann durch die geeignete Wahl von \mathbf{Q}^* kompensiert werden, und die Eigenwerte des Kalman-Filters bleiben trotz Modellunsicherheit unverändert. Die für das zeitkontinuierliche Kalman-Filter gewonnenen Erkenntnisse gelten somit ebenfalls für das zeitdiskrete Kalman-Filter. Zur Bestimmung der notwendigen Skalierungen g und h für die Übertragungsfunktionen müssen die Übertragungsfunktionen des zeitdiskreten Systems (5.152) und (5.153) analysiert werden. Für die Übertragungsfunktion zwischen Wellenmoment $y = M_W$ und aufzuschaltendem Dämpfungsmoment M_D folgt durch Einsetzen von (5.144), (5.178) und (5.173) in (5.152):

$$\begin{aligned}
 G_y^*(z) &= h \begin{bmatrix} 0 & -d_Z & 0 \end{bmatrix} \left[(\mathbf{E} - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^*) \mathbf{W}^{*-1} \Phi^* \mathbf{K}_d^* + \mathbf{K}_d^* \right] \\
 &= h \begin{bmatrix} 0 & -d_Z & 0 \end{bmatrix} \left[\left(\mathbf{E} - \mathbf{S} \mathbf{K}_d \frac{c_W}{c_W^*} \mathbf{C}^* \right) \frac{1}{\Delta_Z} \text{Adj} [\mathbf{W}^*] \Phi^* \mathbf{S} \mathbf{K}_d \frac{c_W}{c_W^*} + \frac{c_W}{c_W^*} \mathbf{S} \mathbf{K}_d \right] \\
 &= h \frac{c_W}{c_W^*} \begin{bmatrix} 0 & -d_Z & 0 \end{bmatrix} \left[(\mathbf{E} - \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \frac{1}{\Delta_Z} \text{Adj} [\mathbf{W}^*] (\mathbf{S} + k \Psi \mathbf{T}) \mathbf{K}_d + \mathbf{S} \mathbf{K}_d \right].
 \end{aligned} \tag{5.181}$$

Nach Einsetzen von \mathbf{K}_d^* verbleibt nur mehr eine Parameterunsicherheit in \mathbf{W}^* und \mathbf{S} . Durch Ausnutzen der Beziehung

$$\begin{bmatrix} 0 & -d_Z & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -d_Z & 0 \end{bmatrix} \tag{5.182}$$

kann (5.181) in

$$G_y^*(z) = h \frac{c_W}{c_W^*} \begin{bmatrix} 0 & -d_Z & 0 \end{bmatrix} \left[(\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \frac{1}{\Delta_Z} \text{Adj} [\mathbf{W}^*] (\mathbf{S} + k \Psi \mathbf{T}) \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_d \right] \tag{5.183}$$

umgeschrieben werden. Es müssen nur die erste und zweite Zeile der Adjunkten betrachtet werden. Bei näherer Betrachtung der Adjunkten von \mathbf{W}^* (siehe Anhang G) zeigt sich, dass nur die ersten beiden Elemente der dritten Zeile und Spalte mit Unsicherheit behaftet sind. Durch Multiplikation der relevanten Elemente der Adjunkten von rechts mit der Matrix \mathbf{S} kann die Unsicherheit kompensiert werden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Adj} [\mathbf{W}^*] \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Adj} [\mathbf{W}]. \tag{5.184}$$

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

Nach der Multiplikation $\text{Adj}[\mathbf{W}^*] \mathbf{S}$ folgt für die Elemente der 3. Zeile und Spalte:

$$\text{Adj}_{13} = -\frac{k^2}{J_L} - \frac{bk}{J_L \omega_0} (z + bk\omega_0 - 1), \quad (5.185)$$

$$\text{Adj}_{23} = \frac{k}{J_L \omega_0} \left(-bc_W k_2 + \omega_0 + c_W k k_2 \omega_0 + b^2 c_W k k_2 \omega_0 + c_W k_1 \omega_0 - \omega_0 z \right), \quad (5.186)$$

$$\text{Adj}_{31}^* = \frac{c_W J_L^* k_3}{J_L^2} (z + bk\omega_0 - 1), \quad (5.187)$$

$$\text{Adj}_{32}^* = \frac{c_W J_L^* k k_3}{J_L^2}, \quad (5.188)$$

$$\begin{aligned} \text{Adj}_{33}^* &= \frac{b^2 k^2 c_W k_3 J_L^*}{J_L^2} + \frac{b^2 k^2 J_L^* \omega_0^2}{J_L} (1 + c_W k_1) + \frac{bk c_W k_1 J_L^* \omega_0}{J_L} (z - 2) + \\ &\frac{bk c_W k_3 J_L^* (z - 1)}{J_L^2 \omega_0} + \frac{2bk J_L^* \omega_0}{J_L} (z - 1) + \frac{c_W k^2 k_3 J_L^*}{J_L^2} + \\ &\frac{J_L^*}{J_L} (1 + c_W k_1) (1 + k^2 \omega_0^2) - \frac{J_L^*}{J_L} (2 + c_W k_1 + c_W k k_2) z + \frac{J_L^*}{J_L} z^2. \end{aligned} \quad (5.189)$$

Die Unsicherheit in den ersten beiden Zeilen kann durch die Multiplikation mit \mathbf{S} wie in (5.184) gezeigt kompensiert werden. Die Unsicherheit in der dritten Zeile verbleibt. Bei Betrachtung des Ausdrucks $k\Psi\mathbf{T}$ zeigt sich anhand von (5.144), dass die dritte Zeile mit Nullen besetzt ist. Bei einer Multiplikation mit der Adjunkten von \mathbf{W}^* fällt die Unsicherheit in der dritten Zeile der Adjunkten weg. Mit diesen Erkenntnissen folgt:

$$G_y^*(z) = h \frac{c_W}{c_W^*} \begin{bmatrix} 0 & -d_Z & 0 \end{bmatrix} \left[(\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \frac{1}{\Delta_Z} \text{Adj}[\mathbf{W}] (\mathbf{E} + k\Psi\mathbf{T}) \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_d \right] \quad (5.190)$$

$$= h \frac{c_W}{c_W^*} G_y(z). \quad (5.191)$$

Für die Übertragungsfunktion zwischen Eingangsgröße u und dem aufzuschaltenden Dämpfungsmoment M_D folgt aus (5.153) analog zur Herleitung von $G_y^*(z)$:

$$G_u^*(z) = h \begin{bmatrix} 0 & -d_Z & 0 \end{bmatrix} \left[(\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \frac{1}{\Delta_Z} \text{Adj}[\mathbf{W}^*] \mathbf{H}^* g \right]. \quad (5.192)$$

Da der Eingangsvektor bekannt ist, gilt $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}$. Die 3. Zeile von \mathbf{H}^* ist Null. Dadurch

fällt die Unsicherheit in der Adjunkten von \mathbf{W}^* weg und es folgt:

$$G_u^*(z) = h g \begin{bmatrix} 0 & -d_z & 0 \end{bmatrix} \left[(\mathbf{E} - \mathbf{K}_a \mathbf{C}) \frac{1}{\Delta_z} \text{Adj} [\mathbf{W}] \mathbf{H} \right] \quad (5.193)$$

$$= h g G_u(z). \quad (5.194)$$

Es kann gezeigt werden, dass für die Skalierungen

$$h = \frac{c_w^*}{c_w}, \quad (5.195)$$

$$g = \frac{1}{h} \quad (5.196)$$

gelten muss. Die Skalierungen entsprechen somit den Skalierungen des zeitkontinuierlichen Systems. Durch die vorgestellte Kompensation wird die Unsicherheit von J_L^* auch beim zeitdiskreten Kalman-Filter vollständig kompensiert. Die Einschränkung, dass die exakten Parameter für eine vollständige Kompensation bekannt sein müssen, bleibt auch für das zeitdiskrete System unverändert erhalten. Es zeigt sich, dass es in diesem Fall durchaus sinnvoll ist, zu Beginn aus Gründen der Einfachheit das zeitkontinuierliche System zu betrachten und die gewonnenen Erkenntnisse erst danach auf das zeitdiskrete System anzuwenden.

5.5.3 Simulationsstudie Rollenprüfstand

Die Simulationen aus Abschnitt 5.2.1 werden für das zeitdiskrete System noch einmal mit der vorgestellten Kompensation der Modellunsicherheit durchgeführt. Die verwendete Referenzparametrierung kann Tabelle B.9 im Anhang entnommen werden. Abb. 5.17 zeigt den Vergleich zwischen dem Schätzfehler bei Referenzparametrierung ohne Kompensation (grau) und mit vollständiger Kompensation von \mathbf{Q} , h und g (schwarz), sowie die zugehörigen Eigenwerte bei vollständiger Kompensation. Der Schätzfehler bleibt für alle Werte von J_L^* konstant und entspricht dem Schätzfehler ohne Modellunsicherheit bei $J_L^* = J_L$. Die Eigenwerte bleiben im Gegensatz zur Variante ohne Kompensation wie gefordert auch bei Modellunsicherheit für beliebige Werte von J_L^* konstant (vgl. Abb. 5.1). Bei Kenntnis der exakten Parameter kann die Unsicherheit durch die Skalierung von \mathbf{Q} , sowie die Skalierungen h und g am Ein- bzw. Ausgang vollständig kompensiert werden.

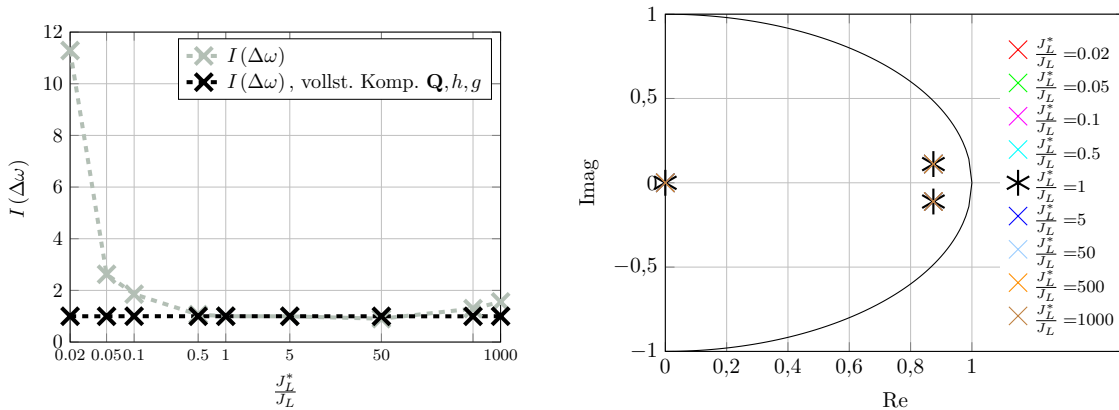


Abbildung 5.17: Simulation Rolle: Fehlerkriterium I und Eigenwerte in Abhängigkeit von $\frac{J_L^*}{J_L}$ bei vollständiger Kompensation der Unsicherheit (Anmerkung: Durch die Kompensation bleiben alle Eigenwerte konstant und liegen übereinander)

5.5.4 Messergebnisse Rollenprüfstand

Im Rahmen der Messungen am Prüfstand wird für verschiedene Werte von J_L^* die Kompensation sukzessive erweitert. Die übrigen Parameter des Kalman-Filters werden wie in der Simulation gewählt (siehe Tabelle B.9). Ausgehend vom unkompenzierten, unsicheren System werden zu Beginn die Eigenwerte durch die Skalierung von \mathbf{Q} kompensiert. In weiteren Versuchen werden die Skalierungen h und g hinzugenommen. Die Wellenmomente M_W und zugehörigen Verläufe von $\Delta\hat{\omega}$ bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 0.1$ sind in Abb. 5.18 und 5.19 dargestellt. Es ist gut zu erkennen, wie der Schätzfehler von $\Delta\omega$ mit jeder zusätzlichen Kompensationsmaßnahme immer geringer wird und letztendlich bei vollständiger Kompensation (Abb. 5.19 links unten) gut mit dem Schätzwert bei exakter Filterparametrierung (Abb. 5.19 links oben) übereinstimmt. Die Schwingung kann durch die Kompensation auch bei Parameterunsicherheit gleich wie beim exakten System gedämpft werden. Dies wird vor allem bei kleinen Werten für J_L^* , die ohne Kompensation sogar zu einem instabilen System führen, augenscheinlich. Ohne Kompensation kann die Schwingung bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 0.1$ nicht sinnvoll gedämpft werden. Es kommt zu einer Dauerschwingung. Die Kompensation der Eigenwerte durch die Skalierung von \mathbf{Q} und die Skalierung h des Ausgangsvektors tragen maßgeblich zur Verbesserung der Ergebnisse bei Parameterunsicherheit bei. Die Skalierung g des Eingangsvektors führt nur zu einer minimalen Verbesserung und spielt somit eine untergeordnete Rolle.

Abb. 5.20 und 5.21 zeigen die Verläufe von M_W und $\Delta\hat{\omega}$ für $\frac{J_L^*}{J_L} = 500$ ohne Kompensation und bei vollständiger Kompensation. Die Schwingung kann durch die größere Massenträgheit J_L^* im Filter ohne Kompensation zwar gut gedämpft werden, das stationäre Wellenmoment stellt sich aber sehr langsam ein. Mithilfe der vollständigen

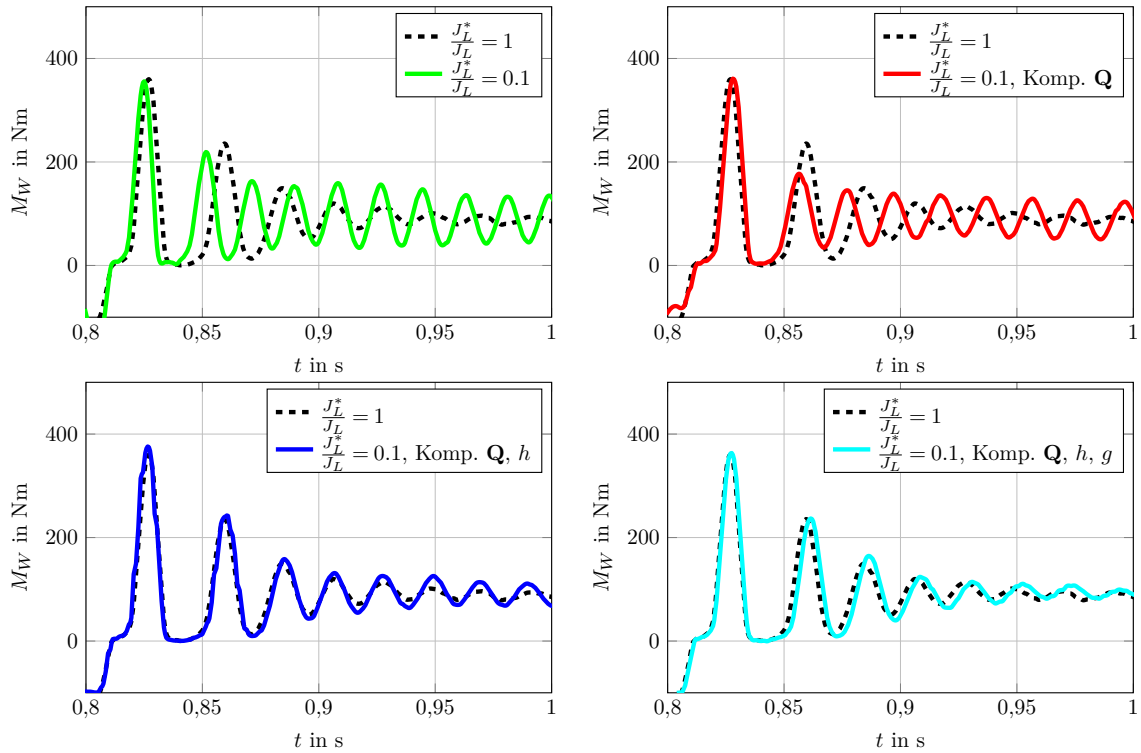


Abbildung 5.18: Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 0.1$ mit verschiedenen Kompensationsstufen (Komp. \mathbf{Q} = Kompensation der Eigenwerte, h = Skalierung des Ausgangsvektors, g = Skalierung des Eingangsvektors)

Kompensation stimmen die Verläufe für M_W und $\Delta\hat{\omega}$ sehr gut mit jenen des exakten Systems überein (siehe Abb. 5.20 rechts sowie Abb. 5.21 links oben und links unten).

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

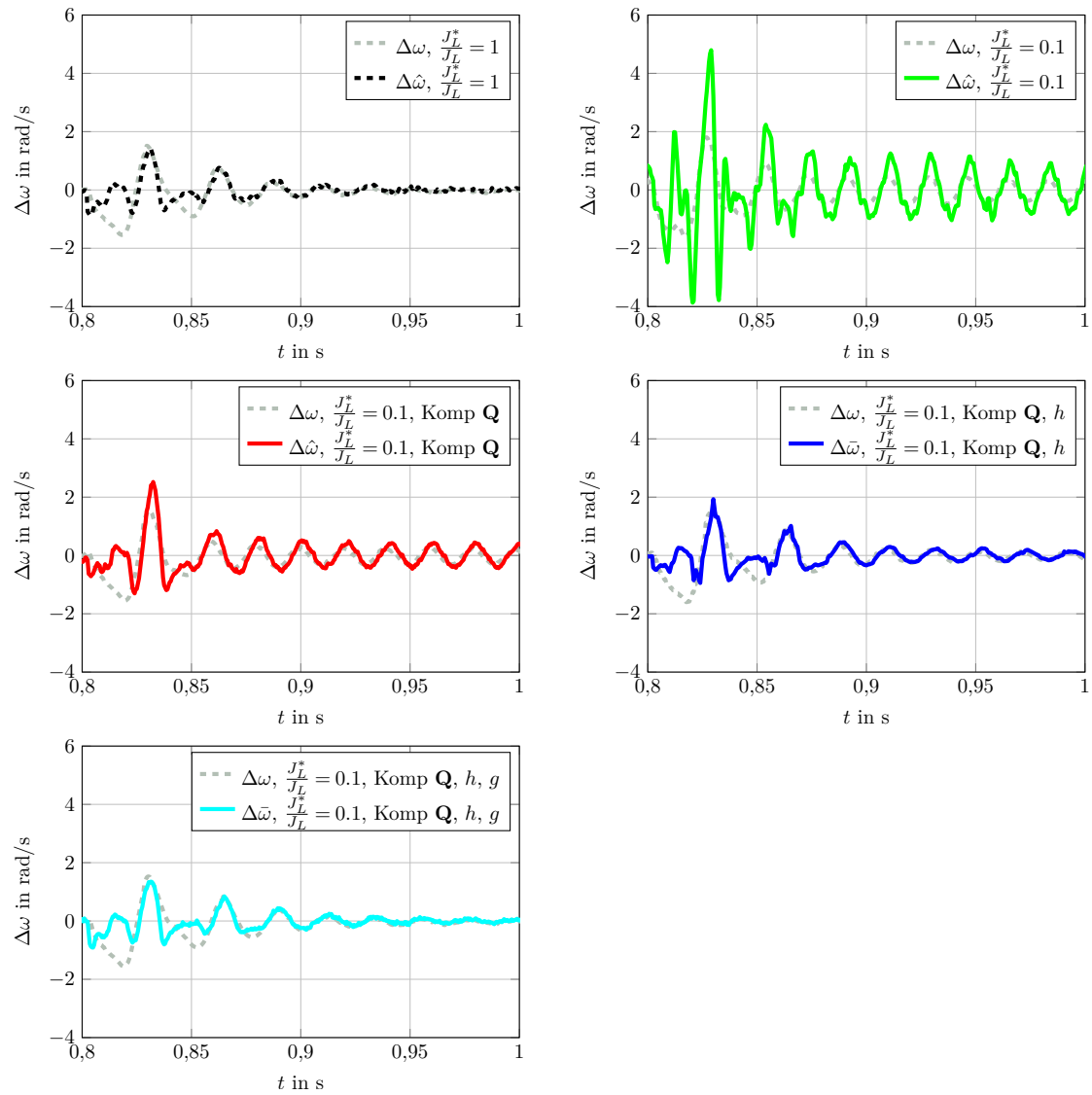


Abbildung 5.19: Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 0.1$ mit verschiedenen Kompensationsstufen (Komp. **Q** = Kompensation der Eigenwerte, h = Skalierung des Ausgangsvektors, g = Skalierung des Eingangsvektors)

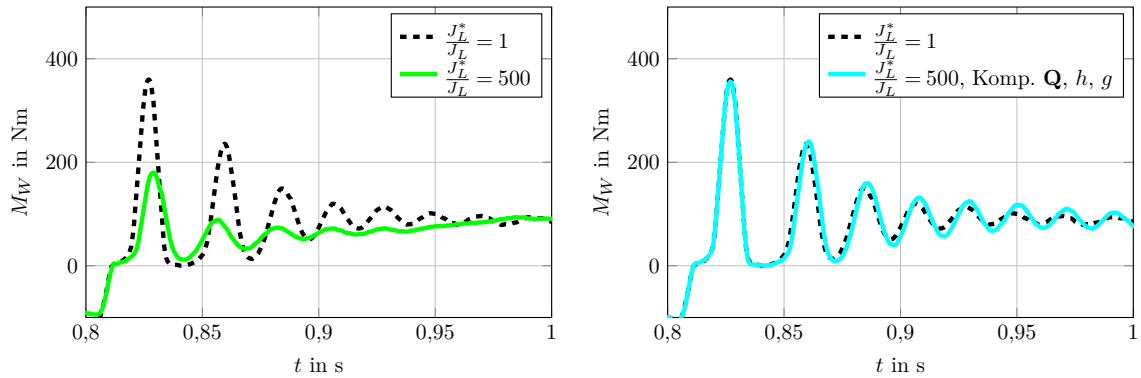


Abbildung 5.20: Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 500$ mit verschiedenen Kompensationsstufen (Komp. \mathbf{Q} = Kompensation der Eigenwerte, h = Skalierung des Ausgangsvektors, g = Skalierung des Eingangsvektors)

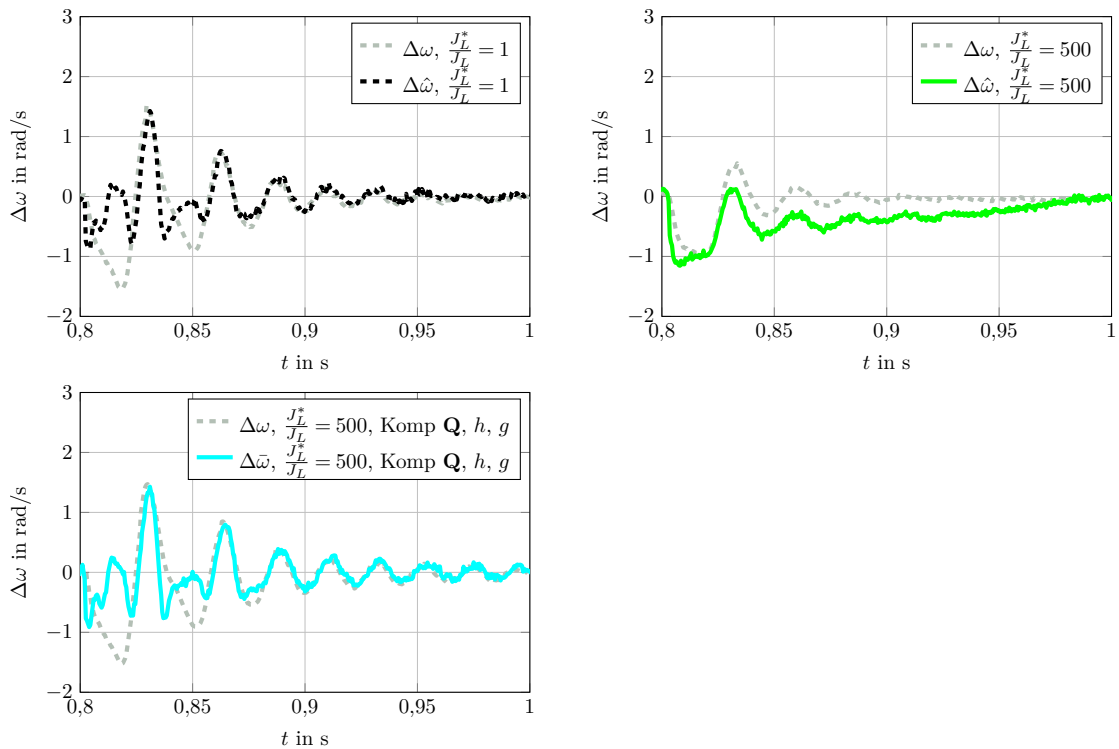


Abbildung 5.21: Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei $\frac{J_L^*}{J_L} = 500$ mit verschiedenen Kompensationsstufen (Komp. \mathbf{Q} = Kompensation der Eigenwerte, h = Skalierung des Ausgangsvektors, g = Skalierung des Eingangsvektors)

5.5.5 Algorithmus zur Parameterwahl für das exakte System

Der in Abschnitt 5.4.2 entworfene Algorithmus zur Parametrierung des zeitkontinuierlichen Kalman-Filters für das exakte System soll auch auf das zeitdiskrete System angewendet werden. Dazu muss basierend auf der zeitdiskreten Systembeschreibung und dem zeitdiskreten Kalman-Filter (5.147) und (5.148) das Fehlermodell aufgestellt werden. Diskretisiert man das System aus (5.70) und (5.71) folgt für das zeitdiskrete Gesamtsystem aus Strecke und Beobachter:

Strecke:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \tilde{\Phi} \mathbf{x}_i + \tilde{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} u_i \\ M_{Li} \end{bmatrix}, \quad (5.197)$$

$$y_i = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}_i \quad (5.198)$$

mit $d_W = 0$ und

$$\tilde{\Phi} = e^{\tilde{\mathbf{A}}T_d}, \quad (5.199)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} := [\tilde{\mathbf{h}}_1 \tilde{\mathbf{h}}_2] = \int_0^{T_d} e^{\tilde{\mathbf{A}}\tau} [\tilde{\mathbf{b}}_1 \tilde{\mathbf{b}}_2] d\tau, \quad (5.200)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_1 := \begin{bmatrix} h_{1,1} \\ h_{1,2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{h}}_2 := \begin{bmatrix} h_{2,1} \\ h_{2,2} \end{bmatrix}, \quad (5.201)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = [-c_W \quad 0 \quad 0]. \quad (5.202)$$

Kontrollbeobachter:

Für das exakte, zeitdiskrete Kalman-Filter gilt laut (5.147) und (5.148):

$$\mathbf{x}_{i+1}^* = \Phi (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \mathbf{x}_i^* + \Phi \mathbf{K}_d y_i + \mathbf{h}_1 u_i, \quad (5.203)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}) \mathbf{x}_i^* + \mathbf{K}_d y_i \quad (5.204)$$

mit

$$\mathbf{h}_1 = \tilde{\mathbf{h}}_1, \quad (5.205)$$

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}. \quad (5.206)$$

Unter Berücksichtigung der Rückkopplung folgt für u_i :

$$u_i = M_{AMi} - \mathbf{d}_z \hat{\mathbf{x}}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_z = \begin{bmatrix} 0 & d_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.207)$$

Führt man den Schätzfehler $\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i$ ein, kann das Fehlersystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i+1} \\ \mathbf{e}_{i+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_1 & \tilde{\mathbf{h}}_2 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{h}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AMi} \\ M_{Li} \end{bmatrix} \quad (5.208)$$

mit der Systemmatrix

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} - \tilde{\mathbf{h}}_1 \mathbf{d}_z & \tilde{\mathbf{h}}_1 \mathbf{d}_z \\ (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{C}}) \Delta \Phi & (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{C}}) \Phi \end{bmatrix}, \quad (5.209)$$

wobei $\Delta \Phi = \tilde{\Phi} - \Phi$ gilt, aufgestellt werden.

Um eine Aussage über den Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen M_{AM} und M_L des Systems und dem Schätzfehler⁴ $\epsilon_i = \Delta \hat{\omega}_i - \Delta \omega_i$ treffen zu können, werden die zugehörigen Übertragungsfunktionen:

$$\begin{aligned} G_{M_L}(z) &= \left. \frac{\epsilon(z)}{M_L(z)} \right|_{AW=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} [z\mathbf{E} - \mathbf{F}_d]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_2 \\ (\mathbf{E} - \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{h}}_2 \end{bmatrix} \\ &=: \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} \end{aligned} \quad (5.210)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= -(h_{2,2} + h_{2,1} c_W k_2) z^2 + \frac{1}{J_L \omega_0^2 (b^2 + 1)} \left\{ -2b^2 h_{2,2} c_W k_3 + 2b h_{2,1} c_W k_3 \omega_0 + \right. \\ &\quad \left. J_L \omega_0^2 [h_{2,2} (2 + c_W k_1 - c_W b^2 k_1) + (b^2 + 1) h_{2,1} c_W k_2] + \right. \\ &\quad \left. 2b h_{2,1} J_L \omega_0^3 (1 + c_W k_1) \right\} z + \frac{1 + c_W k_1}{b^2 + 1} [(b^2 - 1) h_{2,2} - 2b h_{2,1} \omega_0], \end{aligned} \quad (5.211)$$

⁴Für die Betrachtungen der Zusatzdämpfung spielt es keine Rolle, ob der Schätzfehler positiv oder negativ ist. Der Einfachheit halber wird der Schätzfehler $\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i$ negiert, um für die weitere Vorgehensweise positive Übertragungsfunktionen und somit einen Phasenverlauf ausgehend von 0° zu erhalten.

und

$$\begin{aligned} \beta(z) = z^3 + \frac{1}{J_L \omega_0^2 (b^2 + 1)} \left\{ 2b^2 c_W k_3 - 2bc_W J_L k_2 \omega_0 + J_L \omega_0^2 \left[-3 + b^2 + \right. \right. \\ \left. \left. (b^2 - 1) c_W k_1 \right] \right\} z^2 + \frac{1}{J_L \omega_0^2 (b^2 + 1)} \left[2b^2 c_W k_3 + 2bc_W J_L k_2 \omega_0 + \right. \\ \left. J_L \omega_0^2 (3 - b^2 + 2c_W k_1) \right] z - 1 - c_W k_1 \end{aligned} \quad (5.212)$$

und

$$G_{M_{AM}}(z) = \frac{\epsilon(z)}{M_{AM}(z)} \Big|_{AW=0} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] [z\mathbf{E} - \mathbf{F}_d]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.213)$$

aufgestellt. Anhand von $G_{M_{AM}}$ wird ersichtlich, dass die Eingangsgröße M_{AM} bei Verwendung der exakten Streckenparameter im Modell des Kalman-Filters auch beim zeitdiskreten Kalman-Filter keinen Einfluss auf den Schätzfehler von $\Delta\omega$ hat.

Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen Systemen ist der Frequenzgang eines Abtastsystems keine rationale Funktion von $j\omega$. Die Variable z muss durch die transzendente Funktion $e^{j\omega T_d}$ substituiert werden. Deshalb ist das Zeichnen von logarithmischen Kennlinien nicht einfach möglich. Damit der für das zeitkontinuierliche System entworfene Algorithmus auch für das zeitdiskrete System angewendet werden kann, müssen die Übertragungsfunktionen mithilfe einer bilinearen Transformation, der sog. q-Transformation [23, 31]:

$$G(q) = G(z), \quad \text{mit} \quad z = \frac{1 + q \frac{T_d}{2}}{1 - q \frac{T_d}{2}}, \quad (5.214)$$

mit der Abtastzeit T_d transformiert werden. Durch diese Transformation können die für den Algorithmus notwendigen Frequenzkennlinien des abgetasteten Systems analog zum zeitkontinuierlichen Fall dargestellt werden. Ersetzt man die komplexe Variable q in der Übertragungsfunktion durch $j\Omega$, erhält man den Frequenzgang des Abtastsystems als rationale Funktion der transformierten Frequenz

$$\Omega = \Omega_0 \tan \frac{\omega}{\Omega_0} \quad (5.215)$$

mit $\Omega_0 = \frac{2}{T_d}$. Das Frequenzintervall

$$0 \leq \omega < \Omega_0 \frac{\pi}{2}$$

der realen Frequenz ω wird in den transformierten Frequenzbereich

$$0 \leq \Omega < \infty$$

umkehrbar eindeutig abgebildet. Für "kleine Frequenzen" sind die reale und die transformierte Frequenz näherungsweise gleich [23]. Anhand des Zusammenhangs zwischen der kontinuierlichen Übertragungsfunktion $G(s)$ und der q-Übertragungsfunktion $G(q)$ können folgende Eigenschaften der q-Übertragungsfunktion festgehalten werden [31]:

- Ein reeller Pol von $G(s)$ geht in einen reellen Pol von $G(q)$ über.
- Ein komplexer Pol von $G(s)$ geht in einen komplexen Pol von $G(q)$ über.
- Ein stabiler Pol von $G(s)$ führt zu einem stabilen Pol von $G(q)$.
- Pole von $G(s)$ auf der $j\omega$ -Achse gehen auf Pole von $G(q)$ auf der $j\Omega$ -Achse über.
- Für nicht sprungfähige Systeme hat $G(q)$ mindestens eine Nullstelle bei $q = \Omega_0$.
- Im Allgemeinen ist bei der q-Übertragungsfunktion der Zählergrad gleich dem Nennergrad.
- Ein kausales Abtastsystem ist genau dann BIBO-stabil, wenn der Zählergrad von $G(q)$ nicht größer als der Nennergrad von $G(q)$ ist und alle Pole von $G(q)$ in der linken offenen q-Halbebene liegen. Dies entspricht exakt dem Stabilitätskriterium für zeitkontinuierliche Systeme, sodass alle bekannten Verfahren zur Stabilitätsprüfung zeitkontinuierlicher Übertragungssysteme auf Abtastsysteme angewendet werden können.

Für die transformierten Übertragungsfunktionen $G_{M_L}(q)$ und $G_{M_{AM}}(q)$ folgt aus (5.210) und (5.213):

$$G_{M_L}(q) := \frac{\alpha(q)}{\beta(q)} \tag{5.216}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha(q) = & \frac{T_d}{2V} \left\{ -b^2 h_{2,2} c_W k_3 + b h_{2,1} c_W k_3 \omega_0 + J_L \left[2h_{2,2} + h_{2,2} c_W k_1 (1 - b^2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. h_{2,1} c_W k_2 (1 + b^2) \right] \omega_0^2 + 2b h_{2,1} J_L \omega_0^3 (1 + c_W k_1) \right\} q^3 + \\
 & \frac{1}{V} \left[b^2 h_{2,2} c_W k_3 - b h_{2,1} c_W k_3 \omega_0 + 2h_{2,2} J_L \omega_0^2 (-1 + b^2 - c_W k_1 + c_W k_1 b^2) - \right. \\
 & \left. 4b h_{2,1} J_L (1 + c_W k_1) \omega_0^3 \right] q^2 - \frac{2}{VT_d} \left\{ -b^2 h_{2,2} c_W k_3 + b h_{2,1} c_W k_3 \omega_0 + \right. \\
 & \left. J_L \left[-h_{2,2} c_W k_1 + b^2 h_{2,2} (2 + c_W k_1) + (1 + b^2) h_{2,1} c_W k_2 \right] \omega_0^2 - \right. \\
 & \left. 2b h_{2,1} J_L (1 + c_W k_1) \omega_0^3 \right\} q + \frac{4b c_W k_3 (-b h_{2,2} + h_{2,1} \omega_0)}{VT_d^2}, \tag{5.217}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta(q) = & q^3 - \frac{2c_W}{V} \left[b^2 k_3 + (b^2 + 1) J_L k_1 \omega_0^2 \right] q^2 + \\
 & \frac{4b J_L \omega_0}{VT_d} \left[-c_W k_2 + b \omega_0 (2 + c_W k_1) \right] q + \frac{8b^2 c_W k_3}{VT_d^2}, \tag{5.218}
 \end{aligned}$$

wobei V als

$$V := J_L \omega_0 [b c_W k_2 + \omega_0 (2 + c_W k_1)] T_d \tag{5.219}$$

definiert ist, und

$$G_{M_{AM}}(q) = 0. \tag{5.220}$$

Wird die Wunschübertragungsfunktion für G_{M_L} analog zu (5.82) definiert, folgt:

$$G_{M_L, Wunsch}(q) = \frac{a \left(\frac{q}{\omega_2} + 1 \right) \left(q - \frac{2}{T_d} \right) \left(\frac{q}{\tilde{\omega}_k} + 1 \right)}{\left(\frac{q}{\tilde{\omega}_1} + 1 \right) \left[\left(\frac{q}{\tilde{\omega}_k} \right)^2 + \frac{2d_q}{\tilde{\omega}_k} q + 1 \right]}, \tag{5.221}$$

wobei anstatt der Nullstelle bei $s = 0$ eine Nullstelle bei $q = -\omega_2$ eingeführt wird, damit das System in die Wunschstruktur gebracht werden kann. Durch die q -Transformation ergibt sich eine zusätzliche rechte Nullstelle bei $q = \frac{2}{T_d}$. Für kleine Frequenzen stimmt die Darstellung der Frequenzen im q -Bereich gut überein, es gilt $\Omega \approx \omega$. Da für den Algorithmus für die Wahl von ω_k große Frequenzen vorkommen, muss eine Transformation

durchgeführt werden. Es gilt:

$$\tilde{\omega}_k = \frac{2}{T_d} \tanh\left(\omega_k \frac{T_d}{2}\right), \quad (5.222)$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{2}{T_d} \tanh\left(\omega_1 \frac{T_d}{2}\right). \quad (5.223)$$

Unter der Annahme von kleinen Werten $\omega_1 \ll$ und großen Werten $\omega_k \gg \frac{2}{T_d}$ folgt:

$$\tilde{\omega}_k \approx \frac{2}{T_d}, \quad (5.224)$$

$$\tilde{\omega}_1 \approx \omega_1. \quad (5.225)$$

Mit dieser Annahme folgt aus (5.221):

$$G_{M_L, W_{\text{unsch}}}(q) = \frac{a \left(\frac{q}{\omega_2} + 1\right) \left(q - \frac{2}{T_d}\right) \left(\frac{T_d}{2}q + 1\right)}{\left(\frac{q}{\omega_1} + 1\right) \left[\left(\frac{T_d}{2}q\right)^2 + T_d d_q q + 1\right]}. \quad (5.226)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich der Nenner von (5.216) und (5.226) bei q^0 folgt:

$$k_2 = -\frac{\omega_0(2 + c_W k_1)}{bc_W} + \frac{2bk_3}{J_L \omega_0 T_d \omega_1}. \quad (5.227)$$

Setzt man (5.227) in (5.216) ein, kann k_1 mittels Vergleich der Koeffizienten von q^1 ermittelt werden:

$$k_1 = \frac{4b^2 c_W k_3 + 2T_d \omega_1 [b^2 c_W d_q k_3 - J_L \omega_0^2 (1 + b^2)]}{c_W J_L \omega_0^2 T_d \omega_1 (1 + b^2)} \quad (5.228)$$

und aus dem Vergleich bei q^2 folgt:

$$d_q = \frac{J_L \omega_0^2 T_d \omega_1 + b^2 [J_L \omega_0^2 T_d \omega_1 - c_W k_3 (2 + T_d \omega_1)]}{b^2 c_W k_3 (2 + T_d \omega_1)}. \quad (5.229)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich der Zähler bei q^3 folgt:

$$a = \frac{-\omega_2}{4b(1+b^2) J_L \omega_0 (bc_W k_2 + 2\omega_0 + c_W \omega_0 k_1) \omega_1^2 (2 + T_d \omega_1)} \left\{ 4b^2 c_W k_3 \right. \\ \left. [2b(-1+b^2) h_{2,2} - (-1+4b^2+b^4) h_{2,1} \omega_0] - 2b^2 (1+b^2) \right\}$$

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

$$\begin{aligned} & \left[-bh_{2,2}c_Wk_3 + (2 + b^2)h_{2,1}c_Wk_3\omega_0 + 2bh_{2,2}J_L\omega_0^2 - 2h_{2,1}J_L\omega_0^3 \right] T_d\omega_1 - \\ & (bh_{2,2} - h_{2,1}\omega_0) \left[b^2(-3 + b^2)c_Wk_3 + 2(1 + b^2)J_L\omega_0^2 \right] T_d^2\omega_1^2 \}. \end{aligned} \quad (5.230)$$

a wird wieder eingesetzt und aus dem Koeffizientenvergleich von q^2 resultiert:

$$\begin{aligned} k_3 = 2(1 + b^2)J_L\omega_0^2T_d\omega_1 & \left\{ 2b^2h_{2,1}\omega_0 [4 + T_d(\omega_2 - 2\omega_1)] - 2b^3h_{2,2} [2 + T_d(\omega_2 - \omega_1)] + \right. \\ & h_{2,1}\omega_0T_d^2\omega_2\omega_1 + bh_{2,2} [4 - T_d(2 + T_d\omega_2)\omega_1] \left. \right\} \left\{ b^2c_W(2 + T_d\omega_1) [16b(h_{2,2} - \right. \\ & b^2h_{2,2} + 2bh_{2,1}\omega_0) + 2(-2b(-1 + b^2)h_{2,2} + (-1 + 4b^2 + b^4)h_{2,1}\omega_0) T_d\omega_2 + \\ & T_d(2h_{2,1}\omega_0 + 2b((-5 + 3b^2)h_{2,2} - 7bh_{2,1}\omega_0) + (-3 + b^2)(bh_{2,2} - \\ & h_{2,1}\omega_0) T_d\omega_2)\omega_1] \left. \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.231)$$

Aus dem Vergleich der Koeffizienten bei q^0 folgt:

$$\omega_2 = \frac{2(bh_{2,2} - h_{2,1}\omega_0)\omega_1}{2b^2h_{2,1}\omega_0 - h_{2,1}\omega_0(2 + T_d\omega_1) + bh_{2,2}(4 + T_d\omega_1)}. \quad (5.232)$$

Setzt man die erhaltenen Ergebnisse für ω_2 , k_1 , k_2 und k_3 in (5.227) bis (5.230) ein, folgt letztendlich:

$$k_1 = -\frac{1}{c_W}, \quad (5.233)$$

$$k_2 = -\frac{(1 - b^2)\omega_0 + \omega_0T_d\omega_1}{2bc_W + bc_WT_d\omega_1} \approx -\frac{(1 - b^2)\omega_0}{2bc_W}, \quad (5.234)$$

$$k_3 = \frac{(1 + b^2)J_L\omega_0^2T_d\omega_1}{2b^2c_W(2 + T_d\omega_1)} \approx \frac{(1 + b^2)J_L\omega_0^2T_d\omega_1}{4b^2c_W}, \quad (5.235)$$

$$a = \frac{(bh_{2,2} - h_{2,1}\omega_0)T_d}{4b}, \quad (5.236)$$

$$d_q = 1, \quad (5.237)$$

$$\omega_2 = \frac{2(bh_{2,2} - h_{2,1}\omega_0)\omega_1}{2b^2h_{2,1}\omega_0 - h_{2,1}\omega_0(2 + T_d\omega_1) + bh_{2,2}(4 + T_d\omega_1)}. \quad (5.238)$$

Wird ω_1 sehr klein gewählt, geht auch ω_2 gegen Null. Für kleine Werte $\omega_1 \ll$ gilt:

$$\omega_2 \approx \frac{2(bh_{2,2} - h_{2,1}\omega_0)\omega_1}{2b^2h_{2,1}\omega_0 - 2h_{2,1}\omega_0 + 4bh_{2,2}} = \frac{(bh_{2,2} - h_{2,1}\omega_0)\omega_1}{2bh_{2,2} - h_{2,1}\omega_0(1 - b^2)} \approx 0 \quad (5.239)$$

Mit der Wahl $\omega_k \gg \frac{2}{T_d}$ und $\omega_1 = \frac{1}{\omega_k}$ folgt für die resultierende Übertragungsfunktion näherungsweise:

$$G_{M_L, Wunsch}(q) \approx \frac{a q \left(q - \frac{2}{T_d} \right) \left(\frac{T_d}{2} q + 1 \right)}{\left(\frac{q}{\omega_1} + 1 \right) \left[\left(\frac{T_d}{2} q \right)^2 + T_d q + 1 \right]} = \frac{a q \left(q - \frac{2}{T_d} \right)}{\left(\frac{q}{\omega_1} + 1 \right) \left(\frac{T_d}{2} q + 1 \right)}. \quad (5.240)$$

Wird der Algorithmus auf das zeitdiskrete System angewendet (blau), kann der Bereich, in dem der Phasenfehler des Schätzwertes von $\Delta\omega$ klein ist, gegenüber der Ausgangsparametrierung (schwarz) stark vergrößert werden (siehe Abb. 5.22). Die anfängliche Referenzparametrierung des Filters für das exakte System (siehe Tabelle B.9 im Anhang) entspricht jener bei den Versuchen für die Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung in Abschnitt 4.5.2 und 4.5.3. Die aus dem Algorithmus resultierende Filterparametrierung kann Tabelle B.10 im Anhang entnommen werden.

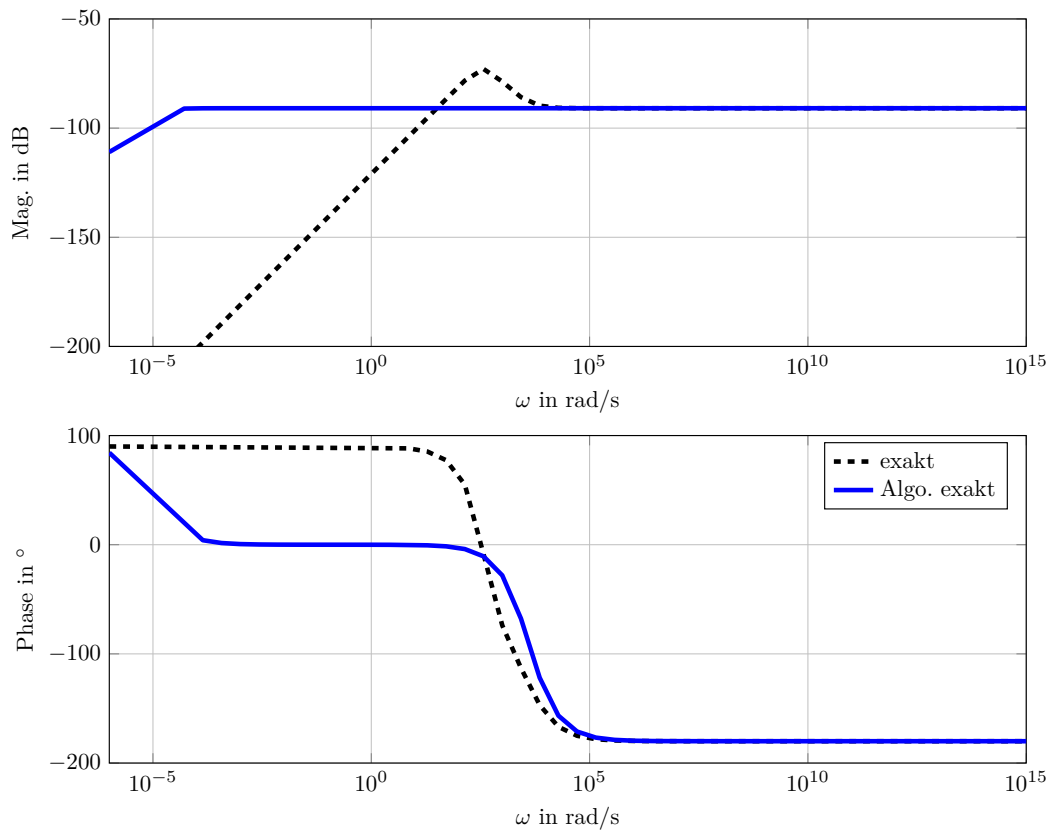


Abbildung 5.22: Bode-Diagramme von $G_{M_L}(q)$ für die exakte Referenzparametrierung und Parametrierung aus dem Algorithmus

Es gibt eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Elemente der Kalman-Matrix. Obwohl die Struktur des zeitdiskreten Kalman-Filters von der des zeitkontinuierlichen

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

Kalman-Filter bzw. der eines Standard-Beobachters abweicht, ist es durch die Annahme der fiktiven Eingangsgröße

$$\hat{\mathbf{h}} = \Phi \mathbf{K}_d \quad (5.241)$$

möglich, das stationäre Kalman-Filter (siehe Blockschaltbild in Abb. 5.23) in der allgemeinen Form des Luenberger-Beobachters [23] anzuschreiben. Dies ermöglicht

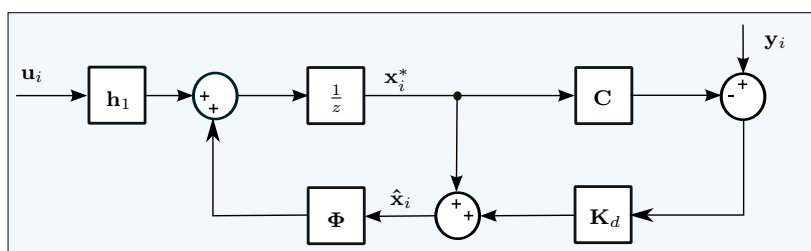


Abbildung 5.23: Blockschaltbild: stationäres Kalman-Filter

einen direkten Vergleich der aus dem Entwurf resultierenden Eigenwerte mit jenen eines über Polvorgabe parametrisierten Luenberger-Beobachters. Die mit (5.241) resultierende Gleichung für den Schätzwert des Zustandsvektors lautet:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = (\Phi - \hat{\mathbf{h}}\mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{h}_1 u_i + \hat{\mathbf{h}} y_i. \quad (5.242)$$

Das resultierende System entspricht der Form eines Standard-Beobachters (siehe Blockschaltbild in Abb. 5.24). Mit dieser Umformung können die aus dem kontinuierlichen

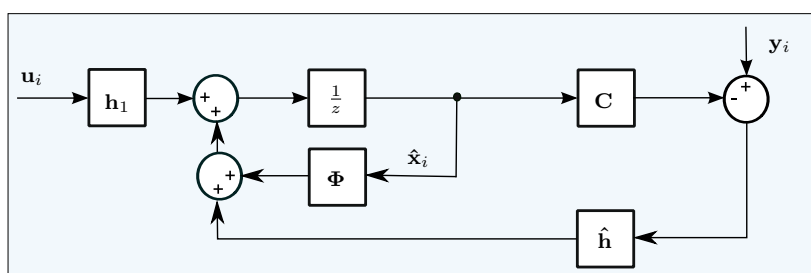


Abbildung 5.24: Blockschaltbild: Standard-Beobachter

Algorithmus resultierenden Eigenwerte für das kontinuierliche Kalman-Filter mithilfe von (5.136) in die äquivalenten Eigenwerte des abgetasteten Systems transformiert werden. Die somit erhaltenen Eigenwerte können zur direkten Berechnung der Elemente der Kalman-Matrix verwendet werden. Die Nullstellen des Nennerpolynoms der Wunschübertragungsfunktion (5.82) für das exakte System entsprechen den gewünschten

Eigenwerten des kontinuierlichen Kalman-Filters. Durch Einsetzen von (5.87) folgt aus (5.82) für die Eigenwerte:

$$s_1 = -\omega_1, \quad (5.243)$$

$$s_{2,3} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_k) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1 - 3\omega_k)(\omega_1 + \omega_k)}. \quad (5.244)$$

Mithilfe der äquivalenten Eigenwerte für das abgetastete, zeitdiskrete System (5.136):

$$z_i = e^{s_i T_d}$$

kann das charakteristische Wunschpolynom für das zeitdiskrete Kalman-Filter

$$\Delta_{Z,Wunsch} = (z - e^{s_1 T_d})(z - e^{s_2 T_d})(z - e^{s_3 T_d}) \quad (5.245)$$

aufgestellt werden. Damit das charakteristische Polynom des exakten Kalman-Filters (vgl. (5.151) für das unsichere zeitdiskrete Filter):

$$\Delta_Z = \det [z\mathbf{E} - \Phi(\mathbf{E} - \mathbf{K}_d\mathbf{C})] \quad (5.246)$$

mit jenem des Wunschpolynoms aus (5.245) übereinstimmt, muss

$$k_1 = \frac{e^{(s_1+s_2+s_3)T_d} - 1}{c_W}, \quad (5.247)$$

$$k_2 = \frac{\omega_0}{4bc_W} \left[-3 + e^{s_1 T_d} + e^{s_2 T_d} + e^{(s_1+s_2)T_d} + e^{s_3 T_d} + e^{(s_1+s_3)T_d} + e^{(s_2+s_3)T_d} - 3e^{(s_1+s_2+s_3)T_d} + b^2 (1 + e^{s_1 T_d})(1 + e^{s_2 T_d})(1 + e^{s_3 T_d}) \right], \quad (5.248)$$

$$k_3 = -\frac{(1 + b^2) J_L \omega_0^2 (e^{s_1 T_d} - 1)(e^{s_2 T_d} - 1)(e^{s_3 T_d} - 1)}{4b^2 c_W} \quad (5.249)$$

gelten. Mit der Annahme $\omega_k \gg T_d$ und $\omega_1 = \frac{1}{\omega_k}$ folgt für die Eigenwerte aus (5.243) und (5.244):

$$s_1 = -\omega_1, \quad (5.250)$$

$$s_{2,3} \approx -\frac{\omega_k}{2} (1 \pm \sqrt{-3}) \quad (5.251)$$

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

und in weiterer Folge:

$$k_1 = \frac{\overbrace{e^{(s_1+s_2+s_3)T_d} - 1}^{\approx 0}}{c_W} \approx -\frac{1}{c_W}, \quad (5.252)$$

$$k_2 = \frac{\omega_0}{4bc_W} \left[-3 + \overbrace{e^{s_1 T_d}}^{\approx 1} + \overbrace{e^{s_2 T_d}}^{\approx 0} + \overbrace{e^{(s_1+s_2)T_d}}^{\approx 0} + \overbrace{e^{s_3 T_d}}^{\approx 0} + \overbrace{e^{(s_1+s_3)T_d}}^{\approx 0} + \right. \\ \left. \underbrace{e^{(s_2+s_3)T_d}}_{\approx 0} - 3 \underbrace{e^{(s_1+s_2+s_3)T_d}}_{\approx 0} + b^2 \underbrace{(1 + e^{s_1 T_d})}_{\approx 2} \underbrace{(1 + e^{s_2 T_d})}_{\approx 1} \underbrace{(1 + e^{s_3 T_d})}_{\approx 1} \right] \\ \approx -\frac{(1-b^2)\omega_0}{2bc_W}, \quad (5.253)$$

$$k_3 = -\frac{(1+b^2)J_L\omega_0^2 \overbrace{(e^{s_1 T_d} - 1)}^{\approx -T_d\omega_1} \overbrace{(e^{s_2 T_d} - 1)}^{\approx -1} \overbrace{(e^{s_3 T_d} - 1)}^{\approx -1}}{4b^2 c_W} \\ \approx \frac{(1+b^2)J_L\omega_0^2 T_d \omega_1}{4b^2 c_W}. \quad (5.254)$$

Bei näherer Betrachtung zeigt sich, dass die ermittelten Elemente der Kalman-Matrix genau mit den zuvor über die q-Transformation hergeleiteten Ergebnissen (5.233) bis (5.235) für große Werte von ω_k übereinstimmen. Es bietet sich also an, die gesuchte Kalman-Matrix direkt aus den transformierten, kontinuierlichen Eigenwerten zu bestimmen.

Für das zeitkontinuierliche Kalman-Filter wurde bereits nachgewiesen, dass das Filter mit der aus dem Algorithmus resultierenden Kalman-Matrix asymptotisch stabil ist. Aus dem Zusammenhang (5.136) der Eigenwerte des zeitdiskreten Systems mit jenen des kontinuierlichen Systems folgt unmittelbar:

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0 \quad \longrightarrow \quad |z_i| < 1. \quad (5.255)$$

Das bedeutet, dass das entworfene, zeitdiskrete Kalman-Filter ebenfalls asymptotisch stabil ist [23]. Damit eine Aussage über die Elemente von \mathbf{Q} getroffen werden kann, muss mit der ermittelten Kalman-Matrix (5.247) bis (5.249) für das exakte, zeitdiskrete Kalman-Filter über die diskrete algebraische Riccati Gleichung auf die Elemente von \mathbf{Q}

zurückgerechnet werden. Aus der Kalman-Matrix für das exakte System (vgl. (5.149)):

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{P}\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + R)^{-1} \quad (5.256)$$

können direkt die Elemente

$$p_{11} = -\frac{k_1 R}{c_W (1 + c_W k_1)}, \quad (5.257)$$

$$p_{12} = -\frac{k_2 R}{c_W (1 + c_W k_1)}, \quad (5.258)$$

$$p_{13} = -\frac{k_3 R}{c_W (1 + c_W k_1)} \quad (5.259)$$

der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers bestimmt werden. Durch die Kenntnis der Elemente p_{11} bis p_{13} können die fehlenden Lösungen p_{22} , p_{23} , p_{33} der Riccati Gleichung (5.154) sowie die Elemente von \mathbf{Q} bestimmt werden:

$$p_{22} = \frac{R}{2b(b^2 - 1)c_W J_L (1 + c_W k_1)\omega_0^2} \left[-b^2(b^2 - 1)c_W k_2 k_3 + 2bc_W J_L k_2^2 \omega_0 (b^2 - 1) + 2bk_3 \omega_0 - bc_W k_1 k_3 \omega_0 - b^3 k_3 \omega_0 (2 + 3c_W k_1) - J_L c_W k_1 k_2 \omega_0^2 + 8J_L c_W k_1 k_2 \omega_0^2 b^2 - J_L c_W k_1 k_2 \omega_0^2 b^2 (b^2 - 6) - 2b(b^2 - 1)J_L k_1 (1 + c_W k_1)\omega_0^3 \right], \quad (5.260)$$

$$p_{23} = \frac{k_3 R (bk_2 + k_1 \omega_0)}{2b(1 + c_W k_1)}, \quad (5.261)$$

$$p_{33} = \frac{k_3 R [2bc_W k_3 - c_W J_L k_2 \omega_0 + bJ_L (2 + c_W k_1)\omega_0^2]}{2bc_W (1 + c_W k_1)}, \quad (5.262)$$

$$q_1 = \frac{R [2b^2 c_W k_1 k_3 - 2bJ_L (2 + c_W k_1) k_2 \omega_0 + (b^2 - 1)c_W J_L k_1^2 \omega_0^2]}{(b^2 - 1)c_W J_L (1 + c_W k_1)\omega_0^2}, \quad (5.263)$$

$$q_2 = \frac{R \{4bJ_L k_2 \omega_0 + c_W [-2k_1 k_3 + J_L k_2^2 (b^2 - 1) + 2bJ_L k_1 k_2 \omega_0]\}}{(b^2 - 1)c_W J_L (1 + c_W k_1)}, \quad (5.264)$$

$$q_3 = \frac{k_3^2 R}{1 + c_W k_1}. \quad (5.265)$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass für k_1 bis k_3 die exakten Werte aus (5.247) bis (5.249) verwendet werden, um eine Division durch Null zu verhindern. Zusätzlich muss sichergestellt sein, dass die numerische Ermittlung mit ausreichender numerischer Genauigkeit durchgeführt wird. Durch die Vorgabe des Frequenzbereichs mittels Parameter ω_1 und ω_k können die Kalman-Matrix und in weiterer Folge die Elemente der Kovarianzmatrix \mathbf{Q} bestimmt werden, sodass die resultierende Übertragungsfunktion der gewünschten Form entspricht. Mit der vorgestellten Vorgehensweise können die Ergebnisse des zeitkontinuierlichen Algorithmus direkt auf das zeitdiskrete System übertragen werden.

5.5.6 Algorithmus zur Parameterwahl für das unsichere System

Möchte man den Algorithmus aus Kapitel 5.4.3 auf das unsichere, zeitdiskrete System anwenden, muss das Fehlersystem aufgestellt werden. Führt man den Schätzfehler

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - h\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - h \left(\mathbf{x}_i^* + \mathbf{K}_d^* \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}_i - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^* \mathbf{x}_i^* \right) \quad (5.266)$$

ein, folgt unter Berücksichtigung der Rückkopplung für die Eingangsgröße

$$\begin{aligned} u_i &= M_{AMi} - \mathbf{d}_z h \left(\mathbf{x}_i^* + \mathbf{K}_d^* \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}_i - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^* \mathbf{x}_i^* \right) \\ &= M_{AMi} + \mathbf{d}_z (\mathbf{e}_i - \mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (5.267)$$

und in weiterer Folge für das unvollständig kompensierte Fehlersystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i+1} \\ \mathbf{e}_{i+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_d^* \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{h}}_1 & \tilde{\mathbf{h}}_2 \\ \hline \tilde{\mathbf{h}}_1 - h\mathbf{h}_1^* - & (\mathbf{E} - h\mathbf{K}_d^* \tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{h}}_2 \\ h\mathbf{K}_d^* (\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}}_1 - \mathbf{C}^*\mathbf{h}_1^*) & \end{array} \right] \begin{bmatrix} M_{AMi} \\ M_{Li} \end{bmatrix} \quad (5.268)$$

mit der Systemmatrix

$$\mathbf{F}_d^* = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Phi} - \tilde{\mathbf{h}}_1 \mathbf{d}_z & \tilde{\mathbf{h}}_1 \mathbf{d}_z \\ \hline \Delta\Phi + \mathbf{K}_d^* (\mathbf{C}^* \Phi^* - h\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\Phi}) + & \Phi^* - \mathbf{K}_d^* \mathbf{C}^* \Phi^* + \\ (h\mathbf{h}_1^* - \tilde{\mathbf{h}}_1) \mathbf{d}_z + & (\tilde{\mathbf{h}}_1 - h\mathbf{h}_1^*) \mathbf{d}_z + \\ \mathbf{K}_d^* (\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}}_1 - \mathbf{C}^*\mathbf{h}_1^*) h\mathbf{d}_z & h\mathbf{K}_d^* (\mathbf{C}^*\mathbf{h}_1^* - \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}}_1) \mathbf{d}_z \end{array} \right], \quad (5.269)$$

wobei $\Delta\Phi = \tilde{\Phi} - \Phi^*$ gilt.

Aus der Struktur des Fehlersystems wird bereits ersichtlich, dass die Berechnung der zeitdiskreten Übertragungsfunktionen und in weiterer Folge die Bilineartransformation analytisch sehr herausfordernd sind. Die numerische Lösung kann mit entsprechenden Softwarepaketen (z. B. *Mathematica*) hingegen verhältnismäßig einfach ermittelt werden. Analog zu der in Abschnitt 5.5.5 für das exakte System beschriebenen Vorgehensweise werden die relevanten, diskreten Übertragungsfunktionen $G_{M_L}(z)$ und $G_{M_{AM}}(z)$ numerisch berechnet. Anschließend werden mithilfe der q-Transformation die zugehörigen Übertragungsfunktionen $G_{M_L}(q)$ und $G_{M_{AM}}(q)$ bestimmt. Aus dem Koeffizientenvergleich von $G_{M_L}(q)$ mit der Wunschübertragungsfunktion $G_{M_L,Wunsch}(q)$ können die Elemente der Kalman-Matrix numerisch berechnet werden.

Im vorangehenden Kapitel wurde eine alternative und zugleich einfachere Vorgehensweise zur Ermittlung der Kalman-Matrix vorgestellt, die zu identischen Ergebnissen führt. Dabei kann die gesuchte Kalman-Matrix für einen großen Bereich mit geringem Phasenfehler direkt aus der Anwendung des zeitkontinuierlichen Algorithmus und den daraus resultierenden Eigenwerten bestimmt werden. Analog dazu können aus den resultierenden Eigenwerten des in Kapitel 5.4.3 beschriebenen Algorithmus für das unsichere System äquivalente Eigenwerte des abgetasteten, zeitdiskreten Systems bestimmt werden. Mit diesen kann in weiterer Folge die entsprechende Kalman-Matrix ermittelt werden.

Die kontinuierliche Wunschübertragungsfunktion (5.106) besitzt fünf Polstellen. Davon gehören der Pol bei ω_1 und das konjugiert komplexe Polpaar bei ω_2 zum Kalman-Filter. Das konjugiert komplexe Polpaar bei $\omega_k = \omega_0$ stammt vom Wellenstrang. Für die Eigenwerte des gewünschten zeitkontinuierlichen Kalman-Filters folgt durch Einsetzen von (5.115) aus (5.106):

$$s_1^* = -\omega_1, \quad (5.270)$$

$$s_{2,3}^* = -\frac{\omega_2}{2} (1 \pm \sqrt{-3}). \quad (5.271)$$

Mithilfe der äquivalenten, zeitdiskreten Eigenwerte für das abgetastete System (5.136):

$$z_i^* = e^{s_i^* T_d}$$

kann das charakteristische Wunschpolynom für das zeitdiskrete Kalman-Filter mit

unsicheren Parametern

$$\Delta_{Z,Wunsch}^* = (z - e^{s_1^* T_d}) (z - e^{s_2^* T_d}) (z - e^{s_3^* T_d}) \quad (5.272)$$

aufgestellt werden. Damit das charakteristische Polynom des Kalman-Filters (5.151) mit dem Wunschpolynom aus (5.272) übereinstimmt, muss

$$k_1^* = \frac{e^{(s_1^* + s_2^* + s_3^*) T_d} - 1}{c_W^*}, \quad (5.273)$$

$$k_2^* = \frac{\omega_0}{4bc_W^*} \left[-3 + e^{s_1^* T_d} + e^{s_2^* T_d} + e^{(s_1^* + s_2^*) T_d} + e^{s_3^* T_d} + e^{(s_1^* + s_3^*) T_d} + e^{(s_2^* + s_3^*) T_d} - 3e^{(s_1^* + s_2^* + s_3^*) T_d} + b^2 (1 + e^{s_1^* T_d}) (1 + e^{s_2^* T_d}) (1 + e^{s_3^* T_d}) \right], \quad (5.274)$$

$$k_3^* = - \frac{(1 + b^2) J_L^* \omega_0^2 (e^{s_1^* T_d} - 1) (e^{s_2^* T_d} - 1) (e^{s_3^* T_d} - 1)}{4b^2 c_W^*} \quad (5.275)$$

gelten. Unter der Annahme $\omega_2 \gg T_d$ und $\omega_1 = \frac{1}{\omega_2}$ folgt analog zu (5.252) bis (5.254):

$$k_1^* \approx - \frac{1}{c_W^*}, \quad (5.276)$$

$$k_2^* \approx - \frac{(1 - b^2) \omega_0}{2bc_W^*}, \quad (5.277)$$

$$k_3^* \approx \frac{(1 + b^2) J_L^* \omega_0^2 T_d \omega_1}{4b^2 c_W^*}. \quad (5.278)$$

Für die Rückrechnung auf die notwendigen Werte für die Elemente der Kalman-Matrix wird wie im vorigen Kapitel für das exakte System beschrieben vorgegangen. Da sich gegenüber dem exakten System nur die Unsicherheiten in den Parametern J_L und c_W ändern, können die Gleichungen (5.263) bis (5.265) für das exakte System einfach auf das unsichere System umgeschrieben werden. Es müssen lediglich die exakten Parameter J_L und c_W sowie k_1 , k_2 und k_3 durch die unsicheren Parameter J_L^* , c_W^* und

die Einträge der unsicheren Kalman-Matrix ersetzt werden:

$$q_1^* = \frac{R [2b^2 c_W^* k_1^* k_3^* - 2b J_L^* (2 + c_W^* k_1^*) k_2^* \omega_0 + (b^2 - 1) c_W^* J_L^* k_1^{*2} \omega_0^2]}{(b^2 - 1) c_W^* J_L^* (1 + c_W^* k_1^*) \omega_0^2}, \quad (5.279)$$

$$q_2^* = \frac{R \{4b J_L^* k_2^* \omega_0 + c_W^* [-2k_1^* k_3^* + J_L^* k_2^{*2} (b^2 - 1) + 2b J_L^* k_1^* k_2^* \omega_0]\}}{(b^2 - 1) c_W^* J_L^* (1 + c_W^* k_1^*)}, \quad (5.280)$$

$$q_3^* = \frac{k_3^{*2} R}{1 + c_W^* k_1^*}. \quad (5.281)$$

Die Elemente der zugehörigen Kovarianzmatrix des Schätzfehlers \mathbf{P}^* können ebenfalls durch Verwendung der unsicheren Parameter in (5.257) bis (5.262) bestimmt werden. Wird \mathbf{Q}^* entsprechend (5.279) bis (5.281) ermittelt, weist die Übertragungsfunktion $G_{M_L}^*(q)$ den gewünschten Verlauf (blau) im Frequenzbereich auf (siehe Abb. 5.25). Die

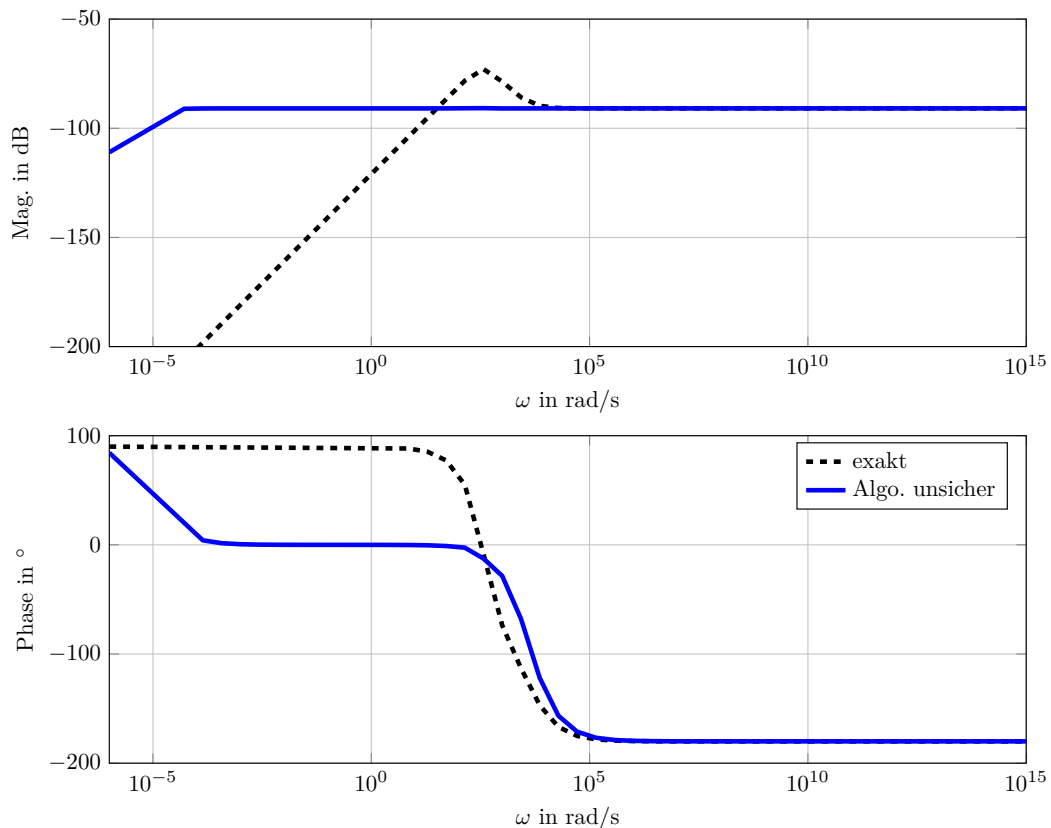


Abbildung 5.25: Bode-Diagramme von $G_{M_L}^*(q)$ für die exakte Referenzparametrierung und Parametrierung aus dem Algorithmus

im Filter verwendete Massenträgheit J_L^* kann beliebig vorgegeben werden und wird

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

analog zum zeitkontinuierlichen Algorithmus groß gewählt. Die anfängliche Referenzparametrierung des Filters für das exakte System (schwarz) und die aus dem Algorithmus resultierende Filterparametrierung können Tabelle B.9 und B.11 im Anhang entnommen werden. Die Übertragungsfunktion $G_{MAM}^*(q)$ weist denselben vorteilhaften Phasenverlauf auf (vgl. Kapitel 5.4.3). Der Phasenfehler ist im definierten Betrachtungsbereich minimal (siehe Abb. 5.26). Es kann gezeigt werden, dass der für das zeitkontinuierliche

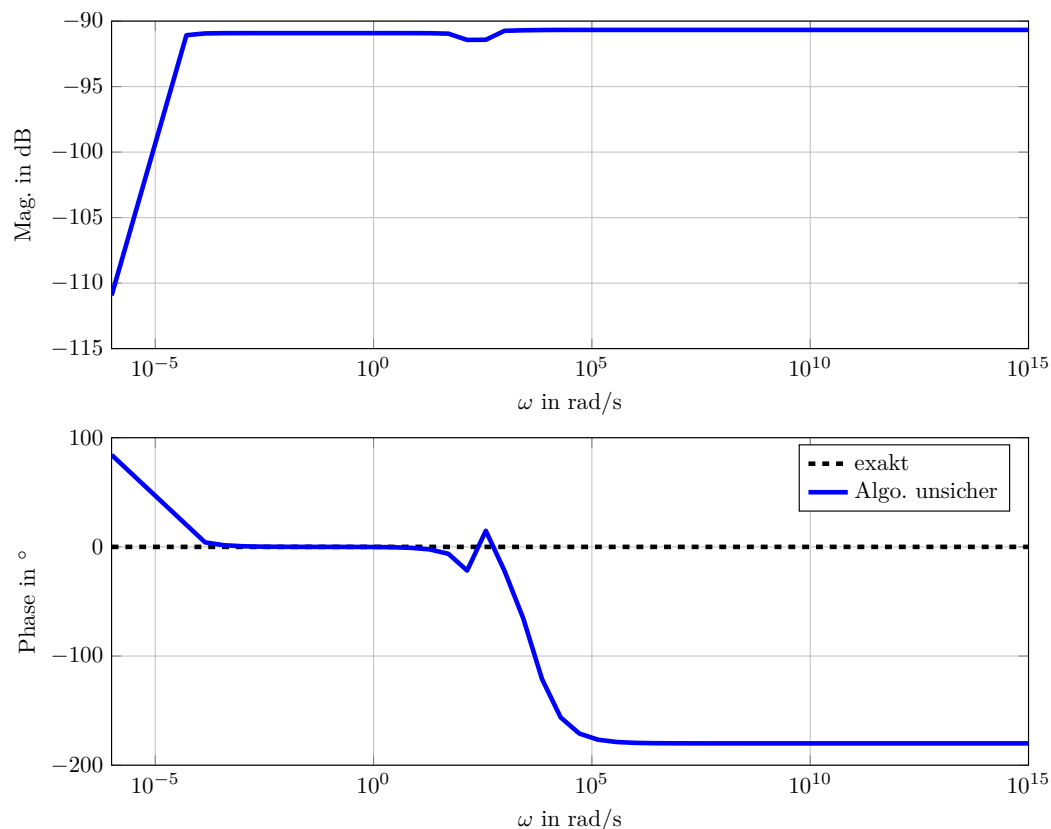


Abbildung 5.26: Bode-Diagramme von $G_{MAM}^*(q)$ für die exakte Referenzparametrierung und Parametrierung aus dem Algorithmus

che System entworfene Algorithmus ohne Einschränkungen auch für das zeitdiskrete Kalman-Filter anwendbar ist. Der Phasenfehler des Schätzwertes von $\Delta\omega$ ist in einem definierbaren Bereich wie gefordert nahe Null. Es zeigt sich, dass es auch für den Entwurf des Algorithmus zur Parametrierung durchaus vorteilhaft ist, zuerst das zeitkontinuierliche System zu betrachten und die gewonnenen Erkenntnisse anschließend auf das zeitdiskrete System umzulegen.

5.5.7 Simulationstudie Rollenprüfstand

Der Sollwertsprung am Rollenprüfstand (vgl. Abschnitt 5.2.1) wird mit der aus dem zeitdiskreten Algorithmus resultierenden Filterparametrierung simuliert und hinsichtlich der auftretenden Schätzfehler analysiert. Die Simulationen werden bei konstanter Filterparametrierung (d.h. $J_L^* = \text{konst.}$, $\mathbf{Q}^* = \text{konst.}$) für verschiedene Werte der realen Massenträgheit der Last J_L wiederholt. Der Schätzfehler und die Schwingneigung werden mit der Referenzparametrierung verglichen. Diese wird ebenfalls mit veränderlicher, realer Massenträgheit J_L simuliert. Abb. 5.27 zeigt links die resultie-

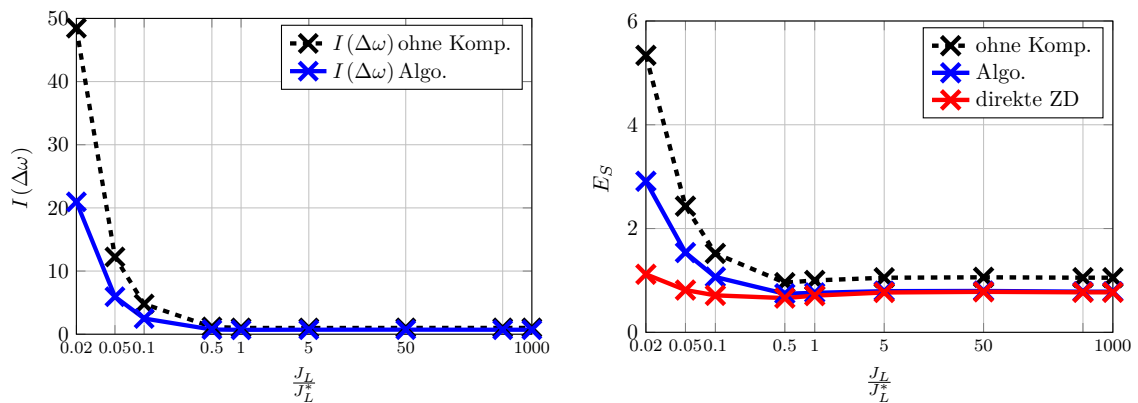


Abbildung 5.27: Simulation Rolle: Fehlerkriterium I und E_S bei Referenzparametrierung in Abhängigkeit von $\frac{J_L}{J_L^*}$ und bei Parametrierung mittels zeitdisk. Algorithmus (normiert auf die jeweiligen Werte der Referenzparametrierung bei $\frac{J_L}{J_L^*} = 1$)

renden, auf den Wert ohne Kompensation bei $\frac{J_L}{J_L^*} = 1$ normierten Schätzfehler für die verschiedenen Werte von J_L bei der Referenzparametrierung (siehe Tabelle B.9) und der mittels Algorithmus optimierten Parametrierung (siehe Tabelle B.11). Durch die Parameterunsicherheit nimmt der Schätzfehler bei kleinen Werten von J_L zu. Obwohl die Referenzparametrierung bereits sehr gute Schätzergebnisse liefert, kann der Schätzfehler durch den Algorithmus weiter reduziert werden. Es wird ersichtlich, dass der Schätzfehler bei Parametrierung mittels Algorithmus vor allem bei kleinen Werten von J_L signifikant kleiner als mit der konstanten Referenzparametrierung für das exakte System ist. Bei einer Unsicherheit von $\frac{J_L}{J_L^*} = \frac{1}{10}$ ist der resultierende Schätzfehler nur minimal größer, als beim Referenzsystem ohne Parameterunsicherheit. Obwohl die Differenz zum Schätzfehler der Referenzparametrierung bei größeren Werten von J_L kleiner wird, ist der Schätzfehler über den ganzen Bereich unter dem der Referenzparametrierung. Das Filter ist durch die ermittelte Parametrierung deutlich robuster gegenüber Parameterunsicherheiten von J_L . Rechts in Abb. 5.27 ist das normierte Maß für die Schwingneigung E_S für das Referenzsystem mit konstanter Filterparametrierung, die aus dem Algorithmus resultierende Parametrierung und die direkte

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

Zusatzdämpfung gegenübergestellt. Entspricht das reale System der Parametrierung im Kalman-Filter, stimmen die Maße für die Schwingneigung mit direkter Zusatzdämpfung und Kalman-Filter mit Algorithmus gut überein. Mit dem Algorithmus kann in einem weiten Bereich ein gleich gutes Ergebnis wie mit der direkten Zusatzdämpfung erreicht werden. Es zeigt sich, dass es bereits bei geringen Unterschieden der Schätzfehlern zu merklichen Unterschieden bei der Schwingneigung kommt. Bei kleinen Werten für J_L nimmt das Maß für die Schwingneigung mit der Parametrierung aus dem Algorithmus zwar wieder zu, bleibt aber insgesamt deutlich unter jenem des Referenzsystems. Bei einer Unsicherheit von $\frac{J_L}{J_L^*} = \frac{1}{10}$ ist das Maß für die Schwingneigung in etwa gleich groß wie beim Referenzsystem mit exakter Parametrierung. In Abb. 5.28 sind die zugehörigen, Eigenwerte des zeitdiskreten Kalman-Filters dargestellt. Diese stimmen mit den

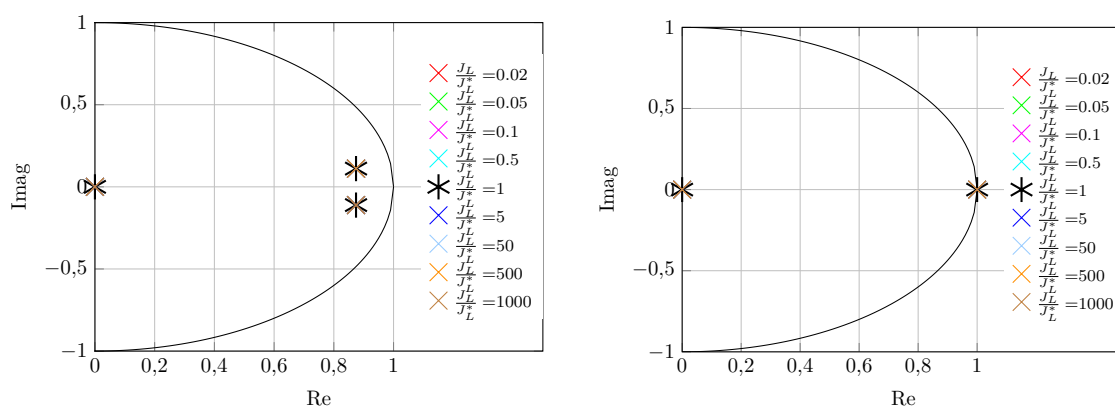


Abbildung 5.28: Simulation Rolle: Eigenwerte des Kalman-Filters bei Referenzparametrierung in Abhängigkeit von $\frac{J_L}{J_L^*}$ und bei Parametrierung mittels zeitdisk. Algorithmus (Anmerkung: Da nur die reale Massenträgheit J_L verändert wird, sind die Eigenwerte konstant und liegen übereinander)

Eigenwerten aus Abschnitt 5.4.4 überein. Das konjugiert komplexe Polpaar wird im Vergleich zur Referenzparametrierung in die Nähe des Ursprungs verschoben, während sich ein reeller Pol nahe eins befindet. In der Praxis liegt die Parameterunsicherheit in der Massenträgheit der Last in den meisten Fällen deutlich unter Faktor 10. Selbst bei einer Unsicherheit der Massenträgheit von $\frac{J_L}{J_L^*} = \frac{1}{10}$ bleibt die Schwingneigung mit dem vorgestellten Algorithmus gleich gering wie mit der Referenzparametrierung für das exakte System. Die Robustheit gegenüber der Parameterunsicherheit von J_L kann durch den vorgestellten Algorithmus somit auch für das zeitdiskrete Kalman-Filter deutlich verbessert werden.

5.5.8 Messergebnisse Rollenprüfstand

Der vorgestellte Algorithmus wird am Rollenprüfstand mit gegenüber der Simulation unveränderter Filterparametrierung implementiert und analysiert. Eine detaillierte

Beschreibung des Versuchsaufbaus kann Abschnitt B.1 im Anhang entnommen werden. Für die Versuche wird ein Kalman-Filter 3. Ordnung mit Prädiktion von 2 ms verwendet. Dieser wird mit der Referenzparametrierung und der Parametrierung aus dem Algorithmus bei unterschiedlichen Werten für die Zusatzdämpfungskonstante d_Z getestet. Im Gegensatz zur Simulation kann die reale Massenträgheit durch physikalische Einschränkungen am Versuchsprüfstand nicht verändert werden. Obwohl die Varianten nur anhand einer konstanten Massenträgheit J_L verglichen werden können, liefern die durchgeführten Messungen dennoch sehr aussagekräftige Ergebnisse. In Abb. 5.29 sind die resultierenden Wellenmomente dargestellt. Auch wenn die Schwingung mit der

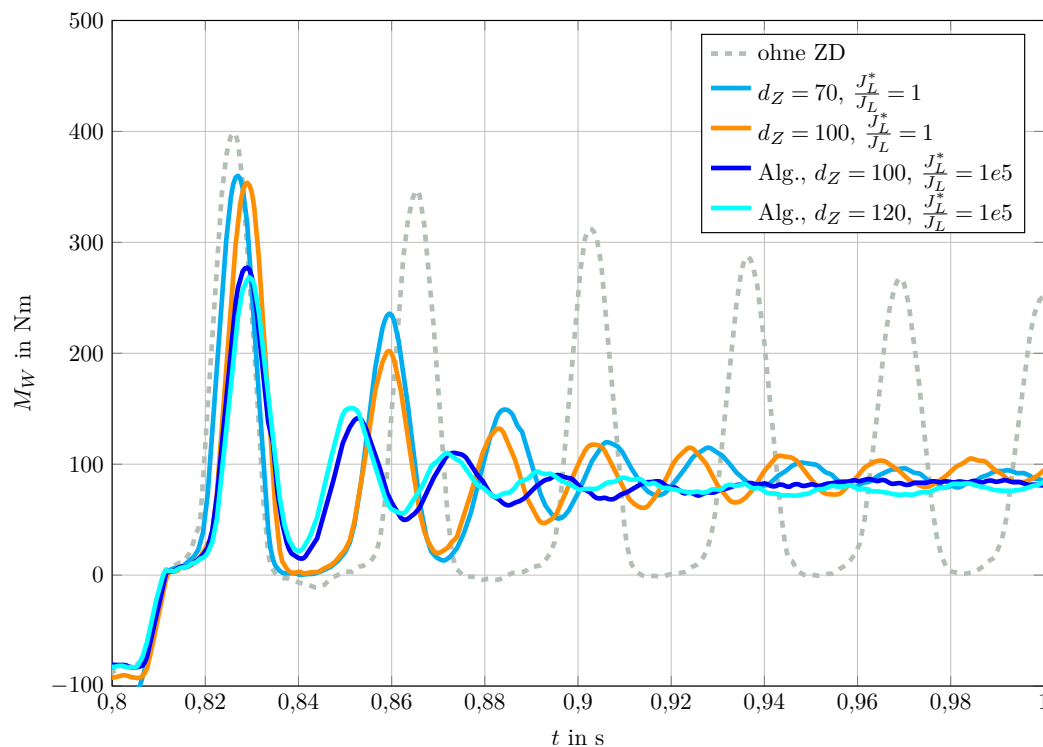


Abbildung 5.29: Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 bei Referenzparametrierung und Parametrierung mittels zeitdisk. Algorithmus

Standardparametrierung sehr gut gedämpft wird, kommt es durch die Parametrierung aus dem Algorithmus zu einer weiteren Verbesserung. Zusätzlich ist zu beobachten, dass eine Vergrößerung von d_Z bei der Standardparametrierung zu keiner weiteren Verbesserung führt. Bei der Parametrierung aus dem Algorithmus kann d_Z größer gewählt werden. Erst bei $d_Z = 120$ kommt es zu keiner zusätzlichen dämpfenden Wirkung mehr. Insgesamt kann die Schwingneigung durch die Parametrierung aus dem Algorithmus gegenüber der Ausgangsparametrierung signifikant verkleinert werden. Die Ergebnisse decken sich mit den in Abschnitt 5.5.7 durchgeführten Simulationen. Abb. 5.30 zeigt die zugehörigen Schätzwerte $\Delta\hat{\omega}$. Bei der Parametrierung aus dem

5.5 Erweiterung auf das zeitdiskrete System

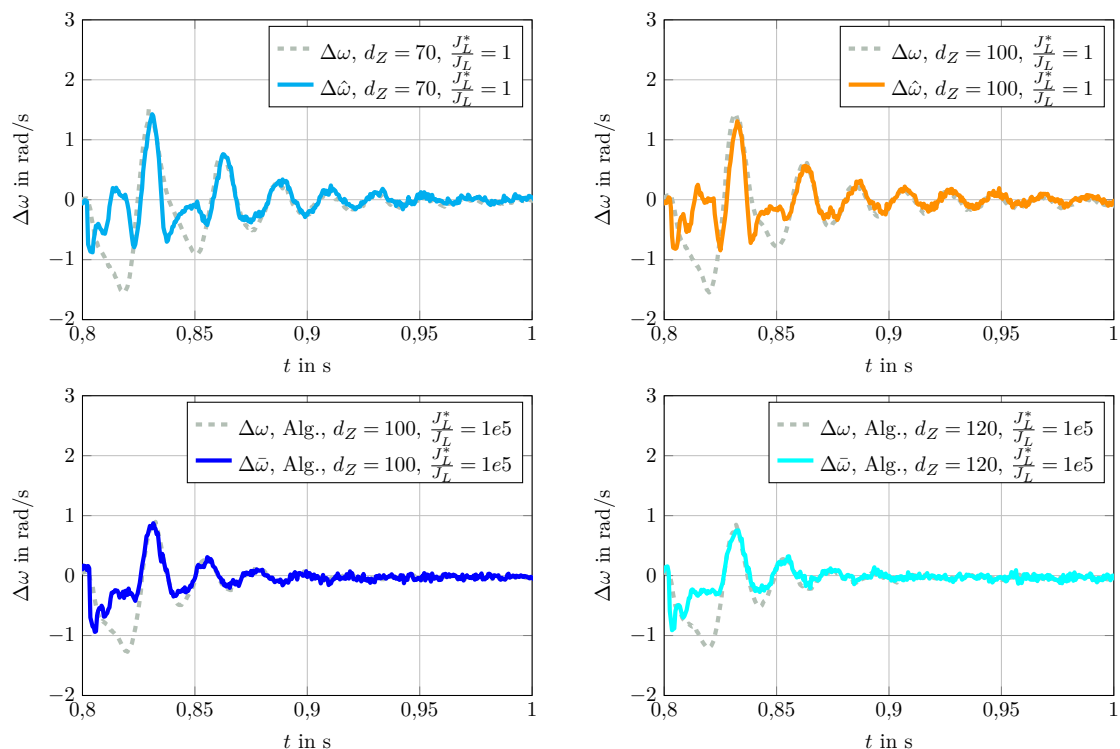


Abbildung 5.30: Messdaten Rolle: Vergleich $\Delta\omega$ und $\Delta\hat{\omega}$ bei Zusatzdämpfung mittels eines KF3 und Parametrierung mittels zeitdisk. Algorithmus

Algorithmus stimmen der real gemessene Wert $\Delta\omega$ und der Schätzwert $\Delta\hat{\omega}$ besser überein und der Schätzfehler ist merklich kleiner.

In Abb. 5.31 sind die vorgestellten Dämpfungsverfahren gegenübergestellt. Bis auf die mittels Algorithmus parametrierte Variante sind sämtliche Varianten mit den maximal möglichen Zusatzdämpfungskonstanten d_Z der einzelnen Verfahren dargestellt. Für den Algorithmus wurde bewusst ein kleinerer Wert für d_Z gewählt, um zu veranschaulichen, dass diese Variante trotz kleinerem d_Z zum besten Dämpfungsergebnis führt. Durch die mögliche Erhöhung auf $d_Z = 100$ gibt es sogar noch Reserven (siehe Abb. 5.29). Obwohl der erste Momentenanstieg durch das im Filter nicht berücksichtigte Wellenspiel in Kombination mit dem für den Prädiktionshorizont konstant angenommenen Eingangssignal u etwas schlechter gedämpft wird als bei der direkten Zusatzdämpfung, kann die Schwingung im weiteren Verlauf schneller gedämpft werden. Auf den ersten Blick ist es verwunderlich, dass mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung in Verbindung mit der Parametrierung aus dem Algorithmus sogar ein besseres Dämpfungsergebnis als mit der direkten Zusatzdämpfung erzielt werden kann. Dies ist einerseits auf die exakte Schätzung von $\Delta\omega$ und andererseits auf die Kompensation der Totzeit bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments mithilfe der eingesetzten Prädiktion zurückzu-

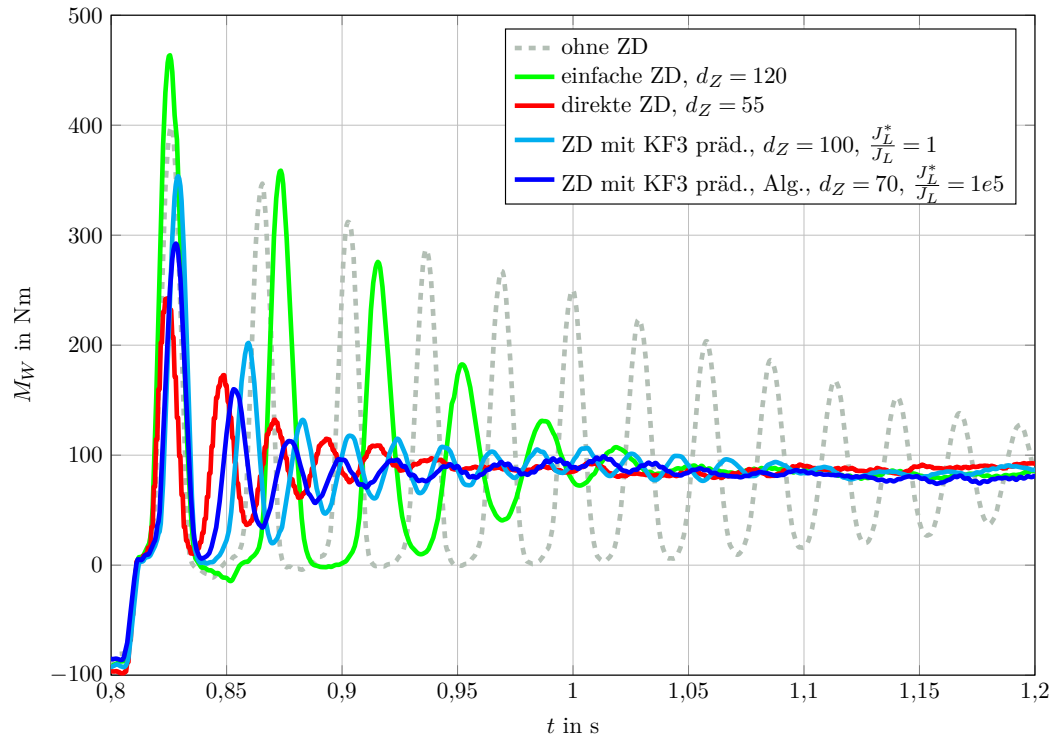


Abbildung 5.31: Messdaten Rolle: M_W bei Zusatzdämpfung mittels unterschiedlicher Dämpfungsverfahren

führen. Die einfache Zusatzdämpfung bzw. das Kalman-Filter 1. Ordnung führen zwar zu einer guten Dämpfung, haben aber bei dynamischen Lastwechseln ihre Nachteile. Dadurch bedingt kann der erste Momentenanstieg nur unzureichend gedämpft werden. Das Kalman-Filter 3. Ordnung inkl. Prädiktion mit der Standardparametrierung funktioniert recht gut, ist jedoch anfälliger gegenüber Modellunsicherheiten, und die Parametrierung ist aufgrund der möglichen Freiheitsgrade bei der Wahl von \mathbf{Q} und \mathbf{R} nicht trivial.

Die in den vorangegangenen Kapiteln gewonnenen Erkenntnisse werden eindrucksvoll bestätigt. Mithilfe der aus dem vorgestellten Algorithmus resultierende Parametrierung können sehr gute Dämpfungsergebnisse erzielt werden. Aufgrund der gesteigerten Robustheit kann die Zusatzdämpfung mittels eines Kalman-Filters 3. Ordnung auch an Prüfständen mit wechselndem Aufbau eingesetzt werden. Es gelingt somit sämtliche Vorteile der analysierten Varianten zu vereinen. Sofern die Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ nicht direkt gemessen werden kann, stellt das Kalman-Filter 3. Ordnung durch die verbesserte Parametrierung eine "ideale" Wahl für die Schwingungsdämpfung an Prüfständen dar. Selbst wenn $\Delta\omega$ gemessen werden kann, können durch die mögliche Kompensation von Totzeiten bei der Anwendung des Kalman-Filters 3. Ordnung gegenüber der direkten Zusatzdämpfung noch weitere Verbesserungen erzielt werden.

Zusammenfassung und Ausblick

In vorliegender Arbeit wurden unterschiedliche Varianten zur Drehschwingungsdämpfung bei Prüfständen untersucht und mittels Simulationen und Versuchen an zwei Prüfständen validiert. Basierend auf dem eingangs hergeleiteten mathematischen Modell des Zwei-Massen-Schwingers, das sich für die Modellierung der ersten Resonanzfrequenz bei sämtlichen Prüfständen und Wellensträngen anwenden lässt, wurden zur Einführung in der Literatur beschriebene Dämpfungsverfahren vorgestellt und hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile analysiert. Neben dem Einsatz passiver Filter wurde die Optimierung der Drehzahlregelung durch Polvorgabemethoden sowie die Rückkopplung diverser Zustandsgrößen betrachtet. Es wurde gezeigt, dass sämtliche in der Literatur beschriebene Zustandsrückführungen auf zwei unterschiedliche, grundlegende Typen zurückgeführt werden können. Um die Dämpfungsmaßnahme nicht nur auf Antriebe mit Drehzahlregelung einzuschränken, wurde im weiteren Verlauf der Arbeit der Fokus vor allem auf die Dämpfung durch eine entsprechende Zustandsrückführung gelegt. Bei Prüfstandsanwendungen stellt das Wellenmoment im Gegensatz zu anderen Anwendungen eine äußerst relevante Größe dar und steht durch entsprechende Messtechnik mit hoher Genauigkeit und zeitlich hoch aufgelöst zur Verfügung. Aus diesem Grund bietet sich für derartige Anwendungen an, das gemessene Wellenmoment bzw. die daraus geschätzte Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ für die Rückkopplung zu verwenden.

Im Rahmen einer detaillierten Analyse einzelner Dämpfungsverfahren wurde zu Beginn der Arbeit eine einfache Zusatzdämpfung durch Aufschaltung des differenzierten Wellenmoments analysiert und erweitert, damit sie auch in der Praxis sinnvoll einsetzbar ist. Als Erweiterung wurde eine Zusatzdämpfung mit Zustandsschätzung vorgestellt, wobei $\Delta\omega$ durch ein stationäres, zeitdiskretes Kalman-Filter 1. Ordnung geschätzt wird. Es konnte gezeigt werden, dass dieses auf die einfache Zusatzdämpfung zurückgeführt werden kann und letztendlich zu den gleichen Ergebnissen führt. Bei der Anwendung der Zusatzdämpfung an den beiden Versuchsprüfständen konnten die Schwankungen

der Drehzahl und des Drehmoments gegenüber der Ausgangssituation in beiden Fällen deutlich reduziert werden. Durch die Tiefpassfilterung im Rückkopplungsweig wird der Anwendungsbereich auf Resonanzfrequenzen unter 50 Hz eingeschränkt, wobei bei dynamischen Lastwechseln in diesen Varianten noch Spielraum für Verbesserungen bleibt. Vorteilhaft sind die vergleichsweise geringen Hardwareanforderungen und die Robustheit gegenüber Totzeiten bei der Aufschaltung. Dadurch eignet sich das Verfahren gut zur Nachrüstung an bestehenden Anlagen.

Um den Anwendungsbereich der Zusatzdämpfung auf höherliegende Resonanzfrequenzen und den dynamischen Betrieb auszuweiten, wurde das Kalman-Filter zur Schätzung von $\Delta\omega$ sukzessive erweitert. Während ein Kalman-Filter 2. Ordnung durch die fehlende Berücksichtigung des Lastmoments in der Praxis nicht eingesetzt werden kann, führt ein Kalman-Filter 3. Ordnung mit konstantem Störzustand zur Schätzung des Lastmoments zu sehr guten Ergebnissen. Durch die zusätzlich vorgestellte Prädiktion kann die vorhandene Totzeit bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments kompensiert werden. Das Kalman-Filter 3. Ordnung kann durch die entworfene Prädiktion auch für bestehende Anlagen mit langsamer Umrichtertechnologie und signifikanten Totzeiten eingesetzt werden. Dem vergrößerten Einsatzbereich und der besseren Dämpfung bei dynamischen Lastwechseln steht eine gewisse Empfindlichkeit bei Parameterunsicherheiten gegenüber. Die notwendigen Modellparameter des Wellenstrangs müssen bekannt sein und dürfen sich auch nicht zu stark ändern. Da es gerade an Prüfständen durch den Wechsel von Prüflingen zu einer ständigen Änderung der Systemparameter kommen kann, ist die Anwendbarkeit bei Prüfständen mit wechselnden Prüflingen eingeschränkt.

Der Hauptteil dieser Arbeit befasst sich mit der Analyse der Auswirkungen von Modellunsicherheiten sowie dem Entwurf einer Methode zur vollständigen Kompensation und eines Algorithmus zur robusten Parametrierung des Kalman-Filters 3. Ordnung. Dabei hat es sich bewährt, eingangs sämtliche Analysen aus Komplexitätsgründen für das zeitkontinuierliche Kalman-Filter durchzuführen und die gewonnenen Erkenntnisse in einem weiteren Schritt auf das zeitdiskrete Kalman-Filter überzuführen. Sämtliche Modellunsicherheiten können durch die bekannte Resonanzfrequenz auf die Unsicherheit der Massenträgheit des Prüflings reduziert werden. Die Auswirkungen bezüglich dieser Unsicherheit können durch entsprechende Wahl der Kovarianzmatrix \mathbf{Q} und Skalierungen des Eingangs- und Ausgangsvektors theoretisch vollständig kompensiert werden. Die Eigenwerte und die relevanten Übertragungsfunktionen des unsicheren Systems stimmen durch die entworfene Kompensation mit jenen des Originalsystems überein. Diese vollständige Kompensation unterliegt allerdings der Einschränkung, dass die Modellparameter des Originalsystems bekannt sein müssen. Da dies in der Praxis im Allgemeinen nicht der Fall ist, kann eine exakte Kompensation nur theoretisch erreicht werden. Aus diesem Grund wurde ein Algorithmus zur robusten Parametrierung des

Kalman-Filter entworfen. Mit diesem wird das Filter derart parametrisiert, dass die Schätzfehler und vor allem der Phasenfehler in einem großen Frequenzbereich möglichst klein bleiben. Durch die Parametrierung ist das Filter in einem weiten Bereich robust gegenüber Parameterunsicherheiten und kann für die Schwingungsdämpfung am Prüfstand auch bei wechselnden Bedingungen eingesetzt werden. Die Zusatzdämpfung mit Schätzung von $\Delta\omega$ durch ein Kalman-Filter 3. Ordnung vereint somit sämtliche Vorteile der einzelnen Varianten. Die gewonnenen Erkenntnisse wurden durch Simulationen und Versuche am realen Prüfstand verifiziert.

Die Arbeit trägt durch die fundierte Analyse der einzelnen Dämpfungsverfahren und die neuen Erkenntnisse im Bereich der Kompensation von Modellunsicherheiten im Kalman-Filter sowie der robusten Filterparametrierung zum effektiven Einsatz derartiger Dämpfungsverfahren an Prüfständen bei. Neben dem gezielten Einsatz basierend auf den Vor- und Nachteilen der einzelnen Varianten können die Dämpfungsverfahren durch die vorgestellte Prädiktion auch bei Bestandsprüfständen mit signifikanten Totzeiten nachgerüstet werden. Zugleich eröffnen sich zahlreiche Möglichkeiten für weitere Forschung in diesem Gebiet. Die Auswirkungen von Parameterunsicherheiten und deren Kompensation wurden speziell für den Zwei-Massen-Schwinger analysiert. Basierend auf diesen Erkenntnissen stellt die Analyse von Parameterunsicherheiten bzw. deren Kompensation im Kalman-Filter für allgemeine Systeme 3. Ordnung ein spannendes Feld für weitere wissenschaftliche Untersuchungen dar. Zudem ist denkbar, das zugrundeliegende Modell auf Mehr-Massen-Schwinger auszubauen, um zusätzliche Resonanzfrequenzen zu dämpfen oder adaptive Filter zur dynamischen Anpassung des Filters an die Modellparameter der jeweiligen Aufbausituation bzw. an die vorliegende Resonanzfrequenz einzusetzen.

Anhang

EOL-Motorprüfstand

A.1 Versuchsaufbau für die Messungen an der realen Anlage

Für die Messungen am Motorprüfstand (detaillierte Beschreibung siehe Abschnitt 2.1.1) wird für den Kalttest der in Abb. A.1 (siehe auch [139]) dargestellte Versuchsaufbau verwendet. Die gewünschte Gasstellung α -Soll des Prüfings wird über ein Analogsignal

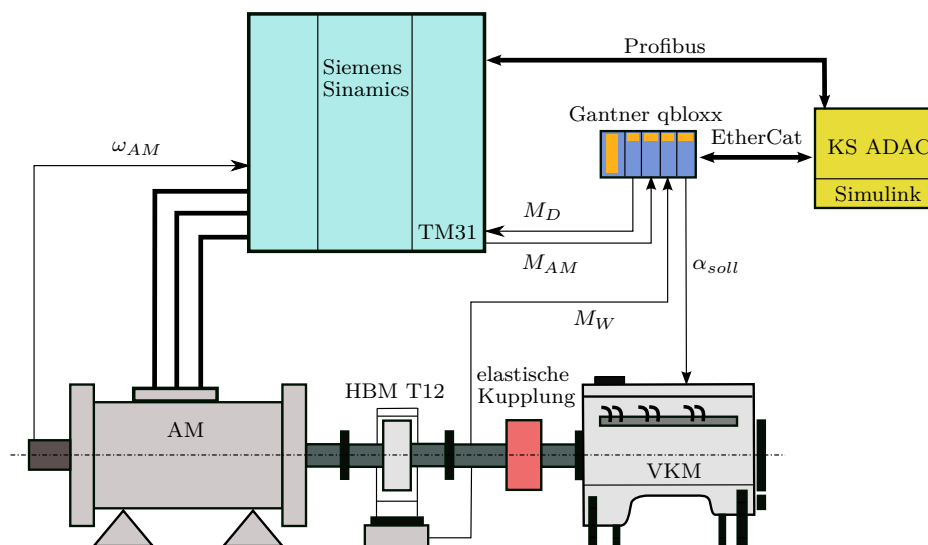


Abbildung A.1: EOL: Versuchsaufbau

vorgegeben, um die geforderten Lastpunkte anzufahren. Das sich einstellende Drehmoment wird mit dem Drehmomentmessflansch (HBM T12, $M_{Nenn} = 10 \text{ kNm}$) gemessen. Sämtliche Analogsignale werden hochfrequent vorverarbeitet (mit Gantner qpac und qbloxx-Modulen) und anschließend mittels EtherCat an die übergeordnete Steuerung (KS ADAC) übertragen. Die Vorgabe der Solldrehzahl an den Frequenzumrichter und

die Rückmeldung der Istdrehzahl an die übergeordnete Steuerung erfolgt über Profibus. Zur Implementierung der Zusatzdämpfung werden die Modelle der einzelnen Dämpfungsvarianten in der übergeordneten Steuerung hinterlegt und mit 2 kHz abgearbeitet. Das generierte Dämpfungsmoment M_D wird dem Frequenzumrichter über das analoge Eingangsmodul TM31 zugeführt (Stromsignal 4–20 mA) und als Zusatzdrehmoment aufgeschaltet. Bei der Aufschaltung kommt es durch die Signalübertragung und die interne Abarbeitung des Frequenzumrichters zu einer Totzeit von ca. 4 ms.

Im Rahmen des Kalttests wird der Motor ungefeuert von 0 1/min auf 500 1/min geschleppt, um etwaige Fehler in der Produktion vorab zu detektieren. Während des Kalttests werden neben dem Wellenmoment sämtliche Drücke wie beispielsweise Ladedruck, Ansaugunterdruck, Öldruck etc. winkelsynchron über den Kurbelwinkel aufgelöst und aufgezeichnet. Aus den Messdaten kann mithilfe statistischer Methoden auf gewisse Fehlerbilder geschlossen werden.

Für die Erprobung der einzelnen Zusatzdämpfungsvarianten wird der Prüfling innerhalb von 20 s von 0 1/min auf 500 1/min geschleppt. Das errechnete Dämpfungsmoment M_D , das resultierende Wellenmoment M_W und die Winkelgeschwindigkeit der Antriebsmaschine ω_{AM} werden aufgezeichnet.

A.2 Simulationsparameter

Für die Simulationen des Motorprüfstands wird das 6-Massen-System aus Abb. A.2 verwendet. Die zugehörigen Parameter sind in Tabelle A.1 dargestellt. Die Solldrehzahl

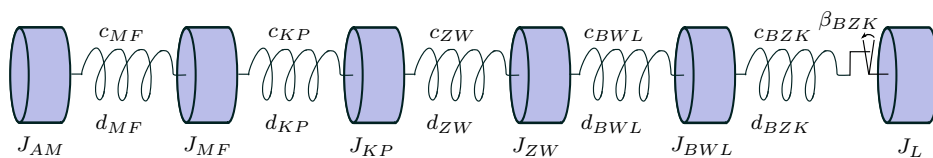


Abbildung A.2: EOL: Simulationsmodell Wellenstrang

wird durch einen PI-Regler mit den Regelparametern aus Tabelle A.2 eingeregelt. Neben der Modellierung des Spiels in der Bogenzahnkupplung über ein Totzonen-Modell [87] wird die Dynamik der Antriebsmaschine und die Totzeit bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments in der Simulation berücksichtigt. Die Anregung durch den Prüfling wird basierend auf Messdaten des realen Prüfstands gewählt. Für die exakte Parametrierung des Kalman-Filters wird das 6-Massen-System auf ein 2-Massen-System reduziert, sodass die 1. Resonanzfrequenz unverändert bleibt. Für den Kalman-Filterentwurf wird das 2-Massen-System (siehe Abb. A.3) mit den Parametern aus Tabelle A.3

A.2 Simulationsparameter

Tabelle A.1: EOL: Systemparameter 6-Massen-System

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
J Antriebsmaschine	J_{AM}	5,32	kgm ²
J Messflansch	J_{MF}	0,9855	kgm ²
J Kupplung	J_{KP}	0,31	kgm ²
J Zwischenwelle	J_{ZW}	0,183	kgm ²
J Spannsatz	J_{BWL}	0,554	kgm ²
J Last	J_L	1,81	kgm ²
c Messflansch	c_{MF}	1450	kNm/rad
c Kupplung	c_{KP}	30	kNm/rad
c Zwischenwelle	c_{ZW}	19000	kNm/rad
c Spannsatz	c_{BWL}	220000	kNm/rad
c Bogenzahnkupplung	c_{BZK}	7000	kNm/rad
d Messflansch	d_{MF}	1	Nm s/rad
d Kupplung	d_{KP}	20	Nm s/rad
d Zwischenwelle	d_{ZW}	1	Nm s/rad
d Spannsatz	d_{BWL}	1	Nm s/rad
d Bogenzahnkupplung	d_{BZK}	1	Nm s/rad
Spiel Bogenzahnkupplung	β_{BZK}	0.06	°
Totzeit	T_t	4.4	ms

Tabelle A.2: EOL: Regelparameter Drehzahlregelung

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
P-Anteil	k_P	159.6	Nm s/rad
I-Anteil	k_I	191.5	Nm/rad

Tabelle A.3: EOL: Systemparameter 2-Massen-System

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
J Antriebsmaschine	J_{AM}	6,31	kgm ²
J Last	J_L	2,86	kgm ²
c Welle	c_W	30	kNm/rad
d Welle	d_W	0	Nm s/rad

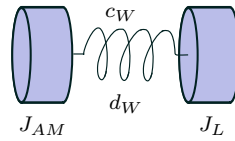


Abbildung A.3: EOL: Simulationsmodell 2-Massen-Schwinger

verwendet. Die Parametrierungen für die Simulationen des jeweiligen Kalman-Filters können Tabelle A.4 bis A.7 entnommen werden.

Tabelle A.4: EOL: Parametrierung KF1

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	4.5e-15	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	60	Nm s/rad

Tabelle A.5: EOL: Parametrierung KF2

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	1e6	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	1e6	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	60	Nm s/rad

A.2 Simulationsparameter

Tabelle A.6: EOL: Parametrierung KF3

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	1e6	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	1e6	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(3, 3)$	q_3	1e13	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	60	Nm s/rad

Tabelle A.7: EOL: Parametrierung KF3 inkl. Prädiktion

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	1e6	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	1e6	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(3, 3)$	q_3	1e13	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	60	Nm s/rad
Prädiktionszeit	T_p	5	ms

Rollenprüfstand

B.1 Versuchsaufbau für die Messungen an der realen Anlage

Für die Messungen am Rollenprüfstand (detaillierte Beschreibung siehe Abschnitt 2.1.2) wird der in Abb. B.1 dargestellte Versuchsaufbau verwendet. Für die Versuche werden

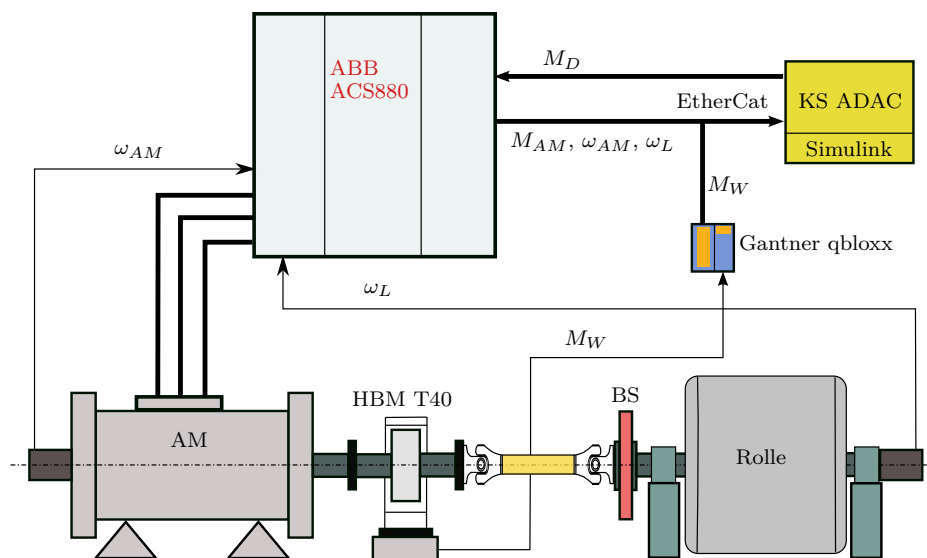


Abbildung B.1: Rolle: Versuchsaufbau

der Antriebsmaschine abwechselnd Momentensprünge in negative und positive Richtung vorgegeben. Der Sollwert der Momentensprünge wird nur gestellt vorgegeben. Von der Antriebsmaschine wird ein Luftspaltpmoment in der Höhe des Sollwertsprungs von 100 Nm aufgebracht. Da es keine Rückführung des gemessenen Drehmoments gibt, weicht das gemessene Wellenmoment durch parasitäre Effekte wie Reibung oder die

Verstimmung des Rotorwiderstands geringfügig vom Sollwert ab. Dies spielt für die Beurteilung der einzelnen Dämpfungsverfahren aber keine Rolle. Die Feststellbremse bleibt während der Versuche geöffnet. Dadurch wird die Rolle mit dem aufgebrauchten Moment beschleunigt und wieder abgebremst. Die Drehzahlen bzw. Winkelgeschwindigkeiten an der Antriebsmaschine und an der Rolle werden mittels Drehgebern aufgenommen und vom Frequenzumrichter (ABB ACS880) ausgewertet. Da die Drehzahl bei diesem Versuchsprüfstand an beiden Seiten des Wellenstrangs gemessen wird, kann die Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ direkt bestimmt und für die direkte Zusatzdämpfung eingesetzt werden oder mit dem Schätzwert aus dem Kalman-Filter verglichen werden. Der Frequenzumrichter ist über EtherCat an die übergeordnete Steuerung (KS ADAC) angebunden. Das Wellenmoment wird mit einem Drehmomentmessflansch (HBM T40B) erfasst und mithilfe einer geeigneten Messsignalverarbeitung (Gantner qbloxx zur Auswertung des Frequenzsignals vom Messflansch) ebenfalls über EtherCat an die übergeordnete Steuerung übertragen. Die Modelle der einzelnen Dämpfungsvarianten werden auf der Steuerung mit 2 kHz abgearbeitet. Das ermittelte Dämpfungsmoment M_D wird dem Frequenzumrichter über EtherCat vorgegeben.

B.2 Simulationsparameter

Sämtliche Simulationen in Abschnitt 4 werden mit einem 4-Massen-Modell (siehe Abb. B.2) mit den Parametern aus Tabelle B.1 durchgeführt. Für die Versuche wird das

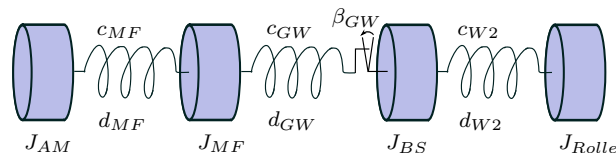


Abbildung B.2: Rolle: Simulationsmodell Wellenstrang

Sollmoment der Antriebsmaschine direkt vorgegeben. Es muss keine Drehzahlregelung berücksichtigt werden. Neben dem Spiel in der Gelenkwelle werden die Dynamik der Antriebsmaschine und die Totzeit bei der Aufschaltung des Dämpfungsmoments ($T_t = 2\text{ms}$) in der Simulation berücksichtigt. Für die exakte Parametrierung des Kalman-Filters wird das 4-Massen-System auf ein 2-Massen-System reduziert, sodass die 1. Resonanzfrequenz unverändert bleibt. Für den Kalman-Filterentwurf wird das 2-Massen-System (siehe Abb. A.3) mit den Parametern aus Tabelle B.2 verwendet. Für die Simulationen zur Beurteilung der Algorithmen in Abschnitt 5 wird die Strecke ebenfalls mit dem 2-Massen-System und den Parametern aus Tabelle B.2 ohne Spiel simuliert. Dies bietet den Vorteil, dass das Modell des Kalman-Filters die Strecke exakt

B.2 Simulationsparameter

Tabelle B.1: Rolle: Systemparameter 4-Massen-System

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
J Antriebsmaschine	J_{AM}	0,7217	kgm ²
J Messflansch	J_{MF}	0,0099	kgm ²
J Bremsscheibe	J_{BS}	0,1798	kgm ²
J Rolle	J_{Rolle}	8,6	kgm ²
c Messflansch	c_{MF}	961	kNm/rad
c Gelenkwelle	c_{GW}	50	kNm/rad
c Welle 2	c_{W2}	470	kNm/rad
d Messflansch	d_{MF}	1	Nm s/rad
d Gelenkwelle	d_{GW}	0	Nm s/rad
d Welle 2	d_{W2}	1	Nm s/rad
Spiel Gelenkwelle	β_{GW}	0.46	°
Totzeit	T_t	2	ms

Tabelle B.2: Rolle: Systemparameter 2-Massen-System

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
J Antriebsmaschine	J_{AM}	0,7316	kgm ²
J Last	J_L	8,7798	kgm ²
c Welle	c_W	40,74	kNm/rad
d Welle	d_W	0	Nm s/rad

abbildet und keine unmodellierten Teile verbleiben. In den einzelnen Versuchen kann die Parameterunsicherheit somit unabhängig von nicht im Filter modellierten Effekten wie beispielsweise dem Wellenspiel analysiert werden.

Die Parametrierungen für die Simulationen der einfachen Zusatzdämpfung und der unterschiedlichen Varianten des Kalman-Filters können Tabelle B.3 bis B.5 entnommen werden. Die Parameter für die Simulation in Abschnitt 5 können Tabelle B.6 bis B.11

Tabelle B.3: Rolle: Parametrierung einfache Zusatzdämpfung

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Filterzeitkonstante	τ_ω	0.005	s
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	120	Nm s/rad

Tabelle B.4: Rolle: Parametrierung KF3

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	8e-3	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	1e-3	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(3, 3)$	q_3	1e10	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	70	Nm s/rad

Tabelle B.5: Rolle: Parametrierung KF3 inkl. Prädiktion, Variation T_p

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	8e-3	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	1e-3	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(3, 3)$	q_3	1e10	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	70	Nm s/rad
Prädiktionszeit	T_p	2 bis 6	ms

entnommen werden.

B.2 Simulationsparameter

Tabelle B.6: Rolle: Referenzparametrierung zeitkont. KF3

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	1e-8	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	3e-2	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(3, 3)$	q_3	1	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	70	Nm s/rad

Tabelle B.7: Rolle: Parametrierung zeitkont. KF3 durch Algorithmus (ohne Parameterunsicherheit)

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	-0.06025	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	6.025e8	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(3, 3)$	q_3	4.644	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	70	Nm s/rad
Entwurfsparameter ω_1	ω_1	1e-5	rad/s
Entwurfsparameter ω_k	ω_k	1e5	rad/s

Tabelle B.8: Rolle: Parametrierung zeitkont. KF3 durch Algorithmus (mit Parameterunsicherheit)

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	-0.051328	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	5.1328e8	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(3, 3)$	q_3	3.9574e10	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	70	Nm s/rad
J Last	J_L^*	1e5 J_L	kgm ²
Entwurfsparameter ω_1	ω_1	1e-5	rad/s
Entwurfsparameter ω_2	ω_2	1e5	rad/s

Tabelle B.9: Rolle: Referenzparametrierung zeitdisk. KF3 inkl. Prädiktion

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	8e-3	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	1e-3	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(3, 3)$	q_3	1e10	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	70	Nm s/rad
Prädiktionszeit	T_p	2	ms

Tabelle B.10: Rolle: Parametrierung zeitdisk. KF3 inkl. Prädiktion durch Algorithmus (ohne Parameterunsicherheit)

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	0.679217	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	1.25582e17	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(3, 3)$	q_3	9.65613e8	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	70	Nm s/rad
Prädiktionszeit	T_p	2	ms
Entwurfsparameter ω_1	ω_1	1e-5	rad/s
Entwurfsparameter ω_k	ω_k	1e5	rad/s

B.2 Simulationsparameter

Tabelle B.11: Rolle: Parametrierung zeitdisk. KF3 inkl. Prädiktion durch Algorithmus (mit Parameterunsicherheit)

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kovarianz $\mathbf{Q}(1, 1)$	q_1	0.578745	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(2, 2)$	q_2	1.07006e17	-
Kovarianz $\mathbf{Q}(3, 3)$	q_3	8.22781e18	-
Kovarianz R	R	0.01	-
Zusatzdämpfungskonstante	d_Z	70	Nm s/rad
Prädiktionszeit	T_p	2	ms
J Last	J_L^*	1e5 J_L	kgm ²
Entwurfparameter ω_1	ω_1	1e-5	rad/s
Entwurfparameter ω_2	ω_2	1e5	rad/s

Koeffizienten von $\Delta(s)$

Definiert man als Hilfsgrößen

$$\left(\frac{1}{J_{AM}} + \frac{1}{J_L}\right) := \frac{1}{J}, \quad \left(\frac{1}{\tau_{AM}} + \frac{1}{\tau_\omega}\right) := \frac{1}{\tau} \quad (\text{C.1})$$

ergeben sich für $\Delta(s)$ gemäß (4.20) die Koeffizienten:

$$\alpha_0 = \frac{c_W}{J\tau_{AM}\tau_\omega}, \quad (\text{C.2})$$

$$\alpha_1 = \frac{c_W}{J\tau} + \frac{d_W}{J\tau_{AM}\tau_\omega} + \frac{d_Z}{J_{AM}\tau_{AM}\tau_\omega}, \quad (\text{C.3})$$

$$\alpha_2 = \frac{c_W}{J} + \frac{1}{\tau_{AM}\tau_\omega} + \frac{d_W}{J\tau}, \quad (\text{C.4})$$

$$\alpha_3 = \frac{d_W}{J} + \frac{1}{\tau}. \quad (\text{C.5})$$

Koeffizienten von d_W

Die Koeffizienten aus Bedingung (4.23) lauten mit (C.1):

$$\beta_0 = -\frac{d_Z^2}{J_{AM}^2 \tau_{AM}^2 \tau_\omega^2} + \frac{d_Z}{J_{AM} \tau_{AM}^2 \tau_\omega^2} - \frac{c_W d_Z}{J J_{AM} \tau_{AM} \tau_\omega}, \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 = & \frac{c_W}{J^2 \tau^3} + \frac{c_W^2}{J^3 \tau} - \frac{d_Z}{J J_{AM} \tau_{AM}^2 \tau_\omega^2} + \frac{1}{J \tau \tau_{AM}^2 \tau_\omega^2} \\ & + \frac{c_W d_Z}{J^2 J_{AM} \tau_{AM} \tau_\omega} + \frac{d_Z}{J J_{AM} \tau^2 \tau_{AM} \tau_\omega} - \frac{2c_W}{J^2 \tau \tau_{AM} \tau_\omega}, \end{aligned} \quad (D.2)$$

$$\beta_2 = \frac{c_W}{J^3 \tau^2} + \frac{1}{J^2 \tau^2 \tau_{AM} \tau_\omega} + \frac{d_Z}{J^2 J_{AM} \tau_{AM} \tau_\omega}, \quad (D.3)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{J^3 \tau \tau_{AM} \tau_\omega}. \quad (D.4)$$

Formt man die Bedingung $\beta_1 > 0$ weiter um, folgt:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{d_Z}{J J_{AM} \tau_{AM} \tau_\omega}}_{>0} \left(\underbrace{\frac{\tau_{AM}^2 + \tau_{AM} \tau_\omega + \tau_\omega^2}{\tau_{AM}^2 \tau_\omega^2}}_{>0} + \frac{c_W}{J} \right) \\ & + \underbrace{\frac{c_W}{J^2 \tau}}_{>0} \left(\underbrace{\frac{\tau_{AM}^2 + \tau_\omega^2}{\tau_{AM}^2 \tau_\omega^2}}_{>0} \right) + \underbrace{\frac{c_W^2}{J^3 \tau}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{J \tau \tau_{AM}^2 \tau_\omega^2}}_{>0} > 0. \end{aligned} \quad (D.5)$$

Diese Bedingung ist für positive Parameterwerte erfüllt.

Lösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades

Für die Lösung von Gleichungen bis zu Grad 4 gibt es geschlossene Lösungsformeln. Für Gleichungen höheren Grades muss im Allgemeinen auf Näherungsverfahren zurückgegriffen werden [15]. Die Lösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (\text{E.1})$$

geht auf Luigi Ferrari (1522-1565), einem Schüler von Cardano, zurück [28, 46]. Durch Substitution von

$$y = x + \frac{1}{4}a \quad (\text{E.2})$$

folgt aus (E.1) die äquivalente Gleichung

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \quad (\text{E.3})$$

mit

$$p = b - \frac{3}{8}a^2, \quad (\text{E.4})$$

$$q = c + \frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab, \quad (\text{E.5})$$

$$r = d - \frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2b - \frac{1}{4}ac. \quad (\text{E.6})$$

Aus (E.3) folgt durch quadratisches Ergänzen:

$$\begin{aligned} y^4 + 2py^2 + p^2 &= py^2 - qy - r + p^2 \\ (y^2 + p)^2 &= py^2 - qy - r + p^2. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Nun wird die Hilfsvariable z eingeführt, mit der Absicht auf der linken und rechten Seite ein vollständiges Quadrat zu erhalten und es folgt:

$$(y^2 + p + z)^2 = (p + 2z)y^2 - qy + (p^2 - r + 2pz + z^2). \quad (\text{E.8})$$

Die rechte Seite ist genau dann ein vollständiges Quadrat, wenn für die Diskriminante

$$(-q)^2 - 4(p + 2z)(p^2 - r + 2pz + z^2) = 0 \quad (\text{E.9})$$

gilt. Dies führt zur Gleichung 3. Grades

$$8z^3 + 20pz^2 + (16p^2 - 8r)z + (4p^3 - 4pr - q^2) = 0, \quad (\text{E.10})$$

die zumindest eine reelle Lösung besitzt. Die Lösungen der kubischen Gleichung können mit der cardanischen Lösungsformel ermittelt werden [28]. Mit der reellen Lösung¹ für z folgt aus (E.8):

$$(y^2 + p + z)^2 = (p + 2z) \left(y - \frac{q}{2(p + 2z)} \right)^2, \quad (\text{E.11})$$

wobei aus (E.9) ersichtlich wird, dass $p + 2z > 0$ sein muss. Zur Lösung von y erhält man die quadratischen Gleichungen:

$$y^2 - y\sqrt{p + 2z} + \frac{q}{2\sqrt{p + 2z}} + p + z = 0, \quad (\text{E.12})$$

$$y^2 + y\sqrt{p + 2z} - \frac{q}{2\sqrt{p + 2z}} + p + z = 0 \quad (\text{E.13})$$

und somit 4 Lösungen. Durch Rücksubstitution von (E.2) erhält man die Lösungen für x .

¹Bei der Existenz mehrerer reeller Lösungen führen alle Lösungen zu denselben Lösungen für x .

Alternative Vorgehensweise zur Kompensation von Unsicherheiten

Alternativ zur vorgestellten Vorgehensweise zur Kompensation der Modellunsicherheiten durch die Ermittlung der entsprechenden Skalierungsfaktoren aus den Einträgen der Kovarianzmatrix \mathbf{P}^* können die Skalierungsfaktoren auch über das Polynom (5.38) ermittelt werden.

Es ist bekannt, dass sich p_{11}^* und p_{12}^* um einen bestimmten Faktor (5.48) ändern müssen, damit die Eigenwerte des Kalman-Filters gleich bleiben. Um die Auswirkungen auf q_1^* zu analysieren, müsste das Polynom (5.38) gelöst werden und die entsprechenden Lösungen für p_{11}^* und p_{12}^* mit dem ermittelten Faktor aus (5.48) skaliert werden. Setzt man vereinfachend voraus, dass sich alle Nullstellen des Polynoms um den gewünschten konstanten Faktor ändern, können die Auswirkungen auf q_1^* ohne vollständige Lösung des Polynoms analysiert werden.

Allgemein kann ein Polynom n. Grades

$$\Delta = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \quad (\text{F.1})$$

aus den faktorisierten Lösungen dargestellt werden. Für ein Polynom vierten Grades gilt:

$$\Delta = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), \quad (\text{F.2})$$

wobei x_1 bis x_4 die Nullstellen des Polynoms darstellen. Ändern sich alle Nullstellen

um einen konstanten Faktor k , folgt:

$$\tilde{\Delta} = (x - kx_1)(x - kx_2)(x - kx_3)(x - kx_4). \quad (\text{F.3})$$

Für die Koeffizienten des Polynoms folgt:

$$b_4 = 1, \quad (\text{F.4})$$

$$b_3 = k(-x_1 - x_2 - x_3 - x_4), \quad (\text{F.5})$$

$$b_2 = k^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4), \quad (\text{F.6})$$

$$b_1 = k^3(-x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4), \quad (\text{F.7})$$

$$b_0 = k^4x_1x_2x_3x_4. \quad (\text{F.8})$$

Mit dieser Erkenntnis folgen aus dem Skalierungsfaktor aus (5.48) und den Koeffizienten a_0^* bis a_2^* des Polynoms zur Ermittlung von p_{11}^* aus (5.39) bis (5.41) die Bedingungen:

$$a_4 = 1, \quad (\text{F.9})$$

$$a_3 = 0, \quad (\text{F.10})$$

$$a_2 = \left(\frac{c_W^*}{c_W}\right)^4 a_2^*, \quad (\text{F.11})$$

$$a_1 = \left(\frac{c_W^*}{c_W}\right)^6 a_1^*, \quad (\text{F.12})$$

$$a_0 = \left(\frac{c_W^*}{c_W}\right)^8 a_0^*, \quad (\text{F.13})$$

damit die Koeffizienten des fehlerbehafteten Systems a_n^* mit jenen des Originalsystems a_n übereinstimmen. Durch den Koeffizientenvergleich können q_1^* , q_2^* und q_3^* ermittelt werden, sodass die Modellunsicherheit kompensiert wird. Für q_1^* in Abhängigkeit von q_1 ergibt sich aus (F.11):

$$\frac{2R}{c_W^2} \left(\frac{2Rw_0^2}{c_W^2} - q_1 \right) = \left(\frac{c_W^*}{c_W} \right)^4 \frac{2R}{c_W^{*2}} \left(\frac{2Rw_0^2}{c_W^{*2}} - q_1^* \right) \quad (\text{F.14})$$

und es folgt letztendlich der Zusammenhang:

$$\frac{q_1^*}{q_1} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2. \quad (\text{F.15})$$

Analog folgen aus Bedingung (F.12) und (F.13):

$$\frac{q_2^*}{q_2} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2, \quad (\text{F.16})$$

$$\frac{q_3^*}{q_3} = \left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2 \left(\frac{J_L^*}{J_L} \right)^2. \quad (\text{F.17})$$

Die Ergebnisse decken sich mit jenen aus Abschnitt 5.3.2.

Adjunkte von \mathbf{W}^*

Die Adjunkte von \mathbf{W}^* laut (5.178) sei

$$\text{Adj}[\mathbf{W}^*] := \begin{bmatrix} \text{Adj}_{11} & \text{Adj}_{12} & \text{Adj}_{13}^* \\ \text{Adj}_{21} & \text{Adj}_{22} & \text{Adj}_{23}^* \\ \text{Adj}_{31}^* & \text{Adj}_{32}^* & \text{Adj}_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{G.1})$$

wobei für die einzelnen Elemente

$$\begin{aligned} \text{Adj}_{11} &= w_{22}w_{33} - w_{23}^*w_{32} \\ &= (z - 1)(z + bk\omega_0 - 1), \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

$$\begin{aligned} \text{Adj}_{12} &= w_{13}^*w_{32} - w_{12}w_{33} \\ &= k(z - 1), \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Adj}_{13}^* &= w_{12}w_{23}^* - w_{13}^*w_{22} \\ &= -\frac{k^2}{J_L^*} - \frac{bk}{J_L^*\omega_0}(z + bk\omega_0 - 1), \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

$$\begin{aligned} \text{Adj}_{21} &= w_{23}^*w_{31}^* - w_{21}w_{33} \\ &= -k\omega_0^2(z - 1) - c_W \left[kk_1\omega_0^2 + k_2(bk\omega_0 - 1) \right] (z - 1) - \frac{c_W k k_3}{J_L} z, \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

$$\begin{aligned} \text{Adj}_{22} &= w_{11}w_{33} - w_{13}^*w_{31}^* \\ &= (z - 1) \left[-1 - c_W k_1 - c_W k k_2 + bk(1 + c_W k_1)\omega_0 + z \right] + \frac{bc_W k k_3}{J_L \omega_0} z, \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

$$\begin{aligned} \text{Adj}_{23}^* &= w_{13}^*w_{21} - w_{11}w_{23}^* \\ &= \frac{k}{J_L^*\omega_0} \left(-bc_W k_2 + \omega_0 + c_W k k_2 \omega_0 + b^2 c_W k k_2 \omega_0 + c_W k_1 \omega_0 - \omega_0 z \right), \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

$$\begin{aligned} Adj_{31}^* &= w_{21}w_{32} - w_{22}w_{31} \\ &= \frac{c_W J_L^* k_3}{J_L} (z + bk\omega_0 - 1), \end{aligned} \tag{G.8}$$

$$\begin{aligned} Adj_{32}^* &= w_{12}w_{31}^* - w_{11}w_{32} \\ &= \frac{c_W J_L^* k k_3}{J_L}, \end{aligned} \tag{G.9}$$

$$\begin{aligned} Adj_{33} &= w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} \\ &= \frac{b^2 k^2 c_W k_3}{J_L} + b^2 k^2 \omega_0^2 (1 + c_W k_1) + bk c_W k_1 \omega_0 (z - 2) + \\ &\quad \frac{bk c_W k_3 (z - 1)}{J_L \omega_0} + 2bk\omega_0 (z - 1) + \frac{c_W k^2 k_3}{J_L} + \\ &\quad (1 + c_W k_1) (1 + k^2 \omega_0^2) - (2 + c_W k_1 + c_W k k_2) z + z^2. \end{aligned} \tag{G.10}$$

gilt.

Analyse einer bilinearen Transformation der Riccati Gleichung

Aufgrund der im Allgemeinen sehr komplexen Lösung der algebraischen Matrix Riccati Gleichung existiert eine breite Literatur zu alternativen Lösungsansätzen. Neben Superpositionsgesetzen zur Berechnung der allgemeinen Lösungen aus einer endlichen Anzahl bekannten Lösungen [99, 114] existieren Verfahren zur analytischen Lösung mithilfe von Übertragungsfunktionen [71] oder Verfahren mithilfe der Transformation in Lyapunov Matrix Differentialgleichungen [84]. Die Mehrheit dieser Verfahren lässt sich aufgrund der beträchtlichen Komplexität nur für numerische Systeme sinnvoll anwenden. Darüber hinaus gibt es zahlreiche Beiträge über die Äquivalenz zwischen der zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Form der Matrix Riccati Gleichung (z. B. [49, 113, 140]). Durch das geschickte Ausnutzen dieser Zusammenhänge und mithilfe der in Kapitel 5 hergeleiteten analytischen Lösung der zeitkontinuierlichen algebraischen Riccati Gleichung für das Kalman-Filter 3. Ordnung kann die zeitdiskrete Riccati Gleichung analysiert werden.

Somit kann alternativ zur Analyse der zeitdiskreten algebraischen Riccati Gleichung in Abschnitt 5.5.2 für die Untersuchung der Skalierung eine Bilineartransformation [16, 17, 49, 67] angewendet werden und dadurch ein Zusammenhang zur zeitkontinuierlichen Riccati Gleichung hergestellt werden. Die allgemeine, diskrete algebraische Riccati Gleichung

$$\mathbf{P} = \Phi^T \mathbf{P} \Phi - (\Phi^T \mathbf{P} \mathbf{H} + \mathbf{N}) (\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{P} \Phi + \mathbf{N}^T) + \mathbf{Q} \quad (\text{H.1})$$

kann mithilfe der vorgestellten Transformation in die äquivalente "zeitkontinuierliche" algebraische Riccati Gleichung transformiert werden [16]. Hierbei seien Φ , \mathbf{H} und \mathbf{N}

reelle Matrizen mit den Dimensionen $n \times n$, $n \times m$, $n \times m$. Die Kovarianzmatrizen \mathbf{R} und \mathbf{Q} seien reelle, symmetrische Matrizen mit den Dimensionen $m \times m$ und $n \times n$. \mathbf{P} entspricht der symmetrischen Lösung der diskreten Riccati Gleichung. Wird davon ausgegangen, dass Φ keine Eigenwerte bei -1 besitzt, und definiert man mithilfe der inversen Bilineartransformation:

$$\mathbf{F} := (\Phi + \mathbf{E})^{-1} (\Phi - \mathbf{E}), \quad (\text{H.2})$$

$$\mathbf{G} := (\Phi + \mathbf{E})^{-2} \mathbf{H}, \quad (\text{H.3})$$

$$\mathbf{W} := \mathbf{R} + \mathbf{H}^T (\Phi^T + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{Q} (\Phi + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{H} - \mathbf{N}^T (\Phi + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{H} - \mathbf{H}^T (\Phi^T + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{N}, \quad (\text{H.4})$$

$$\mathbf{L} := -\mathbf{Q} (\Phi + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{N}, \quad (\text{H.5})$$

kann die kontinuierliche algebraische Riccati Gleichung

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\tilde{\mathbf{P}} - (\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{G} + \mathbf{L})\mathbf{W}^{-1}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{G} + \mathbf{L})^T + \mathbf{Q} = 0 \quad (\text{H.6})$$

angegeben werden. Die Lösung $\tilde{\mathbf{P}}$ der erhaltenen kontinuierlichen Riccati Gleichung steht in folgendem Zusammenhang zur Lösung \mathbf{P} der diskreten Riccati Gleichung:

$$\mathbf{P} = 2 (\Phi^T + \mathbf{E})^{-1} \tilde{\mathbf{P}} (\Phi + \mathbf{E})^{-1}. \quad (\text{H.7})$$

Die Transformation ermöglicht es, eine äquivalente "zeitkontinuierliche" Riccati Gleichung zu finden und zu lösen. Diese lässt sich durch die einfachere Struktur leichter lösen. Um die allgemeine Gleichung (H.1) in die Form von (5.150) für das unsichere System überzuführen, muss

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (\text{H.8})$$

gelten und für (H.2) bis (H.5) und (H.7) folgen mit

$$\Phi = \Phi^{*T}, \quad (\text{H.9})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}^{*T} \quad (\text{H.10})$$

die recht einfachen Zusammenhänge:

$$\mathbf{F}^* := (\Phi + \mathbf{E})^{-1} (\Phi - \mathbf{E})$$

$$:= \underbrace{\frac{\tan\left(\frac{1}{2}\omega_0 T_d\right)}{\omega_0}}_a \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_L^*} & 0 \end{bmatrix} = a\mathbf{A}^{*T}, \quad (\text{H.11})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* &:= (\mathbf{\Phi} + \mathbf{E})^{-2} \mathbf{H} \\ &:= \frac{ac_W^*}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{a} - \omega_0^2 a \\ 2 \\ \frac{a}{J_L^*} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}^*}, \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^* &:= \mathbf{R} + \mathbf{H}^T (\mathbf{\Phi}^T + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{Q}^* (\mathbf{\Phi} + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{H} \\ &:= \frac{c_W^{*2}}{4} \left(\frac{4R}{c_W^{*2}} + q_1^* + q_2^* a^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^* &:= -\mathbf{Q}^* (\mathbf{\Phi} + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{H} \\ &:= \frac{ac_W^*}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{q_1^*}{a} \\ -q_2^* \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{l}^*}, \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

$$\mathbf{P}^* = 2(\mathbf{\Phi} + \mathbf{E})^{-1} \tilde{\mathbf{P}} (\mathbf{\Phi}^T + \mathbf{E})^{-1}. \quad (\text{H.15})$$

Interessant ist vor allem, dass \mathbf{F}^* der mit a skalierten Systemmatrix \mathbf{A}^* entspricht. Für (H.6) folgt:

$$0 = a \left[\mathbf{A}^* \tilde{\mathbf{P}}^* + \tilde{\mathbf{P}}^* \mathbf{A}^{*T} - \frac{c_W^{*2}}{4R + c_W^{*2} (q_1^* + q_2^* a^2)} (\tilde{\mathbf{P}}^* \mathbf{g}^* + \mathbf{l}^*) (\mathbf{g}^{*T} \tilde{\mathbf{P}}^* + \mathbf{l}^{*T}) + \frac{\mathbf{Q}^*}{a} \right]. \quad (\text{H.16})$$

Matrix \mathbf{A}^* kann in einen Teil mit Unsicherheit und einen Teil ohne Unsicherheit aufgespalten werden:

$$\mathbf{A}^* = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_L^*} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^*}. \quad (\text{H.17})$$

Für (H.16) folgt somit:

$$\begin{aligned} 0 = & a \left[\mathbf{M}\mathbf{T}^*\tilde{\mathbf{P}}^* + \tilde{\mathbf{P}}^*\mathbf{T}^*\mathbf{M}^T - \frac{c_W^{*2}}{4R + c_W^{*2}(q_1^* + q_2^*a^2)} (\tilde{\mathbf{P}}^*\mathbf{T}^* \right. \\ & \underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{a} - \omega_0^2 a\right)^2 & 2\left(\frac{1}{a} - \omega_0^2 a\right) & 1 - \omega_0^2 a^2 \\ 2\left(\frac{1}{a} - \omega_0^2 a\right) & 4 & 2a \\ 1 - \omega_0^2 a^2 & 2a & a^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \mathbf{T}^*\tilde{\mathbf{P}}^* + \\ & \underbrace{\begin{bmatrix} q_1^* \left(\frac{1}{a} - \omega_0^2\right) & q_1^* \frac{2}{a} & q_1^* \\ -q_2^* \left(\frac{1}{a} - \omega_0^2 a\right) & -2q_2^* 2 & -q_2^* a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^*} \mathbf{T}^*\tilde{\mathbf{P}}^* + \\ & \left. \tilde{\mathbf{P}}^*\mathbf{T}^* \underbrace{\begin{bmatrix} q_1^* \left(\frac{1}{a} - \omega_0^2\right) & -q_2^* \left(\frac{1}{a} - \omega_0^2 a\right) & 0 \\ q_1^* \frac{2}{a} & 0 & 0 \\ q_1^* & -q_2^* a & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^{*T}} + \underbrace{\begin{bmatrix} q_1^{*2} \frac{1}{a^2} & -\frac{q_1^* q_2^*}{a} & 0 \\ -\frac{q_1^* q_2^*}{a} & -q_2^{*2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^*} \right) + \frac{1}{a} \mathbf{Q}^* \right]. \quad (\text{H.18}) \end{aligned}$$

Um die Einflüsse der Unsicherheit von c_W zu kompensieren, werden die Element q_1^* und q_2^* sowie die Matrix $\tilde{\mathbf{P}}^*$ mit $\left(\frac{c_W}{c_W^*}\right)^2$ skaliert. Um die Einflüsse der Unsicherheit von J_L in den Matrizen \mathbf{T}^* zu kompensieren, muss \mathbf{P}^* durch einen zusätzlichen Faktor skaliert werden. Matrix \mathbf{T}^* wird in Gleichung (H.18) entweder von links oder rechts

mit $\tilde{\mathbf{P}}^*$ multipliziert. Aus diesem Grund wird die Matrix $\tilde{\mathbf{P}}^*$ von links und rechts mit der Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_L^*}{J_L} \end{bmatrix} \quad (\text{H.19})$$

multipliziert. Mit diesen Skalierungen folgt:

$$\tilde{\mathbf{P}}^* = \underbrace{\left(\frac{c_W}{c_W^*} \right)^2}_l \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{S}. \quad (\text{H.20})$$

Dies entspricht (5.160). Wird $\tilde{\mathbf{P}}^*$ entsprechend (H.20) gewählt, werden die Einflüsse der Unsicherheiten vollständig kompensiert. Es muss jedoch noch sichergestellt werden, dass diese Skalierung das Gleichungssystem bzw. dessen Lösungen nicht beeinflusst. Setzt man die Skalierung in (H.18) ein, folgt:

$$0 = a \left[l \underbrace{\mathbf{M} \mathbf{T}^* \mathbf{S}}_{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{S} + l \tilde{\mathbf{S}} \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{T}^*}_{\mathbf{T}} \mathbf{M}^T - \frac{c_W^{*2}}{4R + c_W^{*2} (q_1^* + q_2^* a^2)} \left(l^2 \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{P} \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{T}^*}_{\mathbf{T}} \mathbf{J} \underbrace{\mathbf{T}^* \mathbf{S}}_{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{S} + \right. \right. \\ \left. \left. l \mathbf{U}^* \underbrace{\mathbf{T}^* \mathbf{S}}_{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{S} + l \tilde{\mathbf{S}} \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{T}^*}_{\mathbf{T}} \mathbf{U}^{*T} + \mathbf{V}^* \right) + \frac{1}{a} \mathbf{Q}^* \right]. \quad (\text{H.21})$$

Durch die Struktur von \mathbf{M} , \mathbf{U}^* , \mathbf{V}^* und \mathbf{S} gilt:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} \mathbf{M}, \quad (\text{H.22})$$

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^T \mathbf{S}, \quad (\text{H.23})$$

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{S} \mathbf{U}^*, \quad (\text{H.24})$$

$$\mathbf{U}^{*T} = \mathbf{U}^{*T} \mathbf{S}, \quad (\text{H.25})$$

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{S} \mathbf{V}^*, \quad (\text{H.26})$$

$$\mathbf{V}^{*T} = \mathbf{V}^{*T} \mathbf{S}. \quad (\text{H.27})$$

Wird (H.21) entsprechend erweitert, folgt:

$$0 = a \left[l \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{S} + l \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{P} \mathbf{T} \mathbf{M}^T \mathbf{S} - \frac{c_W^2}{4R + c_W^2 (q_1^* + q_2^* a^2)} \left(l \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{P} \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{S} + \right. \right.$$

$$\mathbf{S}\mathbf{U}^*\mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{S} + \mathbf{S}\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{T}\mathbf{U}^{*T}\mathbf{S} + \frac{1}{l}\mathbf{S}\mathbf{V}^*\mathbf{S} \Big) + \frac{1}{a}\mathbf{Q}^* \Big]. \quad (\text{H.28})$$

Damit die Lösung des Gleichungssystems durch die Skalierung nicht verändert wird, müssen alle Elemente um den gleichen Faktor erweitert werden. Um dies zu gewährleisten und die Unsicherheit von c_W zu kompensieren, müssen zusätzlich die Skalierungen

$$\mathbf{U}^* = l\mathbf{U}, \quad (\text{H.29})$$

$$\mathbf{V}^* = l^2\mathbf{V}, \quad (\text{H.30})$$

$$\mathbf{Q}^* = l\mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{S} \quad (\text{H.31})$$

gelten. Für die Skalierung von \mathbf{Q}^* folgt die gleiche Skalierung (5.165) wie für die Riccati Gleichung. Da \mathbf{U}^* und \mathbf{V}^* nur die unsicheren Parameter q_1^* und q_2^* enthalten, kann die Unsicherheit in diesen beiden Elementen ebenfalls durch eine Skalierung mit l kompensiert werden. Mit den Skalierungen $q_1^* = \left(\frac{c_W}{c_W^*}\right)^2 q_1$ und $q_2^* = \left(\frac{c_W}{c_W^*}\right)^2 q_2$ folgt für Gleichung (H.28):

$$0 = a l\mathbf{S} \left[\mathbf{M}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{T}\mathbf{M}^T - \frac{c_W^2}{4R + c_W^2 (q_1 + q_2 a^2)} \left(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{U}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{T}\mathbf{U}^T + \mathbf{V} \right) + \frac{1}{a}\mathbf{Q} \right] \mathbf{S}. \quad (\text{H.32})$$

Alle Unsicherheiten werden vollständig kompensiert und die Lösungen des Gleichungssystems werden nicht verändert, da alle Elemente mit denselben Faktoren skaliert werden. Abschließend muss noch die Rückrechnung auf \mathbf{P} aus (H.15) analysiert werden.

Setzt man für Φ^* (5.144) ein, folgt nach einigen Umformungen für (H.15):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^* &= \frac{1}{2} (2\mathbf{E} + k\mathbf{\Psi}\mathbf{T}^*) \mathbf{P}^* (k\mathbf{T}^*\mathbf{\Psi}^T + 2\mathbf{E}) \\ \tilde{\mathbf{P}}^* &= \frac{1}{2} (2k\mathbf{P}^*\mathbf{T}^*\mathbf{\Psi}^T + k^2\mathbf{\Psi}\mathbf{T}^*\mathbf{P}^*\mathbf{T}^*\mathbf{\Psi}^T + 4\mathbf{P}^* + 2k\mathbf{\Psi}\mathbf{T}^*\mathbf{P}^*). \end{aligned} \quad (\text{H.33})$$

Setzt man für \mathbf{P}^* und $\tilde{\mathbf{P}}^*$ die gleiche Skalierung (H.20) ein, folgt:

$$l\mathbf{S}\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{S} = \frac{l}{2} \left(2k\mathbf{S}\mathbf{P}\underbrace{\mathbf{S}\mathbf{T}^*}_{\mathbf{T}}\mathbf{\Psi}^T + k^2\mathbf{\Psi}\underbrace{\mathbf{T}^*\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}\mathbf{P}\underbrace{\mathbf{S}\mathbf{T}^*}_{\mathbf{T}}\mathbf{\Psi}^T + 4\mathbf{S}\mathbf{P}\mathbf{S} + 2k\mathbf{\Psi}\underbrace{\mathbf{T}^*\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{S} \right). \quad (\text{H.34})$$

Durch (5.163) kann die rechte Seite der Gleichung entsprechend erweitert werden:

$$l\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{S} = \frac{l}{2}\mathbf{S} \left(2k\mathbf{P}\mathbf{T}\boldsymbol{\Psi}^T + k^2\boldsymbol{\Psi}\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{T}\boldsymbol{\Psi}^T + 4\mathbf{P} + 2k\boldsymbol{\Psi}\mathbf{T}\mathbf{P} \right) \mathbf{S}. \quad (\text{H.35})$$

Durch die ermittelte Skalierung können auch die Unsicherheiten bei der Rückrechnung auf \mathbf{P} vollkommen kompensiert werden. Die Ergebnisse decken sich mit jenen aus Abschnitt 5.5.2.

Literaturverzeichnis

- [1] ALBERS, A. ; SCHWARZ, A. ; HETTEL, R. ; BEHRENDT, M.: Automatische Identifizierung und Analyse von NVH Phänomenen im Fahrzeug auf dem Rollenprüfstand. In: *38. Jahrestagung für Akustik, Darmstadt*, 2012
- [2] AMANN, N. ; BOCKER, J. ; PRENNER, F.: Active damping of drive train oscillations for an electrically driven vehicle. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 9 (2004), Nr. 4, S. 697–700
- [3] AMMAN, H.M. ; NEUDECKER, H.: Numerical Solutions of the Algebraic Matrix Riccati Equation. In: *Journal of Economic Dynamics and Control* 21 (1997), S. 363–369
- [4] ANDERSON, B.D.O ; MOORE, J.B.: *Linear Optimal Control*. Prentice-Hall, 1971 (Networks series)
- [5] ANGERINGER, U. ; HORN, M.: Sliding mode drive line control for an electrically driven vehicle. In: *2011 IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, 2011, S. 521–526
- [6] BAR-SHALOM, Y. ; LI, X.R. ; KIRUBARAJAN, T.: *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. Wiley, 2004
- [7] BARGENDE, M. ; REUSS, H.C. ; WIEDEMANN, J.: *14. Internationales Stuttgarter Symposium: Automobil- und Motorentechnik*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014 (Proceedings)
- [8] BAUER, R. ; LANG, M. ; PRESSL, B. ; ROSSEGGER, W. ; VOIT, F.: *AT 512 550 B1, Verfahren zur Dämpfung von Schwingungen*. Österreichisches Patentamt, 2013
- [9] BEINECKE, S. ; SCHÜTTE, F. ; GROSTOLLEN, H.: Comparison of methods for state estimation and on-line identification in speed and position control loops. In: *Proceedings Int. Conf. EPE* (1997), S. 3364–3369

- [10] BELLANGER, M.: *Adaptive Digital Filters*. Taylor & Francis, 2001 (Signal Processing and Communications)
- [11] BENDEL, R.: *DE 3808524 C2, Regeleinrichtung für einen Prüfstand zum Prüfen von Kraftfahrzeugantriebsaggregaten*. Deutsches Patentamt, 1990
- [12] BETTES, H. ; HANCOCK, B.: *Dyno Testing and Tuning*. North Branch : CarTech, 2008 (Performance how-to)
- [13] BÖCKER, J. ; AMANN, N. ; SCHULZ, B.: Active suppression of torsional oscillations. In: *Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on Mechatronic Systems, Sydney 37* (2004), S. 325–329
- [14] BROCK, S. ; DESKUR, J. ; JANISZEWSKI, D. ; MUSZYNSKI, R.: Active damping of torsional vibrations in servodrives. In: *Power electronics and electrical drives. Selected problems. Ed. by Teresa Orłowska-Kowalska, Oficyna Wydawnicza PWr., Wrocław* (2007), S. 278–297
- [15] BUCHER, S.: *Anwendungsorientierte Mathematik für Techniker*. Carl Hanser Verlag GmbH & Company KG, 2015
- [16] CHEN, B.M.: *Robust and H_∞ Control*. London, Berlin, Heidelberg : Springer, 2000
- [17] CURTAIN, R. ; OOSTVEEN, J.: Bilinear Transformations Between Discrete- And Continuous-Time Infinite-Dimensional Linear Systems. (1997)
- [18] CYCHOWSKI, M. ; SERKIES, P. ; NALEPA, R. ; SZABAT, K.: Model predictive speed and vibration control of dual-inertia PMSM Drives. In: *2011 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2011, S. 1919–1924
- [19] CYCHOWSKI, M.T. ; SZABAT, K.: Efficient real-time model predictive control of the drive system with elastic transmission. In: *IET Control Theory Applications* 4 (2010), Nr. 1, S. 37–49
- [20] DELCHAMPS, D.: Analytic feedback control and the algebraic Riccati equation. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 29 (1984), Nr. 11, S. 1031–1033
- [21] DHAOUADI, R. ; KUBO, K. ; TOBISE, M.: Two-degree-of-freedom robust speed controller for high-performance rolling mill drives. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 29 (1993), Nr. 5, S. 919–926
- [22] DONATEO, T. ; GIOVINAZZI, M.: Building a cycle for Real Driving Emissions. In: *Energy Procedia* 126 (2017), Nr. Supplement C, S. 891–898. – ATI 2017 - 72nd Conference of the Italian Thermal Machines Engineering Association

- [23] DOURDOUMAS, N. ; HORN, M.: *Regelungstechnik, Rechnerunterstützter Entwurf zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Regelkreise*. Paerson Studium Verlag, 2004
- [24] DÜSER, T. ; GRAVEL, R. ; HAASE, A. ; OLMS, H. ; SCHMIDT, C. ; SCHMIDT, U.: *Fahrzeugrollenprüfstände - Von der Zertifizierung bis hin zur mechatronischen Entwicklungsplattform*. München : Süddeutscher Verlag Onpact, 2011
- [25] EDELMANN, J. ; PLÖCHL, M. ; PFEFFER, P.E.: *Advanced Vehicle Control: Proceedings of the 13th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC'16), September 13-16, 2016, Munich, Germany*. CRC Press, 2016
- [26] EDER, T.: Frontloading in der Antriebsstrangentwicklung. In: *MTZ - Motortechnische Zeitschrift* 76 (2015), S. 23–31
- [27] ELLIS, G. ; GAO, Z.: Cures for low-frequency mechanical resonance in industrial servo systems. In: *Conference Record - IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society)* Bd. 1, 2001, S. 252–258
- [28] ENGEL, J. ; FEST, A.: *Komplexe Zahlen und ebene Geometrie*. De Gruyter, 2016 (De Gruyter Studium)
- [29] FÖLLINGER, O.: *Nichtlineare Regelungen 1, Grundbegriffe, Anwendung der Zustandsebene, Direkte Methode*. München, Wien : R. Oldenbourg Verlag, 1998
- [30] FUENTES, E.J. ; SILVA, C.A. ; YUZ, J.I.: Predictive Speed Control of a Two-Mass System Driven by a Permanent Magnet Synchronous Motor. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 59 (2012), Nr. 7, S. 2840–2848
- [31] GAUSCH, F. ; HOFER, A. ; SCHLACHER, K.: *Digitale Regelkreise: ein einfacher Einstieg mit dem Programm μ LINSY*. Oldenbourg, 1991 (Methoden der Regelungs- und Automatisierungstechnik)
- [32] GAWRONSKI, W.: Control and Pointing Challenges of Large Antennas and Telescopes. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 15 (2007), Nr. 2, S. 276–289
- [33] GEIGER, W. ; KOTTE, W.: *Handbuch Qualität: Grundlagen und Elemente des Qualitätsmanagements: Systeme - Perspektiven*. Vieweg+Teubner Verlag, 2007
- [34] GELB, A. ; KASPER, J.F. ; NASH, R.A. ; PRICE, C.F. ; SUTHERLAND, A.A.: *Applied Optimal Estimation*. Cambridge, MA : MIT Press, 1974
- [35] GENTA, G. ; MORELLO, L. ; CAVALLINO, F. ; FILTRI, L.: *The Motor Car: Past, Present and Future*. Springer Netherlands, 2014 (Mechanical Engineering Series)

- [36] GEORGE, J. ; CRASSIDIS, J. L.: Sensitivity Analysis of Disturbance Accommodating Control with Kalman Filter Estimation. In: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, 2007
- [37] GERMANN, S.: *EP 1 333 268 A2, Verfahren und Vorrichtung zum Prüfen eines Fahrzeug-Antriebsstrangs*. Europäisches Patentamt, 2002
- [38] GREWAL, M.S. ; ANDREWS, A.P.: *Kalman Filtering. Theorie and Practice Using MATLAB*. New York : Wiley Verlag, 2001
- [39] GRUENBACHER, E. ; MARCONI, L.: Idle Mode Control on a Combustion Engine Test Bench via Internal Model Control. (2009), S. 2045–2050
- [40] GRUENBACHER, E. ; RE, L. del ; KOKAL, H. ; SCHMIDT, M. ; PAULWEBER, M.: Online trajectory shaping strategy for dynamical engine test benches. In: *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 2006, S. 3104–3109
- [41] GRUENBACHER, E. ; RE, L.D.: Robust inverse control for combustion engine test benches. In: *2008 American Control Conference*, 2008, S. 2852–2857
- [42] HAPPIAN-SMITH, J.: *An Introduction to Modern Vehicle Design*. Butterworth-Heinemann, 2002
- [43] HATCH, M.R.: *Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS*. Taylor & Francis, 2000 (Mechanical engineering / Applied mathematics Bd. 10)
- [44] HAYKIN, S.S.: *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 1996 (Prentice-Hall information and system sciences series)
- [45] HELM, S. ; JAKUBEK, S.: Impedance based control for internal combustion engine test beds. In: *IFAC Proceedings Volumes 43* (2010), Nr. 7, S. 443–448. – 6th IFAC Symposium on Advances in Automotive Control
- [46] HERRMANN, D.: *Mathematik im Mittelalter: Die Geschichte der Mathematik des Abendlands mit ihren Quellen in China, Indien und im Islam*. Springer Berlin Heidelberg, 2016
- [47] HORI, Y. ; ISEKI, H. ; SUGIURA, K.: Basic Considerations of Vibration Suppression and Disturbance Rejection Control of Multi-inertia System using SFLAC (State Feedback and Load Acceleration Control). In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 30 (1994), Nr. 4, S. 889–896

- [48] HORI, Y. ; SAWADA, H. ; YEONGHAN, C.: Slow resonance ratio control for vibration suppression and disturbance rejection in torsional system. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 46 (1999), Nr. 1, S. 162–168
- [49] HUNG, Y.S ; CHU, D.L.: Relationships Between Discrete-Time and Continuous-Time Algebraic Riccati Inequalities. In: *Linear Algebra and its Applications* 270 (1998), S. 287–313
- [50] ISERMANN, R.: *Elektronisches Management motorischer Fahrzeugantriebe: Elektronik, Modellbildung, Regelung und Diagnose für Verbrennungsmotoren, Getriebe und Elektroantriebe*. Vieweg+Teubner Verlag, 2010 (ATZ/MTZ-Fachbuch)
- [51] ITOH, K. ; IWASAKI, M. ; MATSUI, N.: Optimal design of robust vibration suppression controller using genetic algorithms. In: *7th International Workshop on Advanced Motion Control. Proceedings (Cat. No.02TH8623)*, 2002, S. 86–91
- [52] IWASAKI, M. ; MATSUI, N.: Robust speed control of IM with torque feedforward control. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 40 (1993), Nr. 6, S. 553–560
- [53] IZUMIKAWA, Y. ; YUBAI, K. ; HIRAI, J.: Fault-tolerant control system of flexible arm for sensor fault by using reaction force observer. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 10 (2005), Nr. 4, S. 391–396
- [54] JI, J. ; SUL, S.: Kalman filter and LQ based speed controller for torsional vibration suppression in a 2-mass motor drive system. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 42 (1995), Nr. 6, S. 564–571
- [55] JINBANG, X. ; WENYU, W. ; ANWEN, S. ; YU, Z.: Detection and reduction of middle frequency resonance for an industrial servo. In: *Control Engineering Practice* 21 (2013), Nr. 7, S. 899–907
- [56] JWO, D.J.: Optimisation and sensitivity analysis of GPS receiver tracking loops in dynamic environments. In: *IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation* 148 (2001), Nr. 4, S. 241–250
- [57] JWO, D.J.: Remarks on the Kalman filtering simulation and verification. In: *Applied Mathematics and Computation* 186 (2007), Nr. 1, S. 159–174
- [58] JWO, D.J. ; TA-SHUN, C.: A practical note on evaluating Kalman filter performance optimality and degradation. In: *Applied Mathematics and Computation* 193 (2007), Nr. 2, S. 482–505

- [59] KALMAN, R.E. ; BUCY, R.S.: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. In: *ASME Journal of Basic Engineering, Series D* 83 (1961), S. 95–108
- [60] KAMM, W. ; HOFFMEISTER, O. ; HUBER, L. ; RIECKERT, P. ; SCHMID, C. ; SCHMID, P.: *Das Kraftfahrzeug: Betriebsgrundlagen, Berechnung, Gestaltung und Versuch*. Berlin : Julius Springer, 1936
- [61] KAMM, W. ; SCHMID, C.: *Das Versuchs- und Meßwesen auf dem Gebiet des Kraftfahrzeugs*. Julius Springer Berlin, 1938
- [62] KATSURA, S. ; OHNISHI, K.: Absolute Stabilization of Multimass Resonant System by Phase-Lead Compensator Based on Disturbance Observer. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 54 (2007), Nr. 6, S. 3389–3396
- [63] KILLEDAR, J.S.: *Dynamometer: Theory and Application to Engine Testing*. Bloomington : Xlibris Corporation LLC, 2012
- [64] KLEIN, S. ; SAVELSBERG, R. ; XIA, F. ; GUSE, D. ; ANDERT, J. ; BLOCHWITZ, T. ; BELLANGER, C. ; WALTER, S. ; BERINGER, S. ; JOCHHEIM, J. ; AMRINGER, N.: Engine in the Loop: Closed Loop Test Bench Control with Real-Time Simulation. In: *SAE Int. J. Commer. Veh.* 10 (2017), S. 95–105
- [65] KOKAL, H. ; COLANERI, P. ; RE, L. del ; SCHMIDT, M. ; PAULWEBER, M.: Feed forward disturbance rejection by a multiple FIFO approach for transient operation of an engine test bench. In: *2013 IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, 2013, S. 65–70
- [66] KOMADA, S. ; IYAMA, K. ; YUBAI, K. ; HORI, T.: Suppression of limit cycle and improvement of robust performance in two-mass resonant systems with nonlinearity. In: *Industrial Electronics Society, 2001. IECON '01. The 27th Annual Conference of the IEEE* Bd. 3, 2001, S. 1704–1709
- [67] KONDO, R. ; FURUTA, K.: On the bilinear transformation of Riccati equations. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 31 (1986), Nr. 1, S. 50–54
- [68] KUCERA, V.: The Discrete Riccati Equation of Optimal Control. In: *Kybernetika* 8 (1972), Nr. 5, S. 430–447
- [69] KUNKEL, R. ; SCHAMMER, K. ; ISCHEN, P. ; BATHELT, H.: Combined vehicle chassis dynamometer and powertrain test stand for NVH development. In: *ATZ worldwide* 107 (2005), Nr. 4, S. 10–13

- [70] LANDAU, I.D. ; AIRIMITOAI, T.B. ; CASTELLANOS-SILVA, A. ; CONSTANTINESCU, A.: *Adaptive and Robust Active Vibration Control: Methodology and Tests*. Springer International Publishing, 2016 (Advances in Industrial Control)
- [71] LEDYAEV, Y.: On analytical solutions of matrix Riccati equations. 273 (2011), S. 214–228
- [72] LEWIS, F.L. ; XIE, L. ; POPA, D.: *Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory, Second Edition*. CRC Press, 2007 (Automation and Control Engineering)
- [73] LIPO, T.: Analysis and control of torque pulsations in current fed induction motor drives. 3 (1979), S. 357–368
- [74] LITZ, L.: *Grundlagen der Automatisierungstechnik: Regelungssysteme - Steuerungssysteme - Hybride Systeme*. De Gruyter, 2013
- [75] LÓPEZ, J.D. ; ESPINOSA, J.J. ; AGUDELO, J.: Decoupled Control for Internal Combustion Engines Research Test Beds. In: *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia* 59 (2011), S. 23–31
- [76] MAHLE: *Pistons and engine testing*. Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016 (ATZ/MTZ-Fachbuch)
- [77] MAKKAPATI, V.P. ; REICHHARTINGER, M. ; HORN, M.: A Testbench for High-Speed Printing. In: *Modelling, Identification, and Control (MIC 2010)* Bd. 675, 2010, S. 161
- [78] MAKKAPATI, V.P. ; REICHHARTINGER, M. ; HORN, M.: Performance improvement of servo drives with mechanical elasticity via Extended Acceleration Feedback. In: *2012 IEEE International Conference on Control Applications*, 2012, S. 1279–1284
- [79] MARTYR, A.J. ; PLINT, M.A.: *Engine Testing (3rd Edition)*. Butterworth-Heinemann, 2007
- [80] MEINS, J. ; DÖRRSCHEIDT, F. ; LATZEL, W. ; SCHEITHAUER, R. ; WEIDENFELLER, H.: *Grundlagen der Regelungstechnik*. Berlin : Vieweg Teubner Verlag, 2013
- [81] MOLINARI, B.: The stabilizing solution of the discrete algebraic riccati equation. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 20 (1975), Nr. 3, S. 396–399
- [82] MOLLENHAUER, K. ; JOHNSON, K.G.E. ; TSCHÖKE, H.: *Handbook of Diesel Engines*. Springer Berlin Heidelberg, 2010

- [83] MUSZYNSKI, R. ; DESKUR, J.: Damping of Torsional Vibrations in High-Dynamic Industrial Drives. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 57 (2010), Nr. 2, S. 544–552
- [84] NAZARZADEH, J. ; RAZZAGHI, M. ; NIKRAVESH, K.Y.: Solution of the matrix Riccati equation for the linear quadratic control problems. In: *Mathematical and Computer Modelling* 27 (1998), Nr. 7, S. 51–55
- [85] NEHLSSEN, M. ; JEDICKE, F. ; BOGNER, E. ; SCHÖGGL, P.: Fahrbarkeitsuntersuchungen auf dem Rollenprüfstand. In: *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift* 108 (2006), Nr. 5, S. 376–381
- [86] NESTORIDES, E.J.: *A Handbook on Torsional Vibration*. Cambridge University Press, 1958 (The British internal combustion engine research association)
- [87] NORDIN, M. ; GALIC', J. ; GUTMAN, P.O.: New Models for Backlash and Gear play. In: *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 11 (1997), Nr. 1, S. 49–63
- [88] NORDIN, M. ; GUTMAN, P.O.: Controlling mechanical systems with backlash - a survey. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 10, S. 1633–1649
- [89] OHMAE, T. ; MATSUDA, T. ; KANNO, M. ; SAITO, K. ; SUKEGAWA, T.: A Microprocessor-Based Motor Speed Regulator Using Fast-Response State Observer for Reduction of Torsional Vibration. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* IA-23 (1987), Nr. 5, S. 863–871
- [90] OSHMAN, Y. ; SHAVIV, I.: Optimal tuning of a Kalman filter using genetic algorithms. In: *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit August 2000*, 2000
- [91] O'SULLIVAN, T.M. ; BINGHAM, C.M. ; SCHOFIELD, N.: High-Performance Control of Dual-Inertia Servo-Drive Systems Using Low-Cost Integrated SAW Torque Transducers. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 53 (2006), Nr. 4, S. 1226–1237
- [92] O'SULLIVAN, T.M. ; BINGHAM, C.M. ; SCHOFIELD, N.: Enhanced Servo-Control Performance of Dual-Mass Systems. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 54 (2007), Nr. 3, S. 1387–1399
- [93] PACAS, J.M. ; JOHN, A. ; EUTEBACH, T.: Automatic identification and damping of torsional vibrations in high-dynamic-drives. In: *Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Industrial Electronics* (2000), S. 201–206

- [94] PAPPAS, T. ; LAUB, A. ; SANDELL, N.: On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equation. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 25 (1980), Nr. 4, S. 631–641
- [95] PARK, T.S. ; SHIN, E.C. ; OH, W.H. ; YOO, J.Y.: Robust speed control for torsional vibration suppression of rolling mill drive system. In: *Industrial Electronics Society, 2003. IECON '03. The 29th Annual Conference of the IEEE* Bd. 1, 2003, S. 66–71 vol.1
- [96] PASSENBRUNNER, T.E. ; SASSANO, M. ; RE, L. del: Approximate optimal control of internal combustion engine test benches. In: *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 2011*, S. 8050–8055
- [97] PAULWEBER, M. ; LEBERT, K.: *Mess- und Prüfstandstechnik*. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2014
- [98] PAULWEBER, M. ; LEBERT, K.: *Powertrain Instrumentation and Test Systems: Development – Hybridization – Electrification*. Springer International Publishing, 2016 (Powertrain)
- [99] PENSKOI, A.V. ; WINTERNITZ, P.: Discrete matrix Riccati equations with superposition formulas. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 294 (2004), Nr. 2, S. 533–547
- [100] PEREZ, F. ; MOULIN, P. ; MASTRO, A. D.: Vehicle simulation on an engine test bed. In: *2008 SIA International Conference, Diesel Engines - The low CO2 & Emissions Reduction Challenge, 2008*
- [101] PLOTKIN, Y. ; STIEBLER, M. ; HOFMEYER, D.: Sixth torque harmonic in PWM inverter-fed induction drives and its compensation. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 41 (2005), Nr. 4, S. 1067–1074
- [102] PRABEL, R. ; ASCHEMANN, H.: Active oscillation damping for a truck drive train. In: *2014 19th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 2014*, S. 486–491
- [103] PREITL, S. ; PRECUP, R.: An extension of tuning relations after symmetrical optimum method for PI and PID controllers. In: *Automatica* 35 (1999), Nr. 10, S. 1731–1736
- [104] PRIESNER, R. ; WESTERMAYER, C. ; JAKUBEK, S. ; BAUER, R.: Predictive control with active disturbance rejection for elastic drive systems. In: *2012 7th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2012*, S. 196–201

- [105] REINSCHKE, K.: *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 2014
- [106] RILL, G.: *Simulation von Kraftfahrzeugen*. Vieweg, 1994 (Fundamentals and advances in the engineering sciences)
- [107] ROJAS, A.J.: On the Discrete-Time Algebraic Riccati Equation and Its Solution in Closed-Form. In: *IFAC Proceedings Volumes 44* (2011), Nr. 1, S. 162–167. – 18th IFAC World Congress
- [108] SALKIND, N.J.: *Encyclopedia of Research Design*. SAGE Publications, 2010 (Bd. 1)
- [109] SCHMIDT, M. ; KESSEL, J.A.: Model-based torque controller for dynamical engine test stands. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)* Bd. 5, 1999, S. 3245–3249
- [110] SCHMIDT, P. ; REHM, T.: Notch filter tuning for resonant frequency reduction in dual inertia systems. In: *Conference Record of the 1999 IEEE Industry Applications Conference. Thirty-Forth IAS Annual Meeting (Cat. No.99CH36370)* Bd. 3, 1999, S. 1730–1734 vol.3
- [111] SCHRÖDER, D.: *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*. Springer Berlin Heidelberg, 2009 (Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen Bd. 10)
- [112] SIMON, D.: *Optimal State Estimation. Kalman, H_∞ and nonlinear Approaches*. New Jersey : Wiley Verlag, 2006
- [113] SMITH, M.W.A. ; ROBERTS, A.P.: An exact equivalence between the discrete- and continuous-time formulations of the Kalman filter. In: *Mathematics and Computers in Simulation* 20 (1978), Nr. 2, S. 102–109
- [114] SORINE, M. ; WINTERNITZ, P.: Superposition laws for solutions of differential matrix Riccati equations arising in control theory. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), Nr. 3, S. 266–272
- [115] SUGIURA, K. ; HORI, Y.: Vibration suppression in 2- and 3-mass system based on the feedback of imperfect derivative of the estimated torsional torque. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 43 (1996), Nr. 1, S. 56–64
- [116] SYED, F.U. ; KUANG, M.L. ; YING, H.: Active Damping Wheel-Torque Control System to Reduce Driveline Oscillations in a Power-Split Hybrid Electric Vehicle. In: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 58 (2009), Nr. 9, S. 4769–4785

- [117] SZABAT, K. ; ORLOWSKA-KOWALSKA, T.: Comparative analysis of different PI/PID control structures for two-mass system. In: *Proceedings of the 7th International Conference on Electric and Electronics Equipment*, 2004, S. 97–102
- [118] SZABAT, K. ; ORLOWSKA-KOWALSKA, T.: Adaptive Control of Two-Mass System using Nonlinear Extended Kalman Filter. In: *IECON 2006 - 32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics*, 2006, S. 1539–1544
- [119] SZABAT, K. ; ORLOWSKA-KOWALSKA, T.: Damping of the Torsional Vibration in Two-Mass Drive System Using Forced Dynamic Control. In: *Proceedings of EUROCON, 2007. The International Conference on "Computer as a Tool" (2007)*, S. 1712–1717
- [120] SZABAT, K. ; ORLOWSKA-KOWALSKA, T.: Vibration Suppression in a Two-Mass Drive System Using PI Speed Controller and Additional Feedbacks - Comparative Study. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 54 (2007), Nr. 2, S. 1193–1206
- [121] SZABAT, K. ; ORLOWSKA-KOWALSKA, T.: Application of the extended Kalman filter in advanced control structure of a drive system with elastic joint. In: *Industrial Technology, 2008. ICIT 2008. IEEE International Conference (2008)*, April, S. 1–6
- [122] SZABAT, K. ; ORLOWSKA-KOWALSKA, T.: Performance Improvement of Industrial Drives With Mechanical Elasticity Using Nonlinear Adaptive Kalman Filter. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 55 (2008), Nr. 3, S. 1075–1084
- [123] SZABAT, K. ; ORLOWSKA-KOWALSKA, T.: Application of the Kalman Filters to the High-Performance Drive System With Elastic Coupling. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 59 (2012), Nr. 11, S. 4226–4235
- [124] SZABAT, K. ; ORLOWSKA-KOWALSKA, T. ; DYRCZ, K.P.: Extended Kalman filters in the control structure of two-mass drive system. In: *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences* 54 (2006), Nr. 3, S. 315–325
- [125] TSETSERUKOU, D. ; KAWAKAMI, N. ; TACHI, S.: Vibration damping control of robot arm intended for service application in human environment. In: *Humanoids 2008 - 8th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, 2008, S. 441–446
- [126] UMENO, T. ; HORI, Y.: Robust Speed Control of DC Servomotors Using Modern Two Degrees-of-Freedom Controller Design. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 38 (1991), Nr. 5, S. 363–368

- [127] VALENZUELA, M.A. ; BENTLEY, J.M. ; LORENZ, R.D.: Evaluation of torsional oscillations in paper machine sections. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 41 (2005), Nr. 2, S. 493–501
- [128] VALENZUELA, M.A. ; BENTLEY, J.M. ; VILLABLANCA, A. ; LORENZ, R.D.: Dynamic compensation of torsional oscillation in paper machine sections. In: *Conference Record of 2005 Annual Pulp and Paper Industry Technical Conference, 2005.*, 2005, S. 81–90
- [129] VÖGL, R. ; BOGNER, E. ; EBNER, T. ; TERRA, T.D.D ; VITALE, G.: Innovative Anwendung des Rollenprüfstands für die Fahrbarkeitsabstimmung. In: *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift* 111 (2009), Nr. 11, S. 853–860
- [130] VÖRÖS, J.: Modeling and identification of systems with backlash. In: *Automatica* 46 (2010), Nr. 2, S. 369–374
- [131] VÖTH, S.: *Dynamik schwingungsfähiger Systeme: Von der Modellbildung bis zur Betriebsfestigkeitsrechnung mit MATLAB/SIMULINK®*. Vieweg+Teubner Verlag, 2007 (Studium Technik)
- [132] VUKOSAVIC, S.N. ; STOJIC, M.R.: Suppression of torsional oscillations in a high-performance speed servo drive. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 45 (1998), Nr. 1, S. 108–117
- [133] WALTER, H.: *Kompaktkurs Regelungstechnik: Lehr- und Übungsbuch*. Vieweg Teubner Verlag, 2013 (Studium Technik)
- [134] WANG, H. ; LEE, D.H. ; LEE, Z.G. ; AHN, J. W.: Vibration rejection scheme of servo drive system with adaptive notch filter. In: *2006 37th IEEE Power Electronics Specialists Conference*, 2006, S. 1–6
- [135] WANG, J. ; ZHANG, Y. ; XU, L. ; JING, Y. ; ZHANG, S.: Torsional Vibration Suppression of Rolling Mill with Constrained Model Predictive Control. In: *2006 6th World Congress on Intelligent Control and Automation* Bd. 2, 2006, S. 6401–6405
- [136] WEBER, T. ; BEIDL, C. ; DÜSER, T. ; GIETZELT, C.: The chassis dynamometer as real world driving environment. In: BARGENDE, M. (Hrsg.) ; REUSS, H.C. (Hrsg.) ; WIEDEMANN, J. (Hrsg.): *14. Internationales Stuttgarter Symposium: Automobil- und Motorentechnik*, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014, S. 1641–1662
- [137] WERNER, M. ; KREUTZER, T. ; WAGNER, C. ; BAUER, R.: End-of-line Testing of Combustion Engines on Highly Dynamic Test Beds. In: *ATZextra Worldwide* 20 (2015), Nr. November 2015, S. 40–43

- [138] WERTZ, H. ; SCHUTTE, F.: Self-tuning speed control for servo drives with imperfect mechanical load. In: *Conference Record of the 2000 IEEE Industry Applications Conference. Thirty-Fifth IAS Annual Meeting and World Conference on Industrial Applications of Electrical Energy (Cat. No.00CH37129)* Bd. 3, 2000, S. 1497–1504 vol.3
- [139] WIPFLER, M. ; BAUER, R. ; DOURDOUMAS, N. ; ROSSEGGER, W.: Regelungstechnische Methoden zur Drehschwingungsdämpfung eines Wellenstrangs am Beispiel eines Motorprüfstands. In: *e & i Elektrotechnik und Informationstechnik* 133 (2016), Nr. 2, S. 142–152
- [140] XU, H.: Transformations between discrete-time and continuous-time algebraic Riccati equations. In: *Linear Algebra and its Applications* 425 (2007), S. 77–101
- [141] YANAKIEV, D.: Adaptive control of diesel engine-dynamometer systems. In: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.98CH36171)* Bd. 2, 1998, S. 1530–1534
- [142] ZHANG, G.: Comparison of control schemes for two-inertia system. In: *Proceedings of the IEEE 1999 International Conference on Power Electronics and Drive Systems 1999* (1999), S. 573–578
- [143] ZHANG, G. ; FURUSHO, J.: Speed control of two-inertia system by PI/PID control. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 47 (2000), Nr. 3, S. 603–609
- [144] ZHOU, K. ; DOYLE, J.C. ; GLOVER, K.: *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996
- [145] ZHOU, K. ; KHARGONEKAR, P.P.: An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization. In: *Systems & Control Letters* 11 (1988), Nr. 2, S. 85–91
- [146] ZÖLLER, T. ; LEIBFRIED, T. ; MIRI, A. M.: Dämpfung von Torsionsschwingungen mittels einer leistungselektronischen Netzkomponente. In: *ETG-Fachbericht Band 118* (2009), S. 463–469