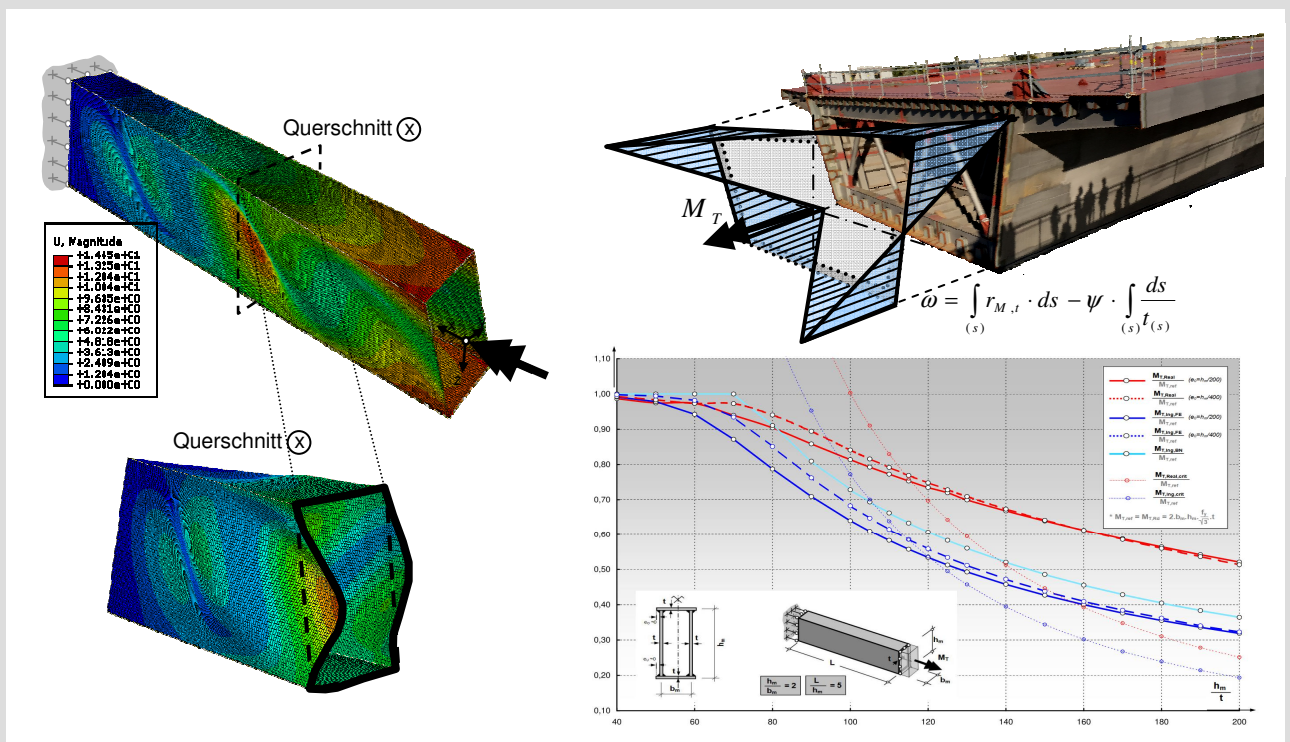


# Vereinfachte Beulnachweise bei Wölbkrafttorsion an einzelligen Kastenquerschnitten



D-5-65 / 2018

Christoph Derler  
 Institut für Stahlbau  
 Technische Universität Graz

# VEREINFACHTE BEULNACHWEISE BEI WÖLBKRAFTTORSION AN EINZELLIGEN KASTENQUERSCHNITTEN



**Graz University of Technology**  
Technische Universität Graz

## **MASTERARBEIT**

verfasst von

**CHRISTOPH DERLER**

Eingereicht an der  
Fakultät für Bauingenieurwissenschaften der  
**TECHNISCHEN UNIVERSITÄT GRAZ**  
Institut für Stahlbau

Betreuer:

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Unterweger  
Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Markus Kettler

Graz, im Juni 2018



## **EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG**

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....

.....

(Unterschrift)

# Kurzfassung

Stählerne Kastenquerschnitte finden ihre vielfältigsten Einsatzmöglichkeiten, sowohl im Stahlbrückenbau, als auch im Stahlhoch- und Industriebau. Unter Torsionsbeanspruchung sind diese, mit Ausnahme des quadratischen Kastens, bestrebt sich zu verwölben. Behinderungen der Stablängsverformung resultieren somit stets in zusätzlichen lokalen Spannungskomponenten, den sogenannten Wölbnormal- und Wölbschubspannungen.

Aufgrund der dadurch resultierenden komplexen Spannungsverläufe werden in der Praxis häufig Vereinfachungen dahingehend getroffen, dass für die Bemessung im ULS-Zustand nur die St. Venant'schen Schubspannungen, ohne Berücksichtigung der Wölbkrafteffekte, berücksichtigt werden. Die Vernachlässigung dieser örtlich begrenzten Spitzenspannungen scheint aufgrund des duktilen, zähplastischen Materialverhaltens von Stahl zutreffend, zumindest solange keine Beulnachweise erforderlich werden.

Im Falle von dünnwandigen, beulgefährdeten Kastenquerschnitten (Querschnittsklasse 4) steht aktuell eine Überprüfung aus, ob auch hier das Führen der Beulnachweise nur für St. Venant'sche Schubspannung  $\tau_{sv}$  ausreichende Tragsicherheit liefert.

Im Rahmen dieser Arbeit wird nun überprüft, inwieweit ein vereinfachter, isolierter Beulnachweis für den allseitig gelenkig gelagerten Querschnittsteil bei alleiniger Berücksichtigung der St. Venant'schen Schubspannung  $\tau_{sv}$  und Vernachlässigung sämtlicher zusätzlich auftretender Wölbkrafteffekte ausreichend tragsichere Ergebnisse liefert.

# Abstract

Boxed steel sections are applied in various fields like in bridges as well as in structural engineering and industrial constructions. With the exception of square-shaped sections, these have the tendency to warp. Restraints of the bar's longitudinal displacement therefore always result in additional stress components, the so-called warping normal stresses and warping shear stresses.

Due to their complex stress distributions, in practise there are frequently simplifications made within the design in ULS (Ultimate Limit State). It means that only the St. Venant's shear stresses are considered without taking into account the warping effects. The neglect of these locally restricted warping stress peaks seems accurate according to the ductile, viscous material behaviour of steel, as long as no buckling analysis is required.

In case of thin-walled hollow sections (susceptible to local buckling) until now a verification is missing, whether a buckling analysis with only the St. Venant's shear stress  $\tau_{sv}$ , provides sufficient safety against buckling.

In context of this work, it is now being examined how far a simplified, isolated buckling analysis of the all-round hinged cross-section part provides sufficiently reliable results, when only the St. Venant's shear stresses  $\tau_{sv}$  are taken into account, while neglecting all additional occurring warping effects.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Hauptbetreuer, Prof. Dr. Harald Unterweger, der mir den Gedankenanstoß und die Möglichkeit gab, diese Arbeit am Institut für Stahlbau zu verfassen, bedanken. Nicht nur seine außerordentlich hohe fachliche Kompetenz, sondern auch die überaus menschliche und offene Art haben sehr wesentlich zur Motivation und zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Ein nicht minderer Dank gebührt auch meinem Mitbetreuer Dr. Markus Kettler, der mir immer wieder neue Ideen gab und mich bei vertieften Fragestellungen fachlich hochkompetent unterstützte. Seine unkomplizierte und überaus freundliche Art verliehen den Gesprächen und Diskussionen während der Erstellung der Arbeit stets eine entspannte und herzliche Atmosphäre.

Ganz herzlich möchte ich mich auch bei meinen Eltern Monika Schweighofer-Derler und Dr. Peter Derler bedanken, die mir das Studium ermöglichten und sowohl finanziell, als auch moralisch in jeder Hinsicht stets zur Seite standen. Danke, dass ihr mir die vielen Stunden verziehen habt, in denen das Studium Vorrang vor Allem hatte.

Ein großes Dankeschön möchte ich auch meiner Freundin Claudia aussprechen, die mich während meines ganzen Studiums unterstützte und stets vollstes Verständnis hatte, wenn Freizeitpläne aufgrund des Studiums oft zu kurz kamen.

Des Weiteren erwähnen möchte ich meine Freunde, speziell Elia Schuh und Peter Brantweiner, mit denen ich bereits seit der HTL-Zeit unzertrennlich verbunden bin und die meine bisherige Schul- und Studienzeit unvergesslich machten.

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>EINLEITUNG, PROBLEMSTELLUNG UND INHALTSÜBERSICHT</b>	<b>11</b>
0.1	Einleitung und Problemstellung	11
0.2	Notwendige Vereinfachungen	11
0.3	Schematische Vorgehensweise und Inhaltsüberblick	12
<b>1</b>	<b>MECHANISCHE GRUNDLAGEN AM QUERSCHNITT</b>	<b>15</b>
1.1	Einheitsverwölbung	15
1.2	Wölbnormalspannungen	20
1.3	Wölbschubspannungen	22
<b>2</b>	<b>MECHANISCHE GRUNDLAGEN AM STAB</b>	<b>26</b>
2.1	Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion	26
2.2	Allgemeine Lösung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion	27
2.2.1	Homogene Lösung der Wölbkraft – DGL	27
2.2.2	Partikuläre Lösung der Wölbkraft - DGL	29
2.2.3	Zustandsgrößen	29
2.3	Spezielle Lösung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion	30
2.4	Beispiel – Kastenquerschnitt unter Torsionsbelastung	33
2.4.1	Angabe	33
2.4.2	Torsionsträgheitsmoment $I_T$ , Einheitsverwölbung $\omega$	33
2.4.3	Wölbwiderstand $I_\omega$	34
2.4.4	Sektorielles statisches Moment ( <i>des geschlossenen Querschnittes</i> ) $S_{\omega,g}$	35
2.4.5	Analytische Schnittkraftverläufe $M_{x,sv}, M_{x,\omega}, M_\omega$	37
2.4.6	Analytische Spannungsverläufe an der Krafteinleitungsstelle $\sigma_\omega, \tau_\omega$ - Querschnitt	38
2.4.7	Analytische Spannungsverläufe am Gabellager $\tau_{sv}$ - Querschnitt	40

<b>3</b>	<b>BERECHNUNGSTOOL - WÖLBKRAFTTORSION</b>	<b>41</b>
3.1	Beispiel - Fortsetzung	42
<b>4</b>	<b>EINFLUSS DER QUERSCHNITTSGEOMETRIE AUF DIE BEANSPRUCHUNGEN IM TORSIONSBEANSPRUCHTEN STAB</b>	<b>47</b>
4.1	Einfluss der Geometrie auf das Abklingverhalten des Wölbtorsionsmomentes $M_{x,\omega}$	48
4.2	Einfluss der Geometrie auf das Abklingverhalten des Wölbmomentes $M_\omega$	51
4.3	Einfluss der Geometrie auf die Größe des Wölbtorsionsmomentes $M_{x,\omega}$	52
4.4	Einfluss der Geometrie auf die Größe des Wölbmomentes $M_\omega$	55
4.5	Einfluss der Geometrie auf die Größe der Wölbnormalspannung $\sigma_\omega$	57
4.6	Einfluss der Geometrie auf die Größe der Wölbschubspannung $\tau_\omega$	60
4.7	Beispiel zu Kastenquerschnitt unter Torsionsbelastung-Fortsetzung	66
4.7.1	Zusammenfassung der Angaben für Beispiel 2.4	66
4.7.2	Diagrammeingangsparameter	66
4.7.3	Wölbmoment - Querschnitt m (siehe auch Abschnitt 2.4.5)	66
4.7.4	Maximale Wölbnormalspannung - Querschnitt m (siehe auch Abschnitt 2.4.6)	67
4.7.5	Wölbschubspannungen - Querschnitt m (siehe auch Abschnitt 2.4.6)	67
<b>5</b>	<b>EINFLUSS DER WÖLBSPANNUNGEN AUF DEN BEULNACHWEIS</b>	<b>68</b>
5.1	Vorbemerkungen	68
5.2	Beispiel - Fortsetzung	69
5.2.1	Vorbemerkungen	69
5.2.2	Angaben zum Beulfeld	69
5.2.3	Beulnachweis nach Rechenmodell 1	70
5.2.4	Beulnachweis nach Rechenmodell 2	71
5.3	Gegenüberstellung von Rechenmodell 1 und Rechenmodell 2 (gem. 5.1) für die Querschnittstypen A,B,C (gem. Kap. 4)	75
5.3.1	Vorbemerkungen zu den Diagrammen Abschnitt 5.3.2 bis 5.3.4	75
5.3.2	Querschnittstyp A	76
5.3.3	Querschnittstyp B	80
5.3.4	Querschnittstyp C	85

<b>6</b>	<b>NUMERISCHE DETAILUNTERSUCHUNGEN FÜR REINE TORSIONSBEANSPRUCHUNG <math>M_T</math></b>	<b>89</b>
6.1	Vorbemerkungen	89
6.2	Untersuchte Querschnittsformen und Lagerungsfälle	90
6.3	Numerisches Berechnungsmodell	92
6.3.1	Berechnungsmodell - „Reales Modell“	92
6.3.2	Berechnungsmodell - „Ingenieurmodell“	93
6.4	Modellvergleich „Reales Modell“ – „Ingenieurmodell“	93
6.5	Berechnungsverfahren für die Beultraglastberechnung	95
6.5.1	Berechnungsverfahren für das „Reale Modell“	95
6.5.2	Berechnungsverfahren für das „Ingenieurmodell“	97
6.6	Beultraglastkurven nach dem „Realen Modell“ und dem „Ingenieurmodell“ für einseitige Wölbbehinderung	98
6.6.1	Vorbemerkungen zu den Diagrammen in Abschnitt 6.6.2 bis 6.6.6	98
6.6.2	Querschnittstyp A1 - $L/h_m=1,0$ – einseitig wölbbehindert	100
6.6.3	Querschnittstyp A1 - $L/h_m=5,0$ – einseitig wölbbehindert	101
6.6.4	Querschnittstyp A2 - $L/h_m=5,0$ – einseitig wölbbehindert	102
6.6.5	Querschnittstyp B1 - $L/h_m=1,0$ – einseitig wölbbehindert	103
6.6.6	Querschnittstyp B1 - $L/h_m=5,0$ – einseitig wölbbehindert	104
6.6.7	Vergleich der bezogenen Beultraglasten $M_{T,Real} / M_{T,ref}$ und $M_{T,Ing,FE} / M_{T,ref}$	105
6.6.8	Vergleich der Beultraglasten $M_{T,Ing,FE}$ und $M_{T,Ing,BN}$	111
6.7	Beultraglastkurven nach dem „Realen Modell“ und dem „Ingenieurmodell“ für beidseitige Wölbbehinderung	113
6.7.1	Vorbemerkungen zu den Diagrammen Abschnitt 6.7.2 bis 6.7.6	113
6.7.2	Querschnittstyp A1 - $L/h_m=1,0$ – beidseitig wölbbehindert	115
6.7.3	Querschnittstyp A1 - $L/h_m=5,0$ – beidseitig wölbbehindert	116
6.7.4	Querschnittstyp A2 - $L/h_m=5,0$ – beidseitig wölbbehindert	117
6.7.5	Querschnittstyp B1 - $L/h_m=1,0$ – beidseitig wölbbehindert	118
6.7.6	Querschnittstyp B1 - $L/h_m=5,0$ – beidseitig wölbbehindert	119
6.7.7	Bemerkungen zu den Traglastkurven in Abschnitt 6.7.2 bis 6.7.6	120

<b>7</b>	<b>NUMERISCHE DETAILUNTERSUCHUNGEN FÜR KOMBINIERTE BEANSPRUCHUNG <math>M_T+N</math> BZW. <math>M_T+M_Y</math></b>	<b>123</b>
7.1	Vorbemerkungen	123
7.2	Untersuchte Querschnitte und Beanspruchungskombinationen	123
7.3	Numerisches Berechnungsmodell	124
7.3.1	Kombinierte Beanspruchung am „Realen Modell“	124
7.3.2	Kombinierte Beanspruchung am „Ingenieurmodell“	125
7.4	Berechnungsverfahren für die Beultraglastberechnung	125
7.4.1	Berechnungsverfahren für das „Reale Modell“	125
7.4.2	Berechnungsverfahren für das „Ingenieurmodell“	125
7.5	Beultraglastkurven nach dem „Realen Modell“ und dem „Ingenieurmodell“ für kombinierte Beanspruchung $M_T + N$	127
7.5.1	Vorbemerkungen zu den Diagrammen in Abschnitt 7.5.2 bis 7.5.5	127
7.5.2	Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 1,0$ bzw. $h_m/t = 80 - M_T+N$	129
7.5.3	Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 5,0$ bzw. $h_m/t = 80 - M_T+N$	130
7.5.4	Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 1,0$ bzw. $h_m/t = 160 - M_T+N$	131
7.5.5	Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 5,0$ bzw. $h_m/t = 160 - M_T+N$	132
7.5.6	Bemerkungen zu den Traglastkurven in Abschnitt 7.5.2 bis 7.5.5	133
7.6	Beultraglastkurven nach dem „Realen Modell“ und dem „Ingenieurmodell“ für kombinierte Beanspruchung $M_T + M_Y$	134
7.6.1	Vorbemerkungen zu den Diagrammen in Abschnitt 7.6.2 bis 7.6.5	134
7.6.2	Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 1,0$ bzw. $h_m/t = 80 - M_T + M_Y$	137
7.6.3	Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 5,0$ bzw. $h_m/t = 80 - M_T + M_Y$	138
7.6.4	Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 1,0$ bzw. $h_m/t = 160 - M_T + M_Y$	139
7.6.5	Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 5,0$ bzw. $h_m/t = 160 - M_T + M_Y$	140
7.6.6	Bemerkungen zu den Traglastkurven in Abschnitt 7.6.2 bis 7.6.5	141



## 0 Einleitung, Problemstellung und Inhaltsübersicht

### 0.1 Einleitung und Problemstellung

Durch Torsionsbeanspruchung von Kastenquerschnitten kommt es bei Behinderungen der Stablängsverformung zu komplexen Spannungsverläufen infolge der Wirkung der Wölbkrafttorsion. Infolgedessen werden in der Praxis häufig Vereinfachungen bei der Bemessung im ULS-Zustand dahingehend getroffen, dass nur die St. Venant'schen Schubspannungen  $\tau_{sv}$ , ohne Wirkung der lokalen auftretenden Wölbspannungen (Wölbnormal- und Wölbschubspannungen), berücksichtigt werden. Im Hinblick auf das bei Stahl vorliegende duktile, zähplastische Materialverhalten ist die Vernachlässigung der lokalen Spitzenspannungen, primär der Wölbnormalspannungen, zutreffend, zumindest solange keine Beulnachweise erforderlich werden. Die verbleibende Ermittlung der St. Venant'schen Schubspannungen  $\tau_{sv}$ , zur Sicherstellung der Gleichgewichtsbedingung, gestaltet sich hingegen als sehr einfach.

Im Falle von dünnwandigen Querschnittsteilen von Kastenquerschnitten (Querschnittsklasse 4) steht aktuell eine Überprüfung aus, ob diese Näherung (Führen der Beulnachweise nur für St. Venant'sche Schubspannung  $\tau_{sv}$ ) auch zulässig ist.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, zu überprüfen ob ein isolierter Beulnachweis für den allseitig gelenkig gelagerten Querschnittsteil, bei alleiniger Beanspruchung durch St. Venant'sche Schubspannung  $\tau_{sv}$  und Vernachlässigung sämtlicher zusätzlich auftretender Wölbkrafteffekte (Wölbnormalspannung, sekundäre Wölbschubspannung), ausreichende Tragsicherheit liefert. Dies hätte große Vorteile für die Anwendung in der Praxis, da die komplexen Wölbkrafteffekte nicht im Detail untersucht werden müssten.

### 0.2 Notwendige Vereinfachungen

In der Praxis weisen Bauteile mit Kastenquerschnitten immer zusätzliche Queraussteifungen auf, insbesondere im Bereich mit großen Torsionsmomenteneinleitungen. Dies bedeutet ein annähernd konstantes Torsionsschnittmoment  $M_x$  zwischen jeweils zwei Queraussteifungen. Daher beziehen sich die Untersuchungen in dieser Arbeit nur für Stabteile zwischen jeweils zwei Queraussteifungen und es wird von „ $M_T = M_x = \text{konstant}$ “ ausgegangen.

Zur Abbildung zutreffender Randbedingungen an den Stabenden wird von folgenden zwei Grenzfällen ausgegangen:

- Volle Wölbbehinderung nur an einem Stabende, d.h. freie Verwölbung am anderen Stabende. Dies entspricht der Betrachtung des Endes eines Torsionsstabes (z.B. Querträgerkonsole)
- Volle Wölbbehinderung an beiden Stabenden (z.B. Teil eines Hauptträgers)

Zudem beschränkt sich diese Arbeit auf die Untersuchung repräsentativer Kastenquerschnitte mit außergewöhnlich hohen Wölbkrafteffekten.

### 0.3 Schematische Vorgehensweise und Inhaltsüberblick

Um repräsentative Kastenquerschnitte für die Detailuntersuchungen (detaillierte FE-Studie) zu selektieren, erfolgt zunächst eine umfangreiche Untersuchung zum Torsionstragverhalten des Einzelstabes mit konstanter Torsionsbeanspruchung für die beiden angeführten Lagerungsrandbedingungen (einseitig wölbbehindert/ zweiseitig wölbbehindert). Diese gliedert sich in:

- **Kapitel 1: Mechanische Grundlagen am Querschnitt**
- **Kapitel 2: Mechanische Grundlagen am Stab**
- **Kapitel 3: Berechnungstool- Wölbkrafttorsion**
- **Kapitel 4: Einfluss der Querschnittsgeometrie auf die Beanspruchungen im torsionsbeanspruchten Stab**

Daran anschließend erfolgt eine vereinfachte Vorstudie hinsichtlich der Überprüfung, ob ein alleiniger Beulnachweis mit  $\tau_{sv}$ , im Vergleich zur Miterfassung sämtlicher Wölbspannungen, ausreichend ist. Dies erfolgte in:

- **Kapitel 5: Einfluss der Wölbspannungen auf den Beulnachweis**

Durch die Vorstudie in Kapitel 5 können die für die detaillierte FE-Untersuchung zutreffenden, repräsentativen Querschnittsabmessungen abgeleitet werden. Die detaillierte FE-Untersuchung von Gesamtstab, sowie herausgelöstem Querschnittsteil, erfolgte in:

- **Kapitel 6: Numerische Detailuntersuchungen für reine Torsionsbeanspruchung  $M_T$**   
Die schematische Vorgehensweise für die beiden Grenzfälle hinsichtlich der Randbedigungen kann *Abb.0-1* sowie *Abb.0-2* entnommen werden.

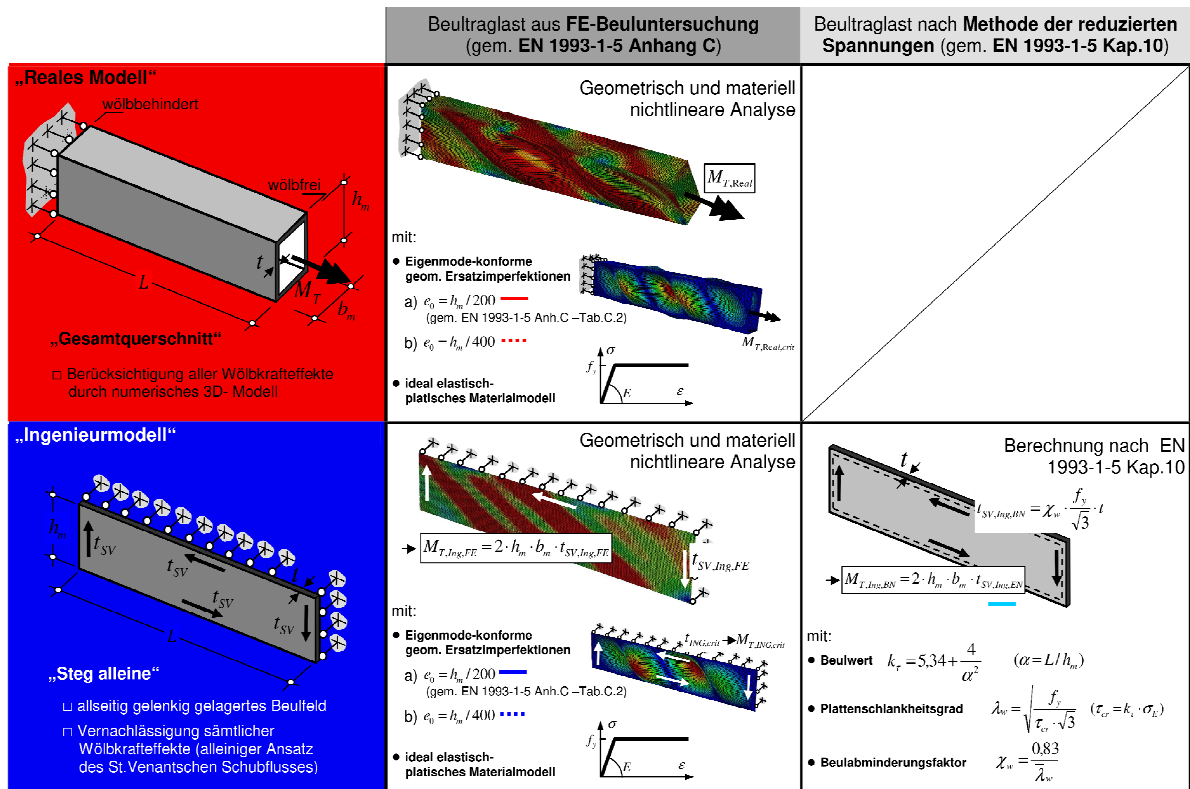


Abb.0-1: Übersicht der untersuchten Tragmodelle bei einseitiger Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)

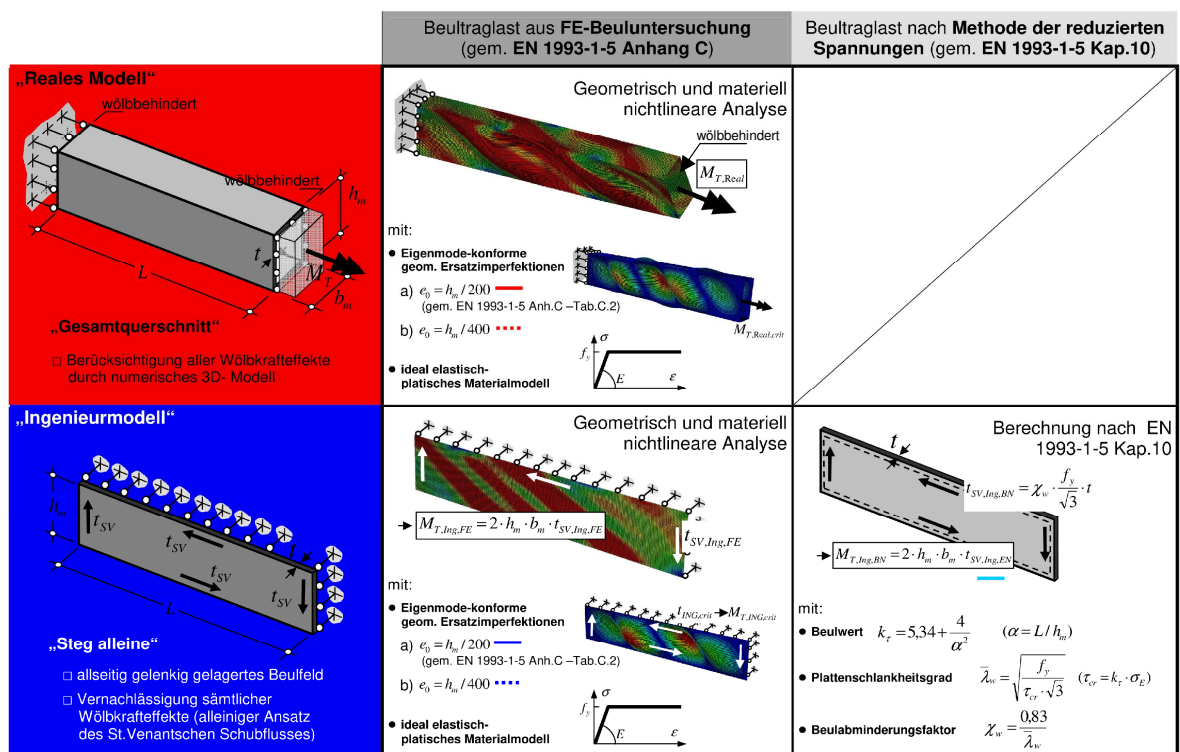


Abb.0-2: Übersicht der untersuchten Tragmodelle bei beidseitiger Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)

Ergänzend wird auch untersucht, wie sich zusätzliche – in der Praxis häufig vorliegende – Beanspruchungen, infolge Normalkraft N bzw. Biegemoment  $M_y$ , dabei auswirken. Diese Untersuchung findet sich in:

□ **Kapitel 7: Numerische Detailuntersuchungen für kombinierte Beanspruchung  $M_T+N$  bzw.  $M_T + M_y$**

Die Untersuchung in diesem Kapitel beschränkt sich auf einseitige Wölbbehinderung. Die schematische Vorgehensweise für  $M_T+N$  bzw.  $M_T + M_y$  hinsichtlich der Randbedingungen kann *Abb.0-3* sowie *Abb.0-4* entnommen werden.

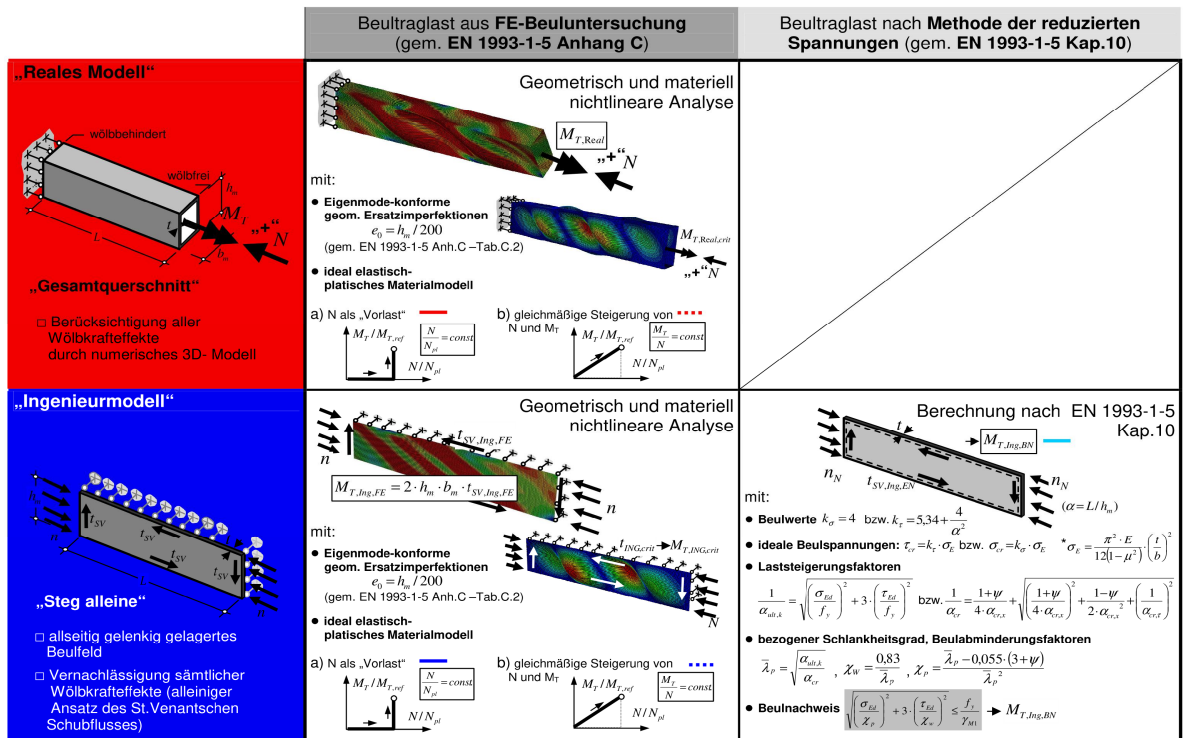


Abb.0-3: Übersicht der untersuchten Tragmodelle bei einseitiger Wölbbehinderung ( $M_T + N$ )

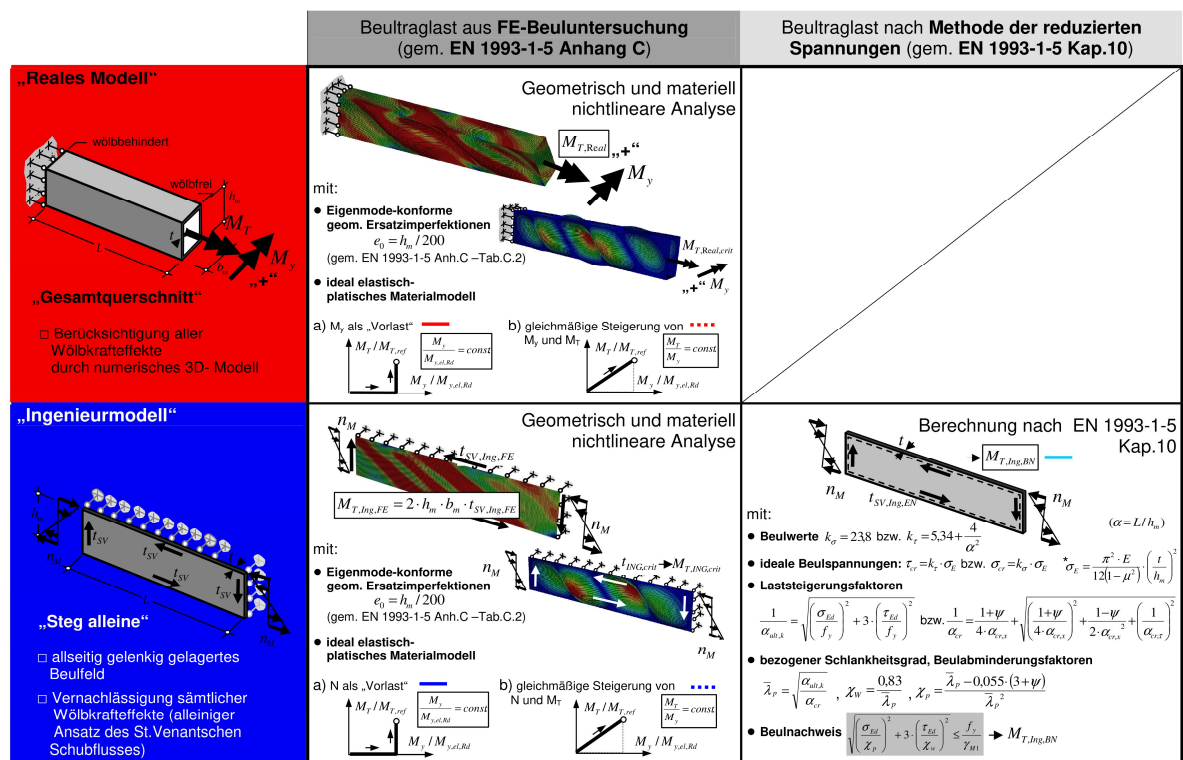


Abb.0-4: Übersicht der untersuchten Tragmodelle bei einseitiger Wölbbehinderung ( $M_T + M_y$ )

# 1 Mechanische Grundlagen am Querschnitt

Allgemein gelten folgende Begriffsdefinitionen:

$\vartheta_{(x)}$ ... Stabverdrehung	$x$ ... Koordinate in Stablängsrichtung
$\frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta'_{(x)}$ ... Stabverdrillung	$u$ ... Verschiebungen in Stablängsrichtung
$\omega_{(s)}$ ... Einheitsverwölbung bzgl. des Drehpunktes M	$s$ ... lokale Koordinate in Querschnittsebene
$\tau_{sv(x,s)}$ ... St. Vernant'sche Schubspannung	$v$ ... Verschiebung entlang lokaler Koord. s
$T_{sv(x,s)}$ ... St. Vernant'scher Schubfluss	
$t_{(s)}$ ... Querschnittswandstärke	

Vorbemerkung:

Für die weiteren Betrachtungen wird eine freie Verdrehbarkeit des Querschnittes ohne gebundene Drehachse vorausgesetzt, sodass die **Drehung stets um den Drillruhepunkt (=Schubmittelpunkt)** stattfindet. Der Drehpunkt **M** ist also stets durch den Schubmittelpunkt bestimmt.

## 1.1 Einheitsverwölbung

Alle in den folgenden Herleitungen vorkommenden **Stabgrößen**:

- *Querschnittsverdrehung* ...  $\vartheta$
- *Querschnittsverdrillung* ...  $\vartheta'$

sind stets in Abhängigkeit der **Stablängskoordinate**  $x$  zu sehen. Auf eine explizite Indizierung dieser Abhängigkeit wird aus Gründen der leichteren Lesbarkeit verzichtet.

Die in den folgenden Herleitungen vorkommenden **Querschnittsgrößen**:

- *Verschiebungen bzw. Verformungen in der Querschnittsebene* ...  $v$
- *Verschiebungen bzw. Verformungen aus der Querschnittsebene* ...  $u$
- *Schubspannungen* ...  $\tau$
- *Schubfluss* ...  $T$

sind stets in Abhängigkeit der **Stablängskoordinate**  $x$  und der lokalen **Querschnittskoordinate**  $s$  zu sehen. Auch hier wird auf eine explizite Indizierung dieser Abhängigkeiten aus Gründen der leichteren Lesbarkeit verzichtet.

Die **Einheitsverwölbung**  $\omega$  entspricht der Verformung  $u$  in Stablängsrichtung  $x$ , die ein Querschnitt unter der Verdrillung  $\vartheta' = -1 [\text{rad} / \text{m}]$  erfährt (siehe Abb. 1-2).

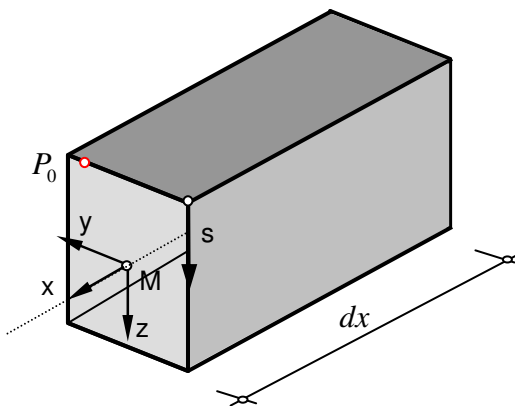


Abb.1-1.: differentielles Stabelement – unverformt

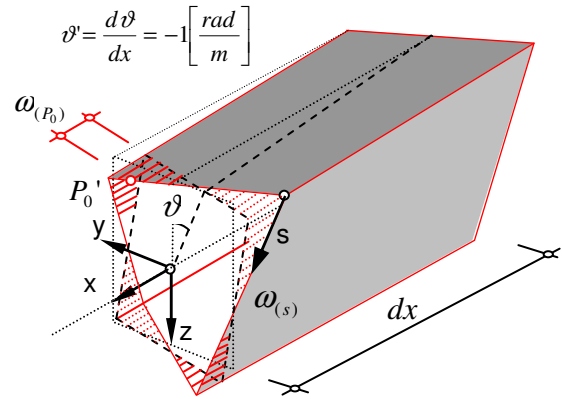
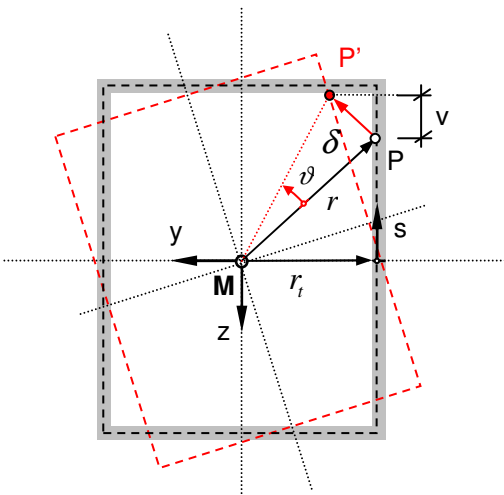


Abb.1-2.: differentielles Stabelement - verformt

Erfährt der Querschnitt eine Verdrehung  $\vartheta$  um die Stablängsachse, so lässt sich die Bewegung aller Punkte um den Drehpunkt **M** in Querschnittsebene wie folgt angeben:



z.B.: Punkt P (bzw. verformte Lage P')

absolute Verschiebung  $\delta = \vartheta \cdot r$

Verschiebung in lokale Koordinatenrichtung s:  $v = \vartheta \cdot r_t$

dabei ist:

- $r$  ... Radiusvektor vom Drehpunkt M zu Punkt P
- $r_t$  ... Normalabstand vom Drehpunkt M zur Tangente an die Querschnittskontur in Punkt P

Abb.1-3.: geometrischer Zusammenhang Verdrehung –Verschiebung

Schneidet man nun gedanklich ein infinitesimales Element aus der Profilmittelfläche des Querschnittes frei, und wendet daran das entsprechende Materialgesetz für die Schubverzerrung an, so erhält man den Zusammenhang zwischen Verschiebungen in Querschnittsebene ( $v$ ) und Verschiebungen in Stablängsrichtung ( $u$ ).

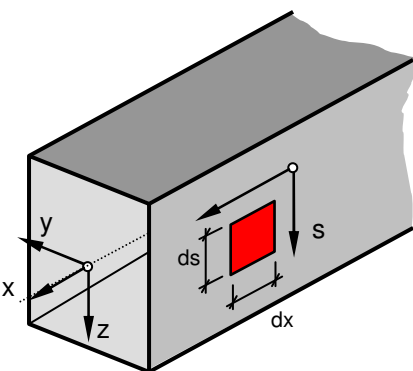


Abb.1-4.: Infinitesimales Element

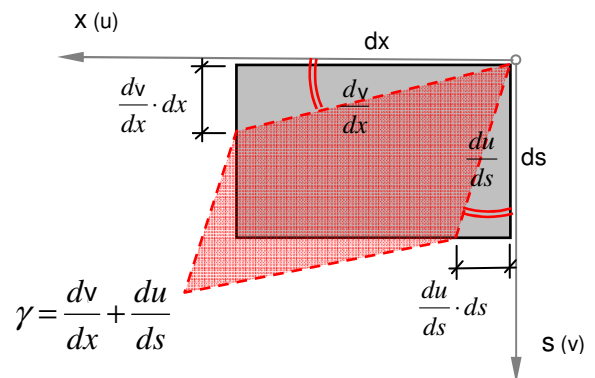


Abb.1-5.: kinematische Zusammenhänge der Schubverzerrung



**Verschiebungen entlang** der lokalen Querschnittskordinate **s**:  $v = \vartheta \cdot r_t$

bzw.:  $v' = \vartheta' \cdot r_t$

Die **Schubverzerrung**  $\gamma$  ist definiert als:  $\gamma = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{ds}$ . Das **Materialgesetz** lautet:  $\tau_{sv} = G \cdot \gamma$

Daraus erhält man:

$$\gamma = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{ds} \Rightarrow \frac{\tau_{sv}}{G} = \vartheta' \cdot r_t + \frac{du}{ds}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{du}{ds} = -\vartheta' \cdot r_t + \frac{\tau_{sv}}{G}} \quad (Gl.1-1)$$

Gegenüber offenen Profilen besteht nun die Schwierigkeit, dass zur Bestimmung der Längsverschiebungen  $u$  (bei einer allgemeinen Verdrehung  $\vartheta$  um den Schubmittelpunkt M) die Schubspannungsverteilung bereits bekannt sein muss. Bei offenen Profilen hingegen müsste diese nicht bekannt sein, da die Schubspannung zufolge Torsion in der Mittelachse der Profilwandung verschwindet.

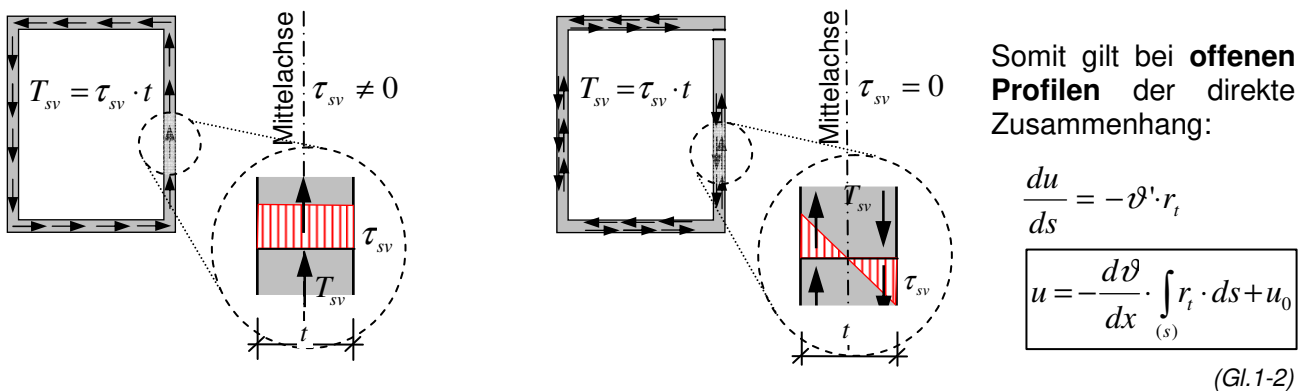


Abb.1-6.: Vergleich der Schubspannungsverteilung am offenen und geschlossenen Querschnitt

Bei **geschlossenen Profilen** gilt:

Durch Integration von Gleichung (Gl.1-1) ergibt sich:

$$\int_{(s)} \frac{du}{ds} \cdot ds = \int_{(s)} -\vartheta' \cdot r_t \cdot ds + \int_{(s)} \frac{\tau_{sv}}{G} \cdot ds + u_0$$

Durch Einsetzen von  $T_{sv} = \tau_{sv} \cdot t$  folgt:

$$\boxed{u = -\frac{d\vartheta}{dx} \cdot \int_{(s)} r_t \cdot ds + \frac{T_{sv}}{G} \cdot \int_{(s)} \frac{ds}{t} + u_0} \quad (Gl.1-3)$$

Die Schubspannung  $\tau_{sv}$  bzw. der Schubfluss  $T_{sv}$  können nun derart bestimmt werden, indem der geschlossene Querschnitt gedanklich durch einen Schnitt aufgetrennt wird, und am Schnitt folgende Bedingung gefordert wird:

$$\boxed{\Delta u = 0} \Rightarrow \boxed{\Delta u = -\frac{d\vartheta}{dx} \cdot \oint_{(s)} r_t \cdot ds + \frac{T_{sv}}{G} \cdot \oint_{(s)} \frac{ds}{t} + u_0 - u_0 \stackrel{!}{=} 0} \quad (Gl.1-4)$$

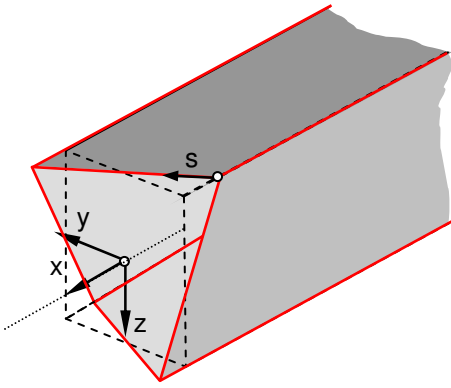


Abb.1-7.: Verwölbung am geschlossenen Querschnitt

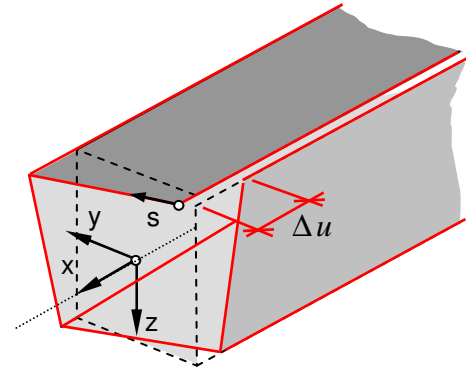
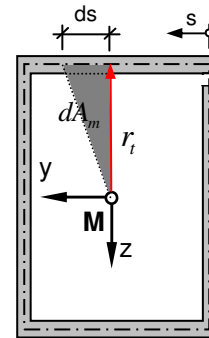


Abb. 1-8: Verwölbung am offenen Querschnitt

Integriert man die Verwölbung des „aufgetrennten“ Querschnittes entlang der Profilkontur über den gesamten Querschnitt, so muss also die „Klaffung“  $\Delta u$  verschwinden.

Das Ringintegral  $\oint_{(s)} r_t \cdot ds$  kann vereinfacht  
 angeschrieben werden als  $\oint_{(s)} r_t \cdot ds = 2 \cdot A_m$ , wobei  $A_m$   
 die von der Profilmittellinie eingeschlossene Fläche ist.



$$dA_m = \frac{1}{2} \cdot ds \cdot r_t$$

$$A_m = \frac{1}{2} \cdot \oint_{(s)} ds \cdot r_t$$

Abb.1-9.: Aufstellung des Ringintegrals

Damit vereinfacht sich Gleichung (Gl.1-4) zu:

$$\Delta u = -\frac{d\vartheta}{dx} \cdot 2 \cdot A_m + \frac{T_{sv}}{G} \cdot \oint_{(s)} \frac{ds}{t} = 0 \quad (Gl.1-5)$$

bzw.:

$$T_{sv} = +\frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{2 \cdot A_m \cdot G}{\oint_{(s)} \frac{ds}{t}} = const \quad (Gl.1-6)$$

Durch Einsetzen von (Gl.1-6)  
 in (Gl.1-3) erhält man somit:

$$u = -\frac{d\vartheta}{dx} \cdot \int_{(s)} r_t \cdot ds + \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{2 \cdot A_m \cdot \mathcal{G}}{\mathcal{G} \cdot \oint_{(s)} \frac{ds}{t}} \cdot \int_{(s)} \frac{ds}{t} + u_0$$

$$u = -\frac{d\vartheta}{dx} \cdot \int_{(s)} r_t \cdot ds + \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{2 \cdot A_m}{\oint_{(s)} \frac{ds}{t}} \cdot \int_{(s)} \frac{ds}{t} + u_0 \quad (Gl.1-7)$$



Mit der Definition des **Torsionsträgheitsmomentes**  $I_T$

$$I_T = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint_{(s)} \frac{ds}{t}} \quad (\text{Gl.1-8})$$

folgt:

$$u = -\frac{d\vartheta}{dx} \cdot \int_{(s)} r_t \cdot ds + \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{I_T}{2 \cdot A_m} \cdot \int_{(s)} \frac{ds}{t} + u_0$$

$$u = -\frac{d\vartheta}{dx} \cdot \left[ \int_{(s)} r_t \cdot ds - \frac{I_T}{2 \cdot A_m} \cdot \int_{(s)} \frac{ds}{t} - \frac{u_0}{\frac{d\vartheta}{dx}} \right] \quad (\text{Gl.1-9})$$

Einheitsverwölbung  $\omega$   
(= lt. Definition Verwölbung  $u$  bei  
 $\frac{d\vartheta}{dx} = -1 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$ )

Nun gilt es noch die Integrationskonstante  $u_0$  bzw.  $\frac{u_0}{\frac{d\vartheta}{dx}}$  zu bestimmen. Dazu verwenden wir die

Forderung, dass die Einheitsverwölbung über die gesamte Querschnittsfläche integriert, Null ergeben muss, da keine Längsnormalspannungen wirken, und somit auch keine Stabverlängerung bzw. Stabverkürzung auftreten kann.

$$\int_A \left( \int_{(s)} r_t \cdot ds - \frac{I_T}{2 \cdot A_m} \cdot \int_{(s)} \frac{ds}{t} - \frac{u_0}{\frac{d\vartheta}{dx}} \right) \cdot dA = 0 \quad (\text{Gl.1-10})$$

Für Querschnitte mit mindestens einer Symmetrieachse ergibt sich folgende Vereinfachung:

Wählt man den Ursprung der lokalen Querschnittskordinate  $s$  in einer Symmetrieachse des Querschnittes, so ergibt sich:

$$\frac{u_0}{\frac{d\vartheta}{dx}} = 0$$

und der Verlauf der Einheitsverwölbung kann wie folgt angegeben werden:

$$\omega = \int_{(s)} r_t \cdot ds - \frac{I_T}{2 \cdot A_m} \cdot \int_{(s)} \frac{ds}{t_{(s)}}$$

Der Ausdruck  $\frac{I_T}{2 \cdot A_m}$  wird in der Literatur häufig auch als Torsionsfunktion  $\psi$  bezeichnet, weshalb der Verlauf der **Einheitsverwölbung** zusammengefasst angegeben werden kann als:

$$\omega = \int_{(s)} r_{M,t} \cdot ds - \psi \cdot \int_{(s)} \frac{ds}{t_{(s)}} \quad (\text{Gl.1-11})$$

$\omega$  ... Einheitsverwölbung bezüglich des Drehpunktes M [ $\text{cm}^2$ ]

$r_{M,t}$  ... Normalabstand vom Drehpunkt M zur Tangente an die Querschnittskontur in Punkt P [ $\text{cm}$ ]

$t_{(s)}$  ... Wandstärke des Profils in Abhängigkeit der lokalen Koordinate s [ $\text{cm}$ ]

$\psi$  ... Torsionsfunktion  $\psi = \frac{I_T}{2 \cdot A_m} [\text{cm}^2]$

$I_T$  ... Torsionsträgheitsmoment  $I_T = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint_{(s)} \frac{ds}{t}} [\text{cm}^4]$

\* Voraussetzung für die Gültigkeit von (Gl.1-11) ist, den Ursprung der lokalen Koordinate s in einer Symmetrieachse des Querschnittes festzulegen. Somit ist (Gl.1-11) nur gültig für mindestens einfach symmetrische Querschnitte.

## 1.2 Wölbnormalspannungen

Durch Torsionsbelastung kommt es also im Allgemeinen zu einer Verwölbung des Querschnittes, sprich einer Verformung der Querschnittspunkte in Stablängsrichtung. Ist diese Verwölbung behindert, so entstehen Zwangsnormalspannungen in Stablängsrichtung, die sogenannten **Wölbnormalspannungen**.

Ist die Einheitsverwölbung  $\omega$  bekannt (also die Verwölbung  $u$  bei einer Querschnittsverdrillung von  $\vartheta' = -1$ ), so kann mit der tatsächlichen Querschnittsverdrillung  $\vartheta'$  die tatsächliche Längsverschiebung  $u$  ermittelt werden. Daraus kann mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes die resultierende **Wölbnormalspannung** (siehe (Gl.1-14)) ermittelt werden:

Dazu werden zunächst folgende neue Begriffsdefinitionen eingeführt:

$\sigma_{\omega(x,s)}$  ... Wölbnormalspannung

$I_\omega$  ... Wölbwiderstand (auch  $C_m$ )

$M_{\omega(x)}$  ... Wölbmoment

Alle in den folgenden Herleitungen vorkommenden **Stabgrößen**:

- Wölbmoment ...  $M_\omega$

sind stets in Abhängigkeit der **Stablängskoordinate**  $x$  zu sehen. Auf eine explizite Indizierung dieser Abhängigkeit wird aus Gründen der leichten Lesbarkeit verzichtet.

Die in den folgenden Herleitungen vorkommenden **Querschnittsgrößen**:

- Wölbnormalspannungen ...  $\sigma_\omega$

sind stets in Abhängigkeit der **Stablängskoordinate**  $x$  und der lokalen **Querschnittskoordinate**  $s$  zu sehen. Auch hier wird auf eine explizite Indizierung dieser Abhängigkeiten aus Gründen der leichten Lesbarkeit verzichtet.

Aus dem **Hooke'sches Materialgesetz** (linear elastisch) folgt:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{\sigma_\omega}{E} \quad (\text{Gl.1-12})$$

Die Verwölbung  $u$  kann angegeben werden mit:

$$u = -\vartheta' \cdot \omega \quad (\text{Gl.1-13})$$

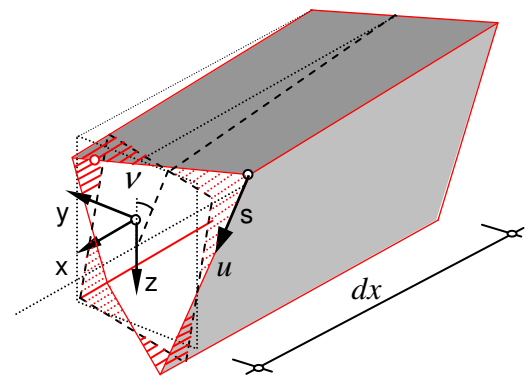


Abb.1-10.: Querschnittsverwölbung  $u$

Durch Einsetzen von Gleichung (Gl.1-12) in (Gl.1-13) folgt:

$$\sigma_\omega = E \cdot \vartheta'' \cdot \omega \quad (\text{Gl.1-14})$$

In der Literatur findet man häufig die Definition der Wölbnormalspannungen  $\sigma_\omega$  in Abhängigkeit des sogenannten **Wölbmomentes**  $M_\omega$ , das sich als reine Rechengröße aus der Lösung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion ergibt:

Das **Wölbmoment**  $M_\omega$  ist definiert als:

$$M_\omega = -E \cdot I_\omega \cdot \vartheta'' \quad (\text{Gl.1-15})$$

Dabei wird  $I_\omega$  als **Wölbwiderstand** bezeichnet (häufig auch als  $C_m$ )

$$I_\omega = \oint_{(s)} \omega \cdot t \cdot ds \quad (\text{Gl.1-16})$$

Durch Einsetzen von (Gl.1-15) in (Gl.1-14) folgt der **Verlauf der Wölbnormalspannung**:

$$\sigma_{\omega} = \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \cdot \omega \quad \left[ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right] \quad (\text{Gl.1-17})$$

$\omega$  ... Einheitsverwölbung bezüglich des Drehpunktes M [ $\text{cm}^2$ ]

$M_{\omega}$  ... Wölbmoment [ $\text{kNm}^2$ ]

$I_{\omega}$  ... Wölbwiderstand  $I_{\omega} = \oint_{(s)} \omega \cdot t \cdot ds$  [ $\text{cm}^4$ ]

### 1.3 Wölb Schubspannungen

Aufgrund der über den Querschnitt veränderlichen Wölbnormalspannungen entstehen zusätzlich zu den Schubspannungen aus St.Vernant'scher Torsion (primäre Schubspannungen) auch **Wölb Schubspannungen (sekundäre Schubspannungen)**.

Dazu werden zunächst folgenden neuen Begriffsdefinitionen eingeführt:

$\tau_{\omega(x,s)}$ ... Wölb Schubspannung	$S_{\omega,o(s)}$ ... sektorielles statisches Moment des „aufgeschnittenen“ Querschnittes
$T_{\omega(x,s)}$ ... Wölb Schubfluss	$S_{\omega,g(s)}$ ... sektorielles statisches Moment des geschlossenen Querschnittes
$M_{x,\omega(x)}$ ... Wölb torsionsmoment	

Alle in den folgenden Herleitungen vorkommenden **Stabgrößen**:

- Wölb torsionsmoment ...  $M_{x,\omega}$

sind stets in Abhängigkeit der **Stablängskoordinate** zu sehen. Auf eine explizite Indizierung dieser Abhängigkeit wird aus Gründen der leichteren Lesbarkeit verzichtet.

Die in den folgenden Herleitungen vorkommenden **Querschnittsgrößen**:

- Wölb Schubspannung ...  $\tau_{\omega}$
- Wölb Schubfluss ...  $T_{\omega}$
- Sektormomente ...  $S_{\omega,o}, S_{\omega,g}$

sind stets in Abhängigkeit der **Stablängskoordinate**  $x$  und der lokalen **Querschnittskoordinate**  $s$  zu sehen. Auch hier wird auf eine explizite Indizierung dieser Abhängigkeiten aus Gründen der leichteren Lesbarkeit verzichtet.

Die Wölb Schubspannungen können an einem, aus der Profilfläche herausgeschnittenen infinitesimalen Element abgeleitet werden:

- Anmerkung: Da die Verformungen im Verhältnis zur Querschnittsgröße als klein angenommen werden können, wird das Gleichgewicht am unverformten Element formuliert:

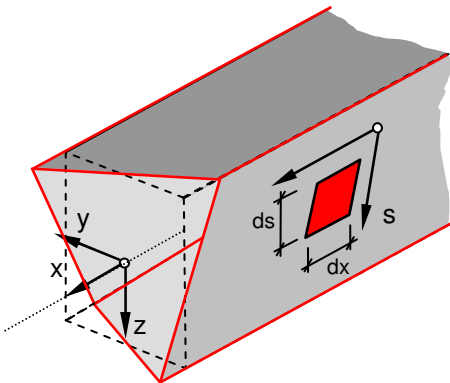


Abb.1-11: Infinitesimales Element; Abmessung ds,dx – verformt

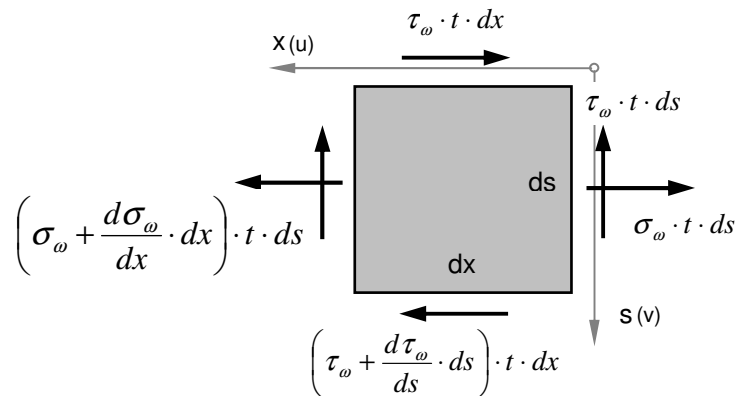


Abb.1-12: Gleichgewicht am infinitesimalen Element (unverformt)

Aus dem Gleichgewicht in x ( $\sum F_x = 0 \rightarrow$ ) Richtung ergibt sich:

$$\sigma_\omega \cdot t \cdot ds + \tau_\omega \cdot t \cdot dx - \left( \tau_\omega + \frac{d\tau_\omega}{ds} \cdot ds \right) \cdot t \cdot dx - \left( \sigma_\omega + \frac{d\sigma_\omega}{dx} \cdot dx \right) \cdot t \cdot ds = 0$$

Daraus folgt:  $\frac{d\tau_\omega}{ds} \cdot ds \cdot t \cdot dx + \frac{d\sigma_\omega}{dx} \cdot dx \cdot t \cdot ds = 0$  bzw.:  $\frac{d\tau_\omega}{ds} \cdot t = -\frac{d\sigma_\omega}{dx} \cdot t$  (Gl.1-18)

Mit der Definition des Schubflusses  $T_\omega = \tau_\omega \cdot t$  ergibt sich dieser unter zu Hilfenahme von (Gl.1-18) wie folgt:

$$T_\omega = - \int_{(s)} \frac{d\sigma_\omega}{dx} \cdot t \cdot ds$$
 (Gl.1-19)

Weiters kann in (Gl.1-19) für die Wölbnormalspannung die bereits aus (Gl.1-14) bekannte Beziehung eingesetzt werden:

$$T_\omega = E \cdot \vartheta''' \cdot \int_{(s)} \omega \cdot t \cdot ds + T_{\omega,0}$$

$S_{\omega,o}$  ... Sektormoment 2.Grades des "aufgeschnittenen" Querschnittes

bzw. daraus die Schubspannung:  $\tau_\omega = \frac{T_\omega}{t} = - \int_{(s)} \frac{d\sigma_\omega}{dx} \cdot ds = \frac{E \cdot \vartheta_{(x)}'''}{t} \cdot \int_{(s)} \omega \cdot t \cdot ds + \tau_{\omega,0}$

$S_{\omega,g}$  ... Sektormoment 2.Grades des geschlossenen Querschnittes

Durch die Definitionen  $S_{\omega,o} = \int_{(s)} \omega \cdot t \cdot ds$  bzw.  $S_{\omega,g} = \int_{(s)} \omega \cdot t \cdot ds + \tau_{\omega,0}$  erhält man also:

$$\tau_\omega = \frac{E \cdot \vartheta'''}{t} \cdot (S_{\omega,o} + \tau_{\omega,0}) = \frac{E \cdot \vartheta'''}{t} \cdot S_{\omega,g}$$
 (Gl.1-20)

Die Integrationskonstante  $\tau_{\omega,0}$  kann durch folgende Bedingung bestimmt werden:

$$\oint_{(s)} \gamma_{\omega} \cdot ds = 0 \quad (Gl.1-21)$$

Integriert man die Schubverzerrungen über den gesamten Querschnitt, so müssen diese verschwinden da beim geschlossenen Querschnitt keine „Klaffung“ auftreten kann.

Die Schubverzerrung  $\gamma_{\omega}$  lautet:

$$\gamma_{\omega} = \frac{\tau_{\omega}}{G} = \frac{E \cdot \vartheta'''}{G \cdot t} \cdot S_{\omega,g} = \frac{E \cdot \vartheta'''}{G \cdot t} \cdot \left( \int_{(s)} \omega \cdot t \cdot ds + \tau_{\omega,0} \right) \quad (Gl.1-22)$$

Setzt man (Gl.1-22) in die Bedingung (Gl.1-21) so erhält man:

$$\frac{E \cdot \vartheta'''}{G \cdot t} \cdot \oint_{(s)} \left( \int_{(s)} \omega \cdot t \cdot d\bar{s} + \tau_{\omega,0} \right) \cdot ds = 0$$

bzw. mit der Abkürzung  $S_{\omega,o} = \int_{(s)} \omega \cdot t \cdot ds$  :

$$\frac{E \cdot \vartheta'''}{G \cdot t} \cdot \oint_{(s)} (S_{\omega,o} + \tau_{\omega,0}) \cdot ds = 0$$

Daraus kann  $\tau_{\omega,0}$  berechnet werden zu:

$$\tau_{\omega,0} = - \frac{\frac{E \cdot \vartheta'''}{t} \cdot \oint_{(s)} S_{\omega,o} \cdot ds}{\oint_{(s)} ds} \quad (Gl.1-23)$$

Zusammengefasst läßt sich die Wölschubspannung nun mit (Gl.1-20) definieren als:

$$\tau_{\omega} = \frac{E \cdot \vartheta'''}{t} \cdot \left( S_{\omega,o} - \frac{\oint_{(s)} S_{\omega,o}}{\oint_{(s)} ds} \right) = \frac{E \cdot \vartheta'''}{t} \cdot S_{\omega,g} \quad (Gl.1-24)$$

In der Literatur findet man häufig die Definition der Wölschubspannungen  $\tau_{\omega}$  in Abhängigkeit des **Wölbtorsionsmomentes**  $M_{x,\omega}$ , das aus der Lösung der DGL der Wölbkrafttorsion folgt:

$$M_{x,\omega} = -E \cdot \vartheta''' \cdot I_{\omega} \quad (Gl.1-25)$$

Dieses **Wölbtorsionsmoment** erhält man auch, wenn man das Moment des Schubflusses  $T_{\omega}$ , bezogen um den Drehpunkt M, für sämtliche Querschnittsteile integriert:

$$M_{x,\omega} = \oint_{(s)} T_{\omega} \cdot r_t \cdot ds \quad (Gl.1-26)$$

Setzt man (Gl.1-24) in (Gl.1-26) so folgt:

$$M_{x,\omega} = E \cdot \vartheta''' \cdot \oint_{(s)} \left( S_{\omega,o} - \frac{\oint_{(s)} S_{\omega,o}}{\oint_{(s)} ds} \right) \cdot r_t \cdot ds \quad (Gl.1-27)$$

Mit der Einheitsverwölbung  
aus (Gl.1-11)

$$\omega = \int_{(s)} r_t \cdot ds - \psi \cdot \int_{(s)} \frac{ds}{t} \quad \text{bzw. daraus:} \quad d\omega = r_t \cdot ds - \psi \cdot \frac{ds}{t}$$

erhält man schließlich aus (Gl.1-27):

$$M_{x,\omega} = E \cdot \vartheta''' \cdot \oint_{(s)} \left( S_{\omega,o} - \frac{\oint_{(s)} S_{\omega,o}}{\oint_{(s)} ds} \right) \cdot \left( d\omega_M + \psi \cdot \frac{ds}{t_{(s)}} \right) \quad (Gl.1-28)$$

$= -I_\omega$  Ergibt sich aus dem Vergleich von (Gl.1-27) mit (Gl.1-25) zwangsläufig!

Durch Gleichsetzen von (Gl.1-24) und (Gl.1-28) folgt die Definition der **Wölb Schubspannung**:

$$\tau_\omega = - \frac{M_{x,\omega}}{I_\omega} \cdot \frac{S_{\omega,g}}{t} \quad (Gl.1-29)$$

$M_{x,\omega}$  ... Wölb torsionsmoment

$S_{\omega,g}$  ... sektorielles statisches Moment des geschlossenen Querschnittes

$I_\omega$  ... Wölbwiderstand siehe (Gl.1-16)

$$S_{\omega,g} = S_{\omega,o} - \frac{\oint_{(s)} S_{\omega,o}}{\oint_{(s)} ds} \quad \text{mit:} \quad S_{\omega,o} = \int_{(s)} \omega \cdot t \cdot ds$$

## 2 Mechanische Grundlagen am Stab

### 2.1 Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion

Betrachtet man ein infinitesimales Element eines, mit einem veränderlichen Streckentorsionsmoment  $m_{T(x)}$ , belasteten Stabes so folgt aus dem Momentengleichgewicht um die Stablängsachse:

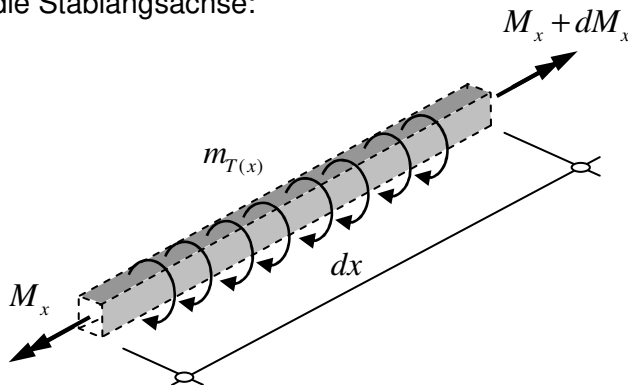


Abb.2-1: Gleichgewicht am infinitesimalen Stabelement

$$\sum M_x = 0 \quad \curvearrowright$$

$$m_T \cdot dx + (M_x + dM_x) - M_x = 0$$

$$m_T \cdot dx + dM_x = 0$$

$$-m_T \cdot dx = dM_x$$

$$\boxed{\frac{dM_x}{dx} = M'_x = -m_T} \quad (Gl.2-1)$$

Das **resultierende Torsionsmoment**  $M_x$  setzt sich im Allgemeinen aus dem **Saint Venant'schen Torsionsmoment**  $M_{x,sv}$  (Primäres Torsionsmoment) und dem **Wölb-torsionsmoment**  $M_{x,\omega}$  (Sekundäres Torsionsmoment) zusammen:

$$M_x = M_{x,sv} + M_{x,\omega} = G \cdot I_T \cdot \vartheta' - E \cdot I_\omega \cdot \vartheta''' \quad (Gl.2-2)$$

Durch Ableiten von (Gl.2-2) erhält man:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{dM_{x,sv}}{dx} + \frac{dM_{x,\omega}}{dx} = G \cdot I_T \cdot \vartheta'' - E \cdot I_\omega \cdot \vartheta^{IV} \quad (Gl.2-3)$$

Durch Einsetzen von (Gl.2-3) in (Gl.2-1) folgt die **Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion**:

$$\boxed{E \cdot I_\omega \cdot \vartheta^{IV} - G \cdot I_T \cdot \vartheta'' = m_T} \quad (Gl.2-4)$$

$G$  ... Schubmodul

$m_T$  ... Streckentorsionsmoment

$E$  ... Elastizitätsmodul

$\vartheta$  ... Stabverdrehung

$I_T$  ... Torsionsträgheitsmoment siehe (Gl.1-8)

$I_\omega$  ... Wölbwiderstand siehe (Gl.1-16)

**Anmerkung:**

Für wölbfreie Querschnitte mit  $I_\omega = 0$ , bei denen die Abtragung der Torsionsmomente ausschließlich über St. Venant'scher Torsion stattfindet, folgt aus (Gl.2-4) die Differentialgleichung der reinen St. Venant'schen Torsion:  $-G \cdot I_T \cdot \vartheta'' = m_T$



## 2.2 Allgemeine Lösung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion

Bei der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion handelt es sich um eine inhomogene Differentialgleichung 4. Ordnung. Die Lösung setzt sich also aus einem homogenen Anteil und einem partikulären Anteil zusammen:

$$\vartheta = \vartheta_{\text{hom}} + \vartheta_{\text{part}}$$

### 2.2.1 Homogene Lösung der Wölbkraft – DGL

Die zur Differentialgleichung (Gl.2-4) zugehörige homogene Differentialgleichung lautet:

$$E \cdot I_{\omega} \cdot \vartheta^{IV} - G \cdot I_T \cdot \vartheta'' = 0$$

$$\vartheta^{IV} - \frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_{\omega}} \cdot \vartheta'' = 0 \quad (\text{Gl.2-5})$$

Wird nun der Faktor  $\sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_{\omega}}}$  als  $\lambda$  definiert, so folgt aus (Gl.2-5):

$$\vartheta^{IV} - \lambda^2 \cdot \vartheta'' = 0 \quad (\text{Gl.2-6})$$

Der Faktor  $\lambda$  ist eine Querschnittskenngroße und kann als **Abklingfaktor** bezeichnet werden. Multipliziert man den Abklingfaktor mit der Stablänge  $L$ , so erhält man die **Stabkennzahl**  $\varepsilon = \lambda \cdot L$ .

Die **Stabkennzahl**  $\varepsilon = \lambda \cdot L = L \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_{\omega}}}$  steht stellvertretend für das **Abklingverhalten** des

**Wölbtorsionsmomentes**  $M_{x,\omega}$  und **Wölbmomentes**  $M_{\omega}$  an Stellen von Wölbbehinderungen.

Je größer die Stabkennzahl  $\varepsilon$ , desto rascher klingen die aus dem Wölbtorsionsmoment verursachten Wölbschubspannungen bzw. die aus dem Wölbmoment verursachten Längsnormalspannungen an Stellen von Wölbbehinderungen entlang der Stabachse ab.

Es können zwei Grenzfälle gebildet werden:

- Torsionssteifigkeit  $G \cdot I_T \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow$  **reine Wölbkrafttorsion**
- Wölbsteifigkeit  $E \cdot I_{\omega} \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon \rightarrow \infty \Rightarrow$  **reine St. Vernantsche Torsion**

In der Literatur ist vielfach die Definition eines **Grenzwertes**  $\varepsilon_{gr} = 100$  zu finden, bei deren Überschreitung die **Einflüsse aus Wölbkrafttorsion** gänzlich **vernachlässigt** werden können. Grund dafür ist das sehr rasche Abklingverhalten und die dadurch entstehenden lokal sehr begrenzten Spitzenbeanspruchungen  $\sigma_{\omega}$  und  $\tau_{\omega}$  die dann vor allem beim Stahl aufgrund des örtlichen Plastizierungsvermögens vernachlässigt werden können.

Um die Lösung der Differentialgleichung (Gl.2-6), in Abhängigkeit der dimensionslosen Stablängskoordinate  $\xi = \frac{x}{l}$ , angeben zu können wird nun (Gl.2-6) auf dimensionslose Form gebracht:

$$\frac{d^4}{dx^4} \vartheta_{(\xi)} - \lambda^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} \vartheta_{(\xi)} = 0$$

bzw.:

$$\frac{d^4}{d\xi^4} \vartheta_{(\xi)} \cdot \frac{d^4 \xi}{dx^4} - \lambda^2 \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} \vartheta_{(\xi)} \cdot \frac{d^2 \xi}{dx^2} = 0 \quad (\text{Gl.2-7})$$

Mit den Ableitungen  $\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \frac{1}{L^2}$  bzw.  $\frac{d^4 \xi}{dx^4} = \frac{1}{L^4}$  folgt aus (Gl.2-7):

$$\frac{1}{L^4} \cdot \frac{d^4}{d\xi^4} \vartheta_{(\xi)} - \frac{\lambda^2}{L^2} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} \vartheta_{(\xi)} = 0$$

Multipliziert man mit  $L^4$ , so folgt der homogene Anteil der Wölbkraft-DGL:

$$\frac{d^4}{d\xi^4} \vartheta_{(\xi)} - \underbrace{\lambda^2 L^2}_{=\varepsilon^2} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} \vartheta_{(\xi)} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^4}{d\xi^4} \vartheta_{(\xi)} - \varepsilon^2 \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} \vartheta_{(\xi)} = 0} \quad (\text{Gl.2-8})$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung (Gl.2-8) kann nun aus der Addition von vier Teillösungen mit **Hyperbelfunktionen** oder **Exponentialfunktionen** angegeben werden:

Darstellung der Lösung mittels **Exponentialfunktionen**

$$\vartheta_{\text{hom},(\xi)} = C_1 + C_2 \cdot \varepsilon \cdot \xi + C_3 \cdot e^{-\varepsilon \cdot \xi} + C_4 \cdot e^{-\varepsilon \cdot (1-\xi)}$$

$$\text{bzw.: } \vartheta_{\text{hom},(\xi)} = \underline{f}^T \cdot \underline{c}_{\text{exp}} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \cdot \xi & e^{-\varepsilon \cdot \xi} & e^{-\varepsilon \cdot (1-\xi)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{\text{exp}} \quad (\text{Gl.2-9})$$

Darstellung der Lösung mittels **Hyperbelfunktionen**

$$\vartheta_{\text{hom},(\xi)} = C_1 + C_2 \cdot \varepsilon \cdot \xi + C_3 \cdot \sinh(\varepsilon \cdot \xi) + C_4 \cdot \cosh(\varepsilon \cdot \xi)$$

$$\text{bzw.: } \vartheta_{\text{hom},(\xi)} = \underline{f}^T \cdot \underline{c}_{hyp} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \cdot \xi & \sinh(\varepsilon \cdot \xi) & \cosh(\varepsilon \cdot \xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp} \quad (\text{Gl.2-10})$$

Die Integrationskonstanten  $\underline{c}_{exp}$  bzw.  $\underline{c}_{hyp}$  können mit Hilfe von Rand- und Übergangsbedingungen gelöst werden.

### 2.2.2 Partikuläre Lösung der Wölbkraft - DGL

Die partikuläre Lösung ist vom Verlauf des am Stab angreifenden Streckentorsionsmomentes  $m_T$  abhängig. Je nach Lastbild ist ein zutreffender Lösungsansatz zu wählen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird auf eine nähere Erläuterung verzichtet, da in den weiteren Studien  $m_T = 0$  vorausgesetzt wird, und der partikuläre Lösungsanteil somit verschwindet.

### 2.2.3 Zustandsgrößen

Ausgehend von der Stabverdrehung  $\vartheta_{(\xi)}$  die aus der Lösung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion (Gl.2-4) erhalten wird, können nun auch die restlichen Zustandsgrößen angegeben werden:

*Anmerkungen:*

- Es wird nach wie vor  $m_T = 0$  vorausgesetzt !
- Für die Darstellung der Lösung werden Hyperbelfunktionen verwendet.

⇒ **Stabverdrehung**

$$\vartheta_{(\xi)} = \underline{f}^T \cdot \underline{c}_{hyp} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \cdot \xi & \sinh(\varepsilon \cdot \xi) & \cosh(\varepsilon \cdot \xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp}$$

⇒ **St. Venant'sches Torsionsmoment**  $M_{x,sv}$

$$M_{x,sv(\xi)} = G \cdot I_T \cdot \frac{d}{dx} \vartheta_{(\xi)} = \frac{G \cdot I_T}{L} \cdot \frac{d}{d\xi} \vartheta_{(\xi)} = \frac{G \cdot I_T}{L} \cdot \frac{d\underline{f}^T}{d\xi} \cdot \underline{c}_{hyp} = \frac{G \cdot I_T \cdot \varepsilon}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cosh(\varepsilon \cdot \xi) & \sinh(\varepsilon \cdot \xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp}$$

⇒ **Wölbmoment**  $M_\omega$

$$M_{\omega(\xi)} = -E \cdot I_\omega \cdot \frac{d^2}{dx^2} \vartheta_{(\xi)} = -\frac{E \cdot I_\omega}{L^2} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} \vartheta_{(\xi)} = -\frac{E \cdot I_\omega}{L^2} \cdot \frac{d^2 f^T}{d\xi^2} \cdot c_{hyp} = -\frac{E \cdot I_\omega \cdot \varepsilon^2}{L^2} \cdot [0 \ 0 \ \sinh(\varepsilon \cdot \xi) \ \cosh(\varepsilon \cdot \xi)] \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp}$$

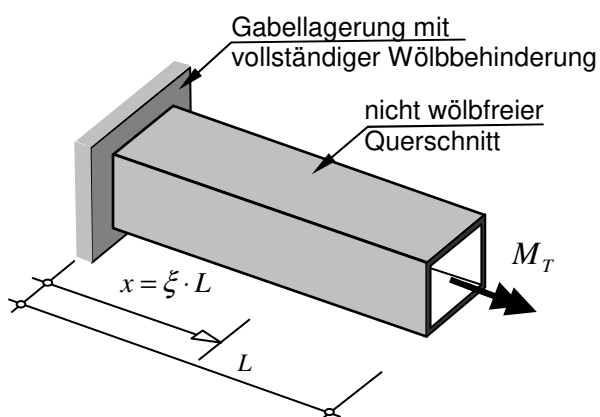
⇒ **Wölbtorsionsmoment**  $M_{x,\omega}$

$$M_{x,\omega(\xi)} = \frac{dM_\omega}{dx} = \frac{1}{L} \cdot \frac{dM_\omega}{d\xi} = -\frac{E \cdot I_\omega}{L^3} \cdot \frac{d^3}{d\xi^3} \vartheta_{(\xi)} = -\frac{E \cdot I_\omega}{L^3} \cdot \frac{d^3 f^T}{d\xi^3} \cdot c_{hyp} = -\frac{E \cdot I_\omega \cdot \varepsilon^3}{L^3} \cdot [0 \ 0 \ \cosh(\varepsilon \cdot \xi) \ \sinh(\varepsilon \cdot \xi)] \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp}$$

## 2.3 Spezielle Lösung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion

Die im Folgenden studierten Belastungsfälle gehen lediglich von einer Belastung durch Einzeltorsionsmomente  $M_T$  aus. Das Streckentorsionsmoment ist in diesen Fällen  $m_T = 0$ .

Im Speziellen soll nun die analytische Lösung der Wölbkraft-DGL für folgenden Belastungsfall gezeigt werden:



- geg.:  Einzeltorsionsmoment  $M_T$   
 Stablänge  $L$   
 Querschnittskennwerte  
 - Torsionsträgheitsmoment  $I_T$   
 - Wölbwiderstand  $I_\omega$   
 Materialkennwerte  
 - Elastizitätsmodul  $E$   
 - Schubmodul  $G$

- ges.:  Verlauf der Querschnittsverdrehung  $\vartheta_{(\xi)}$

Die DGL der Wölbkrafttorsion für  $m_T = 0$  in dimensionsloser Form lautet (siehe (Gl.2-8))

$$\frac{d^4}{d\xi^4} \vartheta_{(\xi)} - \varepsilon^2 \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} \vartheta_{(\xi)} = 0 \quad (\text{Gl.2-11})$$

Wählen wir die Darstellungsvariante mit Hyperbelfunktionen, so lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (Gl.2-11):

$$\vartheta_{(\xi)} = \underline{f}^T \cdot \underline{c}_{hyp} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \cdot \xi & \sinh(\varepsilon \cdot \xi) & \cosh(\varepsilon \cdot \xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp} \quad (Gl.2-12)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten  $C_1, C_2, C_3, C_4$  stehen die folgenden 4 Randbedingungen zur Verfügung:

(1) **Gabellagerung bei  $\xi = 0$ :**  $\vartheta_{(\xi=0)} = 0$  (Gl.2-13)

(2) **vollständige Wölbehinderung bei  $\xi = 0$ :**  
 $u_{(\xi=0)} = 0$  bzw. mit (Gl.1-13):  $-\omega \cdot \vartheta'_{(\xi=0)} = 0 \Rightarrow \vartheta'_{(\xi=0)} = 0$  (Gl.2-14)

(3) **freie Verwölbung bei  $\xi = 1$ :**  
 $\sigma_{\omega(\xi=1)} = 0$  bzw. mit (Gl.1-14):  $-E \cdot \omega \cdot \vartheta''_{(\xi=1)} = 0 \Rightarrow \vartheta''_{(\xi=1)} = 0$  (Gl.2-15)

(4) **Einzeltorsionsmoment bei  $\xi = 1$ :**  $G \cdot I_T \cdot \vartheta'_{(\xi=1)} - E \cdot I_{\omega} \cdot \vartheta'''_{(\xi=1)} = M_T$  (Gl.2-16)  
 (siehe mit (Gl.2-2))

Einsetzen von Bedingung (Gl.2-13) in die allgemeine Lösung der DGL (Gl.2-12) liefert:

$$\vartheta_{(\xi=0)} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \cdot 0 & \sinh(\varepsilon \cdot 0) & \cosh(\varepsilon \cdot 0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp} = 0$$

Daraus folgt die Gleichung:  $C_1 + C_4 = 0$

Einsetzen von Bedingung (Gl.2-14) in die allgemeine Lösung der DGL (Gl.2-12) liefert:

$$\vartheta'_{(\xi)} = \frac{\varepsilon}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cosh(\varepsilon \cdot \xi) & \sinh(\varepsilon \cdot \xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp}$$

$$\vartheta'_{(\xi=0)} = \frac{\varepsilon}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cosh(\varepsilon \cdot 0) & \sinh(\varepsilon \cdot 0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp} = 0$$

Daraus folgt die Gleichung:  $\frac{\varepsilon}{L} \cdot C_2 + \frac{\varepsilon}{L} \cdot C_3 = 0$  bzw.:  $C_2 + C_3 = 0$

Einsetzen von Bedingung (Gl.2-15) in die allgemeine Lösung der DGL (Gl.2-12) liefert:

$$v''_{(\xi)} = \frac{\varepsilon^2}{L^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sinh(\varepsilon \cdot \xi) & \cosh(\varepsilon \cdot \xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp}$$

$$v''_{(\xi=1)} = \frac{\varepsilon^2}{L^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sinh(\varepsilon) & \cosh(\varepsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp} = 0$$

Daraus folgt die Gleichung:  $\frac{\varepsilon^2}{L^2} \cdot (\sinh(\varepsilon) \cdot C_3 + \cosh(\varepsilon) \cdot C_4) = 0$

bzw.:  $C_3 \cdot \sinh \varepsilon + C_4 \cdot \cosh \varepsilon = 0$

Einsetzen von Bedingung (Gl.2-16) in die allgemeine Lösung der DGL (Gl.2-12) liefert:

$$G \cdot I_T \cdot v'_{(\xi)} - E \cdot I_\omega \cdot v''_{(\xi)} = \frac{G \cdot I_T \cdot \varepsilon}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cosh(\varepsilon \cdot \xi) & \sinh(\varepsilon \cdot \xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp} - \frac{E \cdot I_\omega \cdot \varepsilon^3}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cosh(\varepsilon \cdot \xi) & \sinh(\varepsilon \cdot \xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp}$$

$$G \cdot I_T \cdot v'_{(\xi=1)} - E \cdot I_\omega \cdot v''_{(\xi=1)} = \frac{G \cdot I_T \cdot \varepsilon}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cosh \varepsilon & \sinh \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp} - \frac{E \cdot I_\omega \cdot \varepsilon^3}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cosh \varepsilon & \sinh \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_{hyp} = M_T$$

Daraus folgt die Gleichung:

$$\frac{G \cdot I_T \cdot \varepsilon}{L} \cdot (C_2 + C_3 \cdot \cosh \varepsilon + C_4 \cdot \sinh \varepsilon) - \frac{E \cdot I_\omega \cdot \varepsilon^3}{L^3} \cdot (C_3 \cdot \cosh \varepsilon + C_4 \cdot \sinh \varepsilon) = M_T$$

Aus den Gleichungen lässt sich nun das folgende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Integrationskonstanten angeben;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh \varepsilon & \cosh \varepsilon \\ 0 & \frac{G \cdot I_T \cdot \varepsilon}{L} \cdot \left( \frac{G \cdot I_T \cdot \varepsilon}{L} - \frac{E \cdot I_\omega \cdot \varepsilon^3}{L^3} \right) \cdot \cosh \varepsilon & \left( \frac{G \cdot I_T \cdot \varepsilon}{L} - \frac{E \cdot I_\omega \cdot \varepsilon^3}{L^3} \right) \cdot \sinh \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_T \end{bmatrix}$$

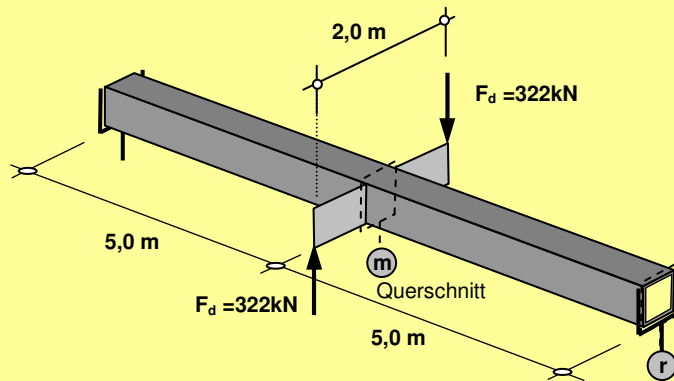
## 2.4 Beispiel – Kastenquerschnitt unter Torsionsbelastung

### 2.4.1 Angabe

geg.:

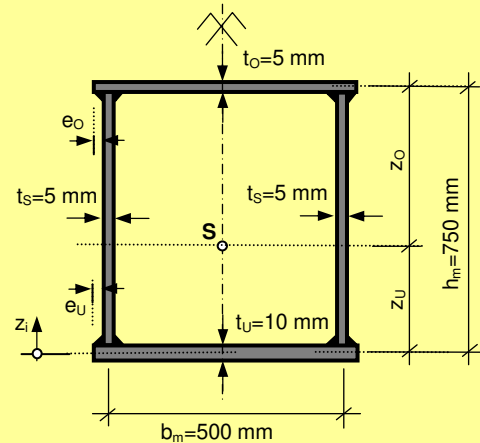
statisches System:

- beidseitig gabelgelagerter, jedoch an den Enden nicht wölbbehinderter Torsionsstab



Querschnitt:

- einfach symmetrischer Kastenquerschnitt



Anmerkungen:

- Der Überstand des Untergurtbleches bzw. Obergurtbleches  $e_U$  und  $e_O$  werden in der Berechnung der Querschnittswerte vernachlässigt; es wird mit dem idealisierten Kastenquerschnitt  $h_m \times b_m$  gerechnet.

ges.:

- Einheitsverwölbung  $\omega$
- Querschnittswerte  $I_T, I_\omega, S_{\omega,g}$
- analytische Schnittkraftverläufe  $M_{T,sv}, M_{T,\omega}, M_\omega$
- analytische Spannungsverläufe an der Kräfteinleitungsstelle  $\sigma_\omega, \tau_{sv}, \tau_\omega$  - Querschnitt (m)
- analytische Spannungsverläufe am Auflager  $\sigma_\omega, \tau_{sv}, \tau_\omega$  - Querschnitt (r)

### 2.4.2 Torsionsträgheitsmoment $I_T$ , Einheitsverwölbung $\omega$

Schwerpunkt (alle Maße in cm):

$$z_U = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A_i} = \frac{50 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 75 \cdot 0,5 \cdot 37,5 + 50 \cdot 0,5 \cdot 75}{50 \cdot 1 + 75 \cdot 0,5 \cdot 2 + 50 \cdot 0,5} = 31,25 \text{ cm}$$

$$z_O = 75 - 31,25 = 43,75 \text{ cm}$$

Torsionsträgheitsmoment (alle Maße in cm):

$$I_T = \frac{4 \cdot A_m^2}{\sum \frac{s_i}{t_{(s_i)}}} = \frac{4 \cdot (50 \cdot 75)^2}{\frac{50}{0,5} + \frac{50}{1} + \frac{75}{0,5} + \frac{75}{0,5}} = 12,5 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

Torsionsfunktion (alle Maße in cm):

$$\psi = \frac{I_T}{2 \cdot A_m} = \frac{12,5 \cdot 10^5}{2 \cdot (50 \cdot 75)} = 16,67 \text{ cm}^2 = 1666,67 \text{ mm}^2$$

Einheitsverwölbung (alle Maße in cm):

$$\omega = \int_{(s)} r_t \cdot ds - \psi \cdot \int_{(s)} \frac{ds}{t} \quad \text{Vgl.: (Gl.1-11)}$$

- Die Integration für die Einheitsverwölbung  $\omega$  beginnt hier lt. Voraussetzung für (Gl.1-11) in der Symmetrieachse (im Punkt ①) und läuft entlang der lokalen Querschnittskordinate s.

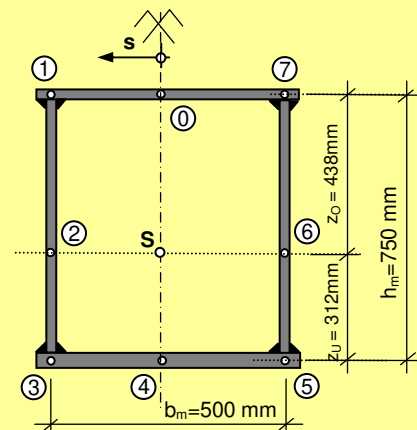


Abb.2-2: Geometrie für Einheitsverwölbung

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 0 \text{ cm}^2 \\ \omega_1 &= z_o \cdot \frac{b_m}{2} - \psi \cdot \frac{b_m}{2 \cdot t_o} = 43,75 \cdot \frac{50}{2} - 16,67 \cdot \frac{50}{2 \cdot 0,5} = 260,42 \text{ cm}^2 \\ \omega_2 &= \omega_1 + \frac{b_m}{2} \cdot z_o - \psi \cdot \frac{z_o}{t_s} = 260,42 + \frac{50}{2} \cdot 43,75 - 16,67 \cdot \frac{43,75}{0,5} = -104,17 \text{ cm}^2 \\ \omega_3 &= \omega_2 + \frac{b_m}{2} \cdot z_U - \psi \cdot \frac{z_U}{t_s} = -104,17 + \frac{50}{2} \cdot 31,25 - 16,67 \cdot \frac{31,25}{0,5} = -364,58 \text{ cm}^2 \\ \omega_4 &= \omega_3 + \frac{b_m}{2} \cdot z_U - \psi \cdot \frac{b_m}{2 \cdot t_U} = -364,58 + \frac{50}{2} \cdot 43,75 - 16,67 \cdot \frac{50}{2 \cdot 1,0} = 0 \text{ cm}^2 \\ \omega_5 &= \omega_4 + \frac{b_m}{2} \cdot z_U - \psi \cdot \frac{b_m}{2 \cdot t_U} = \frac{50}{2} \cdot 31,25 - 16,67 \cdot \frac{50}{2 \cdot 1,0} = +364,58 \text{ cm}^2 \\ \omega_6 &= \omega_5 + \frac{b_m}{2} \cdot z_U - \psi \cdot \frac{z_U}{t_s} = 364,58 + \frac{50}{2} \cdot 31,25 - 16,67 \cdot \frac{31,25}{0,5} = +104,17 \text{ cm}^2 \\ \omega_7 &= \omega_6 + \frac{b_m}{2} \cdot z_o - \psi \cdot \frac{z_o}{t_s} = 104,17 + \frac{50}{2} \cdot 43,75 - 16,67 \cdot \frac{43,75}{0,5} = -260,42 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Verlauf der Einheitsverwölbung

Pkt. i	Einheitsverwölbung $\omega_i$ [cm <sup>2</sup> ]
①	0
①	+260,42
②	-104,17
③	-364,58
④	0
⑤	+364,58
⑥	+104,17
⑦	-260,42

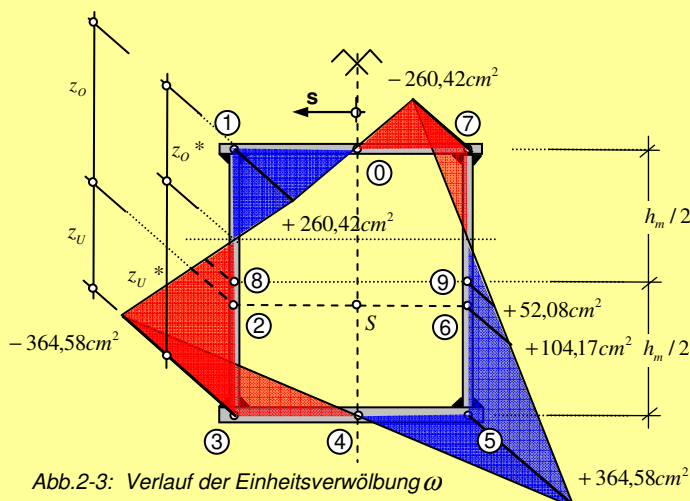


Abb.2-3: Verlauf der Einheitsverwölbung  $\omega$

Einheitsverwölbung in halber Querschnittshöhe (Punkte ⑧ und ⑨)

$$\omega_8 = \frac{\omega_1 + \omega_3}{2} = \frac{+260,42 + (-364,58)}{2} = -52,08 \text{ cm}^2 \quad , \quad \omega_9 = \frac{\omega_5 + \omega_7}{2} = \frac{+364,58 + (-260,42)}{2} = +52,08 \text{ cm}^2$$

Lage  $\omega = 0$  ( $z_o^*$ ,  $z_U^*$ )

$$z_o^* = \frac{260,42 \cdot h_m}{260,42 - (-364,58)} = \frac{260,42 \cdot 75}{260,42 - (-364,58)} = 31,25 \text{ cm} \quad , \quad z_U^* = h_m - z_o^* = 75 - 31,25 = 43,75 \text{ cm}$$

### 2.4.3 Wölbwiderstand $I_\omega$

Wölbwiderstand (alle Maße in cm):

$$I_\omega = \oint_s \omega \cdot t \cdot ds \quad \text{Vgl.: (Gl.1-16)}$$

□ Das Ringintegral für den Wölbwiderstand  $I_\omega$  beginnt hier im Punkt ① gemäß Abb.2-2.

	A	B	A
C	AC	$\frac{1}{2}BC$	$\frac{1}{2}AC$
D	$\frac{1}{2}AD$	$\frac{1}{3}BD$	$\frac{1}{6}AD$
C	$\frac{1}{2}AC$	$\frac{1}{6}BC$	$\frac{1}{3}AC$

Abb.2-4: Auszug Integraltabelle (Anm.: ohne Faktor L)



$$\begin{aligned}
 I_{\omega} &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 260,42 \cdot 260,42 \cdot t_o \cdot \frac{b_m}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 260,42 \cdot 260,42 \cdot t_s \cdot z_o^* + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 364,58 \cdot 364,58 \cdot t_s \cdot z_U^* \\
 &\quad + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 364,58 \cdot 364,58 \cdot t_U \cdot \frac{b_m}{2} \\
 I_{\omega} &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 260,42 \cdot 260,42 \cdot 0,5 \cdot \frac{50}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 260,42 \cdot 260,42 \cdot 0,5 \cdot 31,25 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 364,58 \cdot 364,58 \cdot 0,5 \cdot 43,75 \\
 &\quad + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 364,58 \cdot 364,58 \cdot 1,0 \cdot \frac{50}{2} = \boxed{54.25347,22 \text{ cm}^4}
 \end{aligned}$$

#### 2.4.4 Sektoriell statisches Moment (des geschlossenen Querschnittes) $S_{\omega,g}$

Zunächst wird der Querschnitt im Punkt ① „aufgeschnitten“, und das zugehörige sektorielle statische Moment des offenen Querschnittes bestimmt:

**Sektoriell statisches Moment des offenen Querschnittes** (alle Maße in cm):

$$S_{\omega,o} = \int_{(s)} \omega \cdot t \cdot ds \quad \text{Vgl.: (Gl.1-29)}$$

- Das Integral für  $S_{\omega,o}$  beginnt hier im Punkt ① gemäß Abb.2-2. und läuft entlang der lokalen Querschnittskordinate  $s$ .

$$S_{\omega,o,0} = 0$$

$$\begin{aligned}
 S_{\omega,o,1} &= \frac{1}{2} \cdot 260,42 \cdot t_o \cdot \frac{b_m}{2} \\
 &= 0,5 \cdot 260,42 \cdot 0,5 \cdot \frac{50}{2} = 1627,63 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\omega,o,2} &= S_{\omega,o,1} + \frac{1}{2} \cdot 260,42 \cdot t_s \cdot z_o^* + \frac{1}{2} \cdot (-104,17) \cdot t_s \cdot (z_o - z_o^*) \\
 &= 1627,63 + 0,5 \cdot 260,42 \cdot 0,5 \cdot 31,25 + 0,5 \cdot (-104,17) \cdot 0,5 \cdot (43,75 - 31,25) = 3336,59 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\omega,o,3} &= S_{\omega,o,2} + \frac{1}{2} \cdot (-104,17 + (-364,58)) \cdot t_s \cdot z_U \\
 &= 3336,59 + 0,5 \cdot (-104,17 + (-364,58)) \cdot 0,5 \cdot 31,25 = -325,52 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\omega,o,4} &= S_{\omega,o,3} + \frac{1}{2} \cdot (-364,58) \cdot t_U \cdot \frac{b_m}{2} \\
 &= -325,52 + 0,5 \cdot (-364,58) \cdot 1,0 \cdot \frac{50}{2} = -4882,81 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

$$S_{\omega,o,5} = S_{\omega,o,3} = -325,52 \text{ cm}^4$$

$$S_{\omega,o,6} = S_{\omega,o,2} = +3336,59 \text{ cm}^4$$

$$S_{\omega,o,7} = S_{\omega,o,1} = +1627,58 \text{ cm}^4$$

Sektoriell statisches Moment in halber Querschnittshöhe

$$\begin{aligned}
 S_{\omega,o(h_m/2)} &= S_{\omega,o,1} + \frac{1}{2} \cdot 260,42 \cdot t_s \cdot z_o^* + \frac{1}{2} \cdot (-52,08) \cdot t_s \cdot \left(\frac{h_m}{2} - z_o^*\right) \\
 &= 1627,63 + 0,5 \cdot 260,42 \cdot 0,5 \cdot 31,25 + 0,5 \cdot (-52,08) \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{75}{2} - 31,25\right) = 3580,73 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

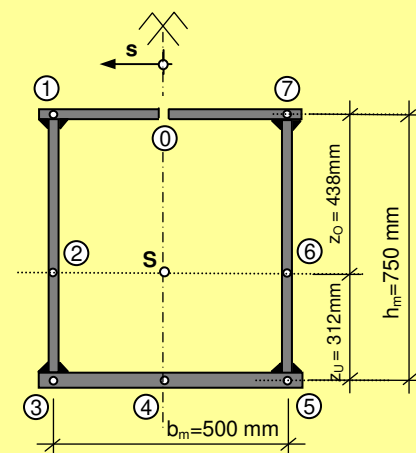


Abb.2-5: „aufgeschnittener“ Querschnitt

**Sektorielles statisches Moment des geschlossenen Querschnittes** (alle Maße in cm):

$$S_{\omega,g} = S_{\omega,o} - \frac{\oint_{(s)} S_{\omega,o}}{\oint_{(s)} ds} \quad \text{Vgl.: (Gl.1-29)}$$

$$\begin{aligned} \oint_{(s)} S_{\omega,o} &= \frac{1}{6} \cdot b_m \cdot (1627,6 + 4 \cdot 0 + 1627,6) + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot h_m \cdot (1627,6 + 4 \cdot 3580,73 - 325,52) \\ &+ \frac{1}{6} \cdot b_m \cdot (-325,52 + 4 \cdot (-4882,81) - 325,52) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 50 \cdot (1627,6 + 4 \cdot 0 + 1627,6) + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 75 \cdot (1627,6 + 4 \cdot 3580,73 - 325,52) \\ &+ \frac{1}{6} \cdot 50 \cdot (-325,52 + 4 \cdot (-4882,81) - 325,52) = 249565,97 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\frac{\oint_{(s)} S_{\omega,o(s)}}{\oint_{(s)} ds} = \frac{249565,97}{2 \cdot h_m + 2 \cdot b_m} = \frac{249565,97}{2 \cdot 75 + 2 \cdot 50} = 998,26 \text{ cm}^4$$

Verlauf der des sektoriellen statischen Momentes

Pkt. i	$S_{\omega,o,i} [\text{cm}^4]$	$S_{\omega,g,i} [\text{cm}^4]$
①	0	-998,26
①	+1627,60	+629,34
②	+3336,59	+2338,32
③	-325,52	-1323,78
④	-4882,81	-5881,08
⑤	-325,52	-1323,78
⑥	+3336,59	+2338,32
⑦	-1627,60	+629,34

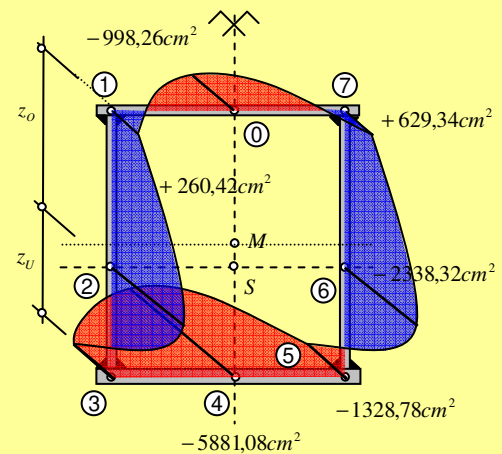
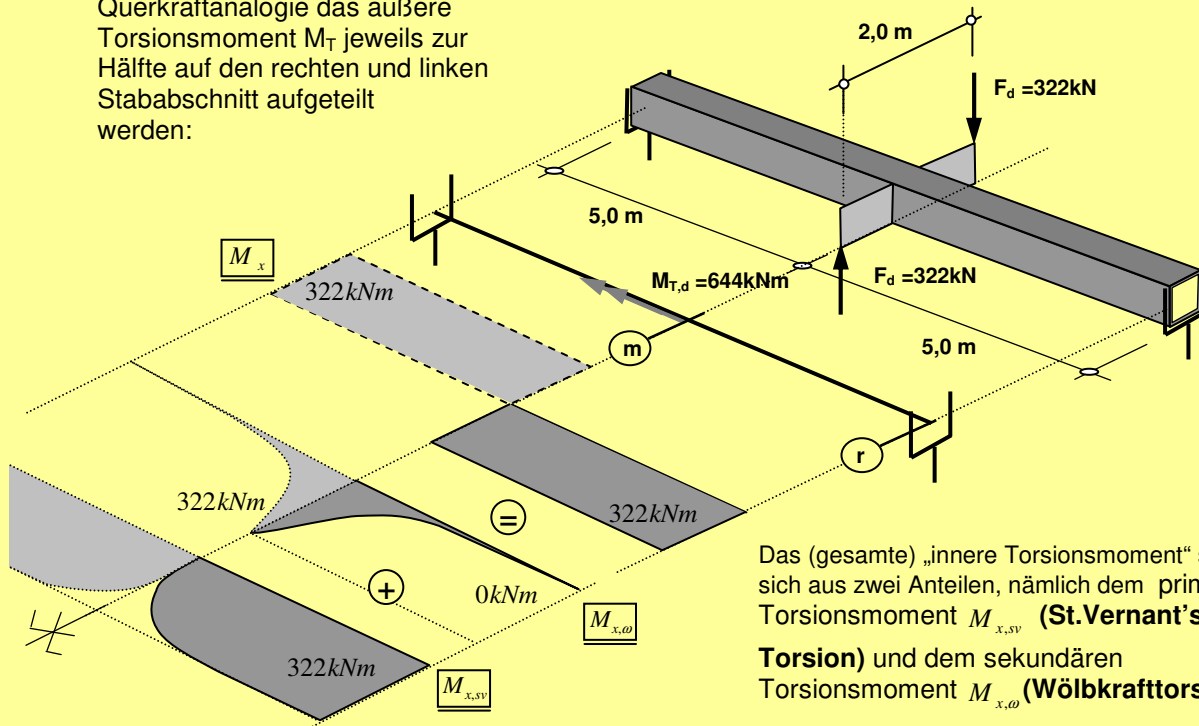


Abb.2-6: Verlauf von  $S_{\omega,g}$

2.4.5 Analytische Schnittkraftverläufe  $M_{x,sv}, M_{x,\omega}, M_\omega$

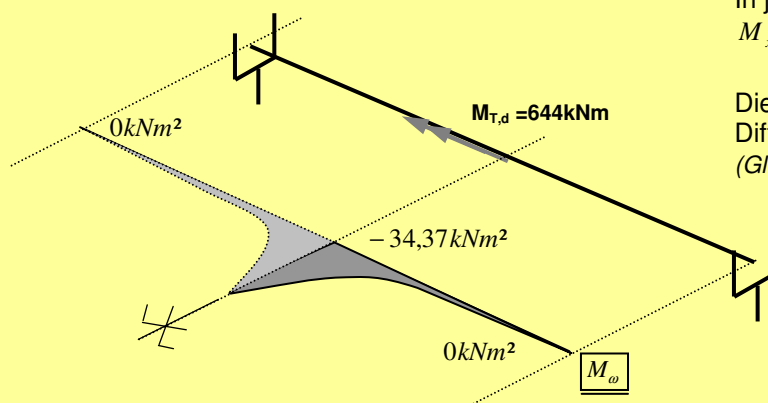
Zur Ermittlung des (gesamten) „inneren Torsionsmoments“  $M_x$  kann nach dem Prinzip der Querkraftanalogie das äußere Torsionsmoment  $M_T$  jeweils zur Hälfte auf den rechten und linken Stababschnitt aufgeteilt werden:



Das (gesamte) „innere Torsionsmoment“ setzt sich aus zwei Anteilen, nämlich dem primären Torsionsmoment  $M_{x,sv}$  (**St.Vernant'sche Torsion**) und dem sekundären Torsionsmoment  $M_{x,\omega}$  (**Wölbkrafttorsion**), zusammen.

In jedem Querschnitt gilt:  
 $M_x = M_{x,sv} + M_{x,\omega}$

Die Verteilung kann nur durch Lösung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion (Gl.2-5) gefunden werden. (siehe Kap.2)



Für die folgende Spannungsberechnung wird einer der beiden Stababschnitte betrachtet (die Beanspruchungen im linken und rechten Stababschnitt sind ident):

Schnittkraft	Stelle (m)	Stelle (r)	Bemerkung
$M_x$	322 kNm	322kNm	<b>Gesamtes inneres Torsionsmoment</b>
$M_{x,sv}$	0 kNm	322 kNm	<b>St-Vernant'sches Torsionsmoment</b> („erzeugt St.Vernant'sche Schubspannungen“)
$M_{x,\omega}$	322 kNm	0 kNm	<b>Wölb-torsionsmoment</b> („erzeugt Wölbschubspannungen“)
$M_\omega$	-34,37 kNm <sup>2</sup>	0 kNm <sup>2</sup>	<b>Wölb-bimoment</b> („erzeugt Wölbnormalspannungen“)

2.4.6 Analytische Spannungsverläufe an der Kräfteinleitungsstelle  $\sigma_\omega, \tau_\omega$  - Querschnitt (m)

An der Kräfteinleitungsstelle (in Feldmitte) ist die Verwölbung zur Gänze behindert (somit:  $M_{x,sv} = 0$ ). Es entstehen Wölbnormalspannungen, das Torsionsmoment  $M_{x,\omega} = M_x = 0$  wird über Wölb Schubspannungen abgetragen.

Wölbnormalspannung im Querschnitt (m) :

$$\sigma_\omega = \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega$$

Vgl.: (Gl.1-18)

- mit:
- Einheitsverwölbung  $\omega$  siehe 2.4.2
  - Wölbmoment  $M_\omega$  siehe 2.4.5
  - Wölbwiderstand  $I_\omega$  siehe 2.4.3

$$\begin{aligned} \sigma_{\omega,0} &= \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega_0 = \frac{-34,37 \cdot 100^2}{54.25347,22} \cdot 0 = 0,00 \frac{kN}{cm^2} \\ \sigma_{\omega,1} &= \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega_1 = \frac{-34,37 \cdot 100^2}{54.25347,22} \cdot (+260,42) = -16,50 \frac{kN}{cm^2} \\ \sigma_{\omega,2} &= \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega_2 = \frac{-34,37 \cdot 100^2}{54.25347,22} \cdot (-104,17) = +6,60 \frac{kN}{cm^2} \\ \sigma_{\omega,3} &= \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega_3 = \frac{-34,37 \cdot 100^2}{54.25347,22} \cdot (-364,58) = +23,10 \frac{kN}{cm^2} \\ \sigma_{\omega,4} &= \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega_4 = \frac{-34,37 \cdot 100^2}{54.25347,22} \cdot 0 = 0,00 \frac{kN}{cm^2} \\ \sigma_{\omega,5} &= \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega_5 = \frac{-34,37 \cdot 100^2}{54.25347,22} \cdot (+364,58) = -23,10 \frac{kN}{cm^2} \\ \sigma_{\omega,6} &= \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega_6 = \frac{-34,37 \cdot 100^2}{54.25347,22} \cdot (+104,17) = -6,60 \frac{kN}{cm^2} \\ \sigma_{\omega,7} &= \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega_7 = \frac{-34,37 \cdot 100^2}{54.25347,22} \cdot (-260,42) = -16,50 \frac{kN}{cm^2} \end{aligned}$$

Verlauf der der Wölbnormalspannung

Pkt. i	Wölbnormalspannung $\sigma_{\omega,i}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]
①	0,00
①	- 16,50
②	+ 6,60
③	+ 23,10
④	0,00
⑤	- 23,10
⑥	- 6,60
⑦	+ 16,50

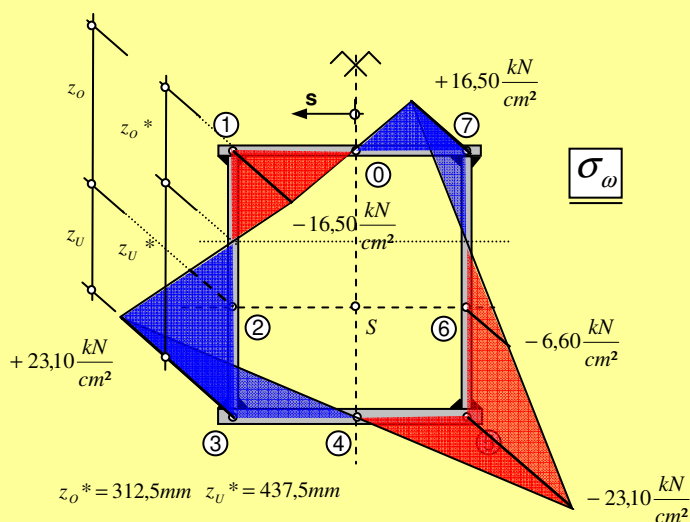


Abb.2-7: Verlauf der Wölbnormalspannung  $\sigma_\omega$  im Querschnitt (m)

Anmerkungen:

- Die Verteilung der Wölbnormalspannung ist **antimetrisch** bezüglich der Symmetrieachse

Wölb Schubspannungen im Querschnitt (m) :

$$\tau_{\omega} = - \frac{M_{x,\omega}}{I_{\omega}} \cdot \frac{S_{\omega,g}}{t}$$

Vgl.:(Gl.1-29)

- mit: - Sektormoment  $S_{\omega,g}$  siehe 2.4.4  
 - Wölb torsionsmoment  $M_{x,\omega}$  siehe 2.4.5  
 - Wölbwiderstand  $I_{\omega}$  siehe 2.4.3

$$\tau_{\omega,0} = - \frac{M_{x,\omega}}{I_{\omega}} \cdot \frac{S_{\omega,g,0}}{t_0} = \frac{322 \cdot 100}{54.25347,22} \cdot \frac{(-998,26)}{0,5} = 11,85 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{\omega,1,Gurt} = - \frac{M_{x,\omega}}{I_{\omega}} \cdot \frac{S_{\omega,g,1}}{t_0} = \frac{322 \cdot 100}{54.25347,22} \cdot \frac{(+629,34)}{0,5} = -7,47 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{\omega,1,Steg} = - \frac{M_{x,\omega}}{I_{\omega}} \cdot \frac{S_{\omega,g,1}}{t_s} = \frac{322 \cdot 100}{54.25347,22} \cdot \frac{(+629,34)}{0,5} = -7,47 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{\omega,2} = - \frac{M_{x,\omega}}{I_{\omega}} \cdot \frac{S_{\omega,g,2}}{t_s} = \frac{322 \cdot 100}{54.25347,22} \cdot \frac{(+2338,32)}{0,5} = -27,76 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{\omega,3,Steg} = - \frac{M_{x,\omega}}{I_{\omega}} \cdot \frac{S_{\omega,g,3}}{t_s} = \frac{322 \cdot 100}{54.25347,22} \cdot \frac{(-1323,78)}{0,5} = 15,71 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{\omega,3,Gurt} = - \frac{M_{x,\omega}}{I_{\omega}} \cdot \frac{S_{\omega,g,3}}{t_U} = \frac{322 \cdot 100}{54.25347,22} \cdot \frac{(-1323,78)}{1,0} = 7,86 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{\omega,4} = - \frac{M_{x,\omega}}{I_{\omega}} \cdot \frac{S_{\omega,g,4}}{t_U} = \frac{322 \cdot 100}{54.25347,22} \cdot \frac{(-5881,08)}{1,0} = 34,90 \frac{kN}{cm^2}$$

Verlauf der Wölb Schubspannung

Pos.i:	Wölb Schubspannung $\tau_{\omega,i} [kN/cm^2]$
0	+ 11,85
1	- 7,47
2	- 27,76
3	Steg: + 15,71 Gurt: + 7,86
4	+ 34,90
5	Steg: + 15,71 Gurt: + 7,86
6	- 27,76
7	- 7,47

Anmerkungen:

- Die Verteilung der Wölb Schubspannung ist **symmetrisch** bezüglich der Symmetrieachse

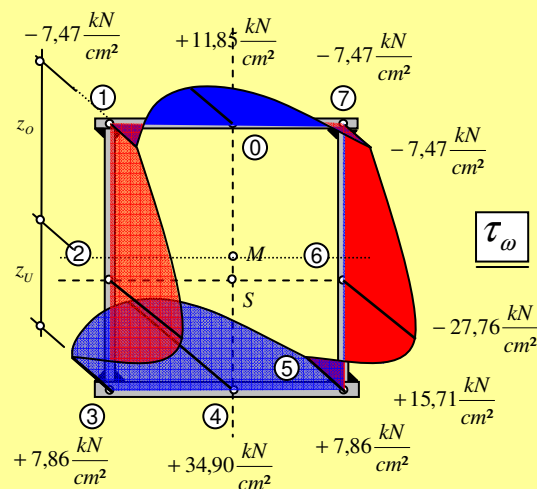


Abb.2-8: Verlauf der Wölb Schubspannung  $\tau_{\omega}$  im Querschnitt (m)

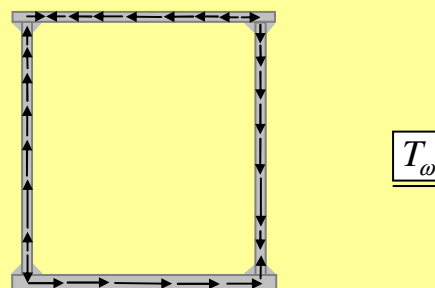


Abb.2-10: Qualitativer Verlauf des Wölb Schubflusses  $T_{\omega}$  im Querschnitt (m)

2.4.7 Analytische Spannungsverläufe am Gabellager  $\tau_{sv}$  - Querschnitt (r)

Der Querschnitt kann sich aus seiner Ebene frei verwölben, es entstehen keine Wölbnormalspannungen, das Torsionsmoment wird alleine über St.Vernant'sche Torsion abgetragen.

St.Vernant'sche Schubspannungen im Querschnitt (r):

$$\tau_{sv} = \frac{M_{x,sv}}{2 \cdot h_m \cdot b_m \cdot t}$$

mit: - St.Vernant'sches Torsionsmoment  $M_{x,sv}$  siehe 2.4.5

$$\tau_{sv,0} = \tau_{sv,1} = \tau_{sv,7} = \frac{M_{x,sv}}{2 \cdot h_m \cdot b_m \cdot t_o} = \frac{322 \cdot 100}{2 \cdot 75 \cdot 50 \cdot 0,5} = 8,59 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{sv,2} = \tau_{sv,6} = \frac{M_{x,sv}}{2 \cdot h_m \cdot b_m \cdot t_s} = \frac{322 \cdot 100}{2 \cdot 75 \cdot 50 \cdot 0,5} = 8,59 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{sv,3} = \tau_{sv,4} = \tau_{sv,5} = \frac{M_{x,sv}}{2 \cdot h_m \cdot b_m \cdot t_U} = \frac{322 \cdot 100}{2 \cdot 75 \cdot 50 \cdot 1,0} = 4,30 \frac{kN}{cm^2}$$

Verlauf der St. Venant'schen Schubspannung

Pos.i:	St.Vernant'sche Schubspannungen $\tau_{sv} [kN/cm^2]$
①	+ 8,59
①	+ 8,59
②	+ 8,59
③	+ 4,30
④	+ 4,30
⑤	+ 4,30
⑥	+ 8,59
⑦	+ 8,59

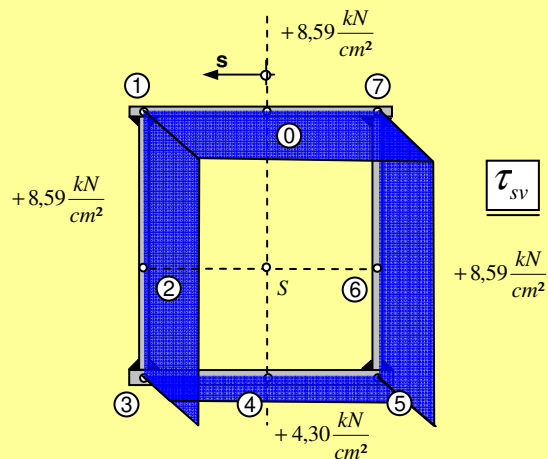


Abb.2-9: Verlauf der Wölbschubspannung  $\tau_w$  im Querschnitt (m)

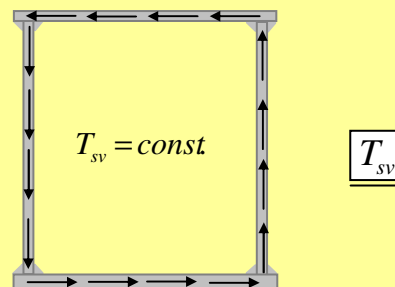


Abb.2-10: Qualitativer Verlauf des Wölbschubflusses  $T_w$  im Querschnitt (m)

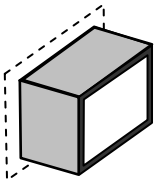
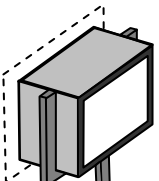
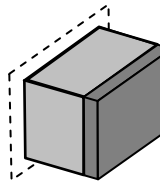
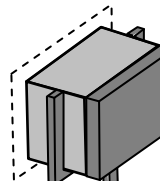
### 3 Berechnungstool - Wölbkrafttorsion

Zur Ermittlung der Beanspruchungen (sowohl Schnittgrößen als auch Normal- und Schubspannungen) aus Wölbkrafttorsion in allgemeinen quadratischen und rechteckigen Kastenquerschnitten wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Berechnungstool in MS Excel erstellt.

Damit können folgende Aufgaben gelöst werden:

- **Lösung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion** für einen beidseitig, durch verschiedene Randbedingungen, begrenzten Stababschnitt, der durch ein Torsionsmoment am Rand belastet wird.

Folgende **Randbedingungen am Stabende** sind möglich:

			
frei drehbar & keine Wölbbehinderung	Gabellagerung & keine Wölbbehinderung	frei drehbar & Wölbbehinderung	Gabellagerung & Wölbbehinderung

Folgende **Zustandsgrößen bzw. Parameter** können ausgegeben werden:

- **Verlauf des St. Venant'schen Torsionsmomentes**  $M_{x,sv}$  [kNm]
- **Verlauf des Wölbtorsionsmomentes**  $M_{x,\omega}$  [kNm]
- **Verlauf des Wölbmomentes**  $M_{\omega}$  [kNm<sup>2</sup>]
- **Abklingfaktor**  $\lambda$  [1/m]
- **Stabkennzahl**  $\varepsilon$  [1/m]

*Anmerkung:*

Die Integrationskonstanten für die Lösung der DGL der Wölbkrafttorsion werden numerisch berechnet. Als besondere Herausforderung bei der Implementierung stellten sich dabei, die für annähernd quadratische Kastenquerschnitte typischen, hohen Stabkennzahlen  $\varepsilon$  (Beschreibung siehe 2.2.1) heraus. Bei  $h_m/b_m \rightarrow 1,0$  (Querschnitte mit  $h_m/b_m = 1,0$  sind wölbfrei) strebt  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Hohe Stabkennzahlen führen auf Terme mit hohen Zahlenwerten, die vor allem bei Differenzbildung hinsichtlich Rechengenauigkeit und Rundung problematisch sind.

Diese „Probleme“ wurden hier zwar durch numerische Umformungen weitgehend eingeschränkt, können jedoch bei sehr großen Stabkennzahlen weiterhin bestehen.

Betrachtet man diese „Probleme“ aus praktischer Sicht, so relativieren sie sich etwas, da ein hohes  $\varepsilon$  eine Vernachlässigung der Effekte aus Wölbkrafttorsion erlaubt (in der Literatur vielfach wenn  $\varepsilon > 100$ ).

□ Berechnung der für die Spannungsermittlung erforderlichen **Querschnittswerte**

- **Einheitsverwölbung**  $\omega$  [ $\text{cm}^2$ ]
- **Sektorielles statisches Moment**  
(des geschlossenen Querschnittes)  $S_{\omega,g}$  [ $\text{cm}^4$ ]
- **Torsionsträgheitsmoment**  $I_T$  [ $\text{cm}^4$ ]
- **Torsionswiderstand**  $I_\omega$  [ $\text{cm}^4$ ]

Es ist die Eingabe verschiedenster Geometrieverhältnisse, und verschiedener Blechstärken möglich. Der Querschnitt muss jedoch zumindest **eine Symmetrieachse** besitzen.

□ Querschnittsweise **Spannungsermittlung**

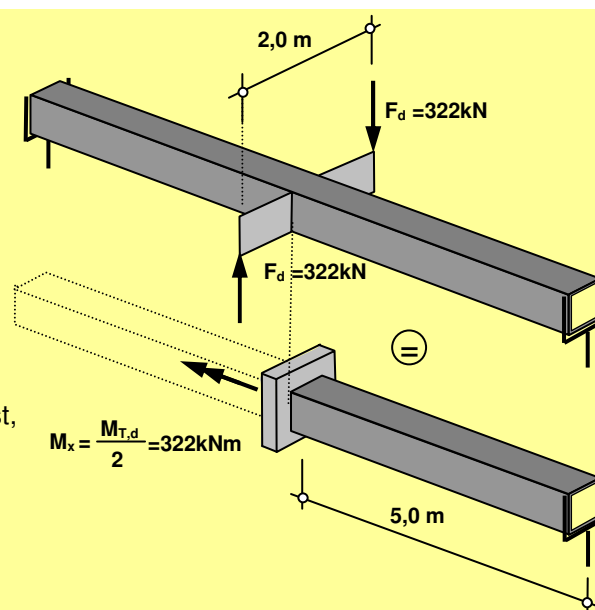
- **Schubspannung aus St. Vernant'scher Torsion**  $\tau_{sv}$  [ $\text{kN/cm}^2$ ]
- **Schubspannung aus Wölbkrafttorsion**  $\tau_\omega$  [ $\text{kN/cm}^2$ ]
- **Wölbnormalspannung**  $\sigma_\omega$  [ $\text{kN/cm}^2$ ]

Die auftretenden Spannungen können in jedem Querschnittspunkt, jedes Querschnitts über den ganzen Stab berechnet, und grafisch dargestellt werden.

### 3.1 Beispiel - Fortsetzung

Um die Funktionsweise des Berechnungs-Tools zu zeigen, werden die Beanspruchungen des in Beispiel 2.4 behandelten Kastenträgers kontrolliert.

Um die Eingabe zu ermöglichen, muss der in der Mitte belastete Kastenträger, gedanklich in zwei Stababschnitte aufgeteilt werden. Bei beiden Stababschnitten ist, aufgrund der Symmetriebedingung, an der Kräfteinleitungsstelle die Verwölbung zur Gänze behindert.





## Torsion von Kastenquerschnitten

**statisches System**

Stablänge  $L$   
 5 [ m ]

Torsionsmoment  $M_T$   
 322 [ kNm ]

**Randbedingungen "links"**

Verwölbung	frei
Verdrehung	gesperrt
Torsionsmomentenangriff	nein

**Randbedingungen "rechts"**

Verwölbung	gesperrt
Verdrehung	frei
Torsionsmomentenangriff	ja

**Randbedingungen OK**

**Querschnitt**

**Material**

E-Modul	21000	[ kN/cm <sup>2</sup> ]
Schubmodul	8000	[ kN/cm <sup>2</sup> ]

**Geometrie**

$b_m$	500	[ mm ]
$h_m$	750	[ mm ]
$t_s$	5	[ mm ]
$t_u$	10	[ mm ]
$t_o$	5	[ mm ]

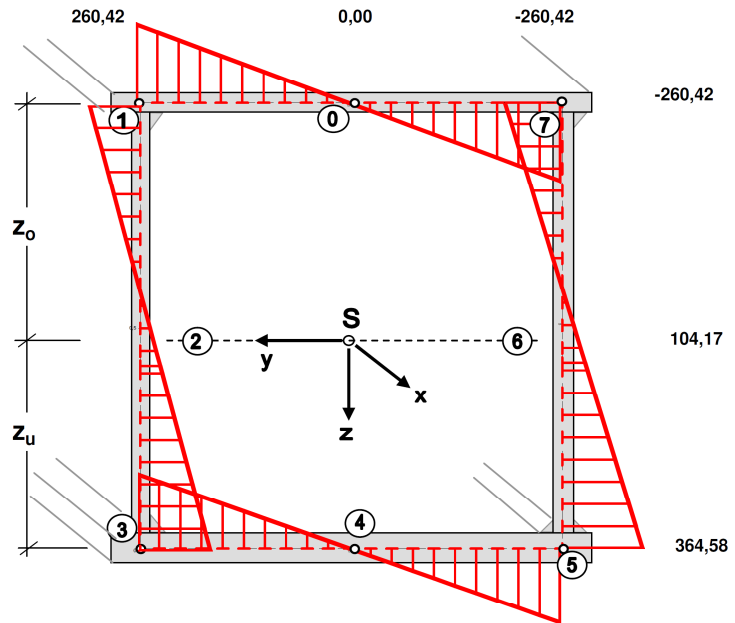
**Kurzzusammenfassung Ergebnisse**

Querschnittswerte	$I_\omega = 5425347,222$ [cm <sup>4</sup> ] (Torsionswiderstand)	Schnittkräfte	
	$I_T = 125000$ [cm <sup>4</sup> ] (Torsionsträgheitsmoment)		
	$\lambda = 9,37$ [1/m] (Abklingfaktor)		
	$\varepsilon = 46,84$ [-] (Stabkennzahl)		
Rand Spannungen	$\sigma_{\omega,max} = 23,10$ [kN/cm <sup>2</sup> ] $\sigma_{\omega,min} = -16,50$ [kN/cm <sup>2</sup> ] $T_{\omega,max} = 31,58$ [kN/cm <sup>2</sup> ] $T_{sv,max} = 8,59$ [kN/cm <sup>2</sup> ]		

### Querschnittswerte

#### Einheitsverwölbung $\omega$

Punkt	Einheitsverwölbung $\omega$ [ cm <sup>2</sup> ]
0	0,00
1	260,42
2	-104,17
3	-364,58
4	0,00
5	364,58
6	104,17
7	-260,42



Schwerpunkt	$z_u$	312,50 [mm]
	$z_o$	437,50 [mm]
	$z_u^*$	437,5 [mm]
	$z_o^*$	312,5 [mm]

Torsionsfunktion  $\Psi$  1666,67 [ mm<sup>2</sup> ]

#### Torsionsträgheitsmoment $I_T$

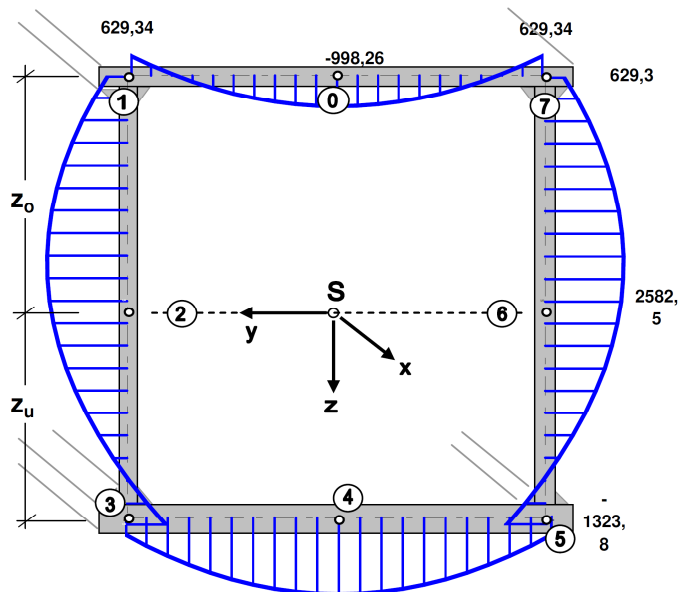
$$I_T = 125000,00 \text{ [cm}^4\text{]}$$

#### Wölbwiderstand $I_\omega$

$$I_\omega = 5425347,22 \text{ [cm}^4\text{]}$$

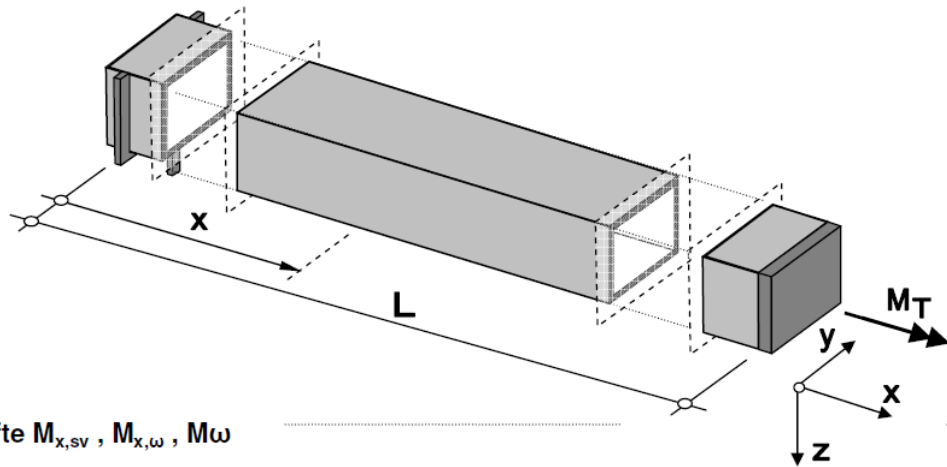
#### Sektorielles statisches Moment $S_{\omega,g}$

Punkt	$S_{\omega,o}$ [ cm <sup>4</sup> ]	$S_{\omega,g}$ [ cm <sup>4</sup> ]
0	0,00	-998,26
1	1627,60	629,34
2	3336,59	2338,32
3	-325,52	-1323,78
4	-4882,81	-5881,08
5	-325,52	-1323,78
6	3336,59	2338,32
7	1627,60	629,34

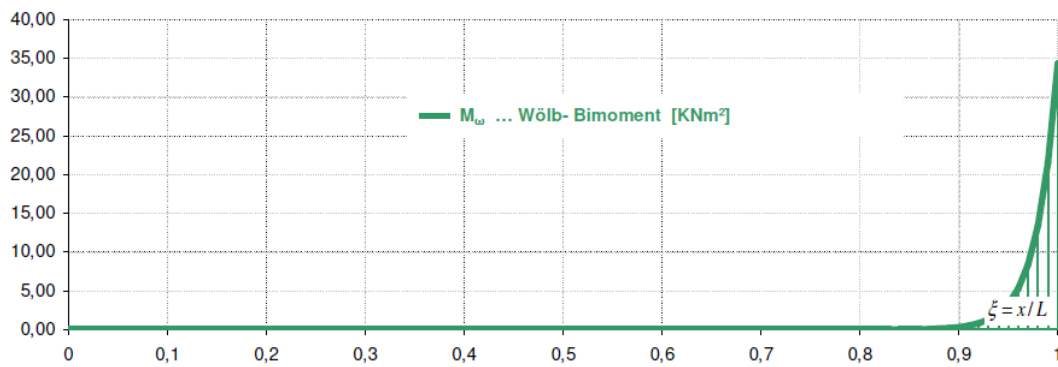
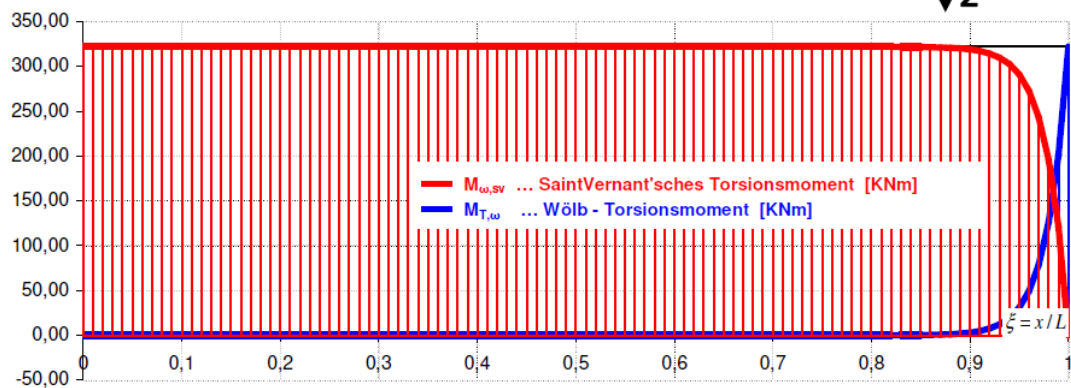


Korrekturterm 998,26

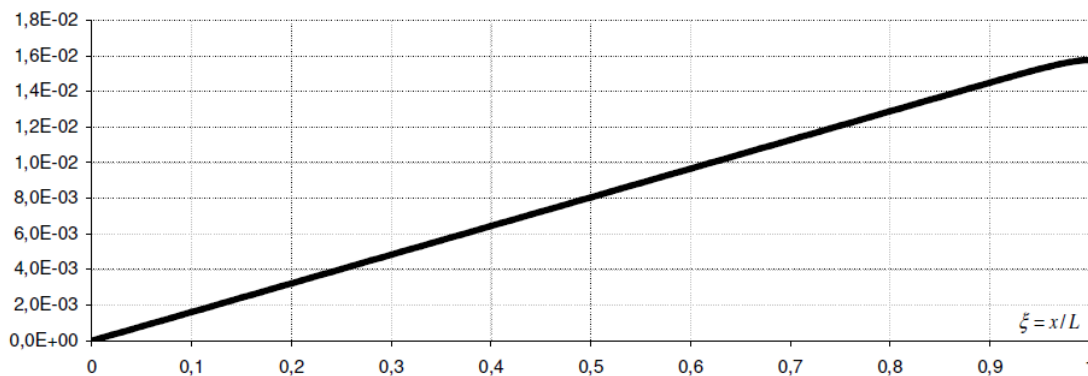
### Schnittkräfte, Verformungen



Schnittkräfte  $M_{x,sv}$ ,  $M_{x,\omega}$ ,  $M\omega$

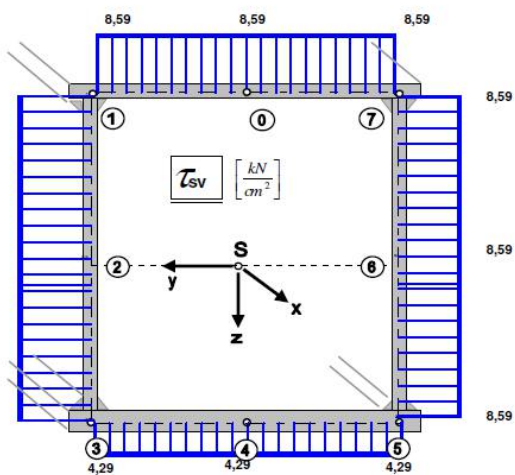
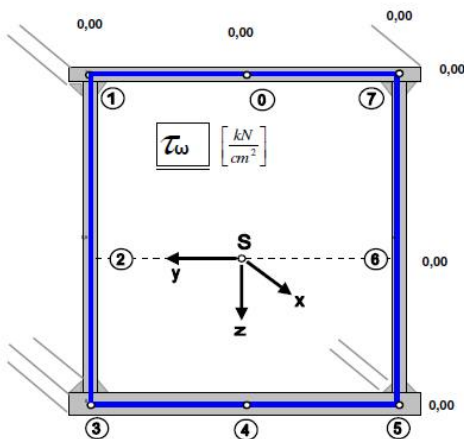
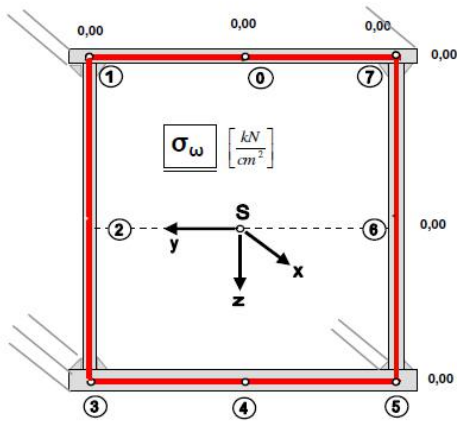


Verdrehung  $\vartheta$

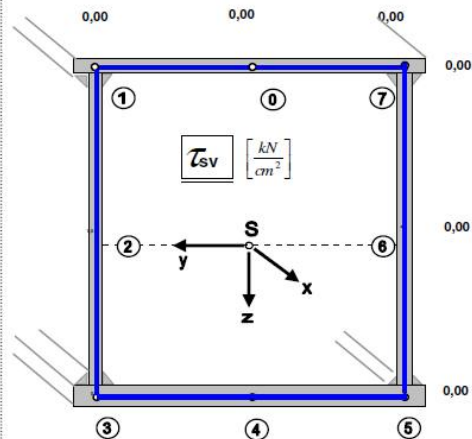
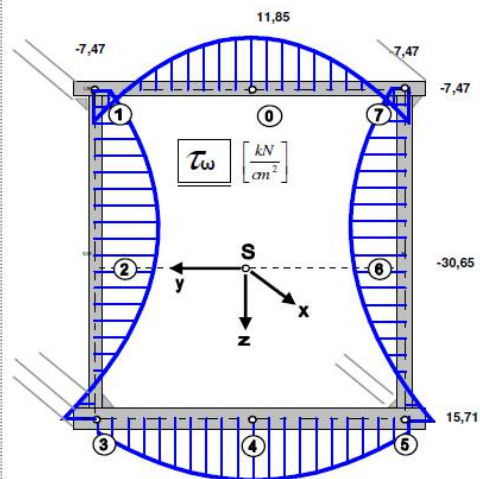
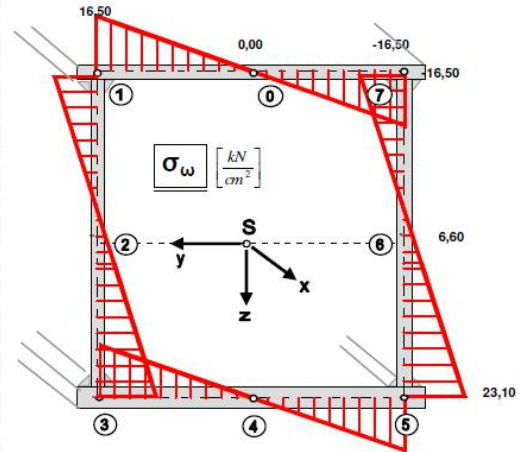


### Schubspannungen, Normalspannungen

Stelle  $x = 0$  [m]



Stelle  $x = 5$  [m]



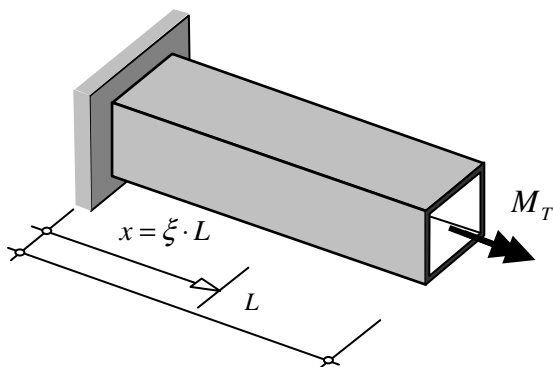
## 4 Einfluss der Querschnittsgeometrie auf die Beanspruchungen im torsionsbeanspruchten Stab

Im Folgenden werden die Einflüsse der Querschnittsgeometrie (Höhen/Breitenverhältnis, Blechstärkenverhältnis) auf:

- den Verlauf von Wölbtorsionsmoment und Wölbmoment
- das maximal auftretende Wölbtorsionsmoment und Wölbmoment
- die maximal auftretenden Wölbnormal- und Wölb Schubspannungen

untersucht.

Das zugrunde liegende statische System entspricht in allen Fällen einem einseitig eingespannten, torsionsbelasteten Kastenträger:



$\xi$  ... dimensionslose Koordinate  $\xi = \frac{x}{L}$

Im Weiteren werden 3 zu untersuchende „Querschnittstypen“ festgelegt:

Querschnittstyp A	Querschnittstyp B	Querschnittstyp C
<p>„rechteckiger Kastenquerschnitt – <math>t = \text{const.}</math>“</p> <p>Eigenschaften:                      - konstante Blechstärke <math>t</math>                      - variierendes Geometrieverhältnis <math>h_m/b_m</math></p>	<p>„rechteckiger Kastenquerschnitt – <math>t_o = t_u \neq t_s</math>“</p> <p>Eigenschaften:                      - variierendes Geometrieverhältnis <math>h_m/b_m</math>                      - variierendes Blechstärkenverhältnis <math>t_o(=t_u)/t_s</math></p>	<p>„rechteckiger Kastenquerschnitt – <math>t_o = t_s \neq t_u</math>“</p> <p>Eigenschaften:                      - variierendes Geometrieverhältnis <math>h_m/b_m</math>                      - variierendes Blechstärkenverhältnis <math>t_o(=t_s)/t_u</math></p>
<p>„Kasten mit konstanter Wandstärke“</p>	<p>„Kasten mit beidseitig verstärkten Gurten“</p>	<p>„Kasten mit verstärktem Untergurt“</p>

**4.1 Einfluss der Geometrie auf das Abklingverhalten des Wölb-torsionsmomentes  $M_{x,\omega}$**

Vorbemerkungen:

- Aus dem Wölb-torsionsmoment  $M_{x,\omega}$  erfolgt unmittelbar die Ermittlung der Wölbschubspannung  $\tau_\omega$

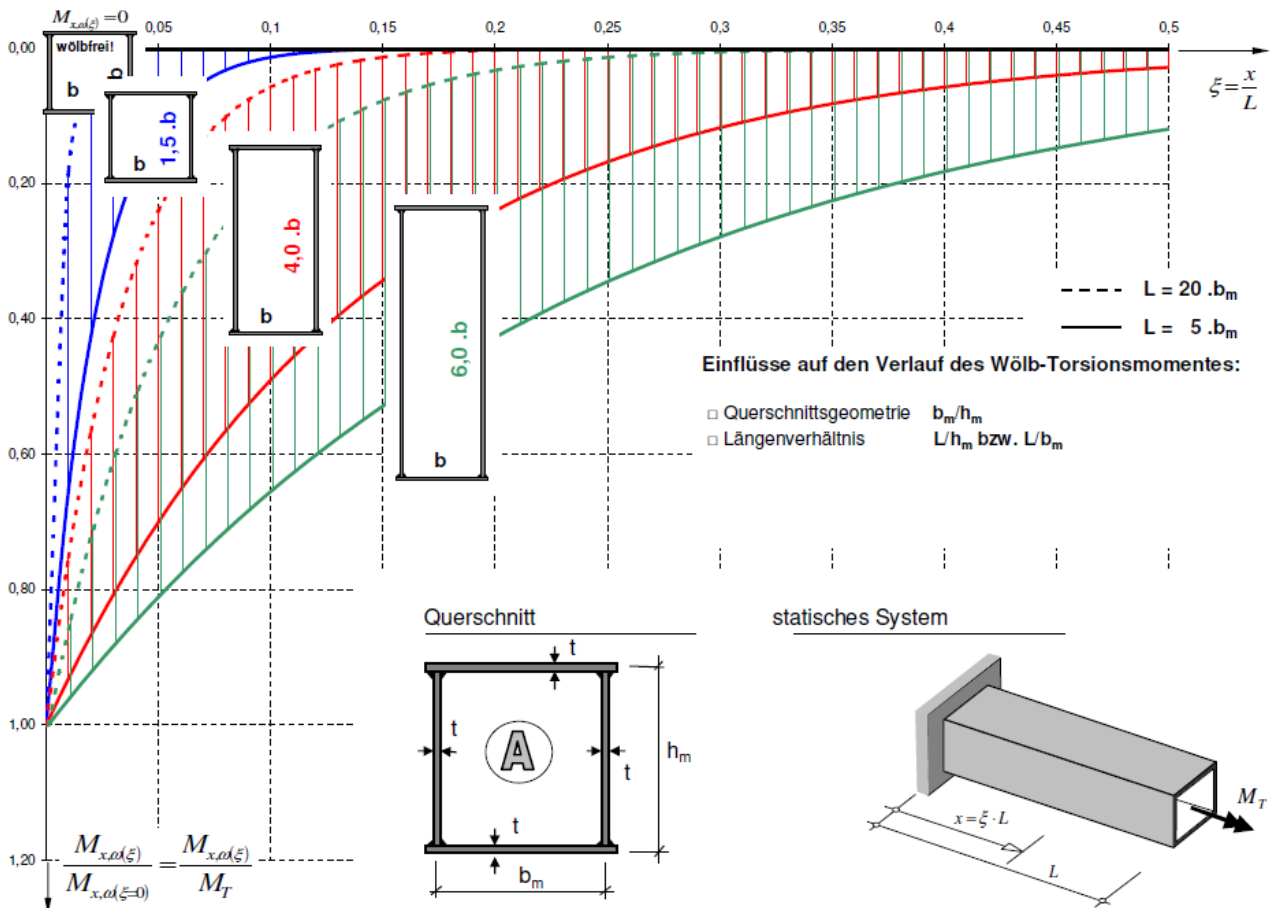


Abb.4-1: Abklingverhalten von  $M_{x,\omega}$  für Querschnittstyp A

Bemerkungen zu Abb.4-1- Einfluss der Querschnittsgeometrie:

- Es zeigt sich ein rasches Abklingverhalten von  $M_{x,\omega}$  bei annähernd quadratischem Querschnitt bzw. ein dementsprechend langsames Abklingen mit zunehmendem Verhältnis  $h_m/b_m$ .
- Weiters kann auch der Einfluss der Stabschlankheit  $L/b_m$  auf das Abklingverhalten von  $M_{x,\omega}$  abgelesen werden. Gedrungene Stäbe (kleines  $L/b_m$ ) zeigen gegenüber schlanken Stäben (großes  $L/b_m$ ) ein wesentlich langsames Abklingen von  $M_{x,\omega}$ .

Bemerkungen zu Abb.4-2 – Einfluss des Wanddickenverhältnisses :

- Den Verlaufsfunktionen ist jeweils ein quadratischer Querschnitt mit  $b_m=h_m$  vorausgesetzt.
- Größere Unterschiede zwischen Gurtblechdicke und Stegblechdicke führen zu einem langsameren Abklingen von  $M_{x,\omega}$ .
- Weiters kann auch der Einfluss der Stabschlankheit  $L/b_m$  auf das Abklingverhalten von  $M_{x,\omega}$  abgelesen werden. Gedrungene Stäbe (kleines  $L/b_m$ ) zeigen gegenüber schlanken Stäben (großes  $L/b_m$ ) ein wesentlich langsames Abklingen von  $M_{x,\omega}$ .

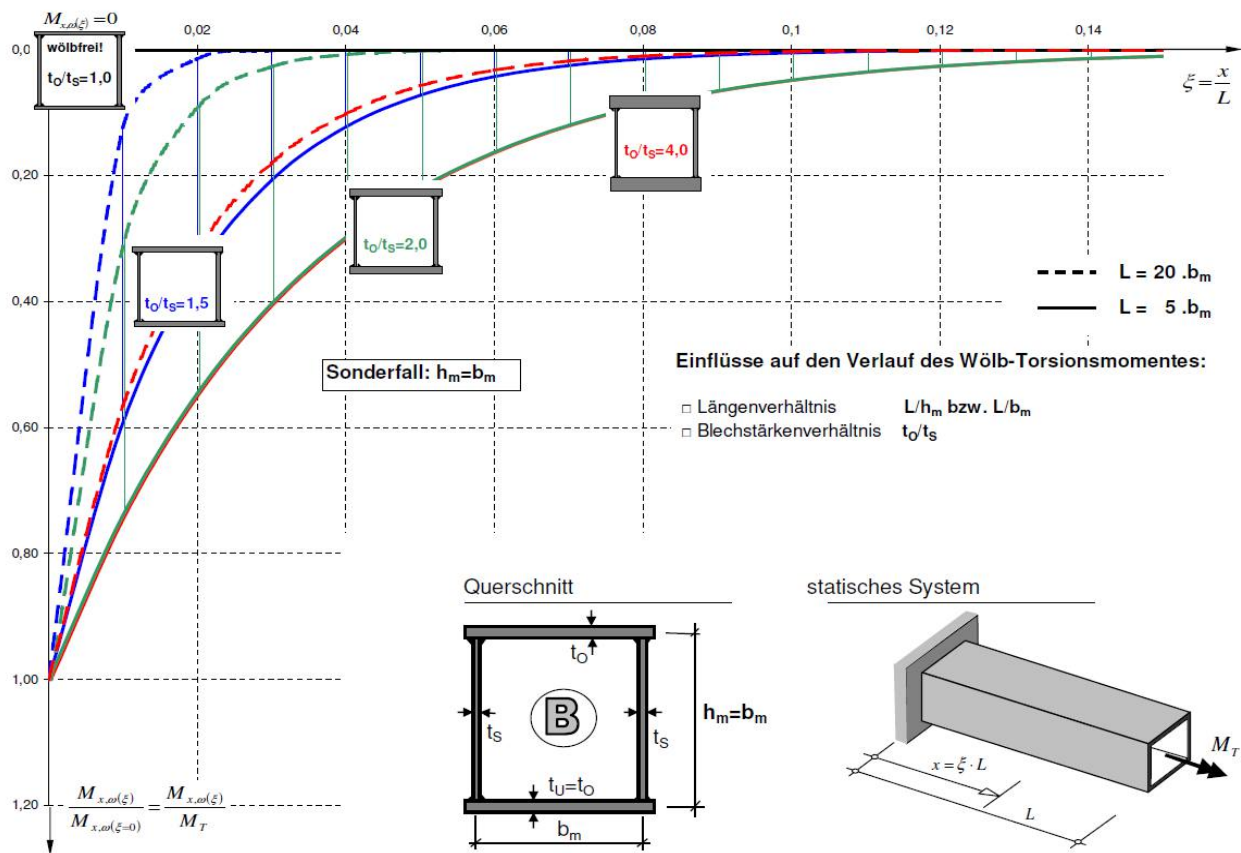


Abb.4-2: Abklingverhalten von  $M_{x,\omega}$  für Querschnittstyp B



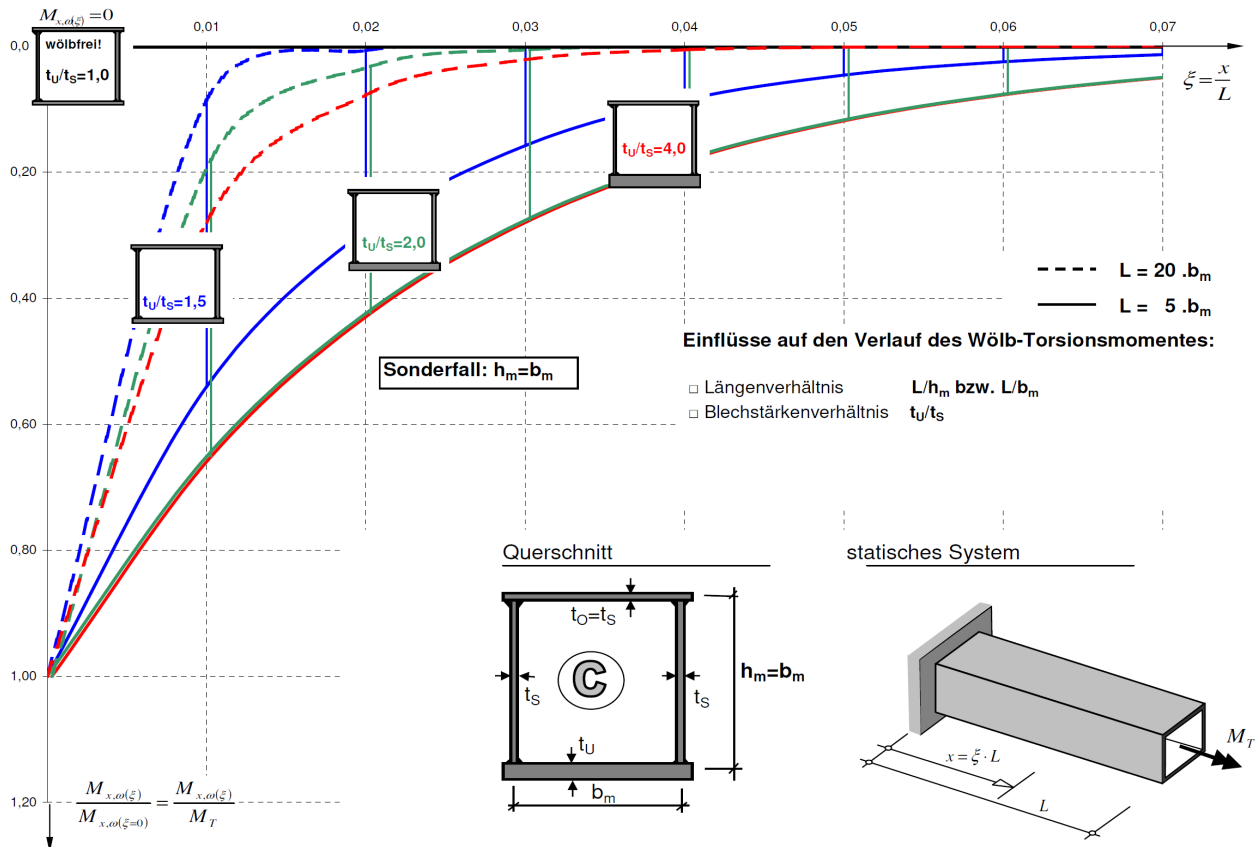


Abb.4-3: Abklingverhalten von  $M_{x,w}$  für Querschnittstyp C

Zusammenfassende Bemerkungen zu Abb.4-1 bis Abb.4-3:

Bei Kastenquerschnitten kann das Abklingverhalten des Wölb-torsionsmoments  $M_{x,w}$  in Abhängigkeit der Querschnittscharakteristik wie folgt beschrieben werden:

Langsames Abklingverhalten bei:	Rasches Abklingverhalten bei:
<ul style="list-style-type: none"> <li>- kurzen, „gedrungenen“ Stäben (<math>L/h_m &lt; 10</math>)</li> <li>- stark ungleichmäßigem Geometrieverhältnis <math>h_m/b_m</math></li> <li>- ungleichmäßigen Blechstärken (verstärkter Ober- und/oder Untergurt)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- langen, „schlanken“ Stäben (<math>L/h_m &gt; 20</math>)</li> <li>- annähernd quadratischen Querschnitten (Querschnitte mit <math>h_m = b_m</math> sind wölbfrei)</li> <li>- konstanten Blechstärken (gleiche Steg- und Gurtblechstärke)</li> </ul>

Der Einfluss des Geometrieverhältnisses  $h_m/b_m$  und der Stabschlankheit  $L/h_m$  bzw.  $L/b_m$  auf das Abklingverhalten sind deutlich ausgeprägter als der Einfluss ungleichmäßiger Blechstärkenverhältnisse.



## 4.2 Einfluss der Geometrie auf das Abklingverhalten des Wölb-bimomentes $M_\omega$

Vorbemerkungen:

- Das Abklingverhalten von  $M_\omega$  ist sehr ähnlich zu jenem des Wölb-torsionsmomentes  $M_{x,\omega}$  (siehe 4.1). Dieses Abklingverhalten entspricht auch direkt jenem der Wölbnormalspannungen.

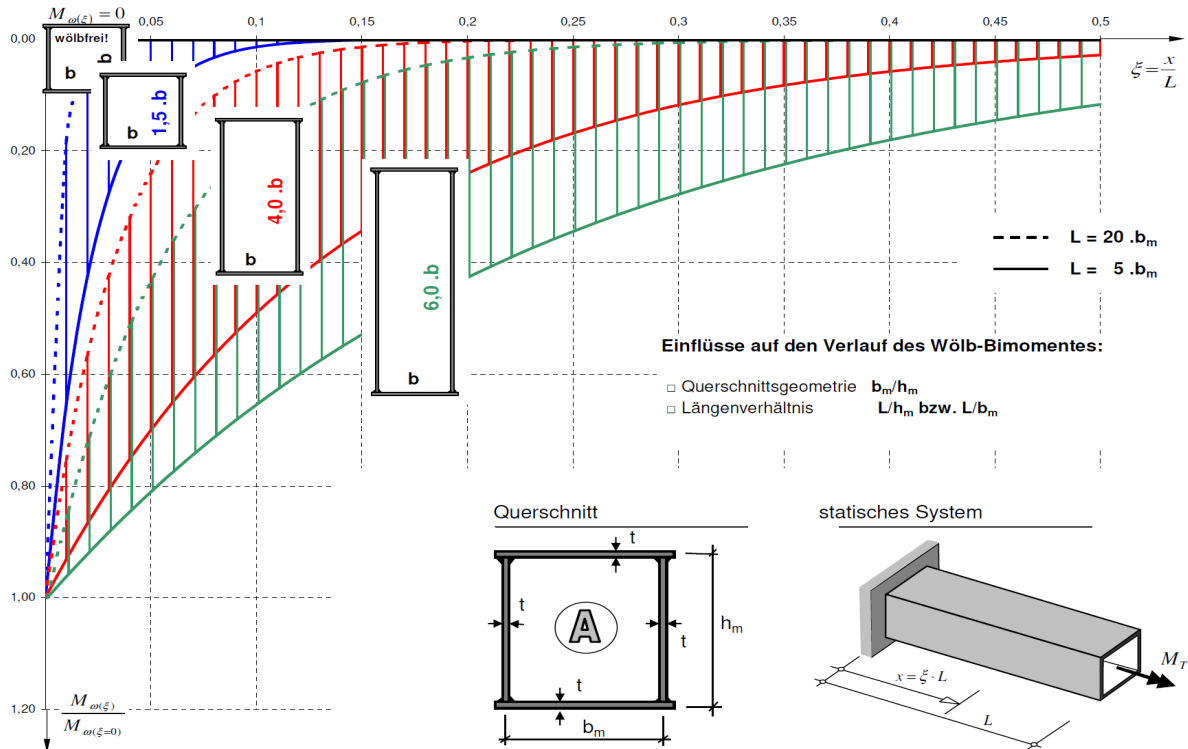


Abb.4-4: Abklingverhalten von  $M_\omega$  für Querschnittstyp A

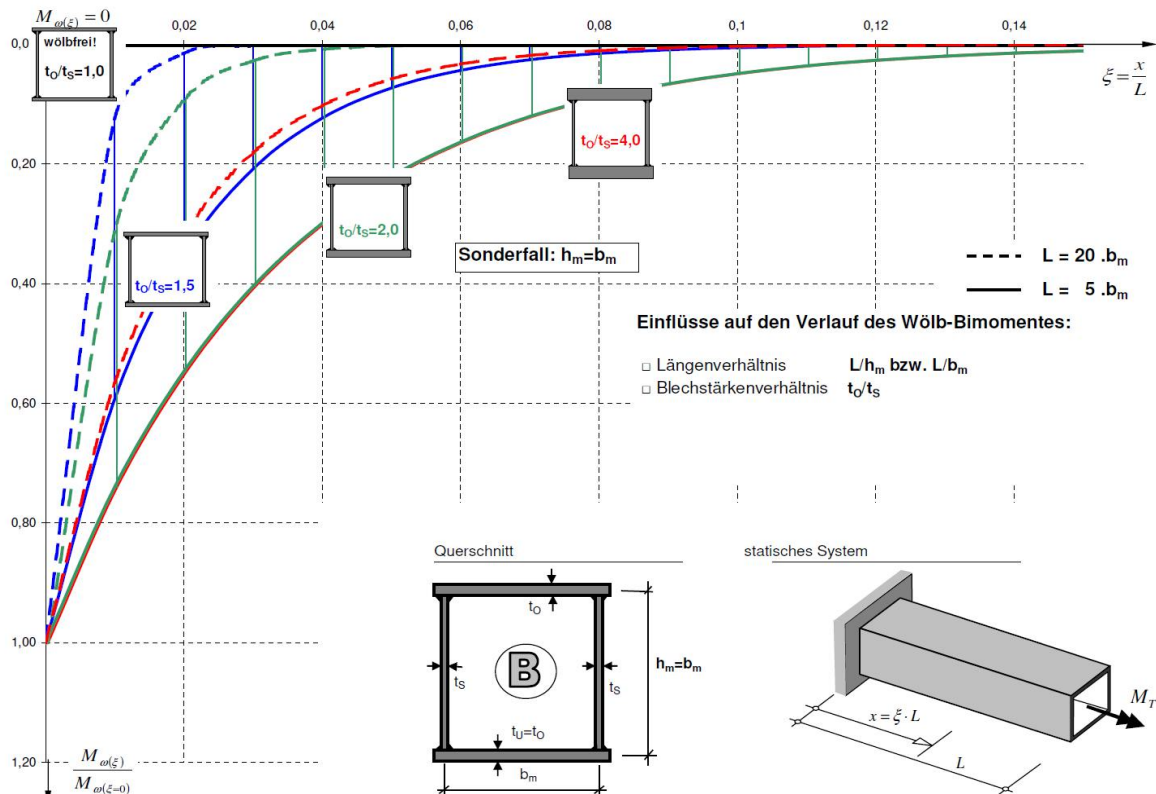


Abb.4-5: Abklingverhalten von  $M_\omega$  für Querschnittstyp B

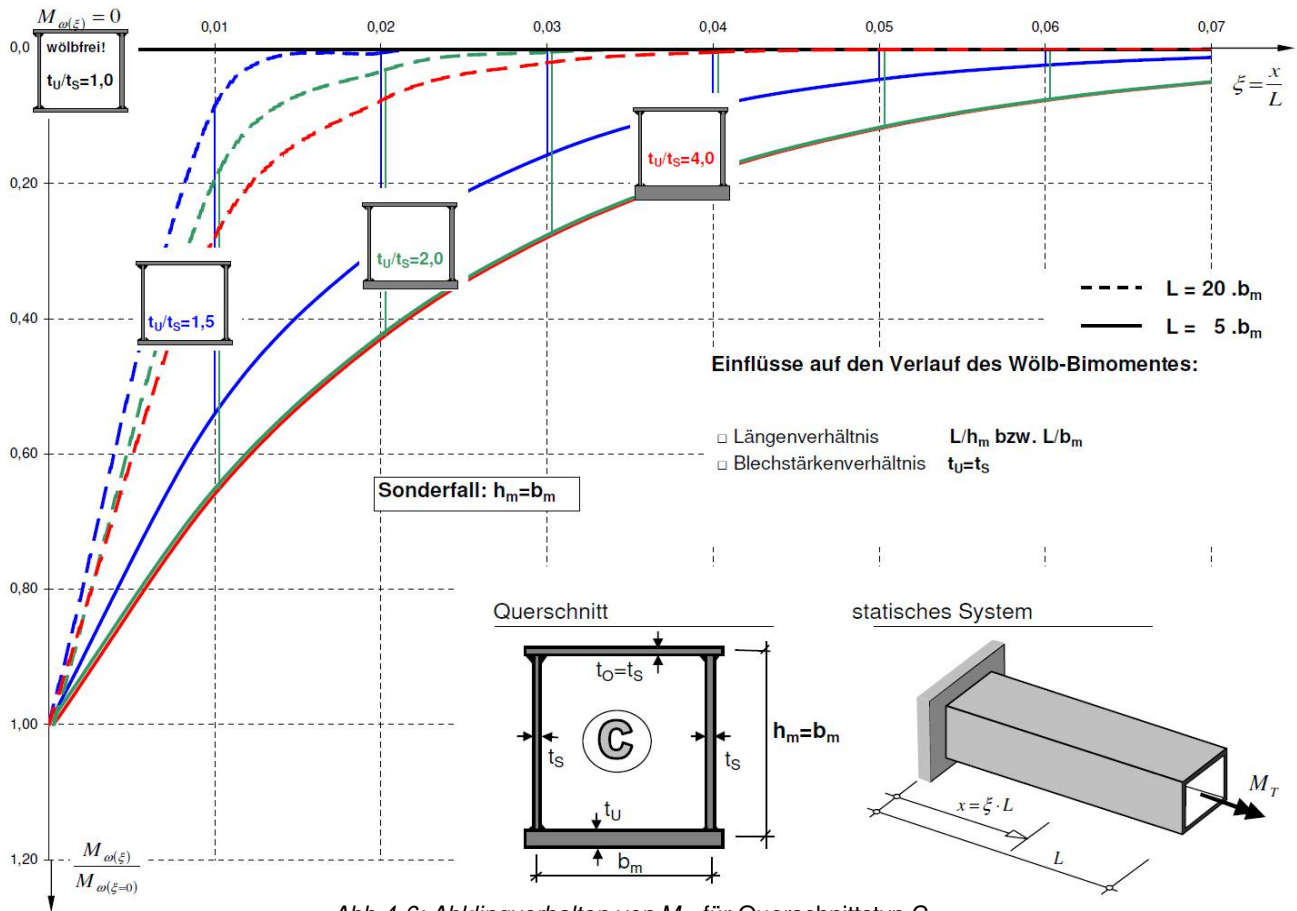


Abb.4-6: Abklingverhalten von  $M_\omega$  für Querschnittstyp C

### 4.3 Einfluss der Geometrie auf die Größe des Wölb-torsionsmoments $M_{x,\omega}$

Vorbemerkungen:

- In den folgenden Diagrammen (Abb.4-7 bis Abb.4-9) ist das, auf das eingeleitete Gesamttorsionsmoment  $M_T$ , bezogene Wölb-torsionsmoment  $M_{x,\omega}/M_T$ , sowohl für den vollständig wölbbehinderten Querschnitt an der Stelle  $x=0$ , als auch für den Querschnitt im Abstand von  $x=h_m/2$  von der Wölbbehinderung, dargestellt.

Das bezogene Wölb-torsionsmoment  $M_{x,\omega}/M_T$  an der Stelle der vollständigen Wölbbehinderung (Stelle  $x=0$ ) muss querschnittsunabhängig stets  $M_{x,\omega}/M_T = 1,0$  betragen (Ausnahme: wölbfreie Querschnittsgeometrien). Grund hierfür ist die alleinige Abtragung des gesamten inneren Torsionsmomentes  $M_x$  über Wölbkrafttorsion an dieser Stelle.

Das bezogene Wölb-torsionsmoment  $M_{x,\omega}/M_T$  an der Stelle  $x=h_m/2$  wird für die Untersuchung des Beultragverhaltens des isolierten Stegbleches benötigt. Den Hintergrund hierzu liefern die Regelungen im Eurocode 1993-1-5, in dem der vereinfachte Beulnachweis des isolierten Stegbleches aufgrund der längs des Beulfeldes veränderlichen Spannungen für die Schnittgrößen im Abstand  $0,5 h_m$  ( $h_m \dots$  Beulfeldhöhe) des höchst beanspruchten Beulfeldrandes (hier: Stelle der Wölbbehinderung  $x=0$ ) geführt werden darf.

- Sowohl das bezogene Wölb-torsionsmoment an der Stelle  $x=0$ , als auch das bezogene Wölb-torsionsmoment  $M_{x,\omega}/M_T$  an der Stelle  $x=h_m/2$  ist unabhängig von der Stabschlankheit  $L/b_m$ !
- Die Diagramme (Abb.4-7 bis Abb.4-9) gelten somit für beliebige Stablängen  $L$ .

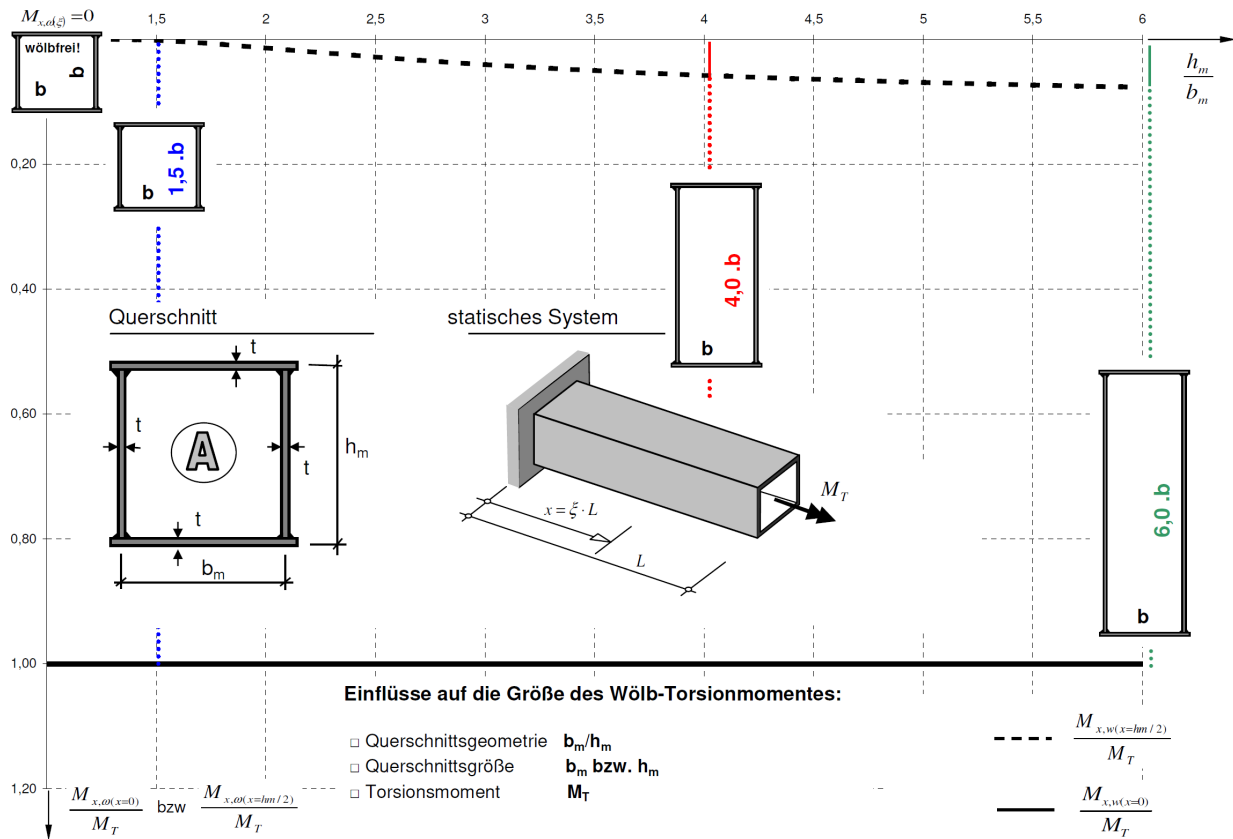


Abb.4-7: bezogene Wölb-torsionsmomente  $M_{x,\omega}/M_T$  für Querschnittstyp A

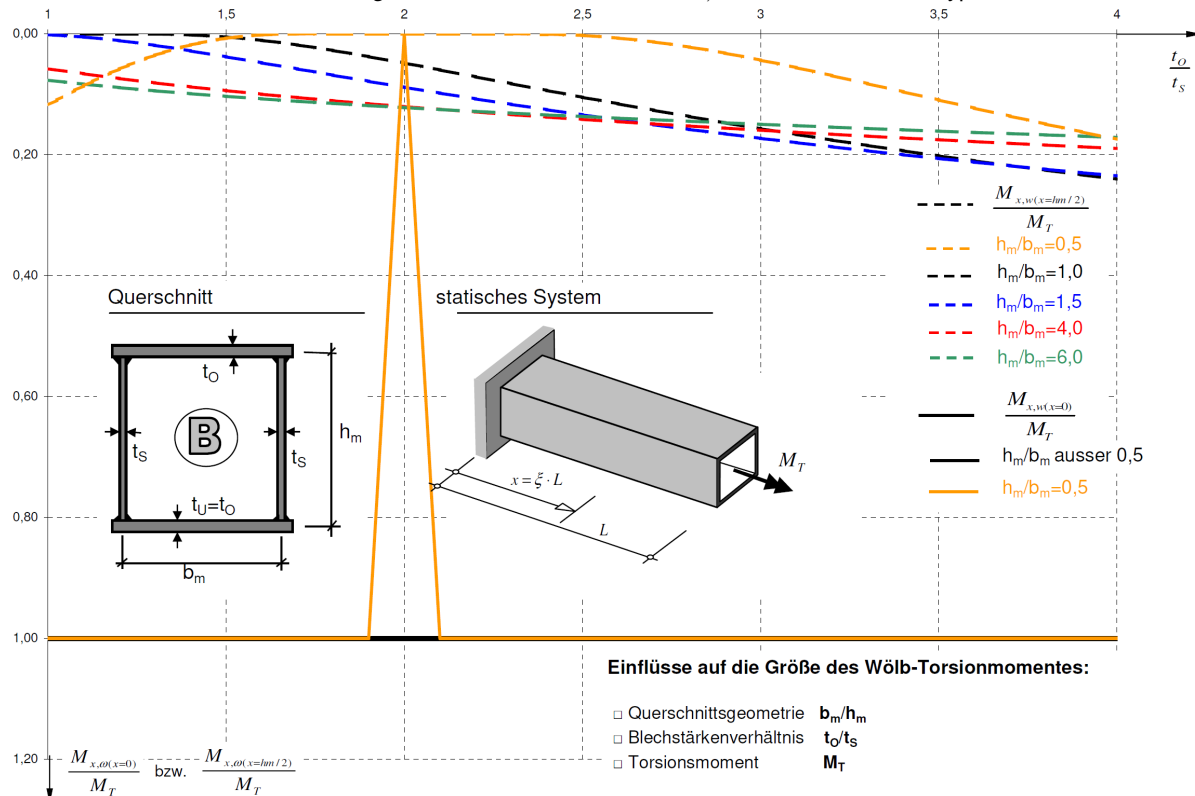


Abb.4-8: bezogene Wölb-torsionsmomente  $M_{x,\omega}/M_T$  für Querschnittstyp B – Variation  $h_m/b_m$  und  $t_o/t_s$

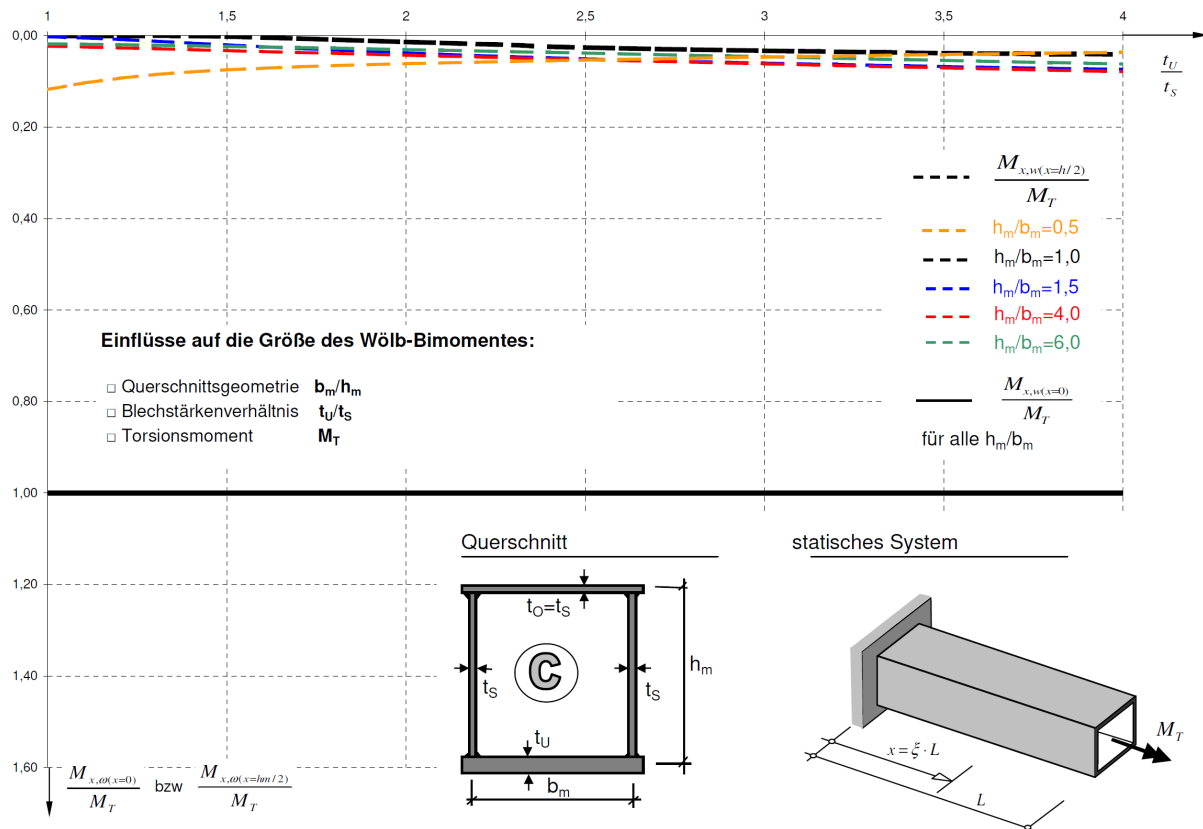


Abb.4-9: bezogene Wölb-torsionsmomente  $M_{x,w}/M_T$  für Querschnittstyp C – Variation  $h_m/b_m$  und  $t_u/t_s$

**Bemerkungen zu Abb.4-7:**

- Bei **Kastenquerschnitten mit konstanter Blechstärke** (Typ A) führen Querschnittsgeometrien die stark von der quadratischen Querschnittsform abweichen auf höhere Wölb-torsionsmomente in  $x = h_m/2$ . Dies ist auf das langsamere Abklingverhalten des Wölb-torsionsmomentes bei diesen Querschnittstypen zurückzuführen, das Abb.4-1 entnommen werden kann.

**Bemerkungen zu Abb.4-8:**

- Bei **Kastenquerschnitten mit beidseitig verstärkten Gurten** (Typ B) führen vor allem quadratische bzw. annähernd quadratische Querschnitte mit großen Gurtblechstärken auf hohe Wölb-torsionsmomente in  $x = h_m/2$ .

Kastenquerschnitte des Typs B mit  $h_m < b_m$  und  $h_m/b_m = 1/\alpha$  sind **wölbfrei**, wobei  $\alpha = t_o/t_s = t_u/t_s$ . Infolgedessen verschwindet auch das Wölb-torsionsmoment.

**Bemerkungen zu Abb.4-9:**

- Bei **Kastenquerschnitten mit verstärktem Untergurt** (Typ C) und  $h_m < b_m$  führt eine Erhöhung der Blechstärke des Untergurtes zu einer Reduktion des Wölb-torsionsmoments in  $x = h_m/2$ . Umgekehrt liefern bei  $h_m > b_m$  stärkere Untergurtbleche höhere Wölb-torsionsmomente in  $x = h_m/2$ .

### 4.4 Einfluss der Geometrie auf die Größe des Wölbmomentes $M_\omega$

Vorbemerkungen:

- In den folgenden Diagrammen (Abb. 4.10 bis Abb. 4.12) ist das, auf das eingeleitete Gesamttorsionsmoment  $M_T$  multipliziert mit der Querschnittsbreite  $b_m$ , bezogene Wölbmoment  $M_\omega/(M_T \cdot b_m)$ , sowohl für den vollständig wölbbehinderten Querschnitt an der Stelle  $x=0$ , als auch für den Querschnitt im Abstand von  $x=h_m/2$  von der Wölbbehinderung dargestellt.

Das Wölbmoment  $M_\omega$  ist eine Rechengröße, mit Hilfe derer die Wölbnormalspannungen direkt berechnet werden können (Vgl. (Gl. 1-18)). Mechanisch ist diese Größe bei Kastenquerschnitten nur schwierig zu deuten. Das Verhältnis zwischen dem maximalen Wölbmoment an der Einspannung, und dem, für den Beulnachweis des Stegbleches maßgebenden Wölbmoment ist wiederum von dessen Abklingverhalten über die Stablänge abhängig und kann aus den Diagrammen Abb.4-4 bis Abb.4-6 nachvollzogen werden.

- Sowohl das bezogene Wölbmoment an der Stelle  $x=0$ , als auch das bezogene Wölbmoment  $M_\omega/(M_T \cdot b_m)$  an der Stelle  $x=h_m/2$  ist unabhängig von der Stabschlankheit  $L/b_m$ !

Die Diagramme ( Abb.4-10 bis Abb.4-12) gelten somit für beliebige Stablängen  $L$ .

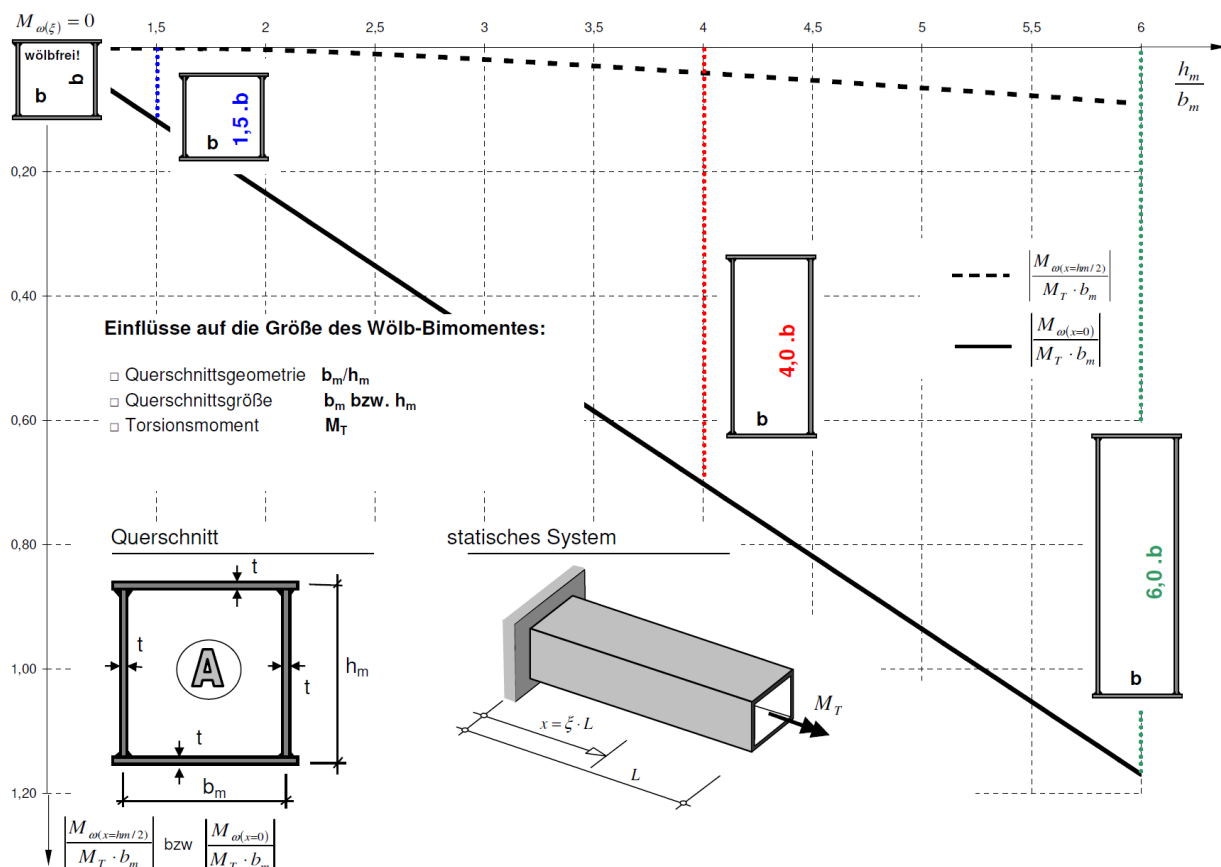


Abb.4-10: bezogene Wölbmomente  $M_\omega/(M_T \cdot b_m)$  für Querschnittstyp A

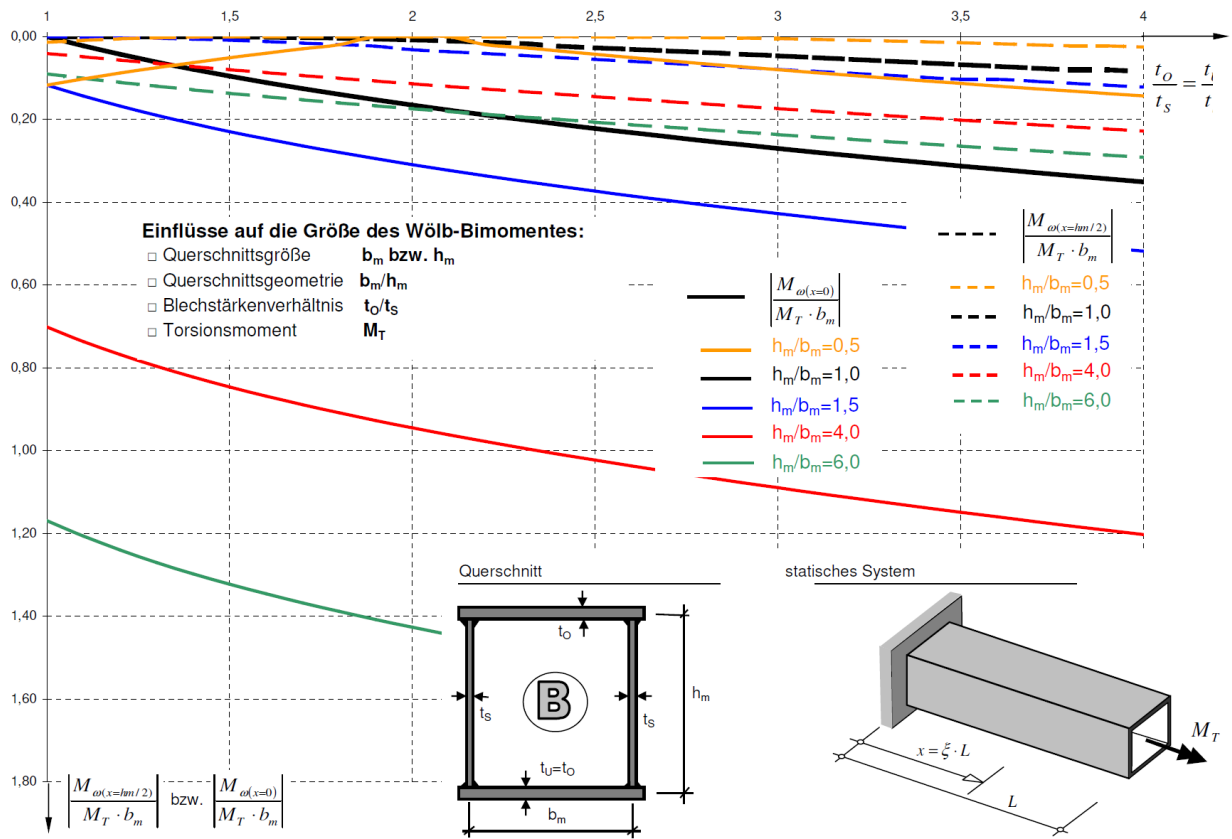


Abb.4-11: bezogene Wölbmomente  $M_\omega/(M_T \cdot b_m)$  für Querschnittstyp B

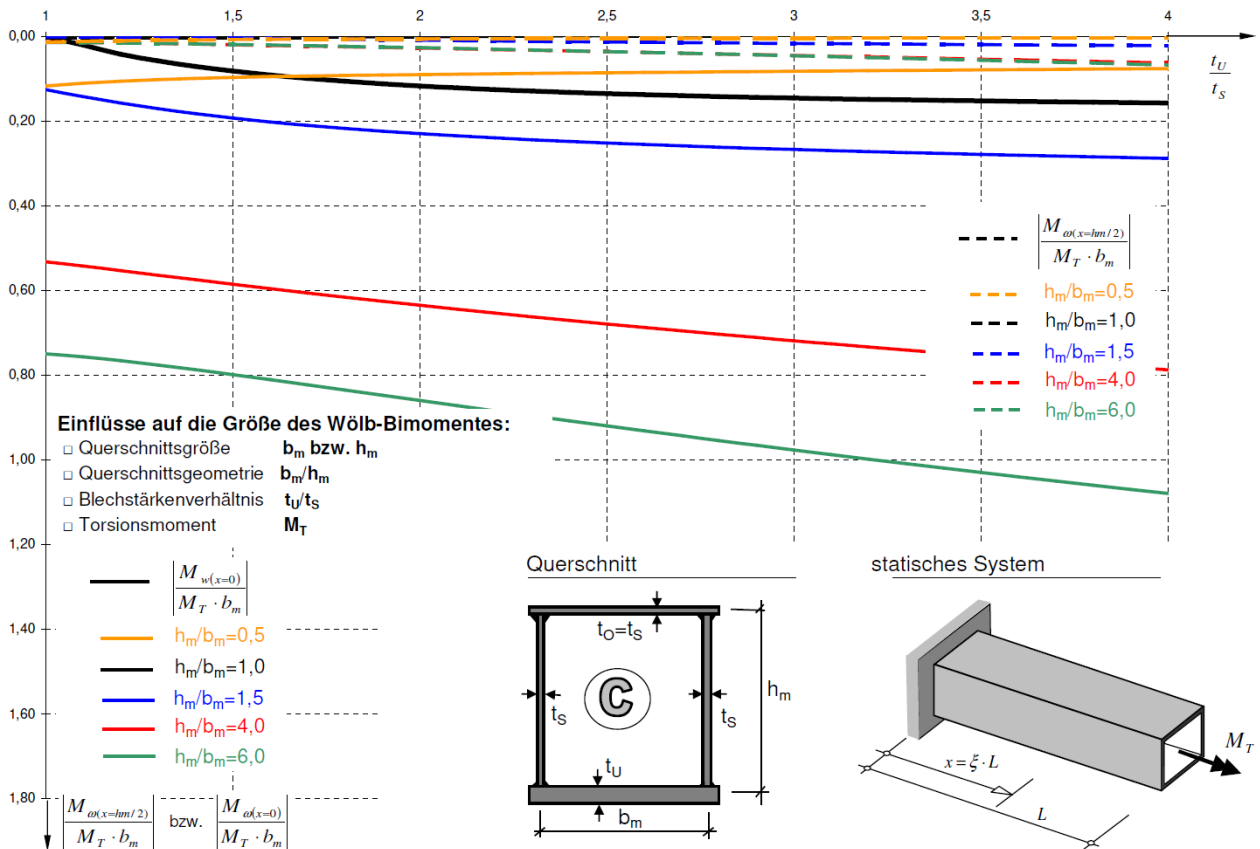


Abb.4-12: bezogene Wölbmomente  $M_\omega/(M_T \cdot b_m)$  für Querschnittstyp C

Bemerkungen zu Abb.4-10:

- Bei **Kastenquerschnitten mit konstanter Blechstärke** (Typ A) führen Querschnittsgeometrien, die stark von der quadratischen Querschnittsform abweichen, auf höhere Wölbmomente.

Bemerkungen zu Abb.4-11:

- Bei **Kastenquerschnitten mit beidseitig verstärkten Gurten** (Typ B) führt eine Erhöhung der Gurtblechstärke zu einem, von der Querschnittsgeometrie unabhängigen, relativen Anstieg des Wölbmoments.

Wie bereits in Abschnitt 4.3 angemerkt zeigt sich auch hier der wölbfreie Sonderfall bei  $h_m < b_m$ ;  $h_m/b_m = 1/\alpha$  wobei  $\alpha = t_o/t_s = t_u/t_s$ , bei dem folglich auch das Wölbmoment verschwindet.

Bemerkungen zu Abb.4-12:

- Bei **Kastenquerschnitten mit verstärktem Untergurt** (Typ C) und  $h_m < b_m$  führt eine Erhöhung der Blechstärke des Untergurtes zu einer Reduktion vom Wölbmomentes. Umgekehrt liefern bei  $h_m > b_m$  stärkere Untergurtbleche höhere Wölbmomente.

#### 4.5 Einfluss der Geometrie auf die Größe der Wölbnormalspannung $\sigma_\omega$

Vorbemerkungen:

- Um eine entsprechend dimensionslose Darstellung der Wölbnormalspannungen zu erhalten, werden diese in Diagrammen (Abb. 4.13 bis Abb. 4.16) auf die St.Vernant'sche Schubspannung  $M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s)$  im Querschnittssteg bezogen. Die Wölbnormalspannungen sind für markante Querschnittspunkte aus den Diagrammen ablesbar, und unter Kenntnis des qualitativen Spannungsverlaufes so über den ganzen Querschnitt ermittelbar.

Wie auch die Torsionsschnittgrößen sind die bezogenen Wölbnormalspannungen, sowohl für den vollständig wölbbehinderten Querschnitt an der Stelle  $x=0$ , als auch für den Querschnitt im Abstand von  $x=h_m/2$  von der Wölbbehinderung dargestellt.

- Die Wölbnormalspannungen verlaufen linear entlang der Querschnittsteile. Symmetrieachsen des Querschnittes gelten als Antimetrieachsen der Spannungsverteilung.



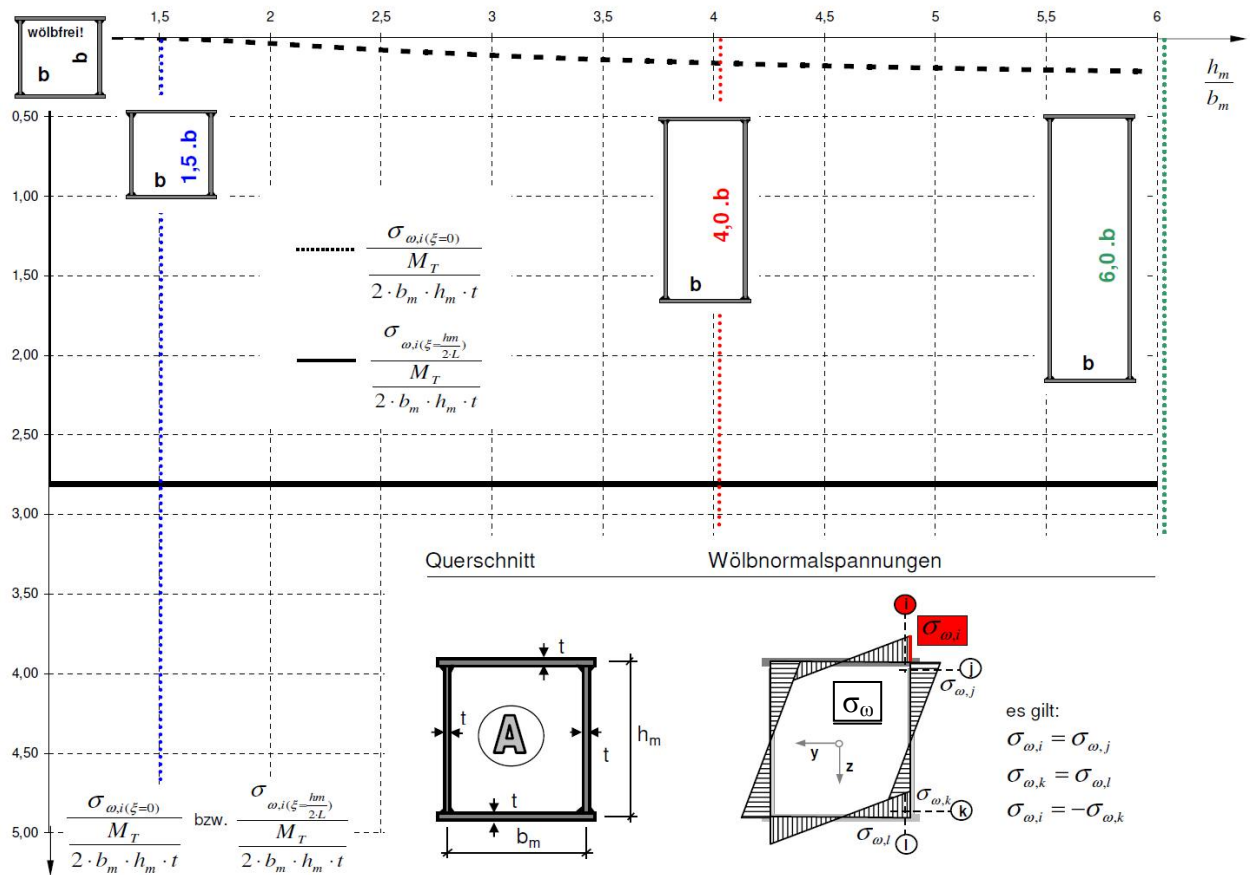


Abb.4-13: bezogene Wölbnormalspannungen  $\sigma_{\omega,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_S))$  für Querschnittstyp A

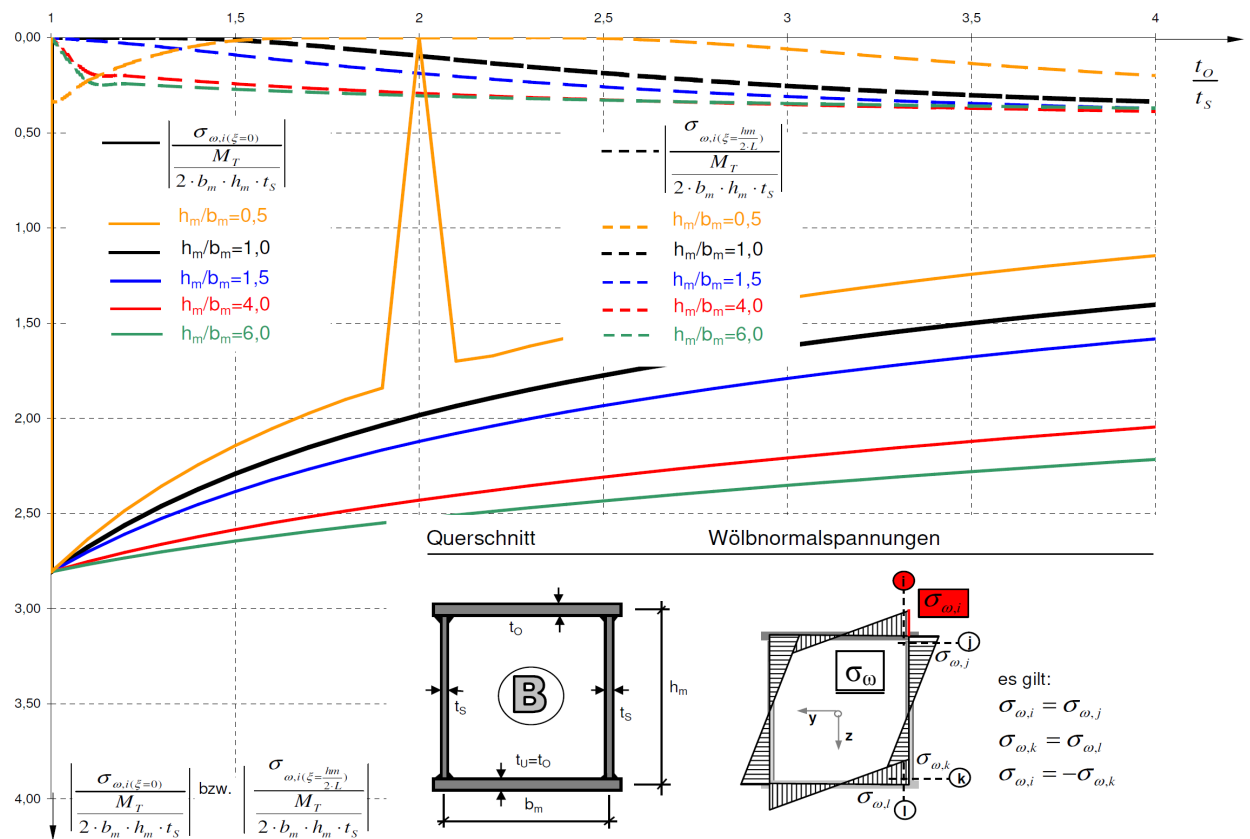


Abb.4-14: bezogene Wölbnormalspannungen  $\sigma_{\omega,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_S))$  für Querschnittstyp B



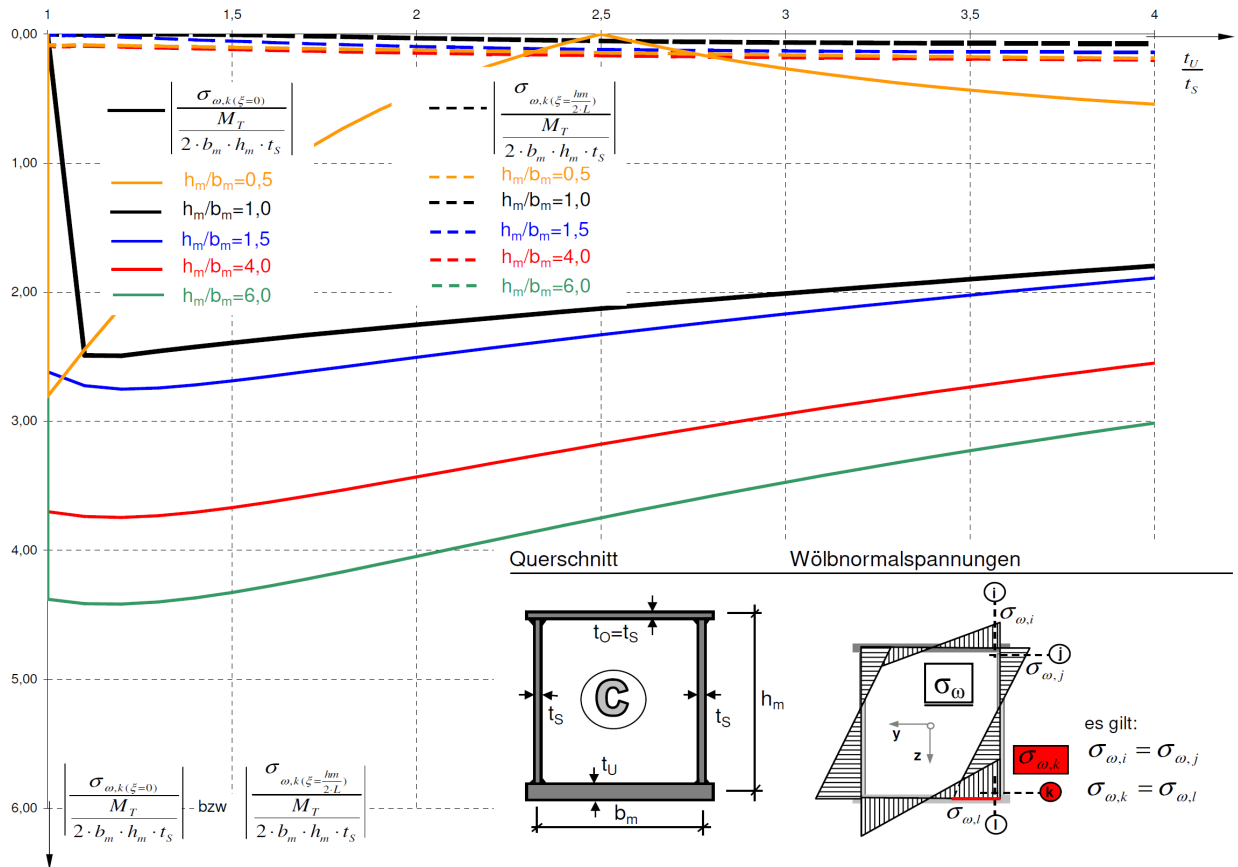


Abb.4-15: bezogene Wölbnormalspannungen  $\sigma_{\omega,k}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$  für Querschnittstyp C am Untergurt

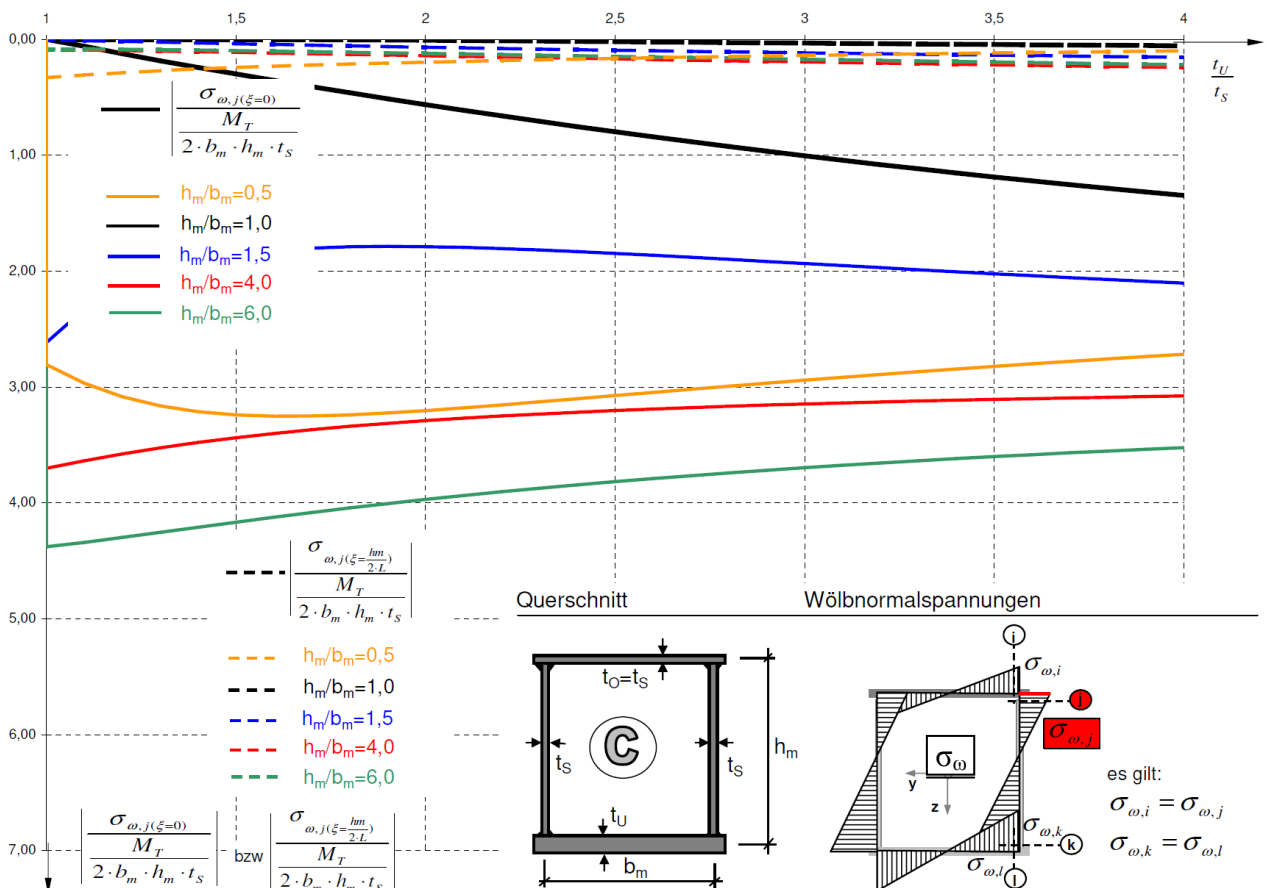


Abb.4-16: bezogene Wölbnormalspannungen  $\sigma_{\omega,j}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$  für Querschnittstyp C am Obergurt

Bemerkungen zu Abb.4-13:

- Interessant ist vor allem die Tatsache, dass bei **Kastenquerschnitten mit konstanter Blechstärke** (Typ A) die auftretenden Maximalwerte der Wölbnormalspannungen bezogen auf die St.Vernant'sche Schubspannung unabhängig vom Höhen/Breitenverhältnis konstant dem Faktor **2,806** entsprechen.

Bemerkungen zu Abb.4-14:

- Wie bereits in den vorangehenden Abschnitten 4.3 und 4.4 aufgezeigt, zeigt sich auch hier der wölbfreie Sonderfall bei  $h_m < b_m$ :  **$h_m/b_m = 1/\alpha$  wobei  $\alpha = t_o/t_s = t_u/t_s$** , bei dem folglich auch keine Wölbnormalspannungen auftreten.

Bemerkungen zu Abb.4-15 bzw. Abb.4-16 :

- Bei **Kastenquerschnitten mit verstärktem Untergurt** (Typ C) ist die Wölbnormalspannungsverteilung an den Stegen nicht mehr symmetrisch. Die höhere Wölbnormalspannung tritt bei Querschnitten mit  $h_m > b_m$  an der Untergurtseite auf, bei Querschnitten mit  $h_m < b_m$  hingegen obergurtseitig.

#### 4.6 Einfluss der Geometrie auf die Größe der Wölbschubspannung $\tau_\omega$

Vorbemerkungen:

- Um eine entsprechend dimensionslose Darstellung der Wölbschubspannungen zu erhalten, werden diese in Diagrammen (Abb. 4.17 bis Abb. 4.25) auf die St.Vernant'sche Schubspannung  $M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_i)$  bezogen.

Wie auch die Torsionsschnittgrößen und Wölbnormalspannungen sind die bezogenen Wölbschubspannungen, sowohl für den vollständig wölbbehinderten Querschnitt an der Stelle  $x=0$ , als auch für den Querschnitt im Abstand von  $x=h_m/2$  von der Wölbbehinderung, dargestellt.

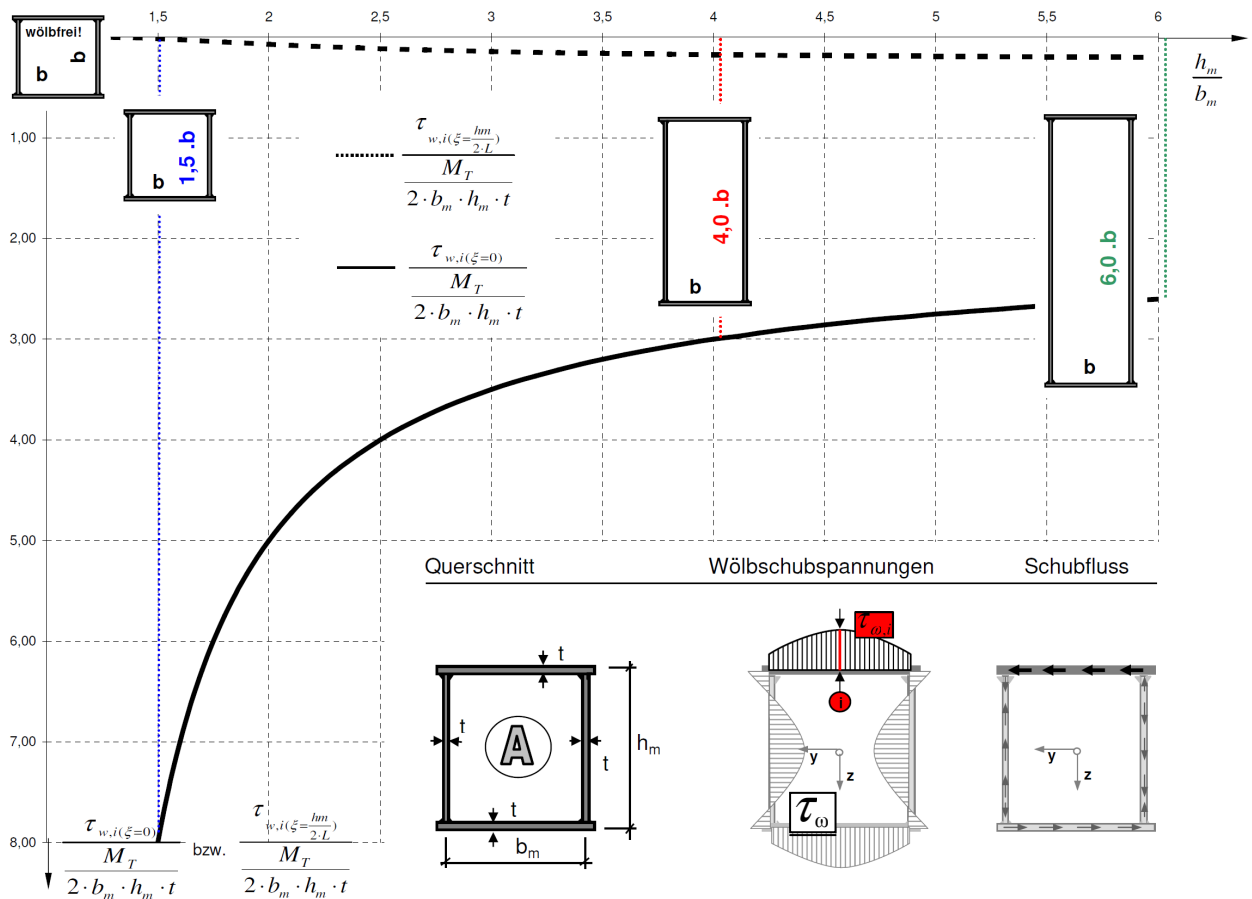


Abb.4-17: bezogene Wölbschubspannungen  $\tau_{\omega,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t))$  für Querschnittstyp A in Obergurtmittle

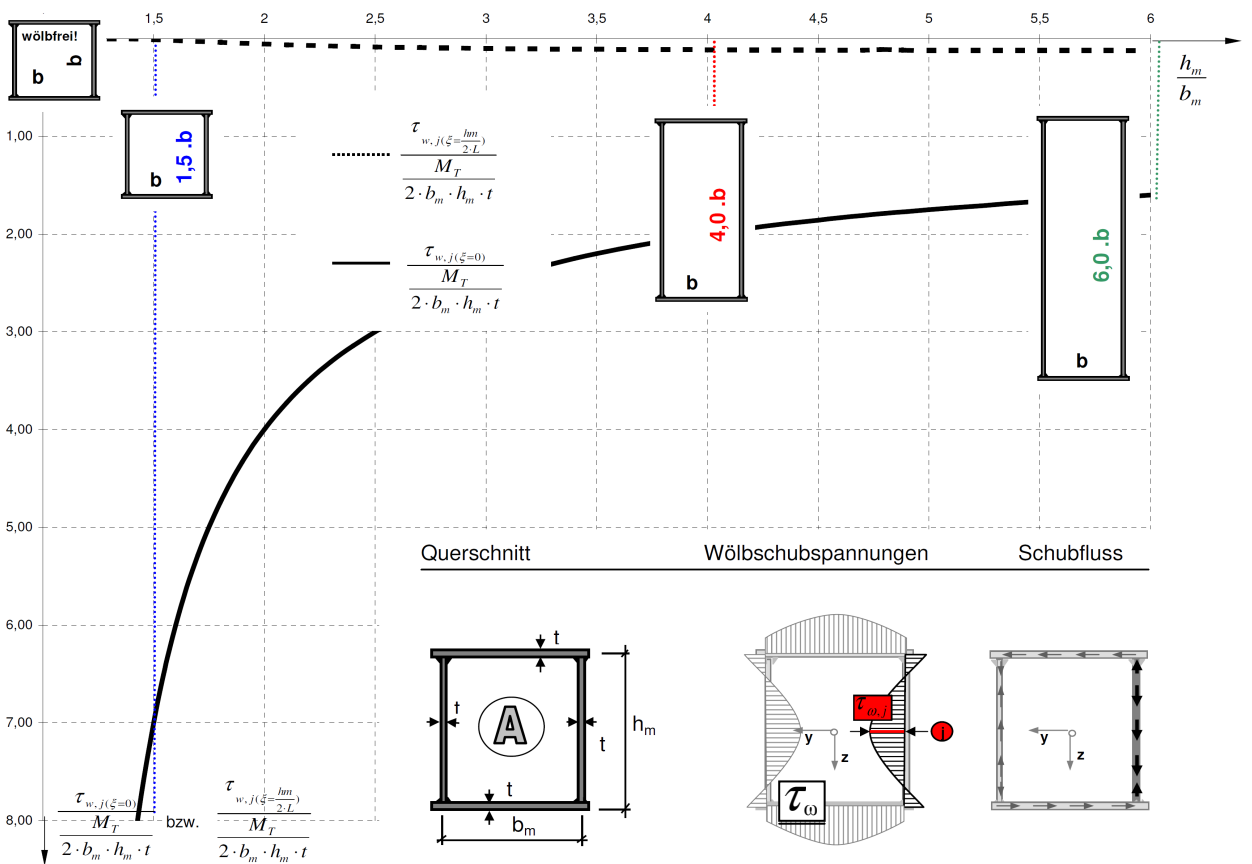


Abb.4-18: bezogene Wölbschubspannungen  $\tau_{\omega,j}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t))$  für Querschnittstyp A in Stegmitte

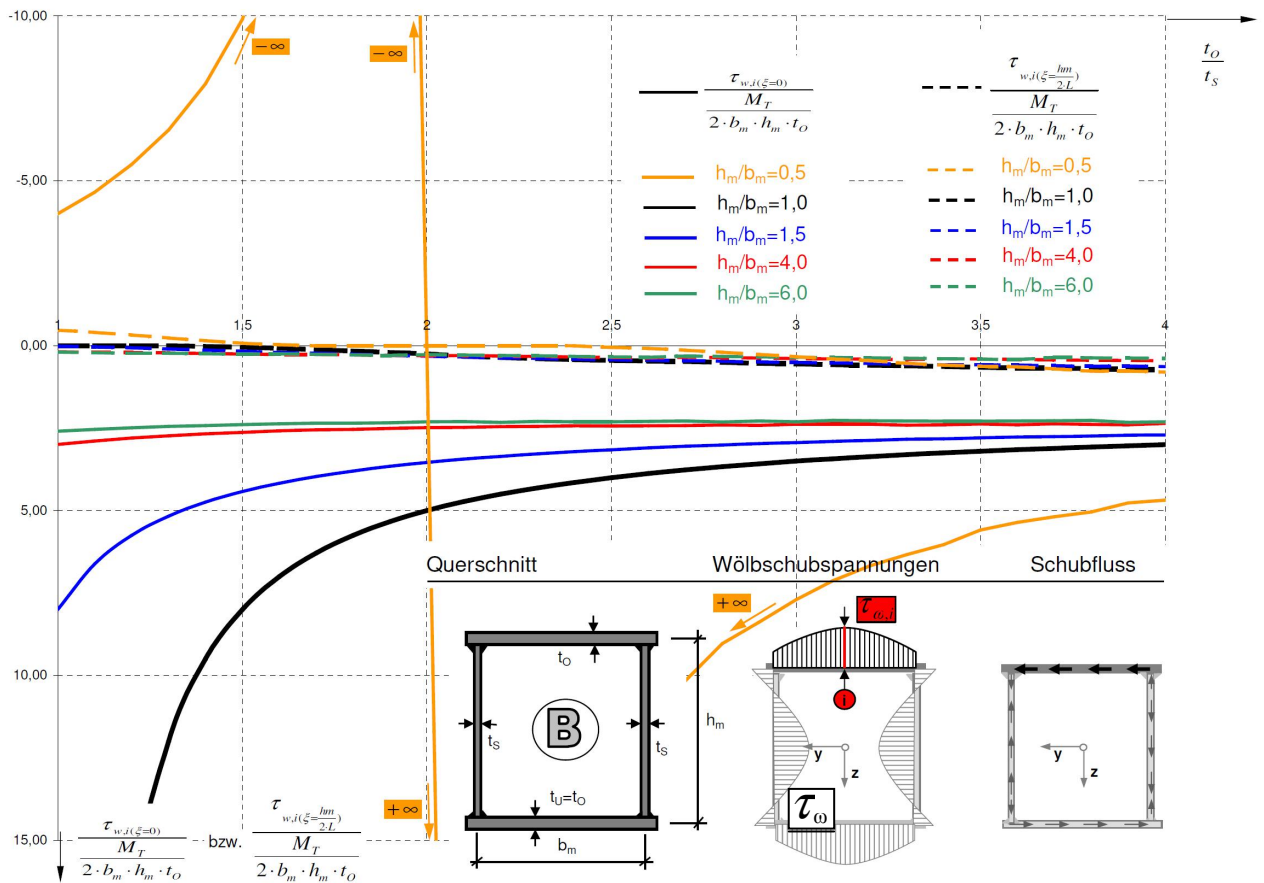


Abb.4-19: bezogene Wölb Schubspannungen  $\tau_{w,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_o))$  für Querschnittstyp B in Obergurttmitte

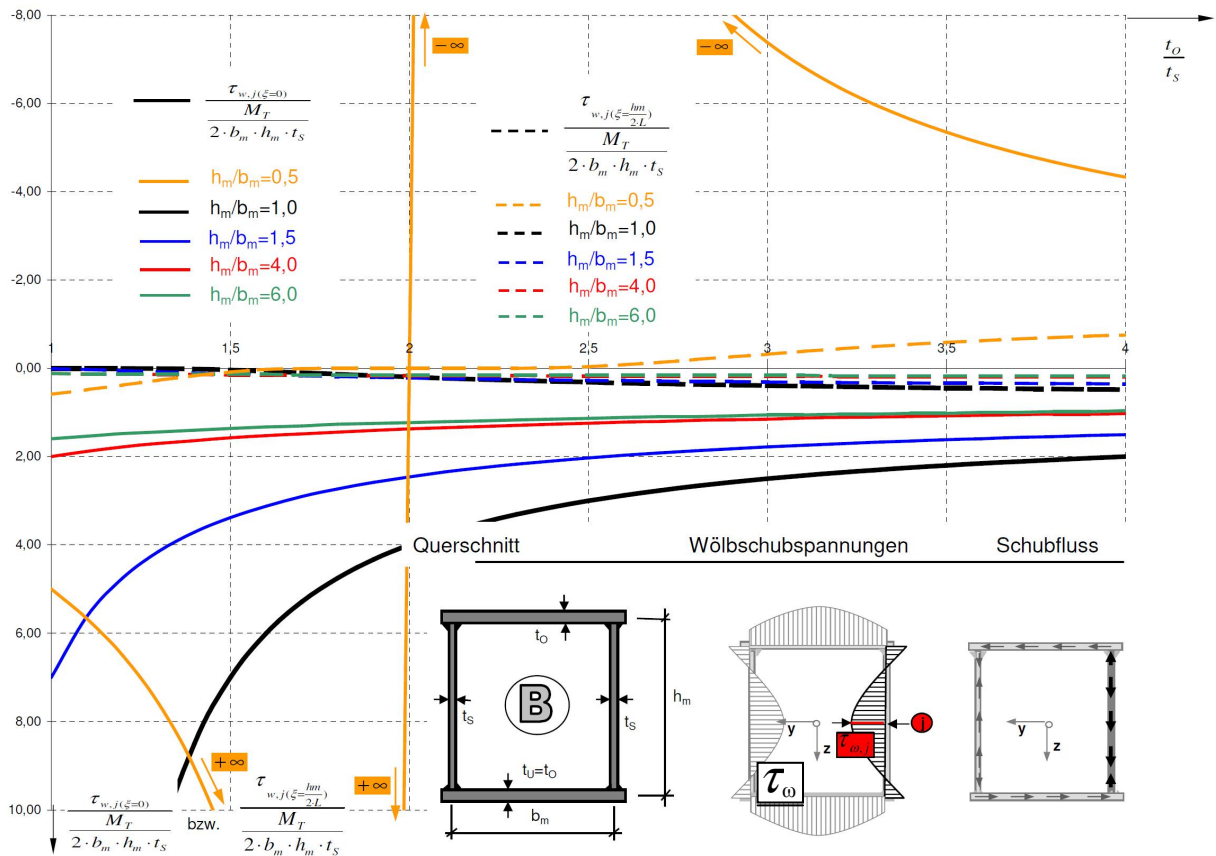


Abb.4-20: bezogene Wölb Schubspannungen  $\tau_{w,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$  für Querschnittstyp B in Stegmitte

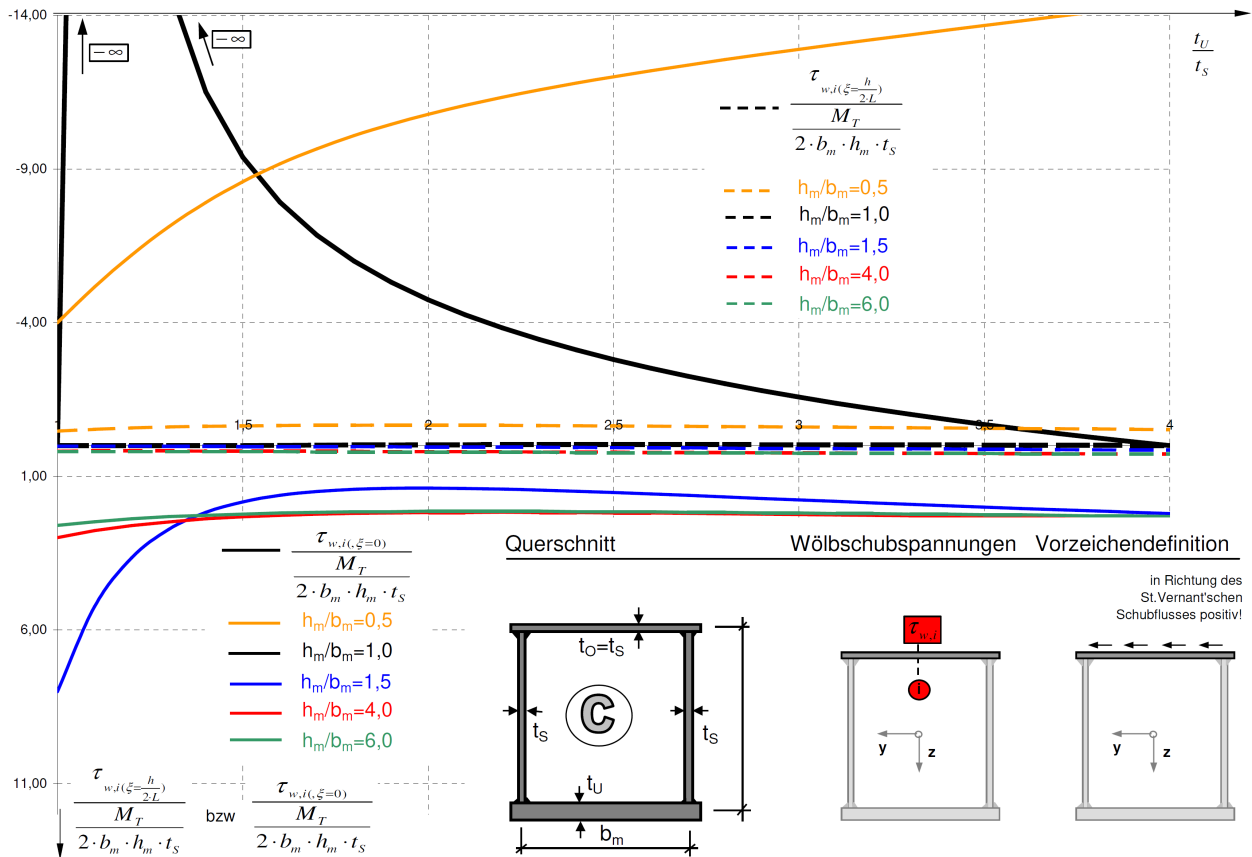


Abb.4-21: bezogene Wölb Schubspannungen  $\tau_{w,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$  für Querschnittstyp C in Obergurtnitte

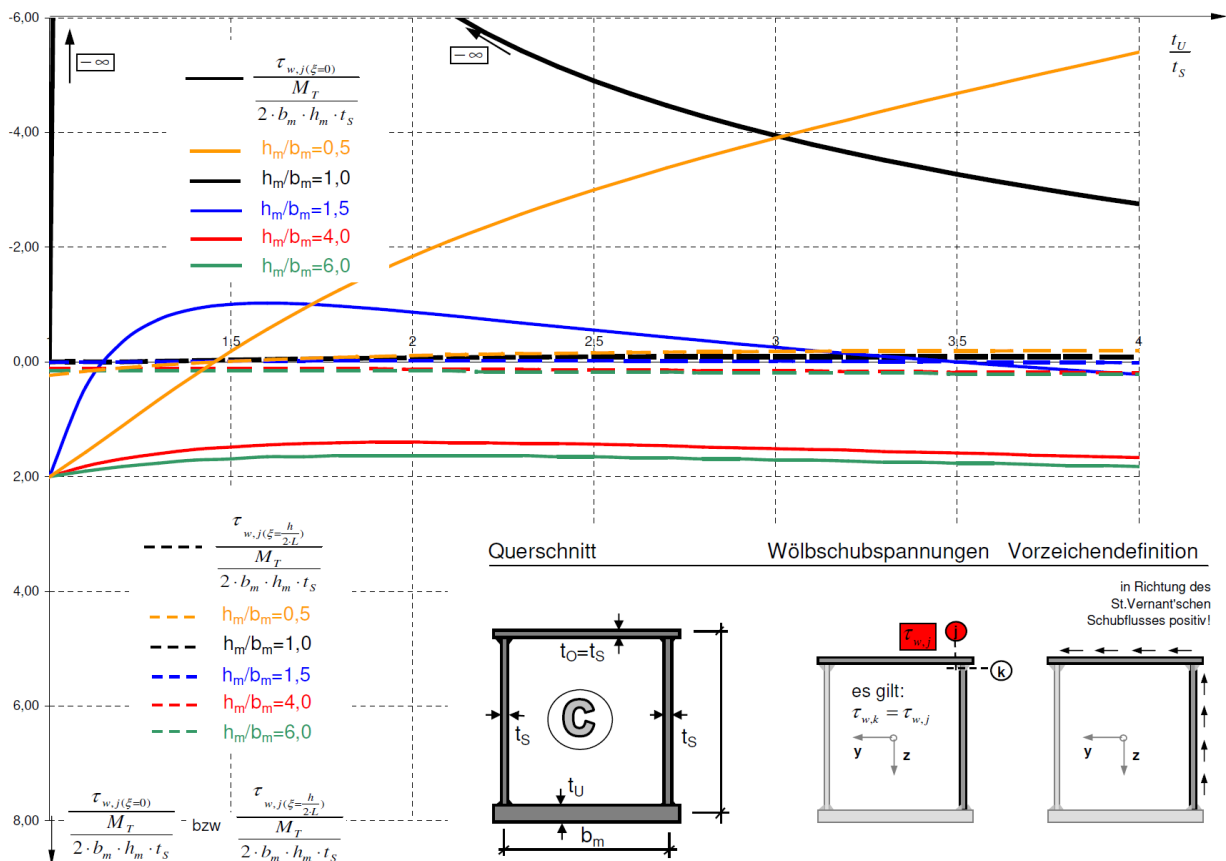


Abb.4-22: bezogene Wölb Schubspannungen  $\tau_{w,j}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$  für Querschnittstyp C am Obergurtrand

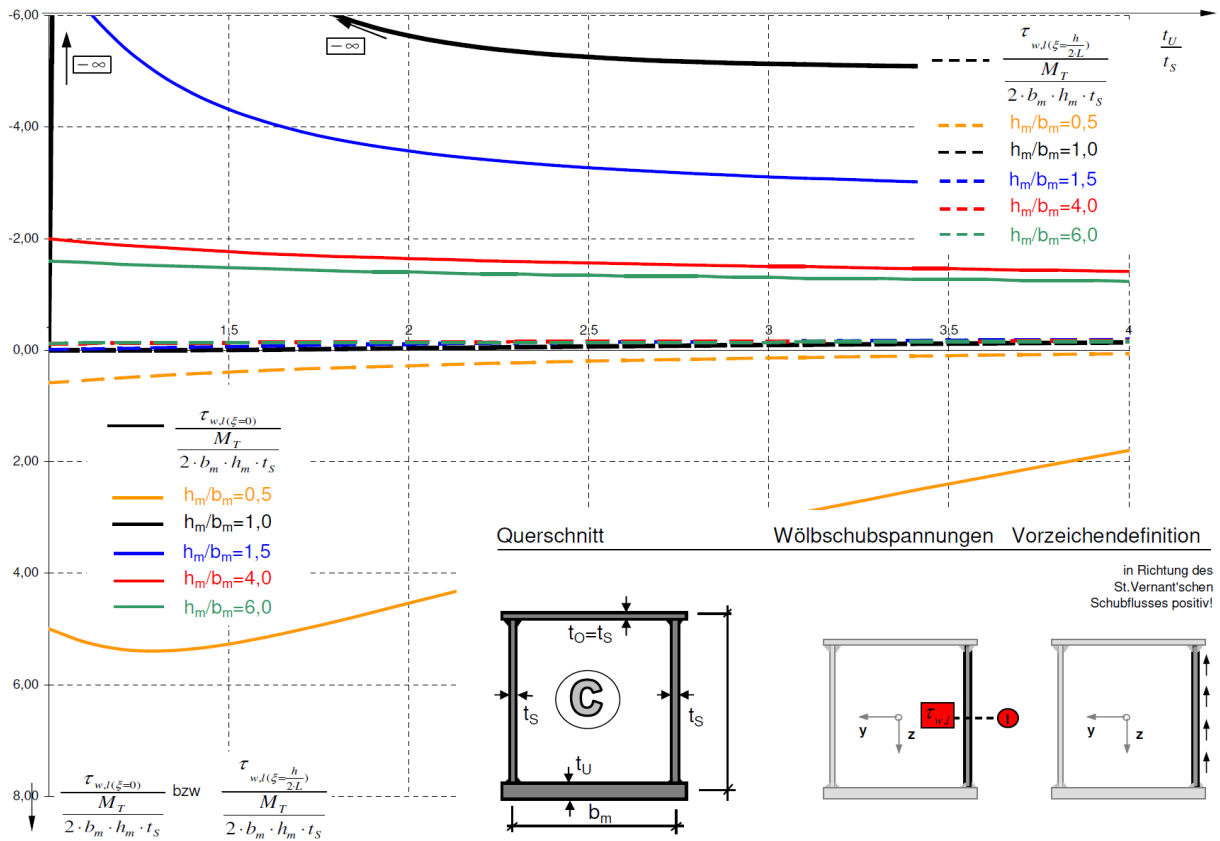


Abb.4-23: bezogene Wölb Schubspannungen  $\tau_{w,J}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$  für Querschnittstyp C in Stegmitte

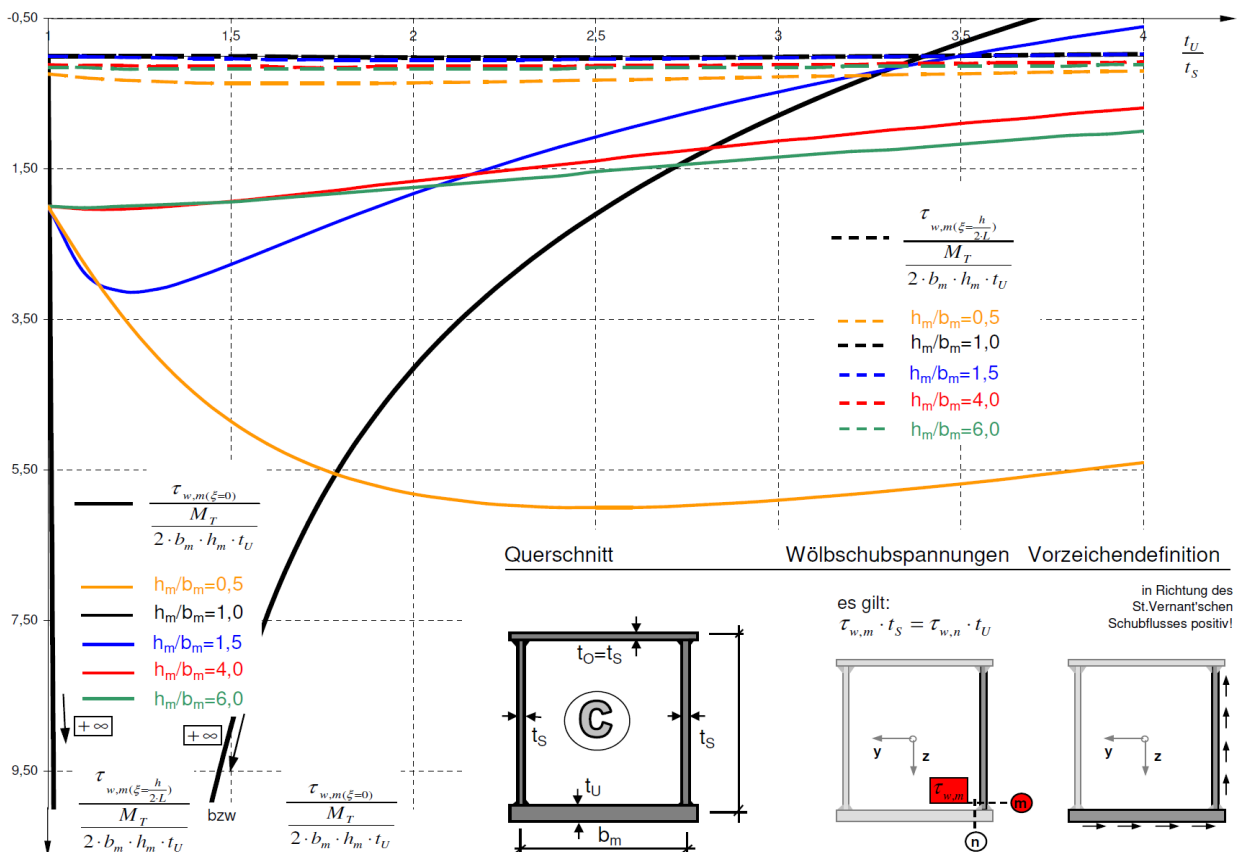


Abb.4-24: bezogene Wölb Schubspannungen  $\tau_{w,m}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$  für Querschnittstyp C an der Stegunterseite

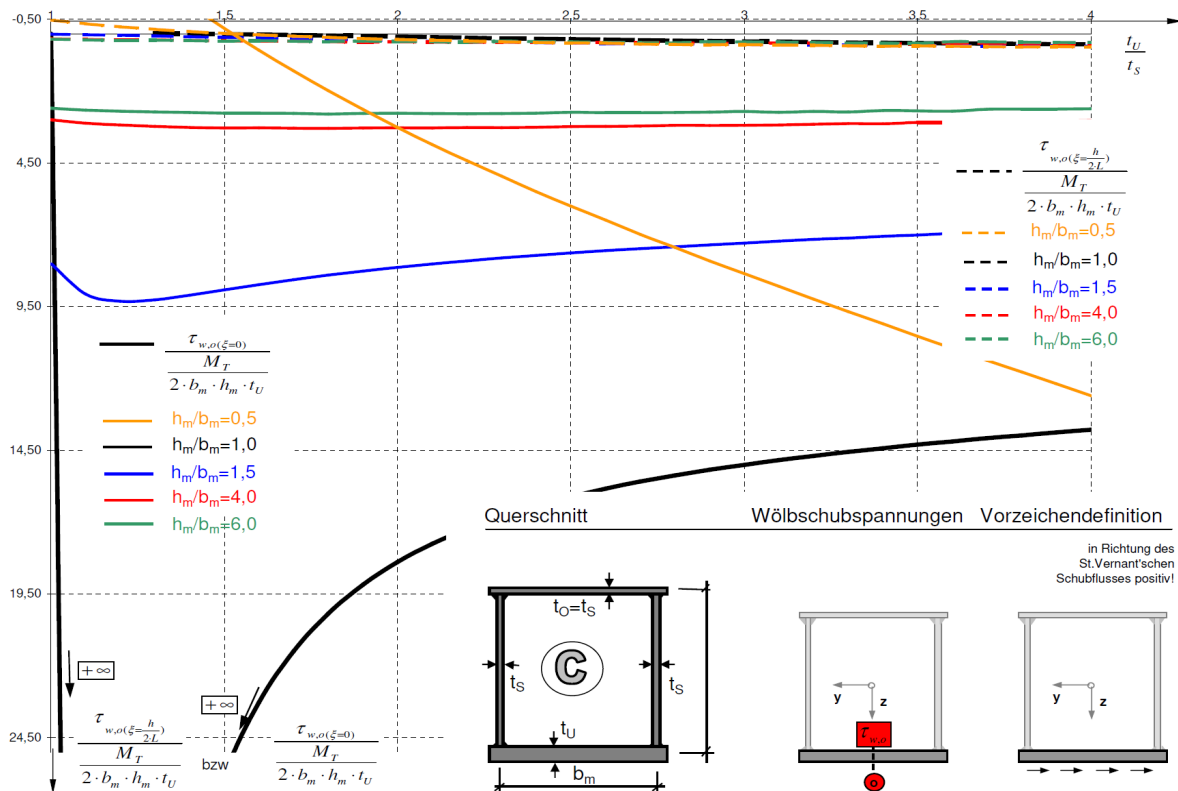


Abb.4-25: bezogene Wölbschubspannungen  $\tau_{w,o}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$  für Querschnittstyp C in Untergurtmitte

Bemerkungen zu Abb.4-17 bis Abb.4-25:

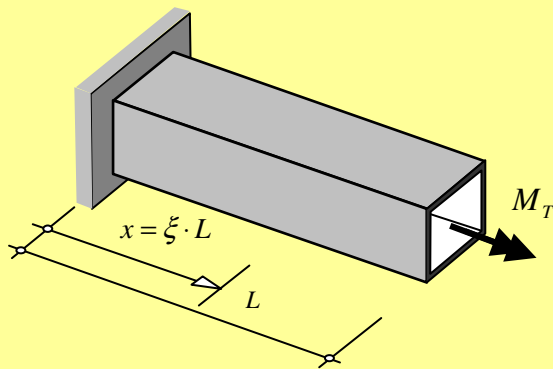
- Bei den Wölbschubspannungen ist vor allem zu bemerken, dass die Richtungen des Schubflusses von Wölbschubspannung und St.Vernant'scher Schubspannung auf den beiden kürzeren Querschnittsseiten übereinstimmen, auf den längeren Querschnittsseiten jedoch entgegengesetzt verlaufen. Zudem tritt der Maximalwert der Wölbschubspannung jeweils auf der kürzeren Querschnittsseite auf. Vereinfacht kann dies durch die höhere Schubsteifigkeit erklärt werden: Die (Wölb-) Schubspannung ergibt sich aus der Änderung der (Wölb-) Normalspannung. Diese ist bei ein – und zweifach symmetrischen Kastenquerschnitten entlang der Querschnittsteile jeweils symmetrisch, linear verlaufend. An den Querschnittsecken stellen sich dem Verlauf entsprechend, betragsmäßig gleich hohe Normalspannungen ein. Daher ergeben sich auf den kürzeren Querschnittsseiten höhere Änderungen der Wölbnormalspannung, und dadurch auch höhere Wölbschubspannungen. Zusammenfassend ergeben sich also in den beiden kürzeren Querschnittsteilen deutlich höhere Schubspannungen, aus Überlagerung von Wölbnormalspannungen und St.Vernant'schen Schubspannungen.
- Aus rein mathematischer Sicht ergeben sich bei der Lösung der Differentialgleichung für nahezu wölbefreie Querschnitte gegen sehr große Werte strebende Wölbschubspannungen. In den Diagrammen ist dies an den Unstetigkeitsstellen (bei Querschnittstyp A und B) ersichtlich.
- Auch hier sind die Wölbschubspannungen im Abstand  $h_m/2$  von der Stelle der Wölbbehinderung, im Gegensatz zu den Maximalwerten an der Einspannung, vergleichsweise gering.

### 4.7 Beispiel zu Kastenquerschnitt unter Torsionsbelastung - Fortsetzung

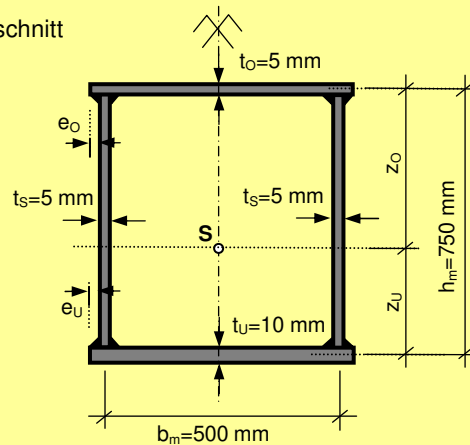
Mit Hilfe der in Abschnitt 4.1 bis 4.6 dargestellten Diagramme lassen sich „Wölbkraft-Schnittgrößen“ und Wölbspannungen für beliebige rechteckige Kastenquerschnitte relativ genau abschätzen. Dies soll vor allem ein „Gefühl“ über die zu erwartenden Beanspruchungen aus Wölbkrafttorsion vermitteln. Beispielhaft soll dies anhand der Abschätzung von Wölbmoment, maximaler Wölbnormalspannung und Wölb Schubspannung für den Querschnitt aus Beispiel 2.4 gezeigt werden:

#### 4.7.1 Zusammenfassung der Angaben für Beispiel 2.4

Statisches System



Querschnitt



#### 4.7.2 Diagrammeingangsparameter

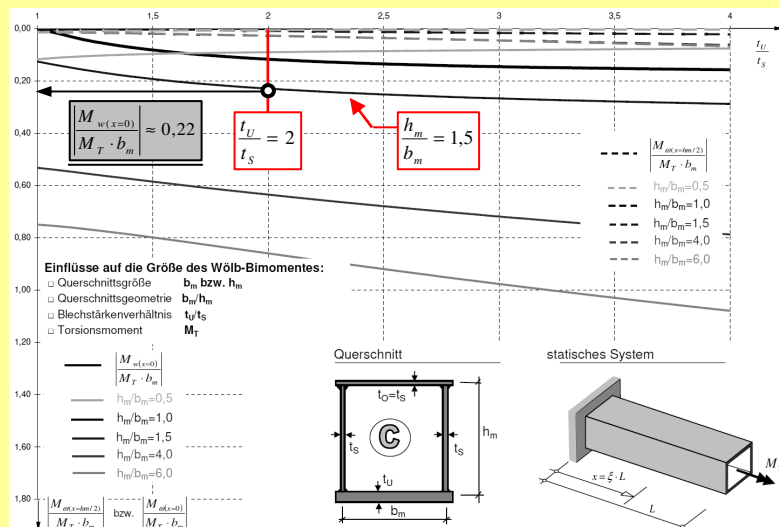
Torsionsmoment $M_T$ am Stabteil	322 kNm
Stablänge $L$	5,0m

Querschnittstyp	C
Querschnittsbreite $b_m$	500 mm
Querschnittshöhe $h_m$	750 mm
Geometrieverhältnis $h_m/b_m$	1,5
Blechstärke $t_s=t_o$	5 mm
Blechstärke $t_u$	10 mm
Blechstärkenverhältnis $t_u/t_s$	2,0

Anmerkung:  
 $M_T$  entspricht 50% des Gesamttorsionsmomentes für das Beispiel in Abschnitt 2.4.1.

#### 4.7.3 Wölbmoment - Querschnitt (m) (siehe auch Abschnitt 2.4.5)

Das maximale Wölbmoment für den gegebenen Fall kann aus Diagramm **Abb.4-12** abgelesen werden:



$$\left| \frac{M_w(x=0)}{M_T \cdot b_m} \right| \approx 0,22 \text{ folgt:}$$

$$\left| M_w(x=0) \right| \approx 0,22 \cdot M_T \cdot 0,5$$

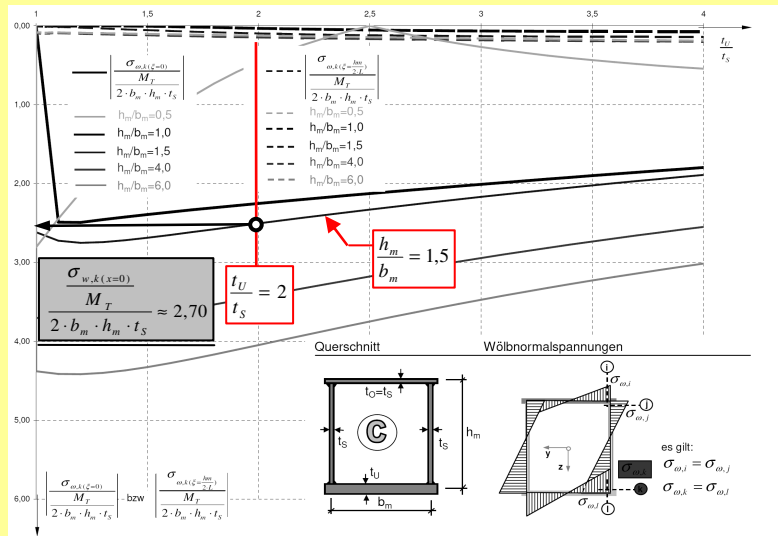
$$\left| M_w(x=0) \right| \approx 35,42 \text{ kNm}^2$$

exakter Wert: 34,37 kNm<sup>2</sup>  
 (Vgl. Abschnitt 2.4.5)



### 4.7.4 Maximale Wölbnormalspannung - Querschnitt (m) (siehe auch Abschnitt 2.4.6)

Die maximale Wölbnormalspannung für den gegebenen Fall kann aus Diagramm Abb.4-15 abgelesen werden:



Aus Abb.4-15 folgt:

$$\frac{\sigma_{w,k}(x=0)}{M_T} \approx 2,70$$

$$\sigma_{w,k}(x=0) \approx \frac{M_T \cdot 2,70}{2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_S}$$

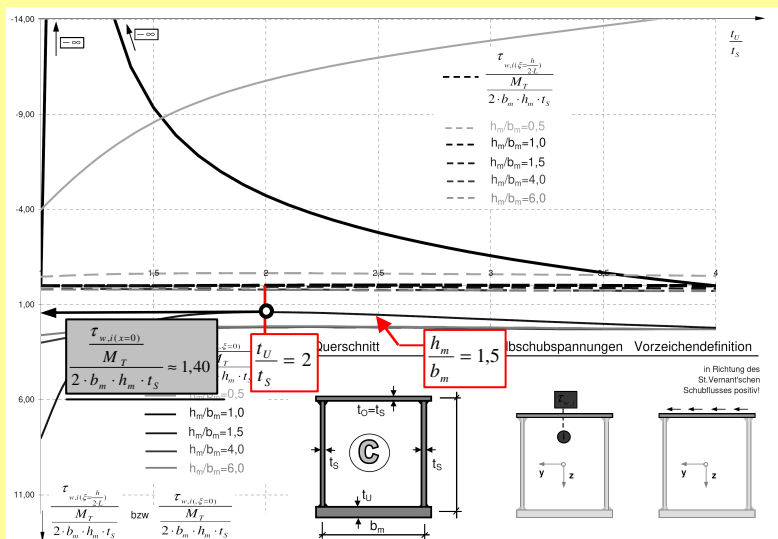
$$\sigma_{w,k}(x=0) \approx \frac{322 \cdot 100 \text{ kNcm} \cdot 2,70}{2 \cdot 50 \text{ cm} \cdot 75 \text{ cm} \cdot 0,5 \text{ cm}}$$

$$\sigma_{w,k}(x=0) \approx 23,18 \text{ kN/cm}^2$$

**exakter Wert: 23,10 kN/cm<sup>2</sup>**  
(Vgl. Abschnitt 2.4.6)

### 4.7.5 Wölb Schubspannungen - Querschnitt (m) (siehe auch Abschnitt 2.4.6)

Die maximale Wölb Schubspannung am Querschnittsobergurt kann aus Diagramm Abb.4-21 abgelesen werden:



Aus Abb.4-21 folgt:

$$\frac{\tau_{w,i}(x=0)}{M_T} \approx 1,40$$

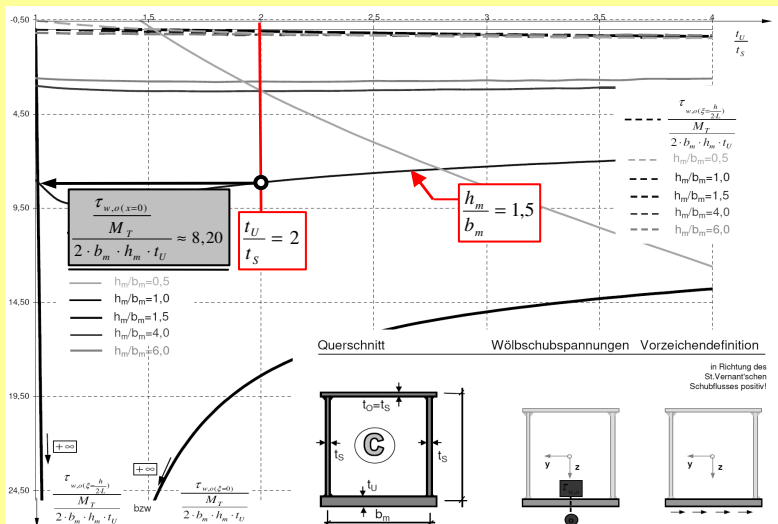
$$\tau_{w,i}(x=0) \approx \frac{M_T \cdot 1,40}{2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_S}$$

$$\tau_{w,i}(x=0) \approx \frac{322 \cdot 100 \text{ kNcm} \cdot 1,40}{2 \cdot 50 \text{ cm} \cdot 75 \text{ cm} \cdot 0,5 \text{ cm}}$$

$$\tau_{w,i}(x=0) \approx 12,02 \text{ kN/cm}^2$$

**exakter Wert: 11,85 kN/cm<sup>2</sup>**  
(Vgl. Abschnitt 2.4.6)

Die maximale Wölb Schubspannung am Querschnittuntergurt kann aus Diagramm Abb.4-25 abgelesen werden:



Aus Abb.4-25 folgt:

$$\frac{\tau_{w,o}(x=0)}{M_T} \approx 8,20$$

$$\tau_{w,o}(x=0) \approx \frac{M_T \cdot 8,20}{2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_U}$$

$$\tau_{w,o}(x=0) \approx \frac{322 \cdot 100 \text{ kNcm} \cdot 8,20}{2 \cdot 50 \text{ cm} \cdot 75 \text{ cm} \cdot 1,0 \text{ cm}}$$

$$\tau_{w,o}(x=0) \approx 35,20 \text{ kN/cm}^2$$

**exakter Wert: 34,90 kN/cm<sup>2</sup>**  
(Vgl. Abschnitt 2.4.6)

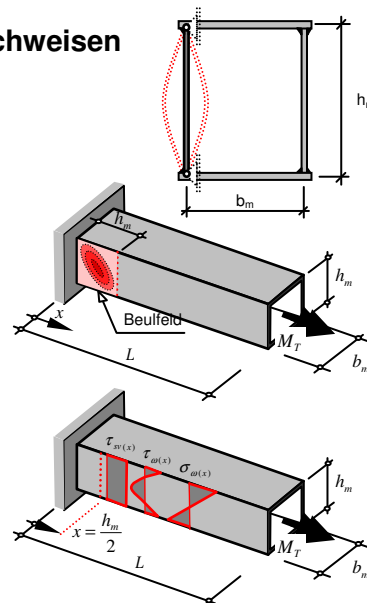
## 5 Einfluss der Wölbspannungen auf den Beulnachweis

### 5.1 Vorbemerkungen

Im Folgenden gilt es die Frage zu klären, ob beim Nachweis des Stegbeulens von torsionsbeanspruchten, wölbbehinderten Kastenträgern die Vernachlässigung der Effekte aus Wölbkrafttorsion in Kauf genommen werden können (Nachweis nur mit St. Venant'scher Schubspannung), oder ob sich dadurch falsche, zu optimistische Ergebnisse in der Bemessung ergeben. Es gilt Querschnitte zu finden, deren geometrische Eigenschaften besonders hohe, ungünstige Wölbnormal- und Wölb Schubspannungen mit sich bringen, und diese somit unter Umständen einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf den Beulnachweis haben.

#### □ Allgemeine Annahmen zum Beulfeld bzw. den Beulnachweisen

- Das **Untergurt- und Obergurtblech** ist durch zusätzliche Längs- und Quersteifen **gegen Ausbeulen gesichert**, sodass **Stegbeulen maßgebend** wird.
- Das **Beulfeld** ist **allseitig gelenkig** gelagert.
- Betrachtet wird ein **quadratisches Beulfeld** mit den Abmessungen  $h_m \times h_m$  **unmittelbar an der Stelle der Wölbbehinderung**.
- Anstelle des in Stablängsrichtung veränderlichen Verlaufes von Normal- und Schubspannungen wird mit einem **konstanten Verlauf** gerechnet, wobei dabei  $x = h_m/2$  die maßgebende Stelle ist.



Um diese Fragen klären zu können werden nun zwei unterschiedliche „Rechenmodelle“ für den Beulnachweis des Stegbleches definiert:

#### □ Rechenmodell 1 („vereinfachtes Rechenmodell“)

Beulnachweis mit Spannungen unter Vernachlässigung der Effekte aus Wölbkrafttorsion

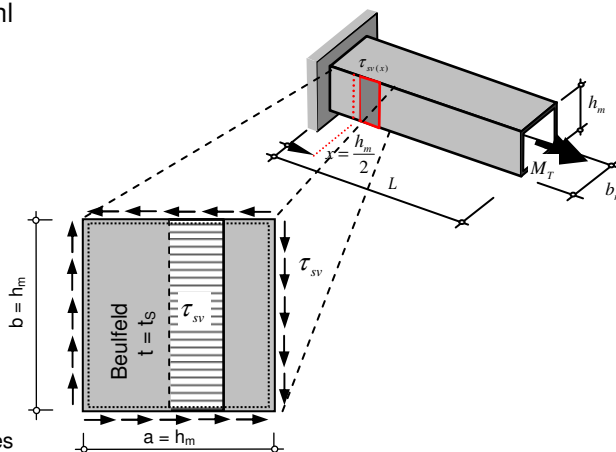
- Vernachlässigung der Wölbspannungen (sowohl Wölbnormalspannungen  $\sigma_\omega$  als auch Wölb Schubspannungen  $\tau_\omega$ )
- Beulspannungsnachweis ausschließlich mit St. Venant'scher Schubspannung  $\tau_{sv}$  an der Stelle  $x = h_m/2$

$$\tau_{sv} = \frac{M_x(x = \frac{h_m}{2})}{2 \cdot h_m \cdot b_m \cdot t_s}$$

- Ausnutzungsgrad für Stegbeulen

$$\eta_{Beulen, RM1} = \frac{\tau_{sv}}{\chi_W \cdot f_y} \quad t_s \dots \text{Blechstärke des Stegbleches}$$

$$\chi_W \dots \text{Abminderungsfaktor für Schubbeulen}$$



□ **Rechenmodell 2** („exaktes Rechenmodell“)   
 Beulnachweis mit Spannungen aus Lösung der DGL der Wölbkrafttorsion

- Exakte analytische Berücksichtigung der Wölbspannungen (sowohl Wölbnormalspannungen  $\sigma_\omega$  als auch Wölbschubspannungen  $\tau_\omega$ )

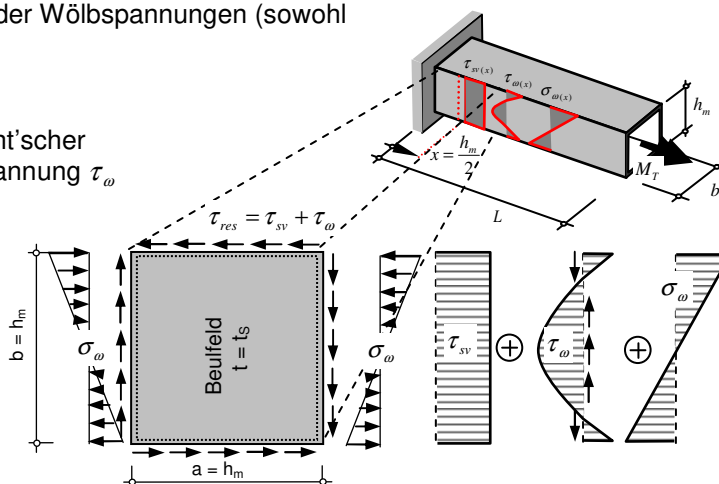
- Beulspannungsnachweis mit St. Venant'scher Schubspannung  $\tau_{sv}$  und Wölbschubspannung  $\tau_\omega$  sowie Wölbnormalspannung  $\sigma_\omega$  an der der Stelle  $x = h_m/2$

- Ausnutzungsgrad für Erreichen der max. Vergleichsspannung

$$\eta_{Mises, RM2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\omega}{f_y / \gamma_{M0}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{sv} + \tau_\omega}{f_y / \gamma_{M0}}\right)^2}$$

- Ausnutzungsgrad für Stegbeulen

$$\eta_{Beulen, RM2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\omega}{\chi_p \cdot f_y / \gamma_{M1}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{sv} + \tau_\omega}{\chi_w \cdot f_y / \gamma_{M1}}\right)^2}$$



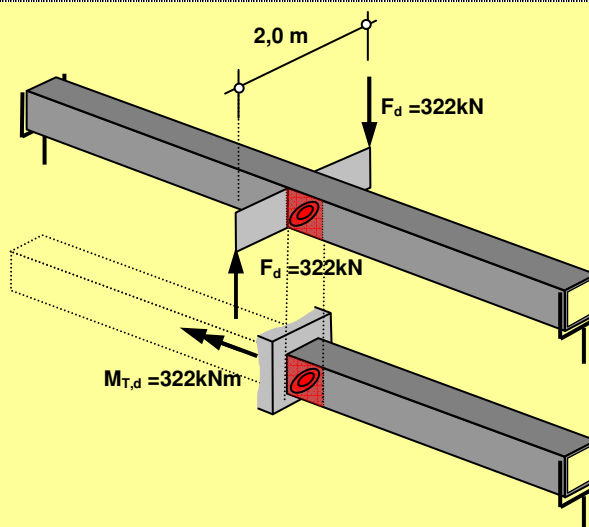
\* numerische Ermittlung des Beulwertes  $k_\tau$  für Schubbeanspruchung ( $\tau_{sv} + \tau_\omega$ )

Anmerkung: Annahme:  $\gamma_{M0} = \gamma_{M1} = 1,0$

## 5.2 Beispiel - Fortsetzung

### 5.2.1 Vorbemerkungen

Im Folgenden wird für das Beispiel aus Abschnitt 2.4 der Beulnachweis nach der Methode der reduzierten Spannungen für das maßgebende Beulfeld geführt. Im Rechenmodell 1, werden bewusst „fälschlicherweise“ nur Schubspannungen aus St. Venant'scher Torsion angesetzt, Rechenmodell 2 geht hingegen von einer vollständigen Berücksichtigung aller Effekte aus Wölbkrafttorsion aus.



### 5.2.2 Angaben zum Beulfeld

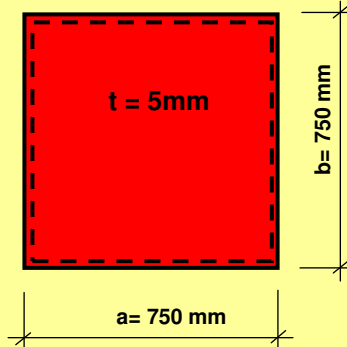
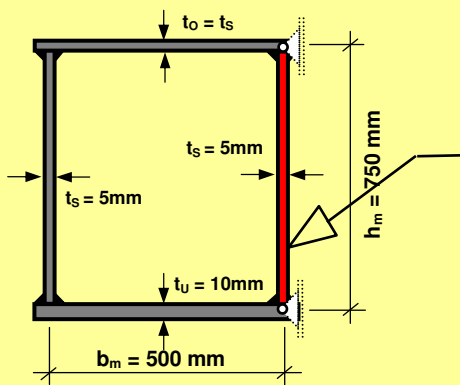
#### Annahmen

- Das **Beulfeld** ist **allseitig gelenkig** gelagert.
- Betrachtet wird ein **quadratisches Beulfeld** mit den Abmessungen  $h_m \times h_m$  **unmittelbar an der Stelle der Wölbbehinderung**.

#### Material

- Stahlgüte **S 235** mit den Materialparametern:
  - E-Modul  $E = 210000 \frac{N}{mm^2}$
  - Querdehnzahl  $\mu = 0,30$

**Geometrieverhältnisse**



$$a = 750\text{mm}$$

$$b = 750\text{mm}$$

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{750\text{mm}}{750\text{mm}} = 1,0$$

**Euler'sche Bezugsspannung:**  $\sigma_e = \frac{\pi^2 \cdot E}{12(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2 = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{12(1-0,30)} \cdot \left(\frac{0,5\text{cm}}{75\text{cm}}\right)^2 = 0,844 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

**5.2.3 Beulnachweis nach Rechenmodell ①**

**Beanspruchungen**

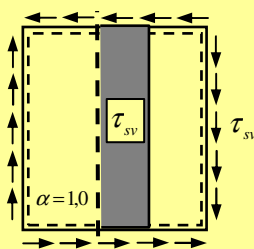
Für den gegebenen Belastungsfall entspricht das gesamte innere Torsionsmoment  $M_{x,Ed}$  dem halben angreifenden äußeren Torsionsmoment  $M_{T,Ed}$ .

$$M_{x,Ed} = 322\text{kNm} \quad (\text{gesamtes inneres Torsionsmoment})$$

Bleiben Effekte der Wölbkrafttorsion unberücksichtigt, und wird eine Abtragung des gesamten inneren Torsionsmomentes  $M_{x,Ed}$  durch St. Venant'sche Schubspannung unterstellt, so folgt:

$$\tau_{sv} = \frac{M_{x,Ed}}{2 \cdot h_m \cdot b_m \cdot t_s} = \frac{322 \cdot 100\text{kNcm}}{2 \cdot 50\text{cm} \cdot 75\text{cm} \cdot 0,5\text{cm}} = 8,59 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad (\text{St. Venant'sche Schubspannung})$$

**Beulwert**



□ **Berechnung nach EN 1993-1-5**

$$k_\tau = 5,34 + \frac{4}{\alpha^2} = 5,34 + \frac{4}{1} = \boxed{9,34} \quad (\text{Beulwert für konstant verteilte Schubspannungen})$$

(EN 1993-1-5, Anhang A, Kapitel A.3, Gleichung A.5)

□ **numerische Berechnung mit EBPlate**

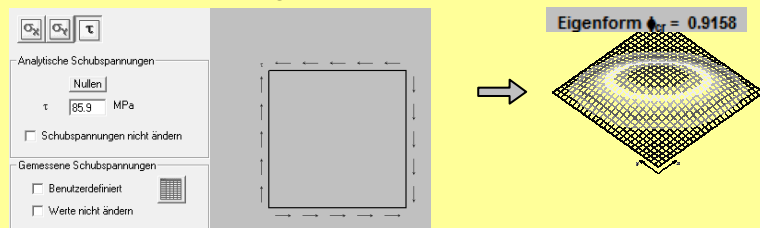


Abb.5-1: Programmeingabe/-ausgabe EBPlate

errechneter Laststeigerungsfaktor:  $\phi_{cr} = 0,9158$

$$\phi_{cr} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_{sv,Ed}} = \frac{k_\tau \cdot \sigma_e}{\tau_{sv,Ed}}$$

Rückrechnung Beulwert:  $k_\tau = \frac{\phi_{cr} \cdot \tau_{sv,Ed}}{\sigma_e} = \frac{0,9158 \cdot 8,59 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{0,844 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = \boxed{9,32}$

Für die weitere Nachweisführung wird mit dem Beulwert gem. EN 1993-1-5  $k_\tau = 9,34$  gerechnet.

**Kritische Beulspannung**

$$\tau_{cr} = k_{\tau} \cdot \sigma_e = 9,34 \cdot 0,844 \frac{kN}{cm^2} = 7,88 \frac{kN}{cm^2} \quad (\text{kritische Beulspannung bei alleiniger Schubbeanspruchung})$$

**Bezogener Schlankheitsgrad**

$$\bar{\lambda}_w = \sqrt{\frac{f_y}{\sqrt{3} \cdot \tau_{cr}}} = \sqrt{\frac{23,5 \frac{kN}{cm^2}}{\sqrt{3} \cdot 7,88 \frac{kN}{cm^2}}} = 1,312 \quad (\text{Plattenschlankheitsgrad bei alleiniger Schubbeanspruchung})$$

**Abminderungsfaktor für Schubbeulen**

$\eta = 1,0$  (S235)

$$\bar{\lambda}_w = 1,312 \geq 1,08: \quad \chi_w = \frac{0,83}{\bar{\lambda}_w} = \frac{0,83}{1,312} = 0,633 \quad (\text{EN 1993-1-5, Kapitel 5.3, Tabelle 1})$$

**Nachweis**

$$\tau_{Ed} \leq \frac{f_y \cdot \chi_w}{\gamma_{M1} \cdot \sqrt{3}}$$

mit:  $f_y = 23,5 \frac{kN}{cm^2}$

$\chi_w = 0,633$

$\gamma_{M1} = 1,0$

$$8,59 \frac{kN}{cm^2} \leq \frac{23,5 \frac{kN}{cm^2} \cdot 0,633}{1,0 \cdot \sqrt{3}}$$

$$8,59 \frac{kN}{cm^2} \leq 8,59 \frac{kN}{cm^2}$$

(Ausnutzungsgrad  $\eta_{Beulen, RM1} = 1,0$ )

**5.2.4 Beulnachweis nach Rechenmodell ②**

**Beanspruchungen**

Der Verlauf der **Torsionsschnittgrößen** ( $M_{x,sv}$ ,  $M_{x,\omega}$  und  $M_{\omega}$ ) wird mit dem in Abschnitt 3 vorgestellten Berechnungsstool ermittelt, und die entsprechenden Werte im Abstand von  $h_m/2$  von der Wölbbehinderung abgegriffen:

dimensionslose Koordinate bei  $x = \frac{h_m}{2}$ :

$$\xi = \frac{x}{L} = \frac{h_m}{2 \cdot L} = \frac{75cm}{2 \cdot 500} = 0,075$$

Für die **Torsionsschnittgrößen** folgt:

$M_{x,\omega,Ed} = 9,60kNm$

$M_{x,sv,Ed} = 312,40kNm$

$M_{\omega,Ed} = -1,02kNm^2$

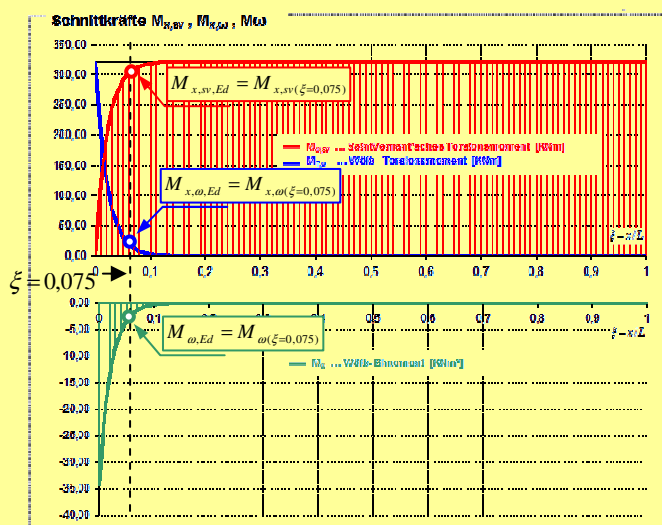
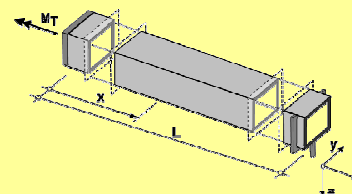
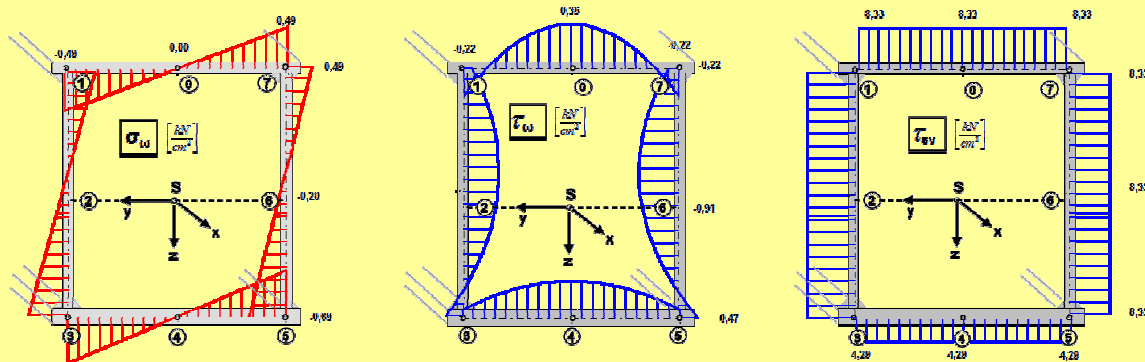
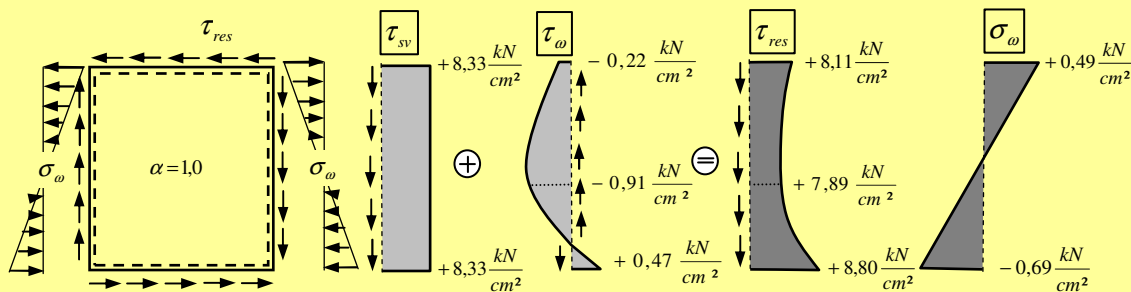


Abb.5-2: Programmausgabe Excel-Tool Wölbkrafttorsion

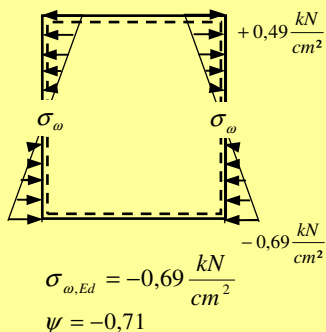
Aus den Torsionsschnittgrößen können nun die **Normal** ( $\sigma_\omega$ ) - und **Schubspannungsverläufe** ( $\tau_{sv}$ ,  $\tau_\omega$ ) errechnet werden:



Addiert man die Schubspannungen  $\tau_{sv}$  und  $\tau_\omega$  ergeben sich zusammengefasst folgende Beanspruchungen auf das Beulfeld des Stegbleches:



**Beulwert für die Wölbnormalspannung  $\sigma_\omega$**



□ **Berechnung nach EN 1993-1-5**

$$\psi = \frac{\sigma_{w,Ed,o}}{\sigma_{w,Ed}} = \frac{+0,49}{-0,69} = -0,71 \quad (\text{Spannungsverhältnis})$$

$$0 > \psi > -1: \quad k_\sigma = 7,81 - 6,29 \cdot \psi + 9,78 \cdot \psi^2$$

$$= 7,81 - 6,29 \cdot (-0,71) + 9,78 \cdot (-0,71)^2 = \boxed{17,21}$$

(Beulwert für zweiseitig gestützte druckbeanspruchte Querschnittsteile EN 1993-1-5, Kapitel 4, Tabelle 4.1)

□ **numerische Berechnung mit EBPlate**

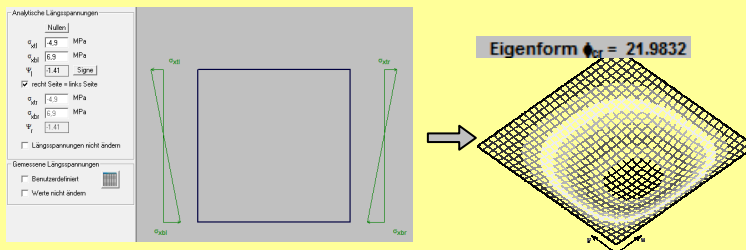


Abb.5-3: Programmeingabe/-ausgabe EBPlate

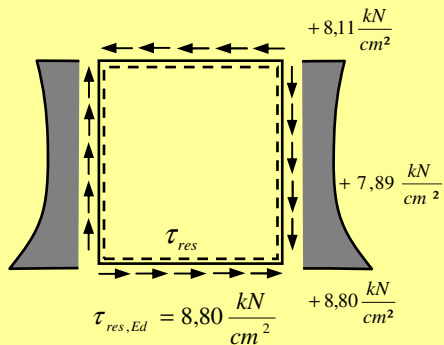
errechneter Laststeigerungsfaktor:  $\phi_{cr} = 21,9832$

$$\phi_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\omega,Ed}} = \frac{k_\sigma \cdot \sigma_e}{\sigma_{\omega,Ed}}$$

Rückrechnung Beulwert:  $k_\sigma = \frac{\phi_{cr} \cdot \sigma_{\omega,Ed}}{\sigma_e} = \frac{21,9832 \cdot 0,69 \frac{kN}{cm^2}}{0,844 \frac{kN}{cm^2}} = \boxed{17,97}$

Für die weitere Nachweisführung wird mit dem Beulwert gem. EN 1993-1-5  $k_{\sigma} = 17,21$  gerechnet.

**Beulwert für die resultierende Schubspannung ( $\tau_{res} = \tau_{sv} + \tau_{\omega}$ )**



Um den über die Steghöhe veränderlichen Schubspannungsverlauf erfassen zu können, ist eine numerische Bestimmung des Beuleigenwertes mit anschließlicher Rückrechnung des Beulwertes erforderlich. Die Verlauf der Schubspannung in Beulfeldlängsrichtung wird als konstant angenommen. Die Berechnung erfolgt mit dem Software-Tool EBPlate:

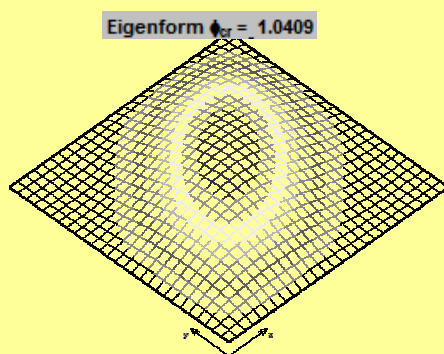
□ **numerische Berechnung mit EBPlate**

Zur Eingabe der veränderlichen Schubspannung wird das Beulfeld in 21 längs des Beulfeldes und auch 21 Elemente quer des Beulfeldes unterteilt. Die Schubspannungswerte werden dann elementweise aus der Spannungsberechnung des Excel-Tools „Wölbkrafttorsion“ übernommen.

(MPa)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
L1	88	88	88	88	88	88	88	88	88
L2	85.7	85.7	85.7	85.7	85.7	85.7	85.7	85.7	85.7
L3	83.6	83.6	83.6	83.6	83.6	83.6	83.6	83.6	83.6
L4	81.7	81.7	81.7	81.7	81.7	81.7	81.7	81.7	81.7
L5	80	80	80	80	80	80	80	80	80
L6	78.5	78.5	78.5	78.5	78.5	78.5	78.5	78.5	78.5
L7	77.2	77.2	77.2	77.2	77.2	77.2	77.2	77.2	77.2
L8	76.1	76.1	76.1	76.1	76.1	76.1	76.1	76.1	76.1
L9	75.3	75.3	75.3	75.3	75.3	75.3	75.3	75.3	75.3
L10	74.6	74.6	74.6	74.6	74.6	74.6	74.6	74.6	74.6
L11	74.2	74.2	74.2	74.2	74.2	74.2	74.2	74.2	74.2
L12	73.9	73.9	73.9	73.9	73.9	73.9	73.9	73.9	73.9
L13	73.9	73.9	73.9	73.9	73.9	73.9	73.9	73.9	73.9
L14	74.1	74.1	74.1	74.1	74.1	74.1	74.1	74.1	74.1
L15	74.4	74.4	74.4	74.4	74.4	74.4	74.4	74.4	74.4
L16	75	75	75	75	75	75	75	75	75
L17	75.8	75.8	75.8	75.8	75.8	75.8	75.8	75.8	75.8
L18	76.8	76.8	76.8	76.8	76.8	76.8	76.8	76.8	76.8

Abb.5-4: Programmeingabe Schubspannungsverlauf EB-Plate

Unter dieser Beanspruchung ergibt sich folgende Beuleigenform:



errechneter Laststeigerungsfaktor:  $\phi_{cr} = 1,0409$

$$\phi_{cr} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_{res,Ed}} = \frac{k_{\tau} \cdot \sigma_e}{\tau_{res,Ed}}$$

Rückrechnung Beulwert:

$$k_{\tau} = \frac{\phi_{cr} \cdot \tau_{res,Ed}}{\sigma_e} = \frac{1,0409 \cdot 8,80 \frac{kN}{cm^2}}{0,844 \frac{kN}{cm^2}} = \boxed{10,85}$$

Abb.5-5: Programmausgabe EB-Plate

**Kritische Beulspannung für isolierte Betrachtung von  $\sigma$  und  $\tau$** 

$$\tau_{cr} = k_{\tau} \cdot \sigma_e = 10,85 \cdot 0,844 = 9,16 \frac{kN}{cm^2} \quad (\text{kritische Beulspannung bei alleiniger Schubbeanspruchung})$$

$$\sigma_{cr} = k_{\sigma} \cdot \sigma_e = 17,21 \cdot 0,844 = 14,53 \frac{kN}{cm^2} \quad (\text{kritische Beulspannung bei alleiniger Normalbeanspruchung})$$

**Laststeigerungsfaktor  $\alpha_{ult,k}$  für kombinierte Beanspruchung**

$$\frac{1}{\alpha_{ult,k}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\omega,Ed}}{f_y}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{res,Ed}}{f_y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,69}{23,5}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{8,80}{23,5}\right)^2} = 0,649 \quad (\text{EN 1993-1-5, Kapitel 10, Gleichung 10.3})$$

$$\alpha_{ult,k} = \frac{1}{0,649} = 1,541$$

$$\alpha_{cr,x} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\omega,Ed}} = \frac{14,53 kN/cm^2}{0,69 kN/cm^2} = 21,058$$

$$\alpha_{cr,\tau} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_{res,Ed}} = \frac{9,16 kN/cm^2}{8,80 kN/cm^2} = 1,041$$

$$\frac{1}{\alpha_{cr}} = \frac{1+\psi}{4 \cdot \alpha_{cr,x}} + \sqrt{\left(\frac{1+\psi}{4 \cdot \alpha_{cr,x}}\right)^2 + \frac{1-\psi}{2 \cdot \alpha_{cr,x}^2} + \left(\frac{1}{\alpha_{cr,\tau}}\right)^2} \quad (\text{EN 1993-1-5, Kapitel 10, Gleichung 10.6})$$

$$\frac{1}{\alpha_{cr}} = \frac{1-0,71}{4 \cdot 21,058} + \sqrt{\left(\frac{1-0,71}{4 \cdot 21,058}\right)^2 + \frac{1+0,71}{2 \cdot 21,058^2} + \left(\frac{1}{1,041}\right)^2} = 0,965$$

$$\alpha_{cr} = \frac{1}{0,965} = 1,036$$

**Bezogener Schlankheitsgrad**

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr}}} = \sqrt{\frac{1,541}{1,036}} = 1,22 \quad (\text{Plattenschlankheitsgrad bei kombinierter Beanspruchung})$$

**Abminderungsfaktoren für Beulen**

$$\eta = 1,0 \quad (\text{S235})$$

$$\chi_w: \quad \bar{\lambda}_p = 1,22 \geq 1,08: \quad \chi_w = \frac{0,83}{\bar{\lambda}_p} = \frac{0,83}{1,22} = 0,680 \quad (\text{EN 1993-1-5, Kapitel 5.3, Tabelle 1})$$

$$\chi_p: \quad \bar{\lambda}_p = 1,22 > 0,5 + \sqrt{0,085 - 0,055 \cdot \psi} = 0,5 + \sqrt{0,085 - 0,055 \cdot (-0,71)} = 0,85$$

$$\chi_p = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,055 \cdot (3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} = \frac{1,22 - 0,055 \cdot (3 - 0,71)}{1,22^2} = 0,735 \quad (\text{EN 1993-1-5, Kapitel 4.4 (2)})$$

**Nachweis**

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{\chi_p}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{Ed}}{\chi_w}\right)^2} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{0,69}{0,735}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{8,80}{0,680}\right)^2} \leq \frac{23,5 kN/cm^2}{1,0}$$

$$\boxed{22,43 \frac{kN}{cm^2} \leq 23,50 \frac{kN}{cm^2}} \quad (\text{Ausnutzungsgrad } \eta_{Beulen, RM2} = 0,95)$$

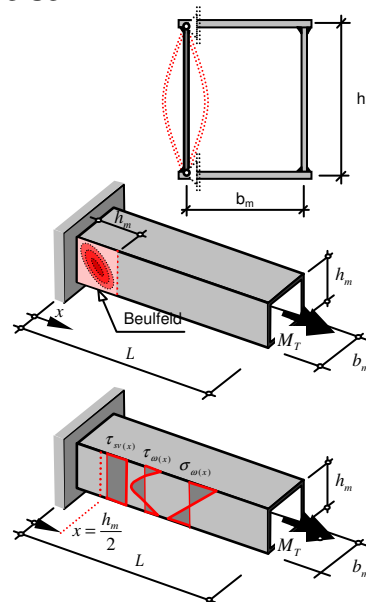


**5.3 Gegenüberstellung von Rechenmodell 1 und Rechenmodell 2 (gem. 5.1) für die Querschnittstypen A,B,C (gem. Kap. 4)**

**5.3.1 Vorbemerkungen zu den Diagrammen Abschnitt 5.3.2 bis 5.3.4**

□ **Allgemeine Annahmen zum Beulfeld bzw. den Beulnachweisen**

- Das **Untergurt- und Obergurtblech** ist durch zusätzliche Längs- und Quersteifen **gegen Ausbeulen gesichert**, sodass **Stegbeulen maßgebend** wird.
- Das **Beulfeld** ist **allseitig gelenkig** gelagert.
- Betrachtet wird ein **quadratisches Beulfeld** mit den Abmessungen  $h_m \times h_m$  **unmittelbar an der Stelle der Wölbbehinderung**.
- Anstelle des in Stablängsrichtung veränderlichen Verlaufes von Normal- und Schubspannungen wird mit einem **konstanten Verlauf** gerechnet, wobei dabei  $x = h_m/2$  die maßgebende Stelle ist.



- Aus Rechenmodell 1 (Vernachlässigung sämtlicher Effekte aus Wölbkrafttorsion) wird das maximal aufnehmbare Torsionsmoment  $M_{T,grenz}$ , bei dessen Überschreitung es zum Stegbeulen des untersuchten Beulfeldes kommt ( $\eta_{Beulen, RM1} = 1$ ), ermittelt.

Mit diesem Torsionsmoment  $M_{T,grenz}$  wird im Anschluss ein Beulnachweis nach Rechenmodell 2 (vollständige Berücksichtigung aller Effekte aus Wölbkrafttorsion) geführt, und die Auslastungsgrade  $\eta_{Beulen, RM2}$  sowie  $\eta_{Mises, RM2}$  errechnet.

**Rechenmodell ① („vereinfacht“)**

- Vernachlässigung der Wölbspannungen
- Beulnachweis mit St. Vernant'schen Schubspannungen alleine

$$\tau_{SV} = \frac{M_T}{2 \cdot h_m \cdot b_m \cdot t}$$

$$\eta_{Beulen, RM1} = \frac{M_T}{2 \cdot h_m \cdot b_m \cdot t \cdot \frac{\chi_w \cdot f_y}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{M1}}} \stackrel{!}{=} 1,0$$

...führt bei gegebenem Querschnitt ( $h_m, b_m, t$ ) auf:

$$M_{T,grenz} \text{ (aufnehmbares Torsionsmoment)}$$

**Rechenmodell ② („exakt“)**

- Exakte Ermittlung der Wölbspannungen
- Beulnachweis mit Wölbnormalspannungen + Schubspannungen (aus Wölbkrafttorsion und St. Vernant'scher Torsion)

... mit  $M_{T,grenz}$  aus RM ①:

$$\eta_{Beulen, RM2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{W(x)}}{\chi_p \cdot f_y / \gamma_{M1}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{SV(x)} + \tau_{W(x)}}{\chi_w \cdot f_y / \gamma_{M1}}\right)^2}$$

$$\eta_{Mises, RM2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{W(x)}}{f_y / \gamma_{M0}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{SV(x)} + \tau_{W(x)}}{f_y / \gamma_{M0}}\right)^2}$$

\* numerische („exakte“) Ermittlung des Beulwertes für die Wölb Schubspannung

In den Diagrammen .... sind nun die Verhältnisse  $\frac{\eta_{Beulen, RM2}}{\eta_{Beulen, RM1}}$  sowie  $\frac{\eta_{Mises, RM2}}{\eta_{Mises, RM1}}$  in Abhängigkeit des Geometrieparameters  $h_m / t_s$  dargestellt.

### 5.3.2 Querschnittstyp A

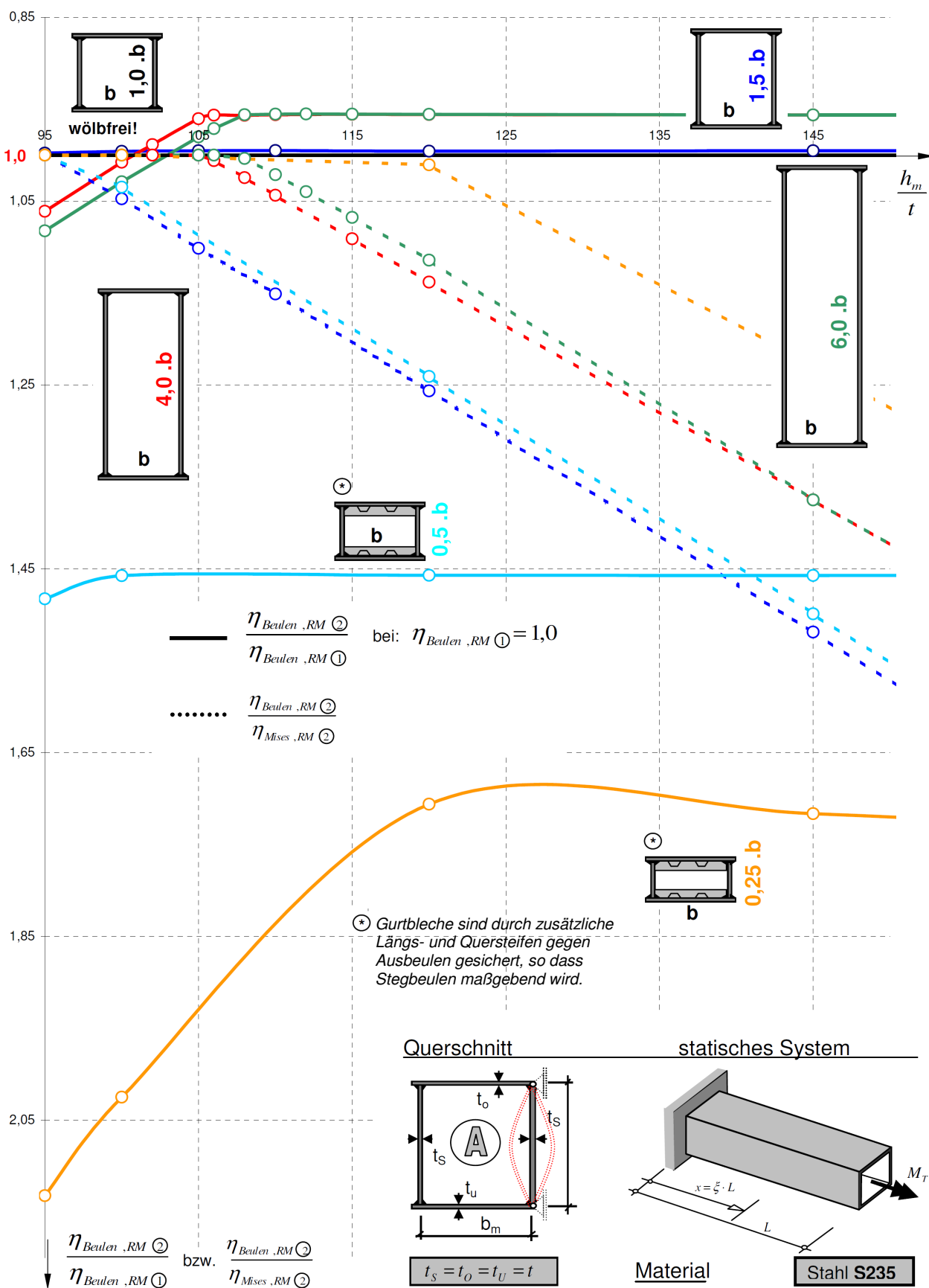


Abb.5-6: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp A (mit  $\gamma_{M0} = \gamma_{M1} = 1,0$ )

## Bemerkungen zu Abb.5-6:

- Bei Querschnitten mit  $h_m/b_m \geq 1,0$  zeigt sich folgendes Resultat:

Für kleine Beulslankheiten  $h_m/t$  ergibt sich nach dem „exakten – Rechenmodell“ (RM2) ein Ausnutzungsgrad gegen Stegbeulen  $\eta_{Beulen, RM2}$  der geringfügig über 1,0 liegt. Die strichlierten Linien zeigen an, dass für diese kleinen Beulslankheiten der Ausnutzungsgrad gegen Stegbeulen, der zwar größer als 1,0 ist, gleich dem Ausnutzungsgrad gegen Erreichen der Vergleichsspannung ist. Die Abminderungsfaktoren für Beulen werden also noch nicht schlagend ( $\chi_P=1,0$  und  $\chi_W=1,0$ ), und die geringfügige Überschreitung der zulässigen Spannungen relativiert sich im Sinne örtlichen Plastizierens.

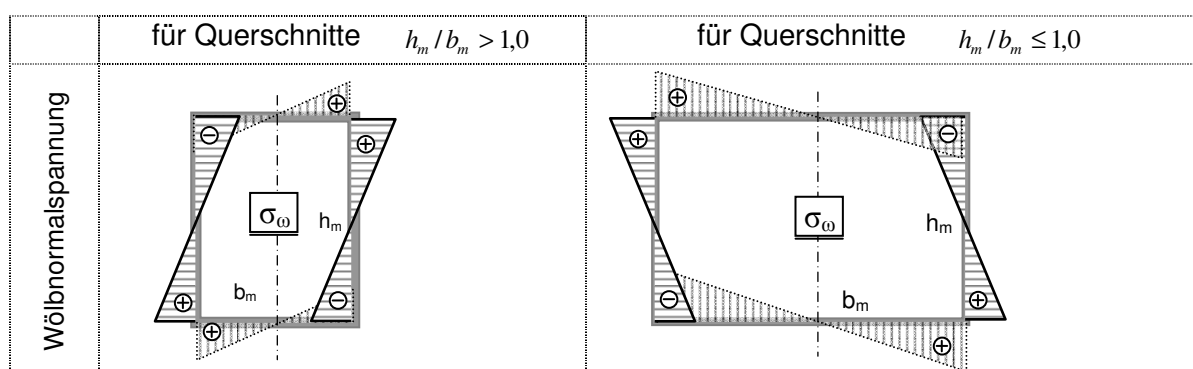
Für große Beulslankheiten  $h_m/t_s$  ergibt sich nach dem „exakten – Rechenmodell“ ein Ausnutzungsgrad gegen Stegbeulen, der verglichen zum „vereinfachten- Rechenmodell“, unter 1,0 liegt.

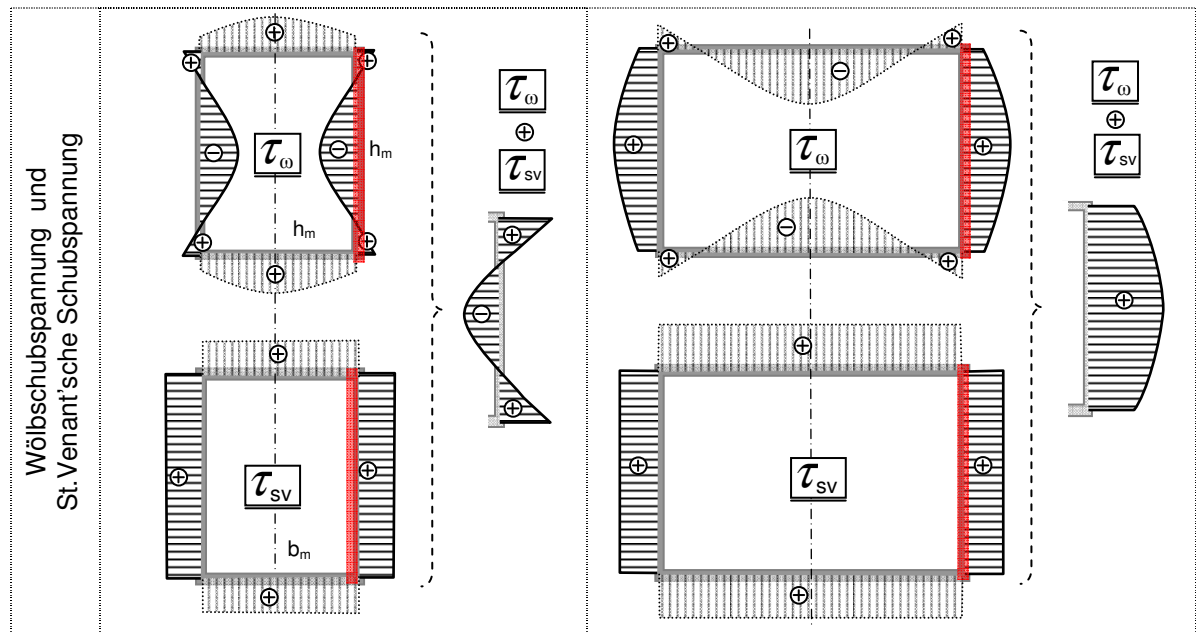
**Zusammenfassend ist also bei Kastenquerschnitten  $h_m/b_m \geq 1,0$  der Beulnachweis des Stegbleches nach dem „vereinfachten Rechenmodell“ für beliebige  $h_m/b_m$  – Verhältnisse als „unkritisch“, da auf der sicheren Seite liegend, einzustufen.**

- Bei Querschnitten mit  $h_m/b_m < 1,0$  zeigt sich folgendes Resultat:

Der Ausnutzungsgrad gegen Stegbeulen nach dem „exakten – Rechenmodell“ übersteigt deutlich 1,0. Das gilt weitgehend unabhängig von der Beulslankheit, und „verschärft“ sich mit kleiner werdendem  $h_m/b_m$ . Grund dafür ist einerseits der nun geänderte Verlauf der Wölb Schubspannung ohne Vorzeichenwechsel:

**Qualitativer Verlauf der Normal- und Schubspannungen aus  $M_x$ :**





Während die betragsmäßige Größe der Wölbnormalspannung an den Querschnittsecken für alle Querschnitte nach Typ A jeweils gleich groß ist, und diese in den einzelnen Querschnittsteilen linear verlaufen, unterscheidet sich der Verlauf der Wölbschubspannungen im Gurt und im Steg wie folgt:

Bei  $h_m/b_m > 1,0$  werden die Schubspannungen aus St. Venant'scher Torsion am Steg durch die Wölbschubspannungen in weiten Bereichen abgemindert. Es ergeben sich kleinere Schubspannungen und größere Beulwerte ( $k_\tau > 9,34$ ).

Bei  $h_m/b_m < 1,0$  haben die Schubspannungen aus St. Venant'scher Torsion und Wölbkrafttorsion am Steg die gleiche Wirkungsrichtung. Es ergeben sich daher über die gesamte Steghöhe größere Schubspannungen und kleinere Beulwerte ( $k_\tau < 9,34$ ).

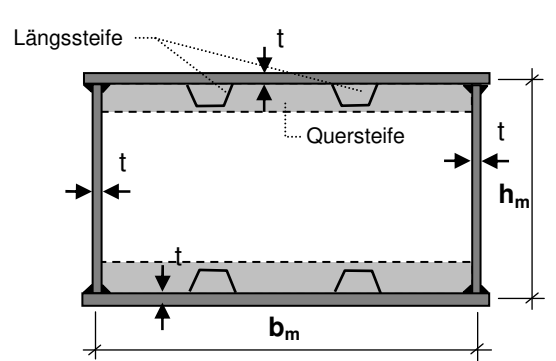
### Abklingverhalten in Stablängsrichtung

Das Abklingverhalten von Stäben mit  $h_m = \alpha \cdot b_m$  ist zwar ident zu Stäben mit  $h_m = (1/\alpha) \cdot b_m$ , da der um  $90^\circ$  gedrehte Querschnitt gleiche Wölbsteifigkeiten hat. Jedoch befindet sich die Stelle  $h_m/2$ , in der die für den Beulnachweis maßgebenden Spannungen ermittelt werden, relativ zur Stablänge näher an der Einspannung. Deshalb ist mit höheren Wölbmomenten und Wölbmomenten, und folglich auch mit höheren Spannungen zu rechnen.

**Zusammenfassend führt der Nachweis des Stegbeulens bei  $h_m/b_m < 1,0$  nach dem „exakten Rechenmodell“ auf deutlich höhere Ausnutzungsgrade. Der Nachweis nach**

dem „vereinfachten Rechenmodell“ ist daher auf der „unsicheren Seite“. Praktische Bedeutung hat der Beulnachweis des Stegbleches für derartige Geometriesituationen ( $h_m/b_m < 1,0$  bzw.  $t = \text{const.}$ ) jedoch nur dann, solange die Gurtbleche durch zusätzliche Längs- und Quersteifen gegen Ausbeulen gesichert sind. Ansonsten wird der Beulnachweis der Gurtbleche maßgebend, wobei dafür der Querschnitt gedanklich um  $90^\circ$  gedreht werden kann, und somit wieder der Fall  $h_m/b_m > 1,0$  vorliegt.

Daraus können zusammenfassend folgende „problematische Geometrieverhältnisse“ des Querschnittstyps A abgeleitet werden:

<input type="checkbox"/> Blechstärken: $t = \text{const.}$ <input type="checkbox"/> Seitenverhältnis: $h_m/b_m < 1,0$  <b>Jedoch nur maßgebend wenn:</b> - $h_m/b_m \approx 1,0$ oder - Untergurt und Obergurt ausreichend gegen Ausbeulen gesichert, sodass Stegbeulen maßgebend wird	
--	---

\*als „problematische Querschnitte“ werden hier jene Querschnitte verstanden, bei denen ein Beulnachweis des Stegbleches nach dem vereinfachten Rechenmodell (nur St.Venant'sche Schubspannung, alleine) auf zu „optimistische“ Ergebnisse führt.

### 5.3.3 Querschnittstyp B

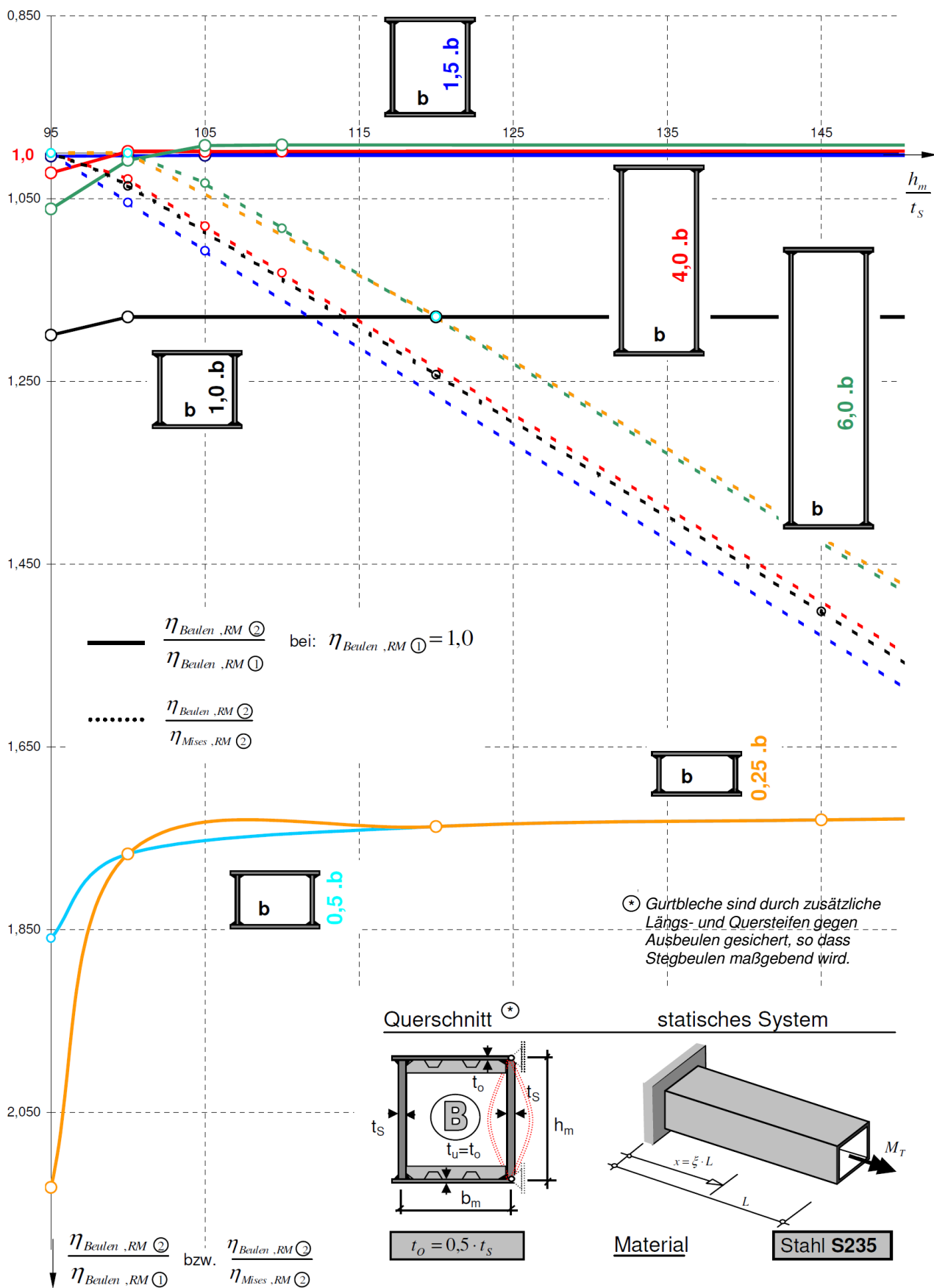


Abb.5-7: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp B ( $t_o=0,5 t_s$ ) (mit  $\gamma_{M0} = \gamma_{M1} = 1,0$ )

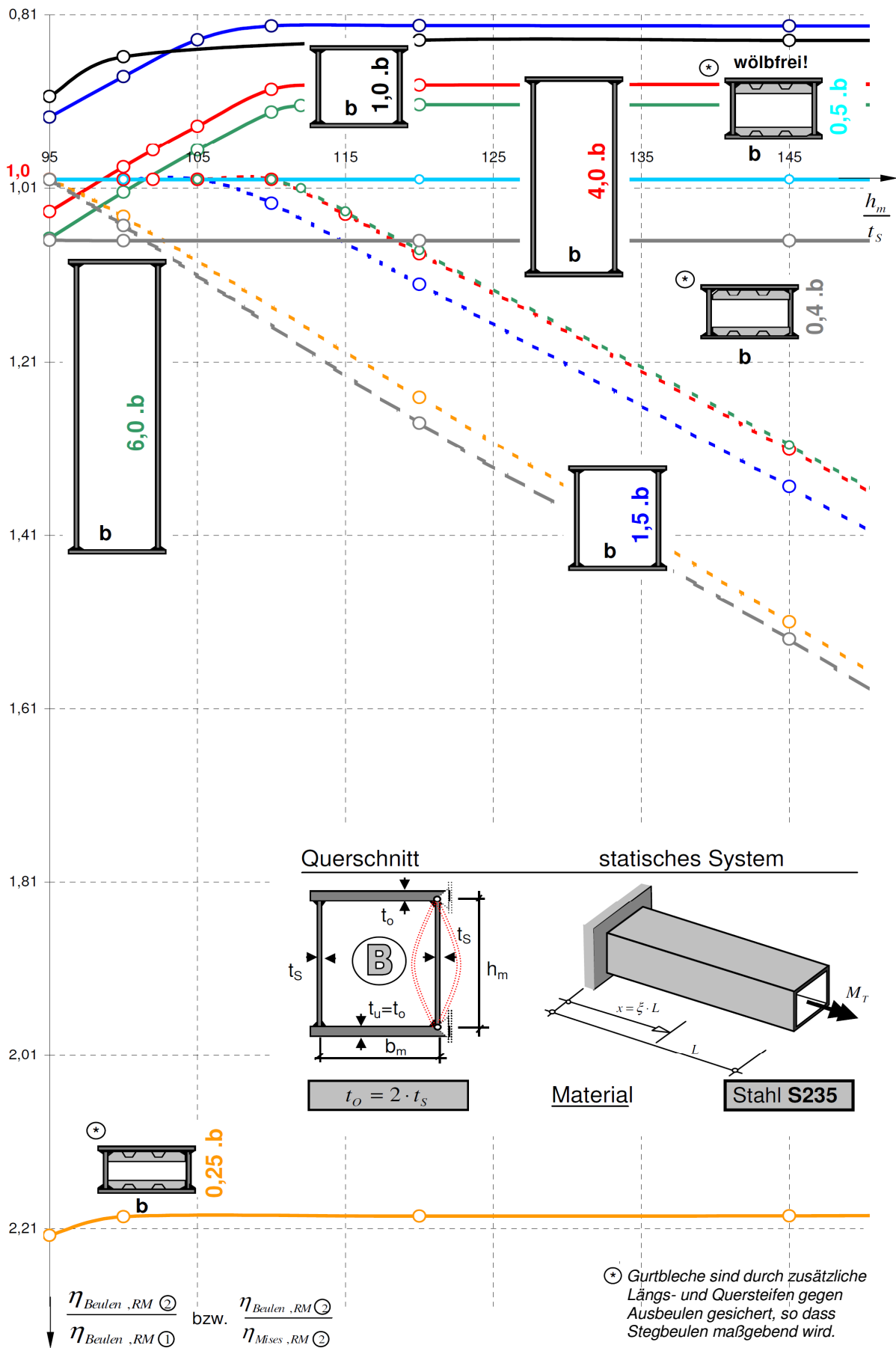


Abb.5-8: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp B ( $t_o=2 t_s$ )  
(mit  $\gamma_{M0} = \gamma_{M1} = 1,0$ )

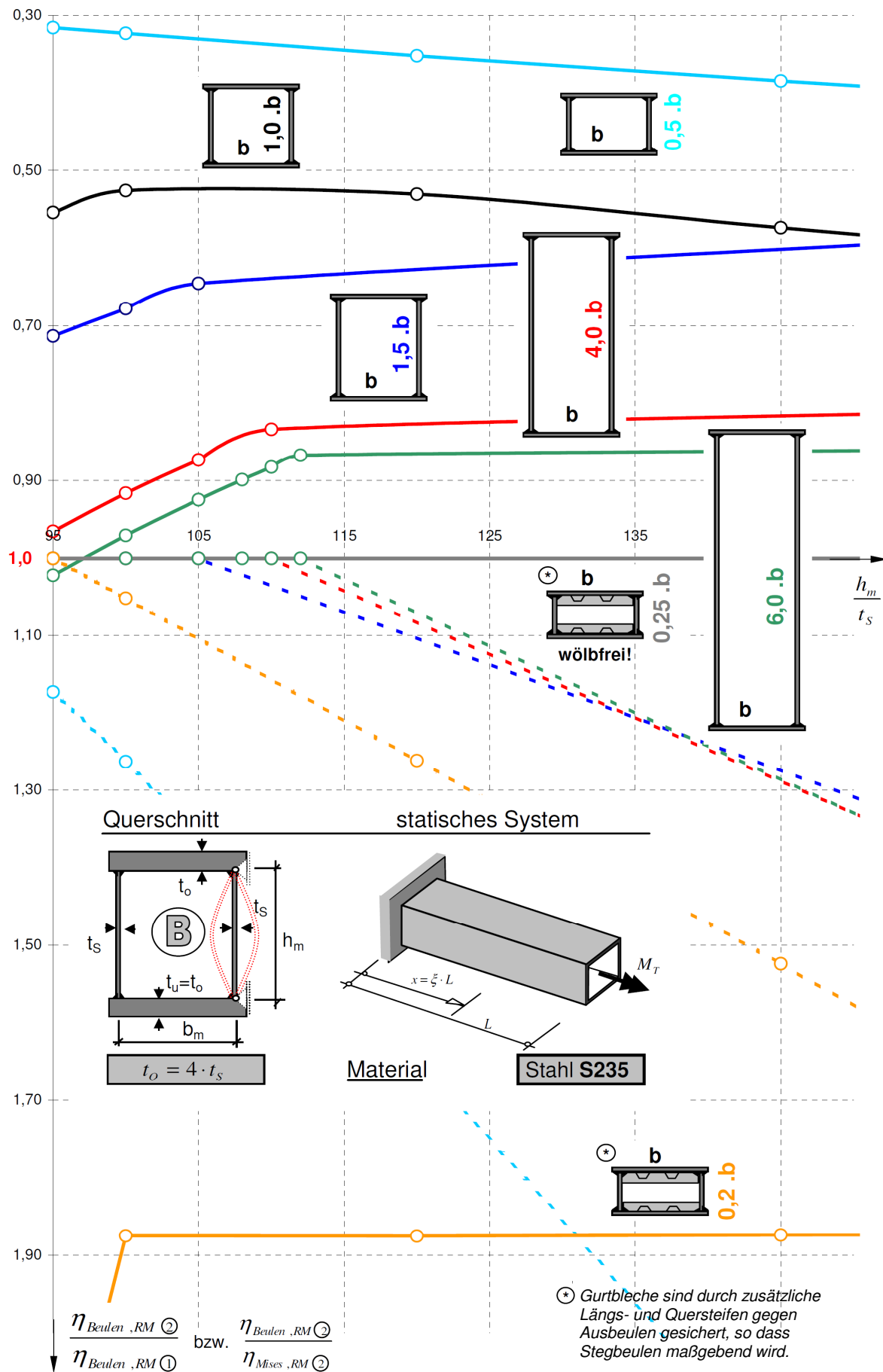


Abb.5-9: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp B ( $t_o=4 \cdot t_s$ ) (mit  $\gamma_{M0} = \gamma_{M1} = 1,0$ )



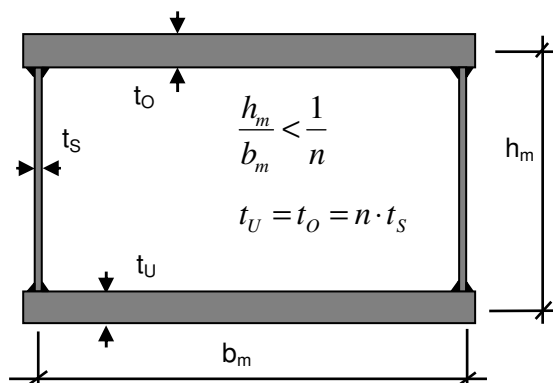
Bemerkungen zu Abb.5-7 bis Abb.5-9:

- Bei Querschnitten mit  $h_m/b_m \geq 1,0$  zeigt sich folgendes Resultat:

Auch hier ist, aus gleichen Gründen wie in Abschnitt 5.3.2, der Beulnachweis des Stegbleches nach dem „vereinfachten Rechenmodell“ für beliebige  $h_m/b_m$  – Verhältnisse als „unkritisch“, da auf der sicheren Seite liegend, einzustufen.

- Bei Querschnitten mit  $h_m/b_m < 1,0$  zeigt sich folgendes Resultat:

Wie in Kapitel 4 bereits erwähnt, sind Querschnitte des Typs B mit  $h_m/b_m < 1,0$ ;  $h_m/b_m = \alpha$  bei einem Blechstärkenverhältnis von  $t_o/t_s = 1/\alpha$  wölbefrei. Die Diagramme zeigen, dass bei einer beidseitigen Verstärkung der Gurte ( $t_o = n \cdot t_s$ , mit  $n > 1,0$ ) ab einem Geometrieverhältnis von  $h_m/b_m < 1/n$  sich nach Rechenmodell 2 Ausnutzungsgrade über 1,0 ergeben. Es handelt sich hier also um breite, niedrige Kastenquerschnitte. Nun stellt sich jedoch die Frage, ob diese Fälle überhaupt relevant sind, bzw. ob bei derartigen Geometrieverhältnissen nicht ohnehin der Beulnachweis der Gurtbleche maßgebend wird:



Beulslankheit Obergurt/  
Untergurt:

$$\frac{t_o}{b_m}$$

Beulslankheit Steg:

$$\frac{t_s}{h_m}$$

Verhältnis der  
Beulslankheiten

$$\frac{t_o}{b_m}$$

$$\frac{b_m}{t_s} = \frac{t_o \cdot h_m}{t_s \cdot b_m} = n \cdot \frac{b_m}{h_m}$$

Nur aufgrund der Beulslankheiten würde sich bei den oben angegebenen Geometrieverhältnissen (für Verhältnisse kleiner als  $h_m/b_m = 1/n$ ) eine größere Beulgefährdung für die beiden Gurte herausstellen. Betrachtet man jedoch die Spannungsverteilung der Wölbschubspannung (wie in Abschnitt 5.3.2 gezeigt) an Querschnittsteg und Querschnittsgurt, so wird vor allem für Verhältnisse  $h_m/b_m < 1/n$ , jedoch  $h_m/b_m \approx 1/n$  Stegbeulen maßgebend bleiben.

**Daraus können zusammenfassend folgende „problematische Geometrieverhältnisse“ des Querschnittstyps B abgeleitet werden:**

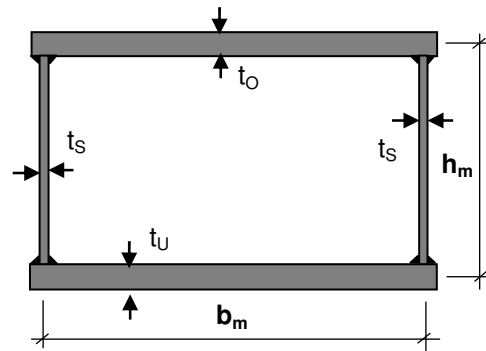
- Blechstärken:  $t_U = t_O = n \cdot t_S$   
 $n > 1,0$

- Seitenverhältnis  $\frac{h_m}{b_m} < \frac{1}{n}$

**Jedoch nur maßgebend wenn:**

-  $h_m/b_m \approx \frac{1}{n}$   
oder

- Untergurt und Obergurt  
ausreichend gegen Ausbeulen  
gesichert sodass Stegbeulen  
maßgebend wird



### 5.3.4 Querschnittstyp C

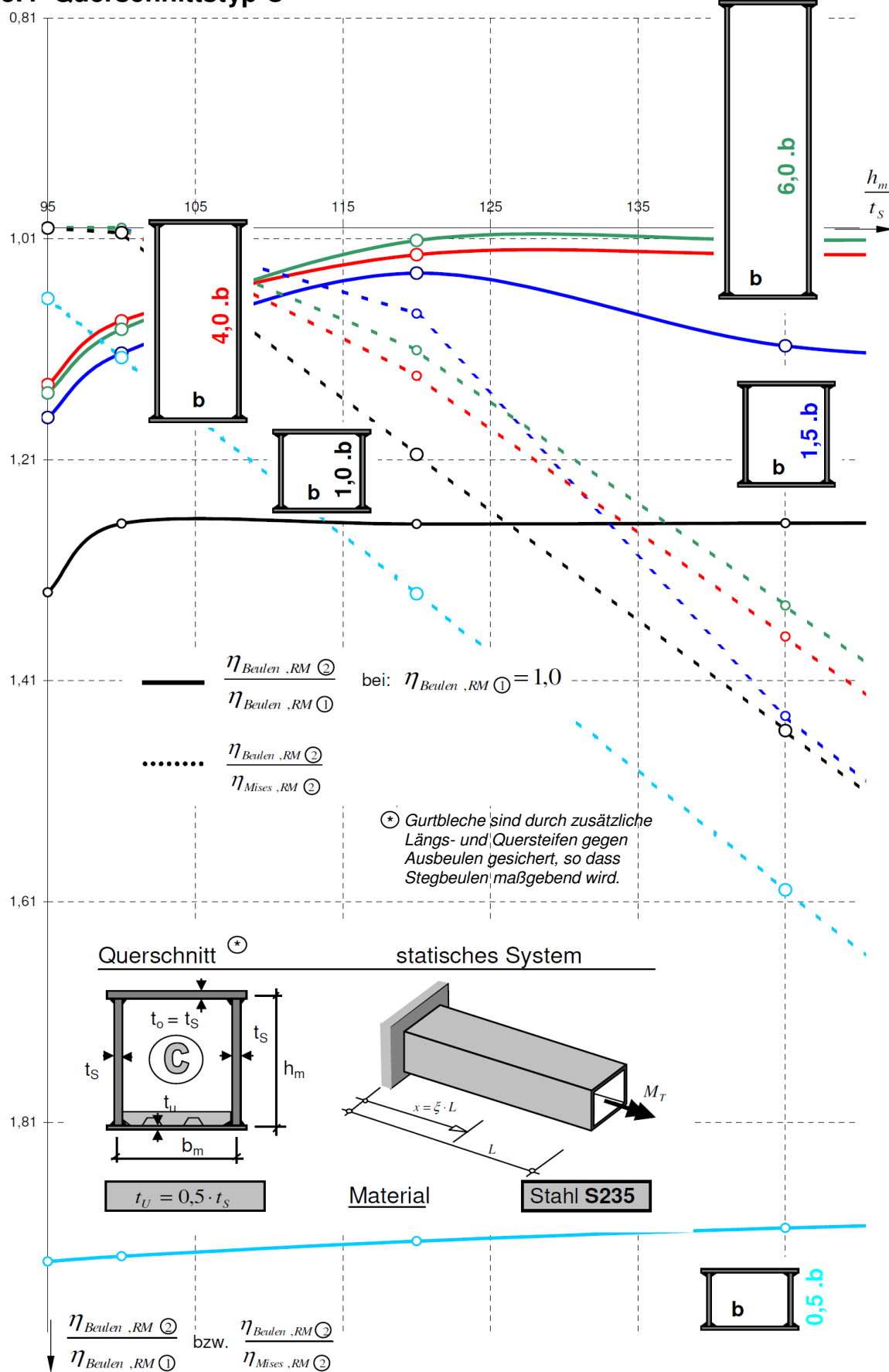


Abb.5-10: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp C ( $t_U=0,5 t_s$ ) (mit  $\gamma_{M0} = \gamma_{M1} = 1,0$ )

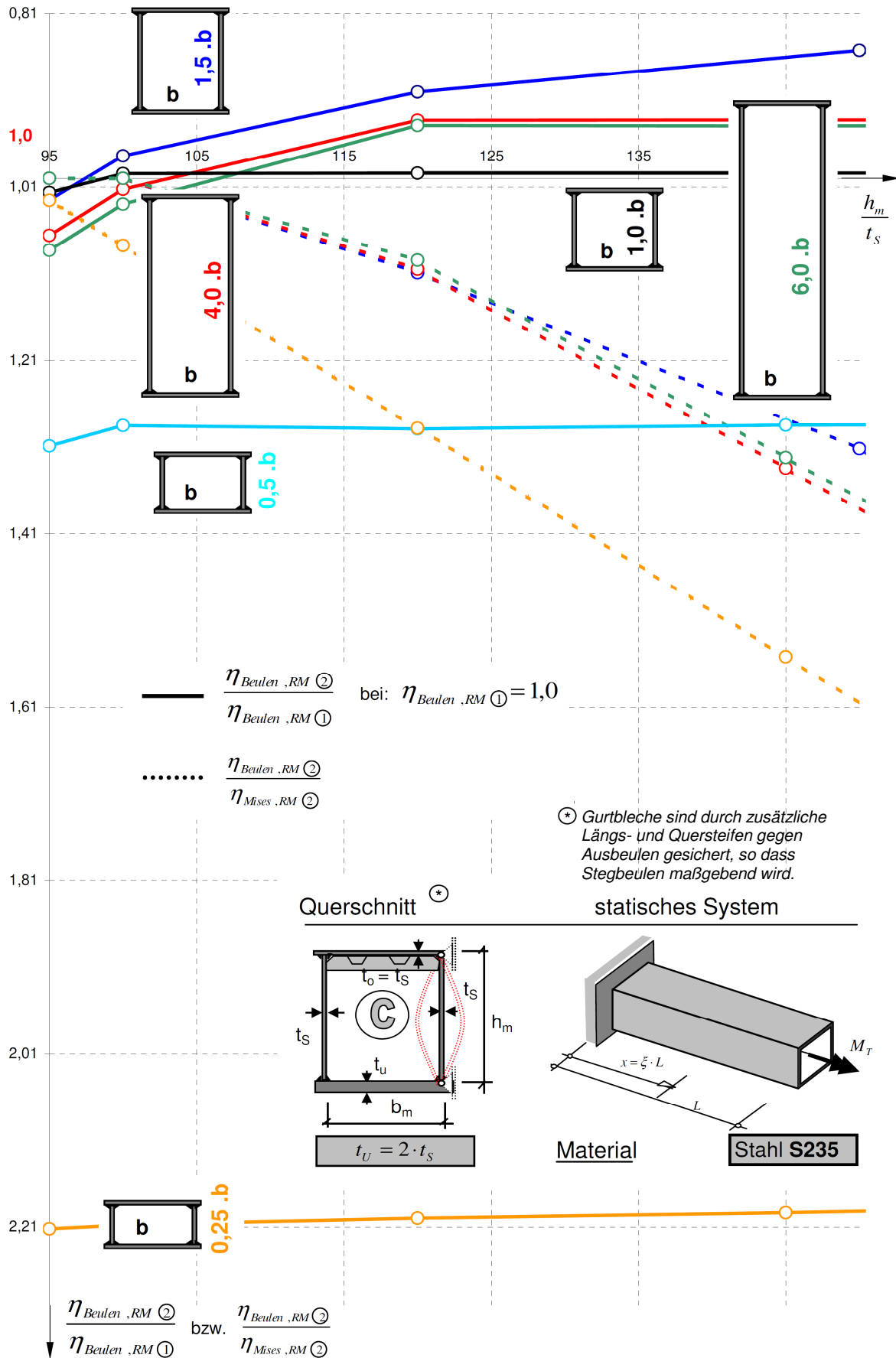


Abb.5-11: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp C ( $t_u=2 t_s$ ) (mit  $\gamma_{M0} = \gamma_{M1} = 1,0$ )

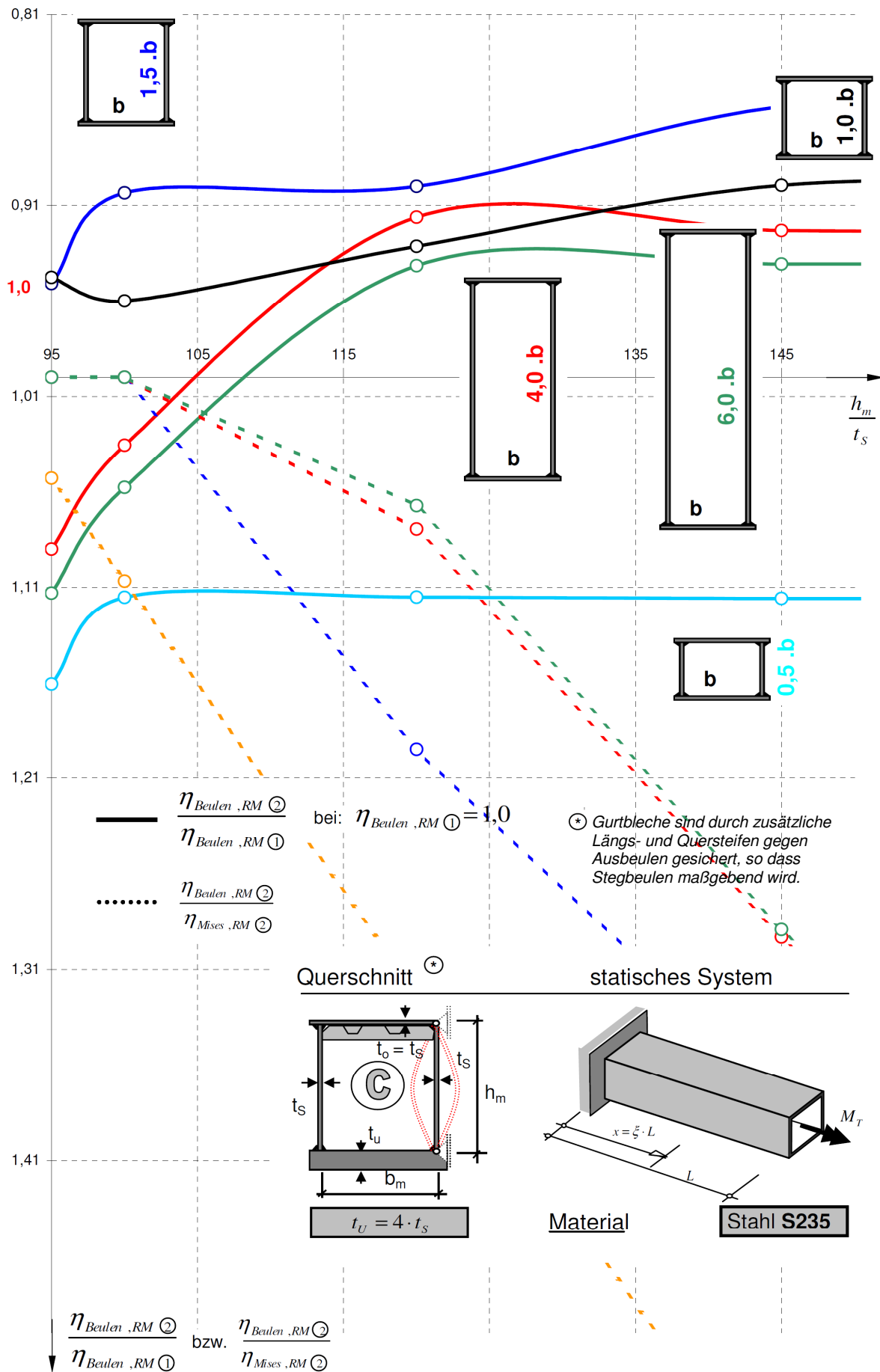


Abb.5-12: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp C ( $t_u=4 \cdot t_s$ ) (mit  $\gamma_{M0} = \gamma_{M1} = 1,0$ )

Bemerkungen zu Abb.5-10 bis Abb.5-12:

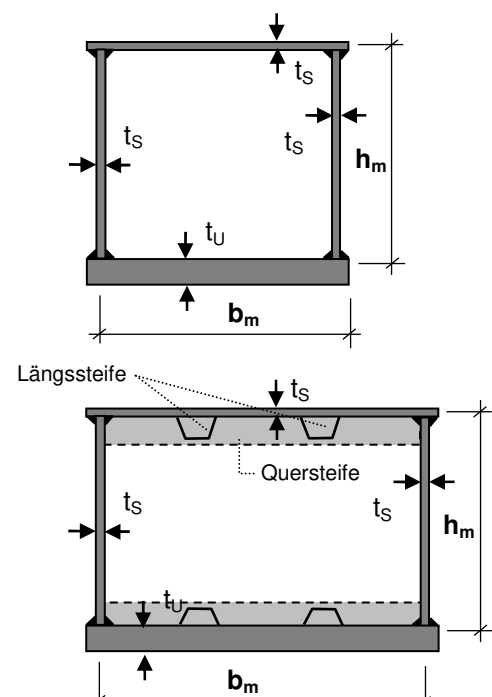
- Bei Querschnitten mit  $h_m/b_m \geq 1,0$  zeigt sich folgendes Resultat:

Auch hier ist, aus gleichen Gründen wie in Abschnitt 5.3.2, der Beulnachweis des Stegbleches nach dem „vereinfachten Rechenmodell“ für beliebige  $h_m/b_m$  – Verhältnisse als „unkritisch“, da auf der sicheren Seite liegend, einzustufen.

- Bei Querschnitten mit  $h_m/b_m < 1,0$  zeigt sich folgendes Resultat:

Mit kleiner werdendem Seitenverhältnis  $h_m/b_m$  ergeben sich nach dem „exakten Rechenmodell“ deutlich höhere Ausnutzungsgrade für Stegbeulen. Dies ist jedoch wieder nur solange bemessungsrelevant, solange auch Stegbeulen maßgebend ist, und nicht der Obergurt vorher ausbeult. Ohne Beulversteifung des Obergurtes wird das Grenzverhältnis  $h_m/b_m$ , bei dem ein vorzeitiges Ausbeulen des Obergurtes eintritt, aufgrund der Wölbschubspannungsverteilung etwas geringer als  $h_m/b_m = 1$  sein. Mit Beulversteifungen des Obergurtes, wird Stegbeulen auch für kleinere  $h_m/b_m$  maßgebend sein.

**Daraus können zusammenfassend folgende „problematische Geometrieverhältnisse“ des Querschnittstyps C abgeleitet werden:**

<p><input type="checkbox"/> Blechstärken: <math>t_U &gt; t_S</math></p> <p><input type="checkbox"/> Seitenverhältnis: <math>\frac{h_m}{b_m} &lt; 1,0</math></p> <p><b>Jedoch nur maßgebend wenn:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>h_m/b_m \approx 1,0</math></li> <li>oder</li> <li>- Obergurt ausreichend gegen Ausbeulen gesichert, sodass Stegbeulen maßgebend wird</li> </ul>	
---	--

## 6 Numerische Detailuntersuchungen für reine Torsionsbeanspruchung $M_T$

### 6.1 Vorbemerkungen

In Abschnitt 5 wurden die Ergebnisse des Beulnachweises eines einseitig wölbbehinderten, torsionsbeanspruchten Kastenträgers unter Berücksichtigung sämtlicher Wölbkrafteffekte, mit den Ergebnissen ohne Ansatz der Wölbspannungen für verschiedene Querschnittsformen verglichen. Dadurch konnten bereits bestimmte Querschnittsgeometrien eingegrenzt werden, bei denen die Größen der Wölbspannungen zu einer deutlichen „Verschärfung“ des Beulnachweises führen.

Für den angesprochenen Vergleich wurden jedoch folgende (vereinfachte) Annahmen getroffen:

- **Berechnungsmodell:** Beulnachweis nach Rechenmodell 1 (Vernachlässigung der Wölbkrafteffekte, alleiniger Ansatz von St. Venant'scher Schubspannung) und Rechenmodell 2 (Miterfassung sämtlicher Wölbspannungen) **jeweils am allseitig gelenkig angenommenen „herausgelösten“ Stegblech.**
- **Berechnungsverfahren:** Beulnachweis für Rechenmodell 1 und Rechenmodell 2 jeweils nach der **Methode der reduzierten Spannungen (gem. EN 1993-1-5, Kap.10)**

Um nun die reale Beultraglast des einseitig wölbbehinderten Kastenträgers, mit jener Traglast des praxistauglicheren, ingenieurmäßigen Modells des allseitig gelenkig gelagerten „herausgelösten“ Stegbleches, ohne Ansatz von Wölbspannungen, vergleichen zu können, wird eine numerische Detailuntersuchung notwendig. Sämtliche numerische Berechnungen werden mit dem Softwarepaket Abaqus durchgeführt. Die Untersuchung beschränkt sich im Wesentlichen auf die in Abschnitt 5 aufgezeigten Querschnittsformen mit den, im Hinblick auf das Beulverhalten, „problematischen Geometrieverhältnissen“.

Ziel dieser numerischen Studie ist es, dem Ingenieur eine Aussage zu liefern, inwieweit es durch die vereinfachte Betrachtung des herausgelösten Stegbleches, ohne Ansatz der tatsächlich auftretenden lokalen Wölbspannungen, zu einer Über- bzw. Unterschätzung der tatsächlichen Beultraglast kommt. Nur wenn die vereinfachte Betrachtungsweise, in der weiteren Folge als „Ingenieurmodell“ bezeichnet, stets zu einem geringeren Traglastniveau als die tatsächliche Beultraglast führt, kann dieses Modell für die Bemessungspraxis bedenkenlos vorgeschlagen werden.

Ergänzend zu der in Abschnitt 5 getroffenen Annahme einer einseitigen Wölbbehinderung, soll die numerische Studie auch auf Kastenträger mit beidseitiger Wölbbehinderung ausgeweitet werden.

## 6.2 Untersuchte Querschnittsformen und Lagerungsfälle

Hinsichtlich der Querschnittstypenbezeichnung wird die Klassifizierung nach Abschnitt 4 übernommen.

Typ A – rechteckiger Kastenquerschnitt mit konstanter Blechstärke

Typ B – rechteckiger Kastenquerschnitt mit beidseitig verstärkten Gurten

Typ C – rechteckiger Kastenquerschnitt mit verstärktem Untergurt

Die im Rahmen der numerischen Detailuntersuchung betrachteten Querschnittsgeometrien sind *Tab.6-1* zu entnehmen. Hinsichtlich des Verhältnisses von Trägerlänge zu Querschnittshöhe werden jeweils die beiden Grenzfälle  $L/h_m = 1$  (sehr enger Querschottabstand) sowie  $L/h_m = 5$  (sehr großer Querschottabstand) untersucht.

Dabei wird nun konservativ unterstellt, dass am betrachteten Stab der Länge  $L$  an einem Stabende eine vollständige Wölbbehinderung vorliegt. Am anderen Stabende erfolgt ebenfalls eine Grenzfallbetrachtung, einerseits freies Stabende und andererseits vollständige Wölbeinspannung.



Lagerung		einseitig wölbbehindert		beidseitig wölbbehindert	
		$L/h_m$	1,0	5,0	1,0
Querschnittsgeometrie	<b>Typ A1</b>  $\frac{h_m}{b} = 2$	siehe Diagramm <b>Abb.6-7</b>	siehe Diagramm <b>Abb.6-8</b>	siehe Diagramm <b>Abb.6-21</b>	siehe Diagramm <b>Abb.6-22</b>
	<b>Typ A2</b>  $\frac{h_m}{b} = 6$	/	siehe Diagramm <b>Abb.6-9</b>	/	siehe Diagramm <b>Abb.6-23</b>
	<b>Typ B1</b>  $\frac{h_m}{b} = 1$	siehe Diagramm <b>Abb.6-10</b>	siehe Diagramm <b>Abb.6-11</b>	siehe Diagramm <b>Abb.6-24</b>	siehe Diagramm <b>Abb.6-25</b>

Tab.6-1: Übersicht über die untersuchten Querschnittsgeometrien, Trägerlängen und Lagerungsverhältnisse sowie Ergebnisdarstellungen

### 6.3 Numerisches Berechnungsmodell

Die Berechnungsmodelle für die in Abaqus durchgeführte numerische Simulation können wie folgt dargestellt werden:

#### 6.3.1 Berechnungsmodell - „Reales Modell“

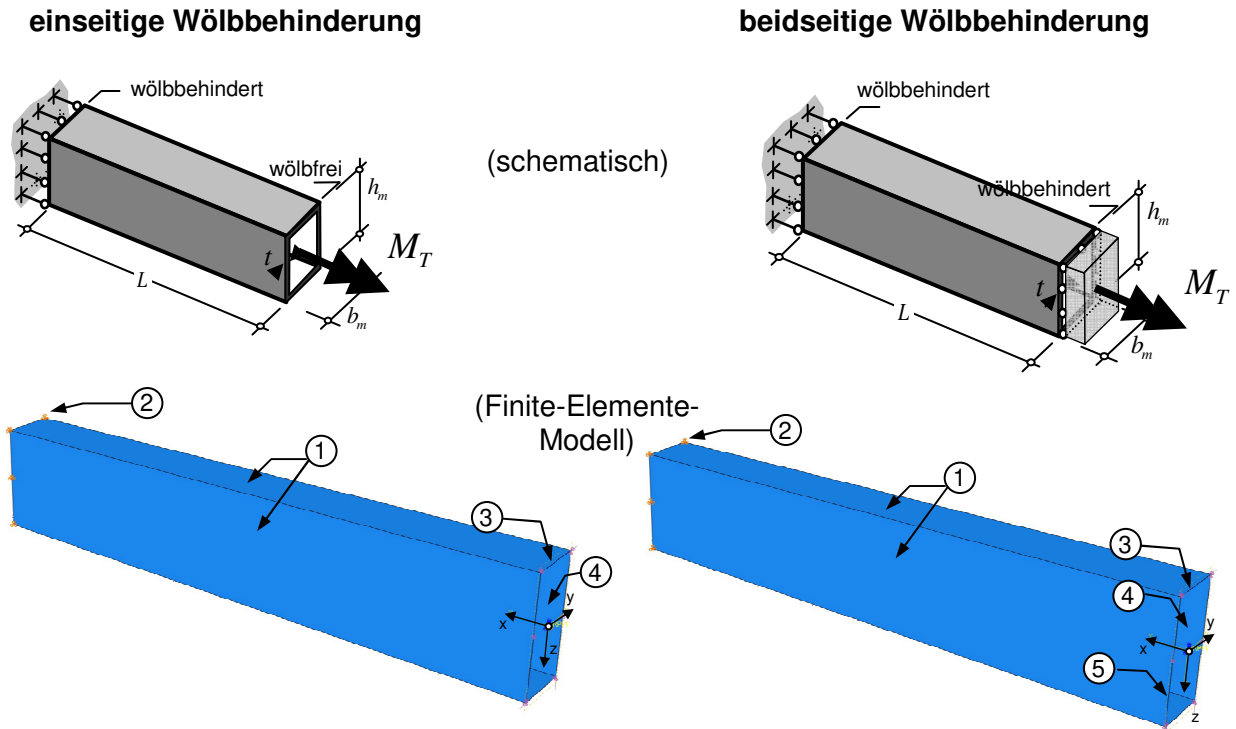
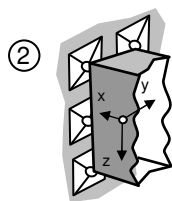


Abb.6-1: Schematische Darstellung bzw. FE-Modell des „Realen Modells“

- ① **2D-Schalenelemente** mit linearen quadratischen Finiten Elementen (S4R)

- FE-Elementgröße:  $a \approx h_m/100$



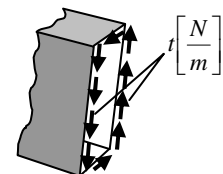
Wölbbehinderte Torsionslagerung - gesperrte Freiheitsgrade (bez. auf globales KS) durch **gelenkige Linienlagerung entlang des „Schalenrandes“** in jedem Elementknoten.

$u_x$	$u_y$	$u_z$
●	●	●

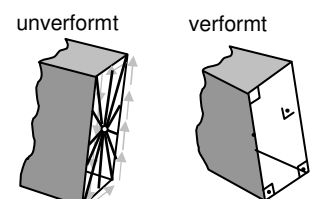
- ③ **Krafteinleitung** des Torsionsmomentes **durch Kantenschubbelastung**

Aufgrund des im Querschnitt konstanten Schubflusses zufolge  $M_T$ , aufgrund der Wirkung der nicht abgebildeten Querschotte ergibt sich sowohl für die Steg-, als auch für die Gurtbleche dieselbe Randschubbelastung:

$$t \left[ \frac{N}{m} \right] = \frac{M_T [Nm]}{2 \cdot b_m [m] \cdot h_m [m]}$$



- ④ **Kinematische Kopplung der Querschnittspunkte des Lasteinleitungsquerschnitts**, um die Wirkung des Querschotts abzubilden. Dadurch bleibt die rechteckige Querschnittsform des Lasteinleitungsquerschnitts stets erhalten.



⑤ **Sperrung der Längsverschieblichkeit (Wölbbehinderung)**  
des Lasteinleitungsquerschnittes

- gesperrte Freiheitsgrade (bez. auf globales KS) in jedem Elementknoten

$u_x$	$u_y$	$u_z$
●		

**6.3.2 Berechnungsmodell - „Ingenieurmodell“**

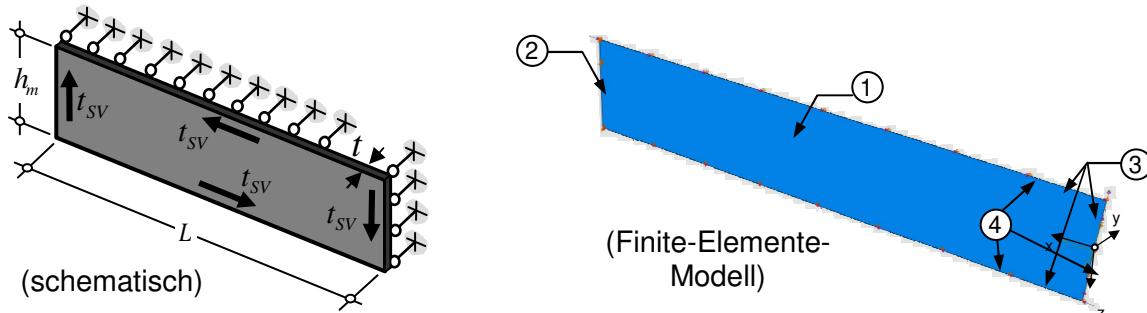


Abb.6-2: Schematische Darstellung bzw. FE-Modell des „Ingenieurmodells“

- ① **2D-Schalenelemente** mit linearen quadratischen Finiten Elementen (S4R)  
- FE-Elementgröße:  $a \approx h_m/100$

- ② „Linker Querrand“ mit **gelenkiger Linienlagerung** (in jedem Elementknoten)

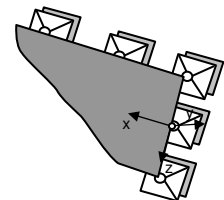
- gesperrte Freiheitsgrade

$u_x$	$u_y$	$u_z$
●	●	●

- ③ **Längsränder und „rechter Querrand“** mit gelenkiger längs- und querverschieblicher Linienlagerung (keine Membranlagerung)

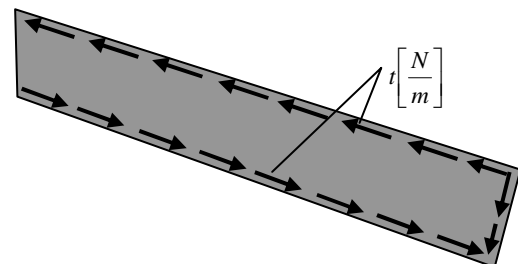
- gesperrte Freiheitsgrade

$u_x$	$u_y$	$u_z$
	●	



- ④ **Aufbringung des** zufolge  $M_T$  erzeugten **St.Vernant'schen Schubflusses als Kantenschubbelastung entlang der Blechränder (ausgenommen linker Querrand)**

$$t \left[ \frac{N}{m} \right] = t_{SV} \left[ \frac{N}{m} \right] = \frac{M_T [Nm]}{2 \cdot b_m [m] \cdot h_m [m]}$$

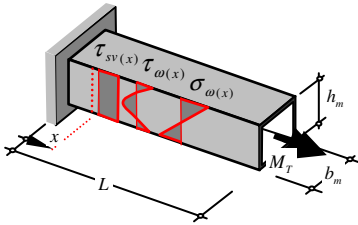
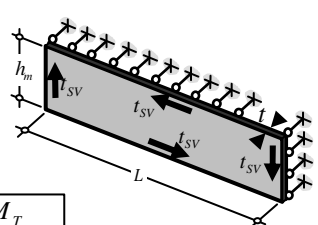
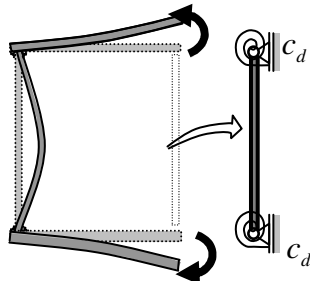
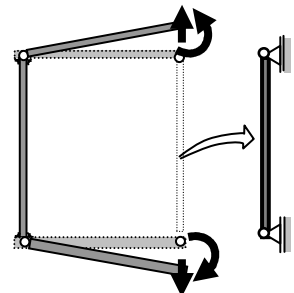
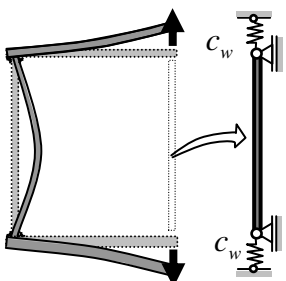
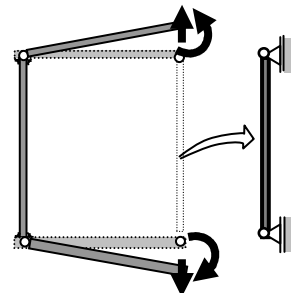


**6.4 Modellvergleich „Reales Modell“ – „Ingenieurmodell“**

Im „Realen Modell“ wird der **Kastenträger als vollständiges 3D-Schalenmodell** modelliert. Das Torsionsmoment  $M_T$  wird als **Kantenschubbelastung** am Stabende aufgebracht. An den Stellen der Wölbbehinderung entstehen **Wölbnormal- und Wölb Schubspannungen**, die Einfluss auf die Beultraglast haben. Desweiteren können auch die korrekten Abklinglängen für die einzelnen Spannungskomponenten richtig wiedergegeben werden. (Vgl. Abschnitt 4)

Im „**Ingenieurmodell**“ wird dagegen nur der herausgelöste Steg (bzw. der am höchsten beulgefährdete Querschnittsteil) als **2D-Schalenmodell** modelliert. Als konservative Vereinfachung gegenüber dem „Realen Modell“ wird eine gelenkige Lagerung der Blechfeldlängsränder unterstellt. Die **Einspannwirkung zwischen Steg- und Gurtblech** wird also **zur Gänze vernachlässigt**. Auch die teilweise Behinderung der Querverschieblichkeit der Stegblechlängsränder wird im „Ingenieurmodell“ außer Acht gelassen. Als **Belastung** wird **entlang der Stegblechränder lediglich der St.Venant'sche Schubfluss** aufgebracht. (Anm.: somit nur Gleichgewichtsbedingung mit der globalen Torsionsbelastung gegeben) Dadurch herrscht im gesamten Blechfeld ein reiner Schubspannungszustand mit konstanter Schubspannung  $\tau_{SV}$ . **Wölbspannungen an den Stellen der Wölbbehinderung sowie im angrenzende Bereich** sind somit **nicht in der Beanspruchung für die Beultraglastermittlung enthalten**.

Der Übergang vom „**Realen Modell**“ zum „**Ingenieurmodell**“ kann neben der herausgelösten, zweidimensionalen Betrachtungsweise zusammenfassend also durch folgende drei Vereinfachungen beschrieben werden:

	„Reales Modell“	„Ingenieurmodell“
(A) Vernachlässigung der Wölbspannungen		 $t_{SV} = \frac{M_T}{2 \cdot b_m \cdot h_m}$
(B) Vernachlässigung der Teileinspannung der Stegblechlängsränder		 $c_d = 0$
(C) Vernachlässigung der teilweisen Behinderung der Querverschieblichkeit der Steglängsränder		 $c_w = 0$

Tab.6-2: Vereinfachungen des „Ingenieurmodells“ zum „Realen Modell“

Um die entsprechenden Einflüsse dieser Vereinfachungen beim Übergang vom „Realen Modell“ zum „Ingenieurmodell“ auf die errechneten Traglasten quantifizieren zu können, wird in Abschnitt 6.6.7 das „Reale Modell“ schrittweise solange durch die in Tab.6-2 beschriebenen Vereinfachungen modifiziert und daraus die entsprechenden Traglasten errechnet, bis daraus ein zum „Ingenieurmodell“ äquivalentes Modell entsteht.

## 6.5 Berechnungsverfahren für die Beultraglastberechnung

### 6.5.1 Berechnungsverfahren für das „Reale Modell“

Die **Beultraglast** wird mit Hilfe der in EN 1993-1-5, Anhang C verankerten **FEM-basierten Berechnungsmethode** ermittelt.

Entsprechend EN 1993-1-5 Tabelle C.1 gilt hinsichtlich der Berechnungsannahmen:

Nr	Werkstoffverhalten	Strukturverhalten	Imperfektionen, siehe C.5	Anwendungsbeispiel
1	linear	linear	Nein	elastische mittragende Breite, elastische Tragfähigkeit
2	nichtlinear	linear	Nein	plastische Tragfähigkeit im Grenzzustand der Tragfähigkeit
3	linear	nichtlinear	Nein	kritische Plattenbeullast
4	linear	nichtlinear	Ja	elastische Tragfähigkeit unter Berücksichtigung von Plattenbeulen
5	nichtlinear	nichtlinear	Ja	elastisch-plastische Tragfähigkeit im Grenzzustand der Tragfähigkeit

Tab.6-3: Quelle [8]: Tabelle C.1 – Annahmen für Berechnungen mit FEM

Um die elastisch-plastische Beultragfähigkeit bei nichtlinearem Werkstoff- und Strukturverhalten im Grenzzustand der Tragfähigkeit zu erhalten, sind folgende Annahmen zu treffen:

#### Werkstoffverhalten:

- Der Traglastberechnung ist ein nichtlineares Werkstoffverhalten zugrunde zu legen. Im einfachsten Fall wird dies in Form eines **elastisch - ideal plastischen Materialmodells** gemäß EN 1993-1-5 Bild C.2 realisiert.

Eine entsprechende Wiederverfestigung, nach Eintritt des Fließens, wird dabei außer Acht gelassen.

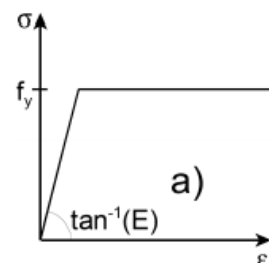


Abb.6-3: Quelle [8]: Ausschnitt aus Bild C.2 – Modellierung des Werkstoffverhaltens

#### Strukturverhalten:

- Neben dem nichtlinearen Materialverhalten für die Traglastermittlung, ist der Struktur **geometrische Nichtlinearität** zugrunde zu legen. Dies ist durch die Wahl der FE-Berechnungsoptionen gegeben.

### Imperfektionen:

- Laut EN 1993-1-5 C.5 (2) dürfen **geometrische Ersatzimperfektionen** angesetzt werden, wenn keine genaueren getrennten Ansätze von geometrischen und strukturellen Imperfektionen möglich sind.
- Die **Imperfektionsfigur** wird **entsprechend der 1.Eigenform** des Tragwerks bzw. untersuchten Stabteils **unter Torsionsbeanspruchung** angesetzt. Dazu ist vor der eigentlichen geometrisch und materiell nichtlinearen Traglastberechnung (GMNIA – geometric and material nonlinear analysis with imperfections) eine Eigenwertberechnung (LBA - load buckling analysis) durchzuführen. Diese Eigenform wird als Vorverformungszustand bei der Traglastberechnung, skaliert mit der in *Tab.6-4* angegebenen Imperfektionsamplitude, angesetzt.
- Die **Amplitude der anzusetzenden Imperfektionsfigur** wird in EN 1993-1-5, Tabelle C.2 angegeben:

Imperfektionsansatz	Bauteil	Form	Amplitude
global	Bauteil der Länge $l$	Bogen	siehe EN 1993-1-1, Tabelle 5.1
global	Längssteife der Länge $a$	Bogen	$\min (a/400, b/400)$
lokal	Teilfeld oder Einzelfeld mit kurzer Länge $a$ oder $b$	Beulform	$\min (a/200, b/200)$
lokal	Verdrehung von Steifen und Flanschen	Bogen	$1/50$

Tab.6-4: Quelle [8]: Tabelle C.2 – geometrische Ersatzimperfektionen

Da es sich hier um einen lokalen Imperfektionsansatz handelt, wird als Amplitude das Minimum aus  $a/200$  bzw.  $b/200$  gewählt. Gemäß den Bezeichnungen in Bild C.1 entspricht  $a$  der Beulfeldlänge (hier der Trägerlänge  $L$ ) bzw.  $b$  der Beulfeldbreite (hier der Trägerhöhe  $h_m$ ).

Um die Auswirkungen der Imperfektionen zu erkennen, erfolgt zusätzlich eine Berechnung mit  $a/400$  bzw.  $b/400$ .

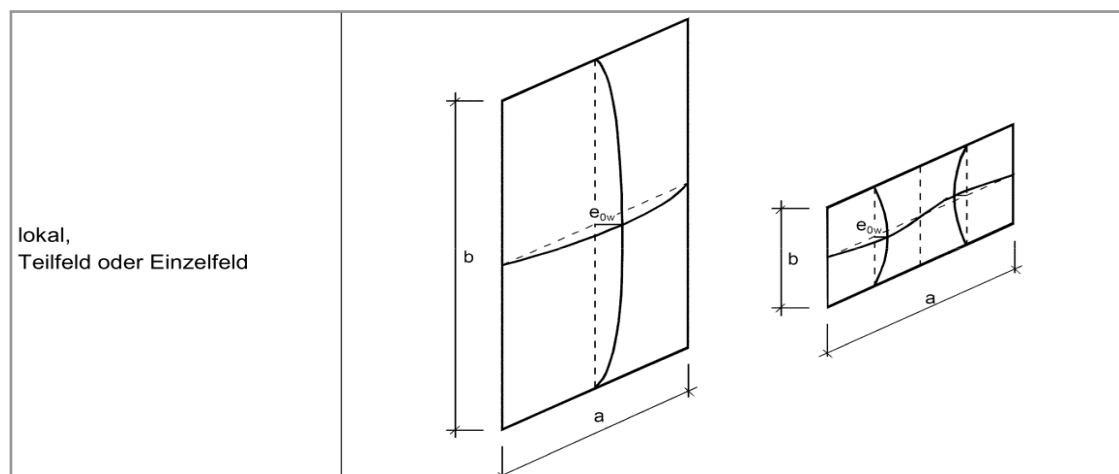


Abb.6-4: Quelle [8]: Bild C.1 – Modellierung geometrischer Ersatzimperfektionen

Aufgrund der im Rahmen der numerischen Untersuchung ausschließlichen Betrachtung von Verhältnissen zwischen  $L/h_m = 1$  und  $L/h_m = 5$ , wird für die **Festlegung der Imperfektionsamplitude** stets das Kriterium  $b/200 = h_m/200$  maßgebend.

Die geometrisch nichtlineare Traglastberechnung unter Ansatz der oben beschriebenen Imperfektionen liefert die **Beultraglast**  $M_{T,Real}$ .

### 6.5.2 Berechnungsverfahren für das „Ingenieurmodell“

Die Beultraglast zufolge der FEM-basierten Berechnungsmethode beruht auf denselben, bereits oben erwähnten Berechnungsannahmen – inklusive Imperfektionsannahmen- und wird in weiterer Folge mit  $M_{T,Ing,FE}$  bezeichnet.

Da es sich hier um ein ebenes Modell handelt, kann die **Beultraglast** neben der bereits zuvor beschriebenen FEM-basierten Berechnungsmethode **auch über** die ebenfalls in EN 1993-1-5 verankerten **Methode der reduzierten Spannung** berechnet werden.

Die Beultraglast, die sich aus dem Beulnachweis nach EN 1993-1-5, Kapitel 10 (**Methode der reduzierten Spannungen**) ergibt, wird als  $M_{T,Ing,BN}$  bezeichnet. Dafür sind folgende Berechnungsschritte notwendig:

- Beulwert für alleinige Schubbeanspruchung:

$$k_\tau = 5,34 + \frac{4}{\alpha^2} \quad (\alpha \text{ stellt das Geometrieverhältnis von Beulfeldlänge zu Beulfeldbreite dar. Im Fall des betrachteten Stegbleches entspricht dies somit } L/h_m)$$

- Ideale Beulspannung

$$\tau_{cr} = k_\tau \cdot \sigma_E \quad (\sigma_E \dots \text{Eulersche Bezugsspannung } \sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot E}{12(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{t}{h_m}\right)^2)$$

- Plattenschlankheitsgrad für Schubbeanspruchung  $\bar{\lambda}_w = \sqrt{\frac{f_y}{\tau_{cr} \cdot \sqrt{3}}}$

- Abminderungsbeiwert für Schubbeulen gemäß der in EN 1993-1-5 zugrunde gelegten Winterkurve (in der Stegebene verformbare Auflagersteife)

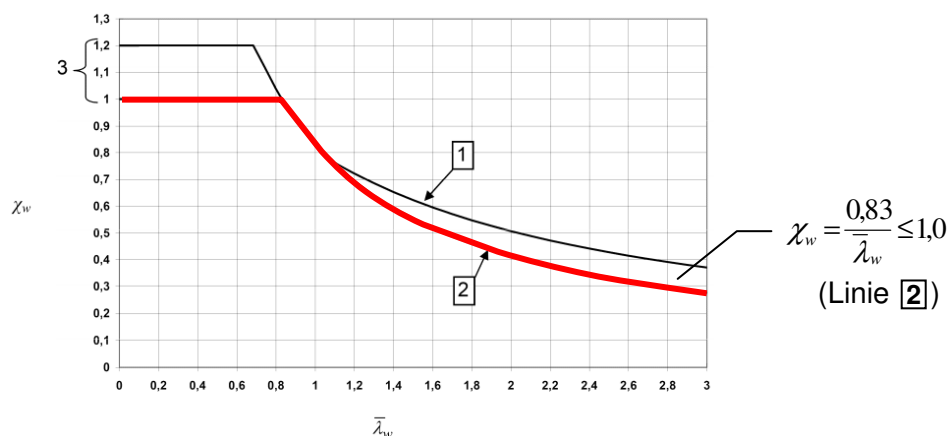


Abb.6-5: Quelle [8]: Bild 5.2 – Beitrag des Steges  $\chi$  zur Schubbeanspruchbarkeit

- Rückrechnung der Beultraglast  $M_{T,Ing,BN}$  aus dem Grenzzustand des Beulnachweises

- max. aufnehmbare Kantenschublast  $t_{SV,Ing,BN} = \chi_w \cdot \frac{f_y}{\sqrt{3}} \cdot t$

- Daraus rückgerechnetes aufnehmbares Torsionsmoment am Gesamtquerschnitt

$$M_{T,Ing,BN} = 2 \cdot h_m \cdot b_m \cdot t_{SV,Ing,BN}$$

## 6.6 Beultraglastkurven nach dem „Realen Modell“ und dem „Ingenieurmodell“ für einseitige Wölbbehinderung

### 6.6.1 Vorbemerkungen zu den Diagrammen in Abschnitt 6.6.2 bis 6.6.6

Die in den Diagrammen *Abb.6-7* bis *Abb.6-11* dargestellten Traglastkurven wurden gemäß der zuvor beschriebenen Berechnungsmodelle bzw. Berechnungsverfahren generiert. In nachfolgender Tabelle soll dies nochmals übersichtlich zusammengefasst werden.

In allen Ergebnisdarstellungen erfolgt eine bezogene Darstellung der Torsionstraglast auf die reine Querschnittstragfähigkeit unter alleiniger St. Venant'scher Torsion:

$$M_{T,ref} = 2 \cdot h_m \cdot b_m \cdot \frac{f_y}{\sqrt{3}} \cdot t_{Steg} \quad (Gl.6-1)$$

Alle Systeme werden für Stegslankheiten von  $\frac{h_m}{t} = 40, 50, 60, \dots, 180, 190, 200$  untersucht.

Bei der praktischen Umsetzung der Parameterstudie wurde dabei stets von einer konstanten Querschnittshöhe  $h_m = 1000\text{mm}$  ausgegangen, und die Blechstärke  $t$  entsprechend der Stegslankheit angepasst.



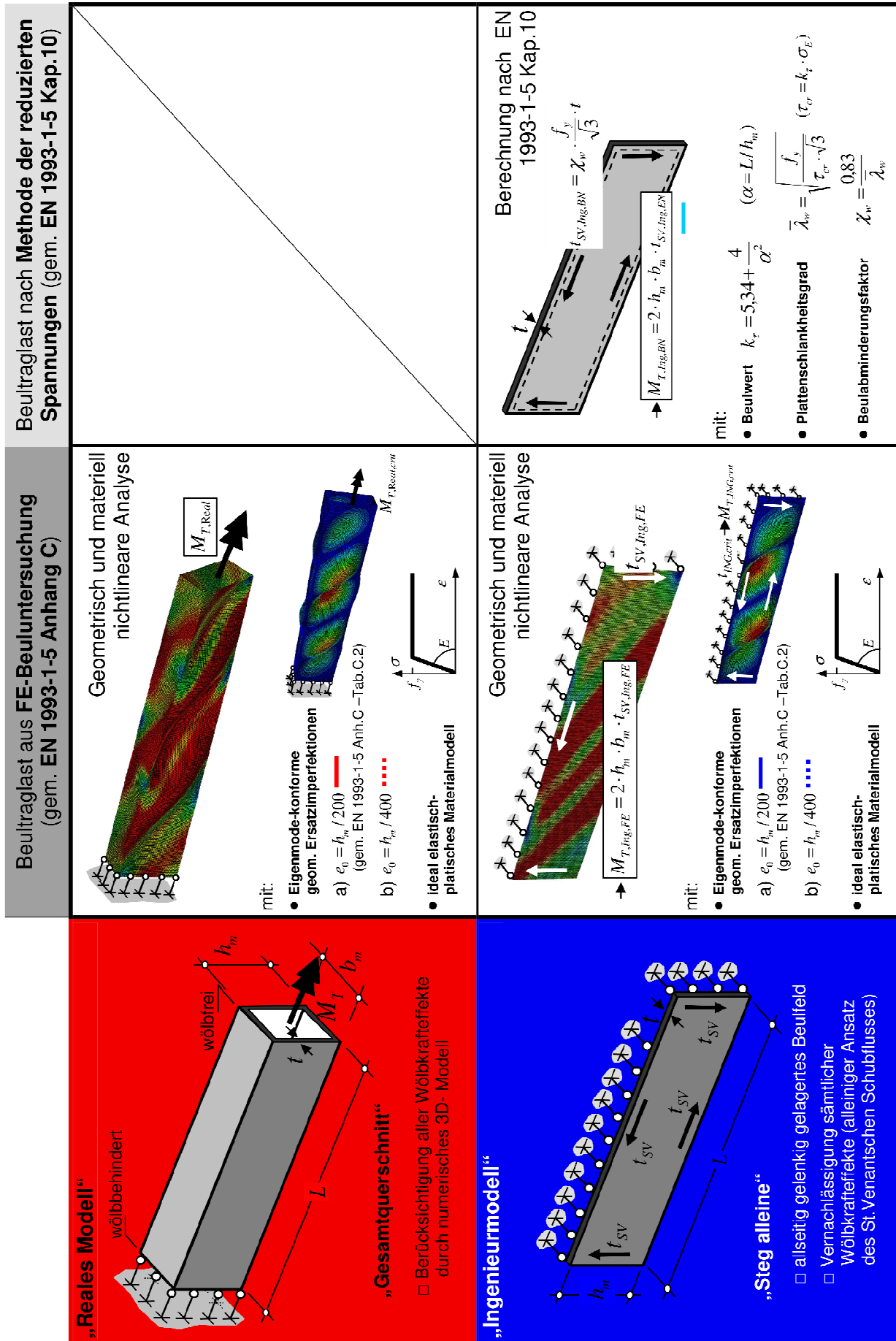


Abb.6-6: Übersicht der Traglastkurven für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)

### 6.6.2 Querschnittstyp A1 - $L/h_m=1,0$ – einseitig wölbbekindert

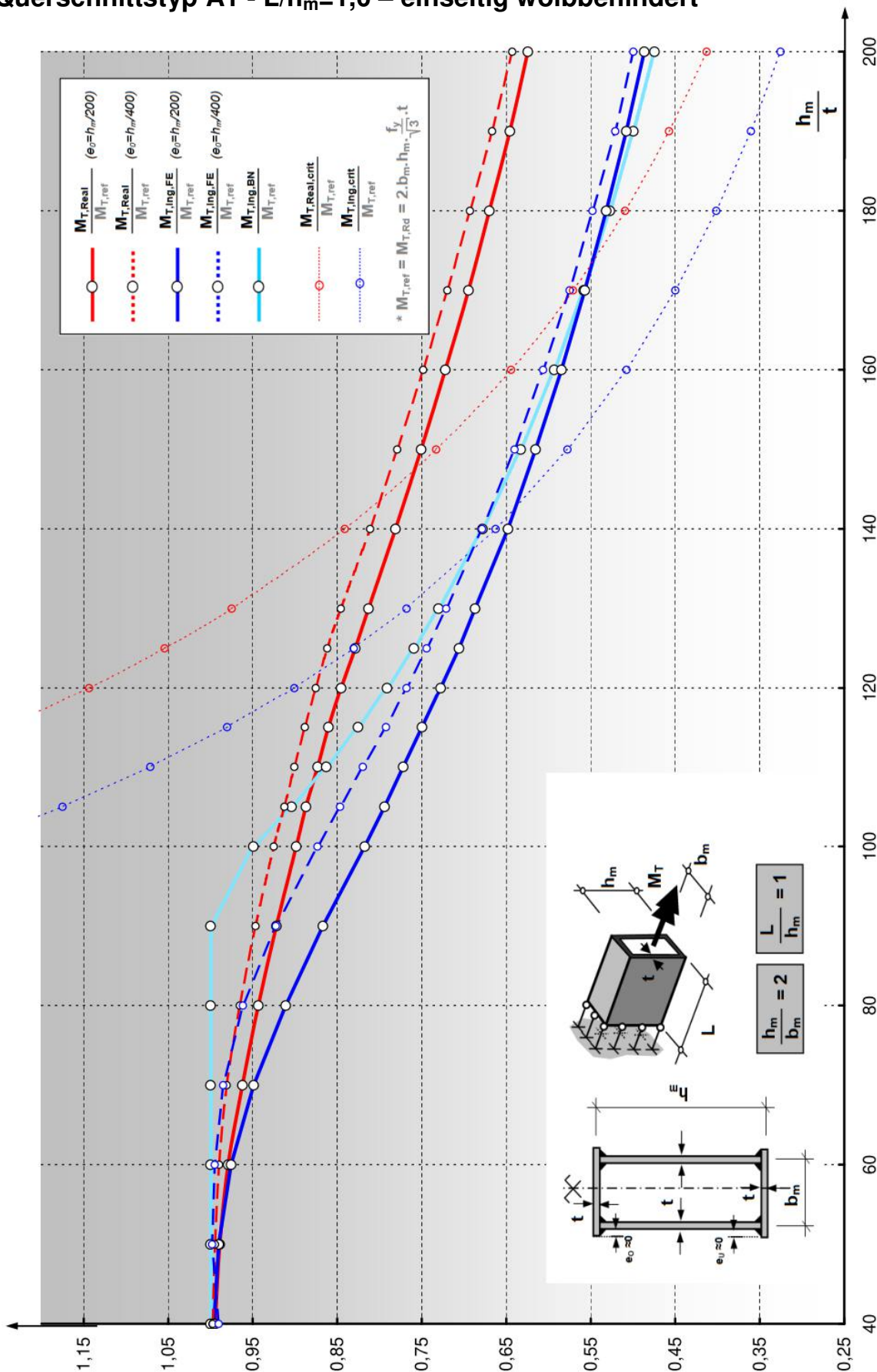


Abb.6-7: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=1,0$ ) für einseitige Wölbbekinderung ( $M_T$  alleine)

### 6.6.3 Querschnittstyp A1 - $L/h_m=5,0$ – einseitig wölbbehindert

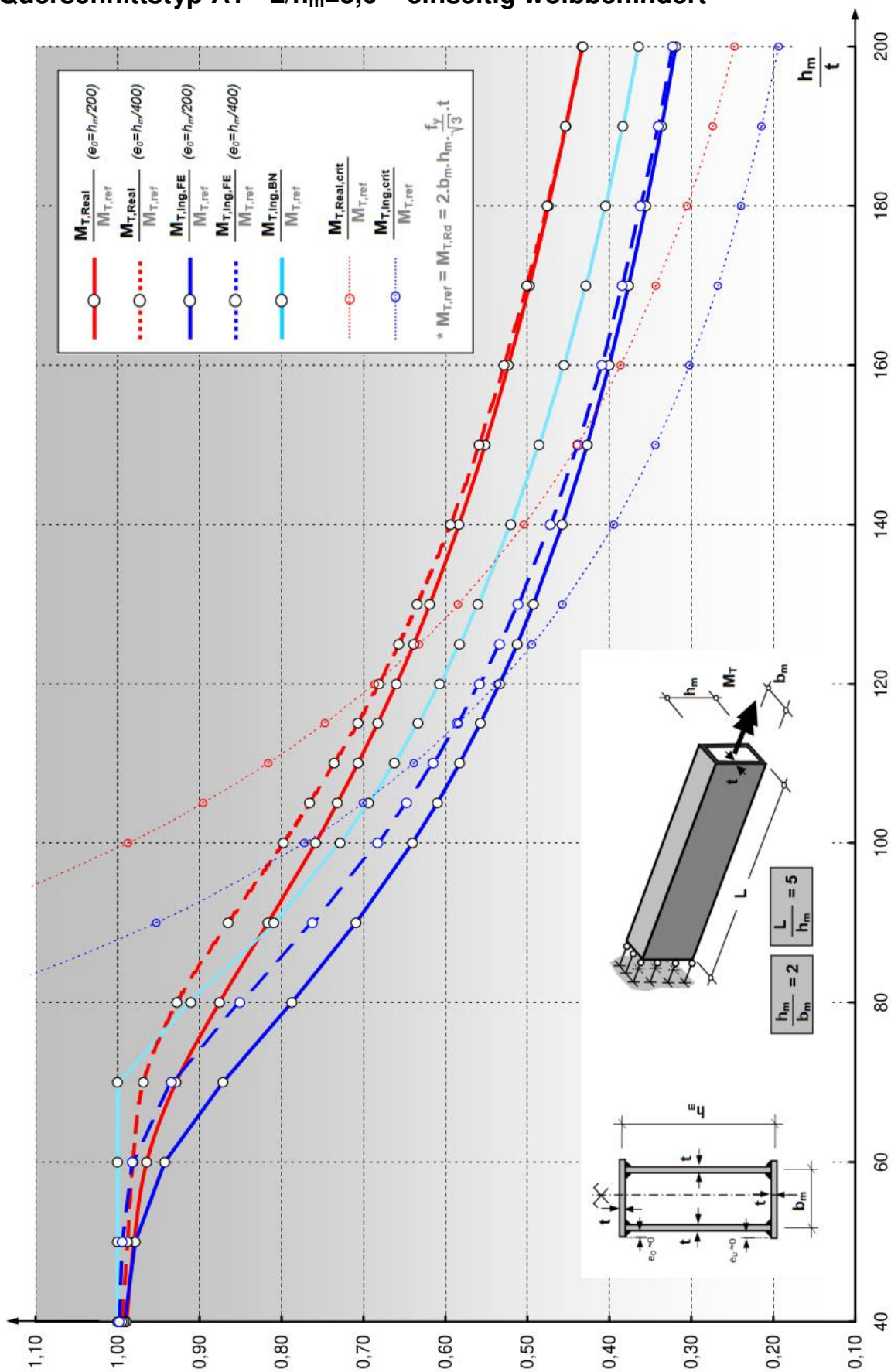


Abb.6-8: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=5,0$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)



### 6.6.4 Querschnittstyp A2 - $L/h_m=5,0$ – einseitig wölbbekindert

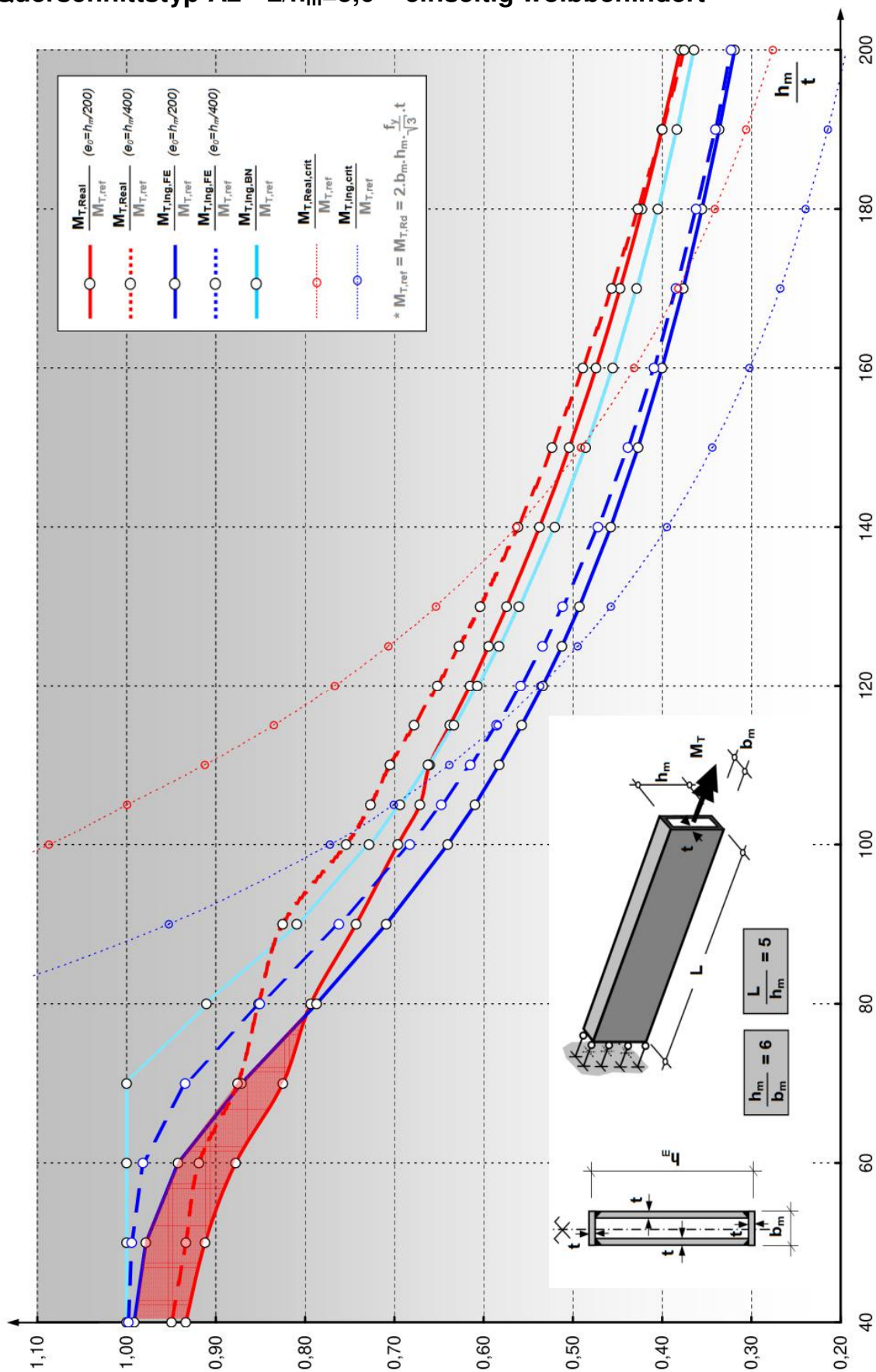


Abb.6-9: Traglastkurven - Querschnittstyp A2 ( $L/h_m=5,0$ ) für einseitige Wölbbekinderung ( $M_T$  alleine)

### 6.6.5 Querschnittstyp B1 - $L/h_m=1,0$ – einseitig wölbbehindert

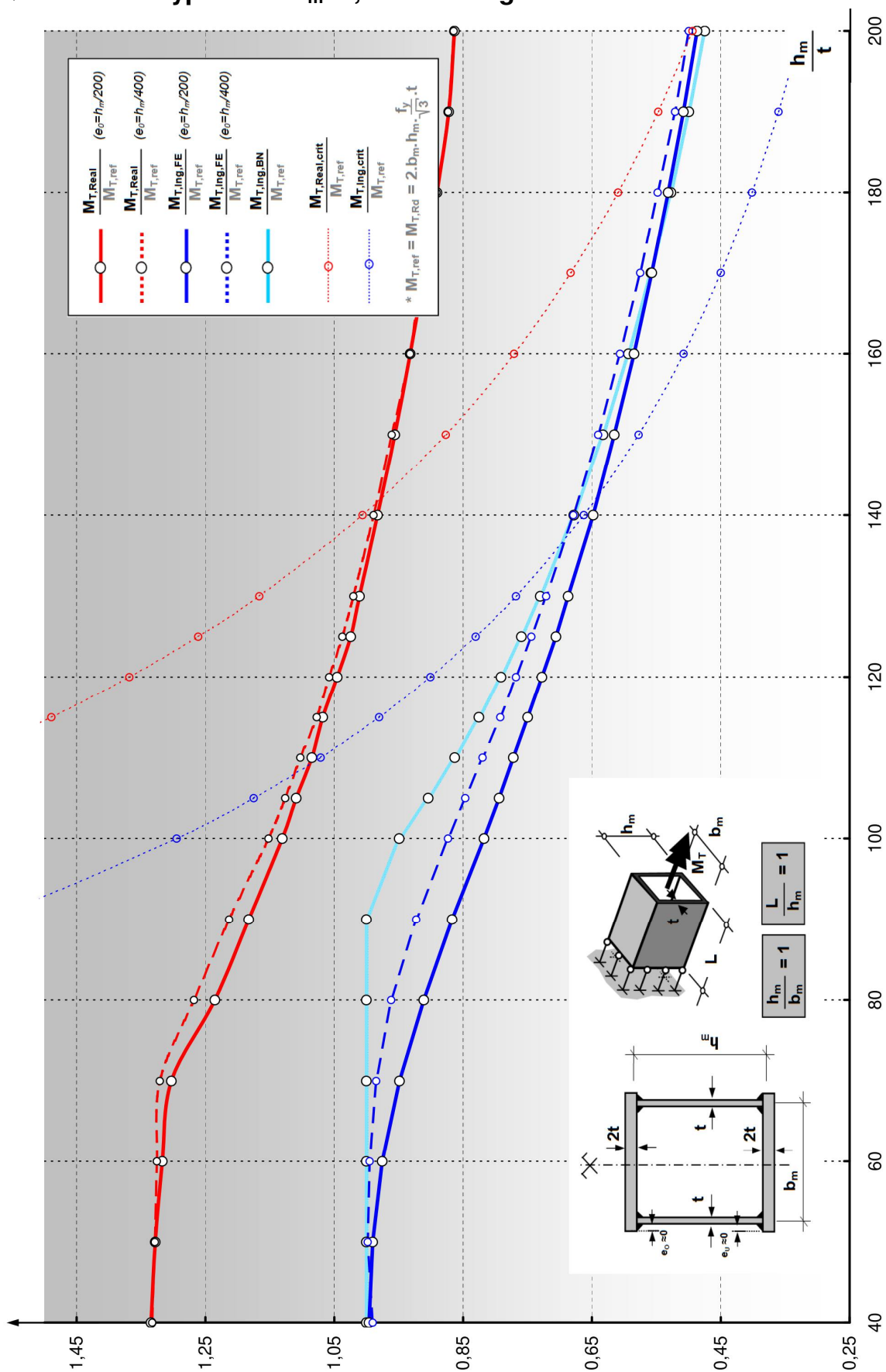


Abb.6-10: Traglastkurven - Querschnittstyp B1 ( $L/h_m = 1,0$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)

### 6.6.6 Querschnittstyp B1 - $L/h_m=5,0$ – einseitig wölbbehindert

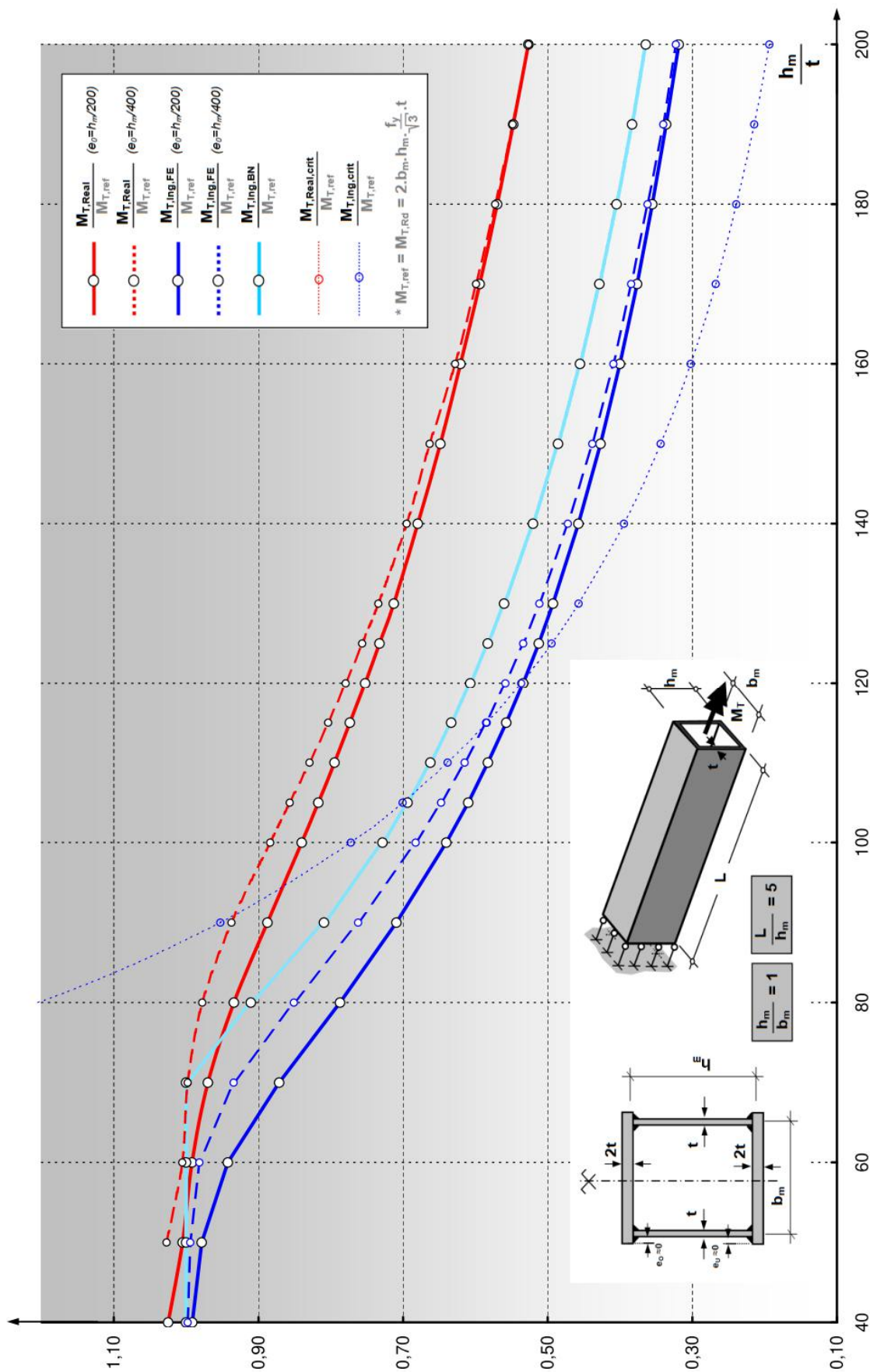


Abb.6-11: Traglastkurven - Querschnittstyp B1 ( $L/h_m = 5,0$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)

### 6.6.7 Vergleich der bezogenen Beultraglasten $M_{T,Real} / M_{T,ref}$ und $M_{T,Ing,FE} / M_{T,ref}$

Die bezogenen Beultraglasten  $M_{T,Real} / M_{T,ref}$  (rote Linien) und  $M_{T,Ing,FE} / M_{T,ref}$  (blaue Linien) werden einheitlich mit der FEM-basierten Berechnungsmethode ermittelt. Nur so wird ein direkter „Modellvergleich“ im Hinblick auf die Beultragfähigkeit unter Ausschaltung der Einflüsse zufolge der Berechnungsmethode möglich.

Bis auf die Ausnahme des Querschnittstyps A2, mit der „extremen“ Querschnittsgeometrie  $h_m/b=6$ , zeigen sich in den *Abb.6-7* bis *Abb.6-11* am „Ingenieurmodell“ stets kleinere Beultraglasten als am „Realen Modell“. Für den Ingenieur ist dies zunächst eine positive Nachricht. Durch die Anwendung des „Ingenieurmodells“ wird die reale, tatsächliche Beultragfähigkeit unterschätzt. Die Auslegung des Bauteils nach der Beultraglast  $M_{T,Ing,FE}$  ist somit als konservativ einzustufen.

Hinsichtlich der Querschnittsform ist diese Traglastunterschätzung seitens des „Ingenieurmodells“ beim Kastenträger mit beidseitig verstärkten Gurten (siehe *Abb.6-10* und *Abb.6-11*) am ausgeprägtesten. Dies lässt sich aufgrund der im Rahmen des „Ingenieurmodells“ vernachlässigten erhöhten Einspannwirkung zwischen Steglängsrand und Gurtlängsrand begründen.

Weiters zeigt sich eine deutliche Schlankheitsabhängigkeit der Traglastdifferenzen zwischen  $M_{T,Real}$  und  $M_{T,Ing,FE}$ . Für kleine Schlankheitsgrade  $h_m/t$ , bei denen die Beulverformungen im Traglastzustand gering bleiben, liefern beide Berechnungsmodelle annähernd gleich hohe Traglasten. Erst mit steigender Beulgefährdung, bei größerem  $h_m/t$ , bilden sich die zuvor angesprochenen größeren Traglastdifferenzen aus.

Bei allen untersuchten Querschnittsformen zeigt sich zudem ein deutlicher Einfluss der Stablänge. Je größer die bezogene Stablänge  $L/h_m$  gewählt wird, desto näher liegt die Beultragfähigkeit des „Ingenieurmodells“ bei der realen Tragfähigkeit, wie z.B. ein Vergleich von *Abb.6-10* mit *Abb.6-11* verdeutlicht. Dies scheint leicht erklärbar, da, wie in Abschnitt *Abb.4-2* gezeigt, „gedrungene Stäbe“ mit  $L/h < 5$  ein deutlich langsames Abklingverhalten der Wölbschnittgrößen und somit auch der Wölbspennungen zeigen. Aufgrund dieser Tatsache führt die Vernachlässigung der Wölbnormal- und Wölbschubspannungen für lange „schlanke“ Stäbe (mit  $L/h_m > 20$  in Abschnitt 4.2), zu keinem großen Einfluss in der Beultraglast. Die Traglastdifferenzen sind in diesen Fällen nahezu ausschließlich in der Vernachlässigung der Einspannwirkung zwischen Steg- und Gurtblech zu suchen. Dies ist nun auch für  $L/h_m=5$  schon erkennbar.

Ein Vergleich zwischen den Traglastkurven  $M_{T,Real} / M_{T,ref}$  bzw.  $M_{T,Ing,FE} / M_{T,ref}$  und den idealen Verzweigungslastkurven  $M_{T,Real,crit} / M_{T,ref}$  bzw.  $M_{T,Ing,crit} / M_{T,ref}$  zeigt das mit zunehmender Schlankheit stärker ausgeprägte überkritische Beultragverhalten.

Um eine Aussage über den Einfluss der Imperfektionsannahme treffen zu können, ist in den Diagrammen *Abb.6-7* bis *Abb.6-11* die Beultraglast, neben der Eurocode-gemäßen

Imperfektionsamplitude von  $h_m/200$ , auch für eine kleinere Imperfektionsamplitude von  $h_m/400$  ausgewertet. Generell lässt sich der, mit zunehmender Beulschlankeit, erwartungsgemäße steigende Einfluss der Imperfektionsannahme, unabhängig von Querschnittsform und Stablänge, erkennen.

Wie in den Diagrammen *Abb.6-7* bis *Abb.6-11* ersichtlich, reagiert das „Ingenieurmodell“ dabei sensibler auf die Größe der angesetzten Imperfektion. Dies ist vermutlich auf das nicht vorhandene Umlagerungsvermögen zwischen Steg- und Gurtblech zurückzuführen.

Um eine Quantifizierung der Einflüsse auf die Traglastdifferenz zwischen  $M_{T,Real}$  und  $M_{T,Ing,FE}$  zu ermöglichen, werden die am „Ingenieurmodell“ getroffenen Vereinfachungen (siehe *Tab.6-2*) schrittweise in das reale Modell eingearbeitet, entsprechend modelliert, sowie die dafür zugehörigen Traglasten ermittelt.

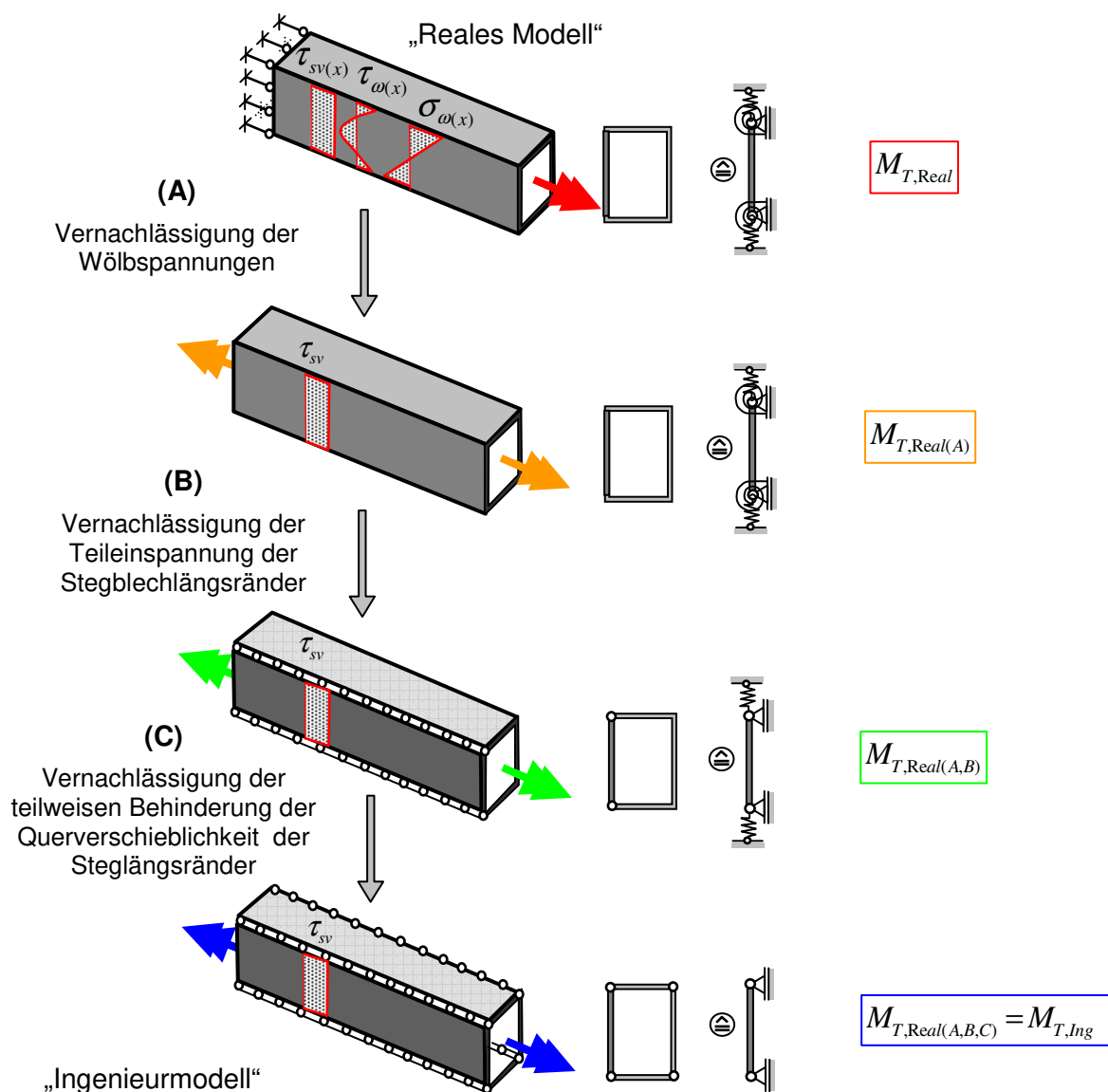


Abb.6-12: Schrittweise Modellierung der Vereinfachungen aus *Tab.6-2* am „Realen Modell“



Um den Einfluss der Wölbspannungen auf die Beultraglast quantifizieren zu können, wird die Wölbbehinderung des „Realen Modells“ entfernt und daraus die Traglast  $M_{T,Real(A)}$  ermittelt.

Die beidseitig wölbefreie Lagerung für Fall (A), (B) und (C) wird durch eine entsprechende Modifikation der Lagerungsbedingungen erreicht. Dazu wird die zunächst rundum des Querschnitts laufende gelenkige Linienlagerung in gelenkige Punktlagerungen an den Stellen des Nulldurchganges der Verwölbung aufgelöst.

Die Traglastminderung  $M_{T,Real(A)} - M_{T,Real(A,B)}$ , durch die Annahme eines gelenkigen Anschlusses zwischen Steg- und Gurtblech, kann durch das Einfügen einer gelenkigen Linienlagerung des betrachteten Stegbleches im wölbefreien System erfasst werden. Die Beultraglast wird dadurch durch das gelenkig an den „Restträger“ angeschlossene Stegblech bestimmt.

Schlussendlich unterscheidet sich die Traglast  $M_{T,Real(A,B,C)}$  von der Traglast des „Ingenieurmodells“  $M_{T,Ing}$  lediglich durch die teilweise Behinderung der Querverschiebung der Steglängsblechränder.

In den folgenden Abbildungen sind die Einflüsse der Vereinfachungen, (A) bis (C), auf die Beultraglastdifferenzen  $M_{T,Real} - M_{T,Ing,FE}$ , prozentual für einige exemplarische Querschnittsgeometrien und Schlankheiten unter einseitiger Wölbbehinderung, dargestellt.

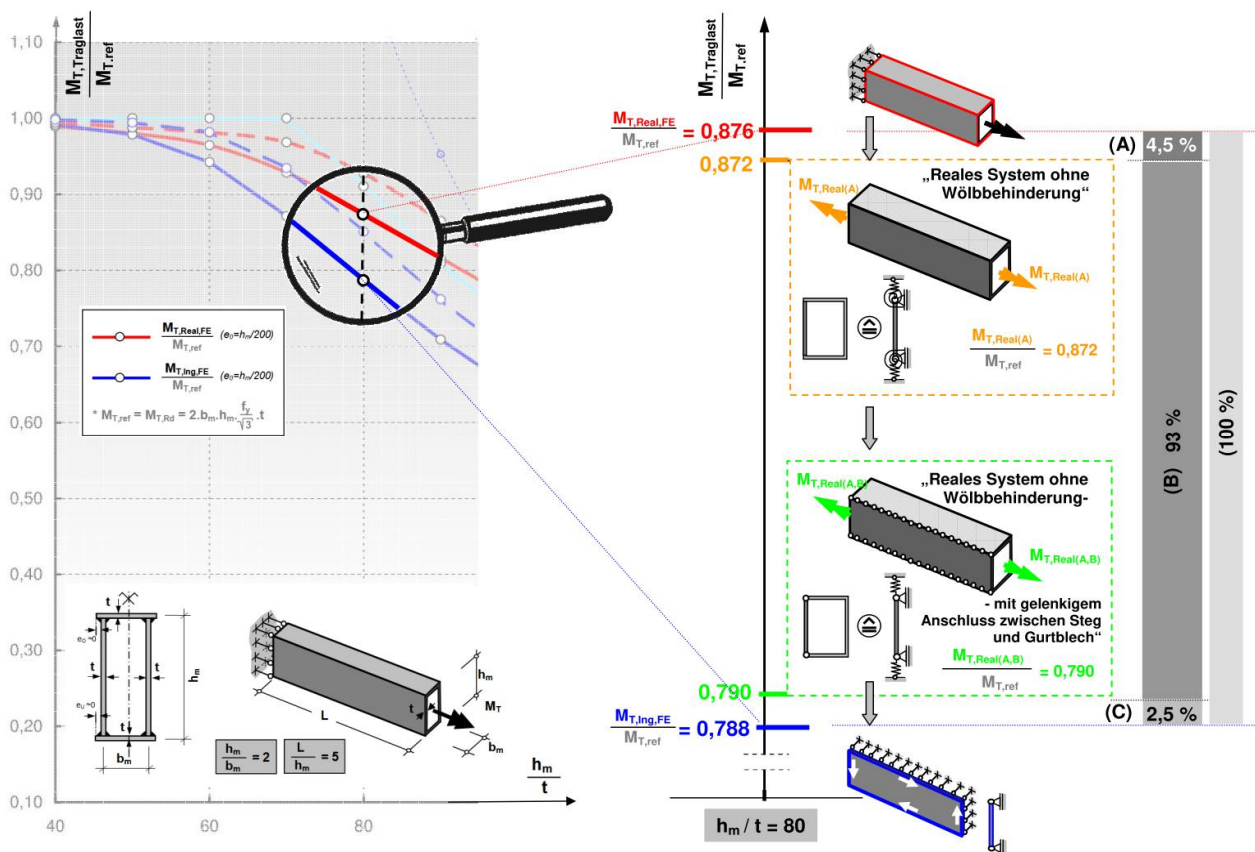


Abb.6-13: Einflüsse auf die Beultraglastdifferenz  $M_{T,Real} - M_{T,Ing,FE}$  - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=5,0$  bzw.  $h_m/t=80$ )

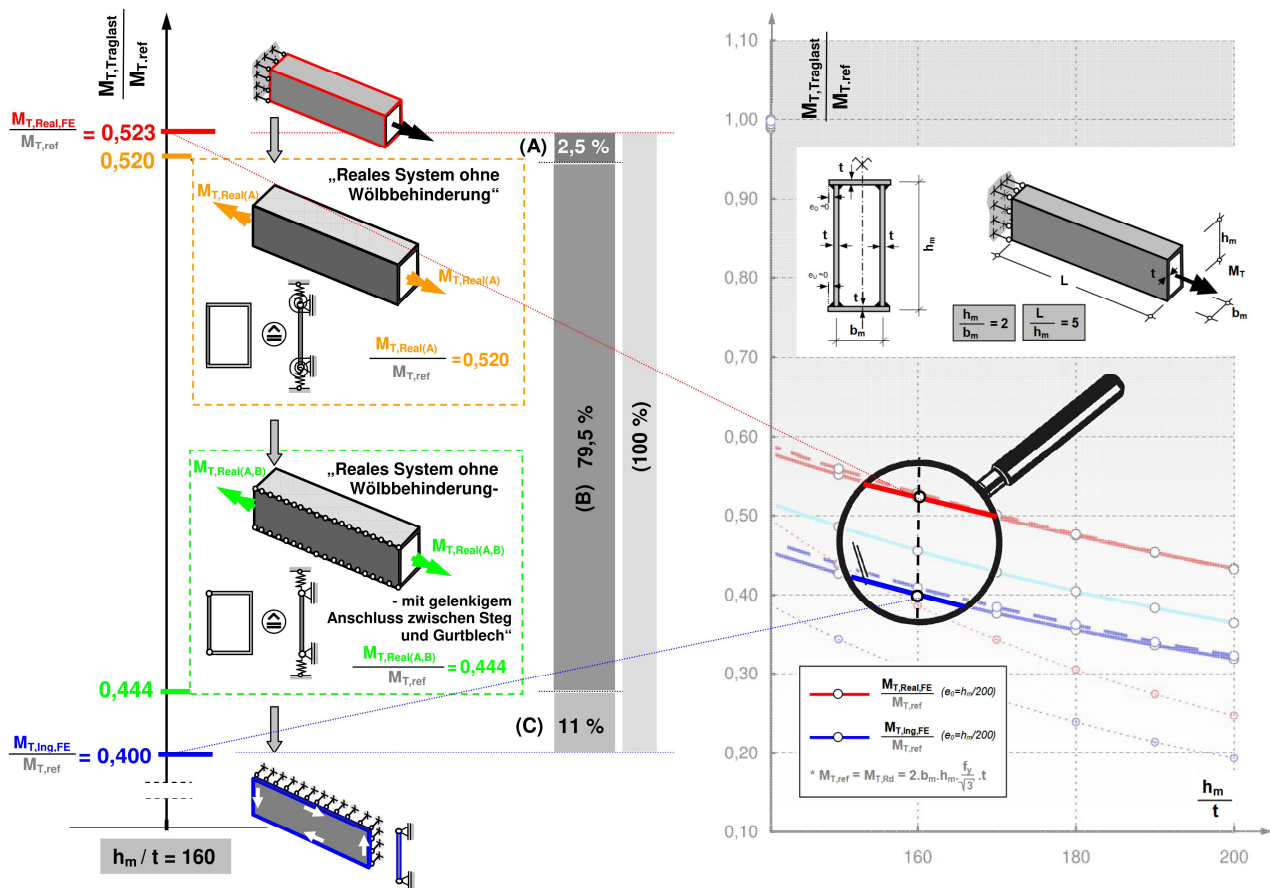


Abb.6-14: Einflüsse auf die Beultraglastdifferenz  $M_{T,Real} - M_{T,Ing,FE}$  - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=5,0$  bzw.  $h_m/t=160$ )

Bei langen schlanken Kastenträgern mit  $L/h_m=5,0$  ist nahezu ausschließlich die Annahme einer gelenkigen Beulfeldlagerung, durch Vernachlässigung der Einspannwirkung zwischen Steg- und Gurtblech (B), für den Traglastabfall des „Ingenieurmodells“ gegenüber dem „Realen Modell“ verantwortlich. Zwar zeigen auch die Vernachlässigung der Wölbbehinderung (A) (und somit auch der Wölbspannungen) und die Vernachlässigung der Behinderung der Stegquerverschieblichkeit (C) Einbußen in der Beultragfähigkeit, diese sind jedoch vergleichsweise gering. Dieses Verhalten zeigt sich sowohl bei kleinen Beulschlankheiten (Abb.6-13), als auch bei großen Beulschlankheiten (Abb.6-14) annähernd gleich.

Um das geänderte Tragverhalten des Systems mit gelenkiger Stegblech-Gurt-Verbindung gegenüber dem „Realen Modell“ zu verdeutlichen, wird die Beulverformung, sowie die Von-Mises Vergleichsspannung bei Traglastniveau für diese beiden Systeme exemplarisch anhand des in Abb.6-13 untersuchten Querschnittstyps A1 ( $L/h_m=5,0$  bzw.  $h_m/t=80$ ) gegenübergestellt:

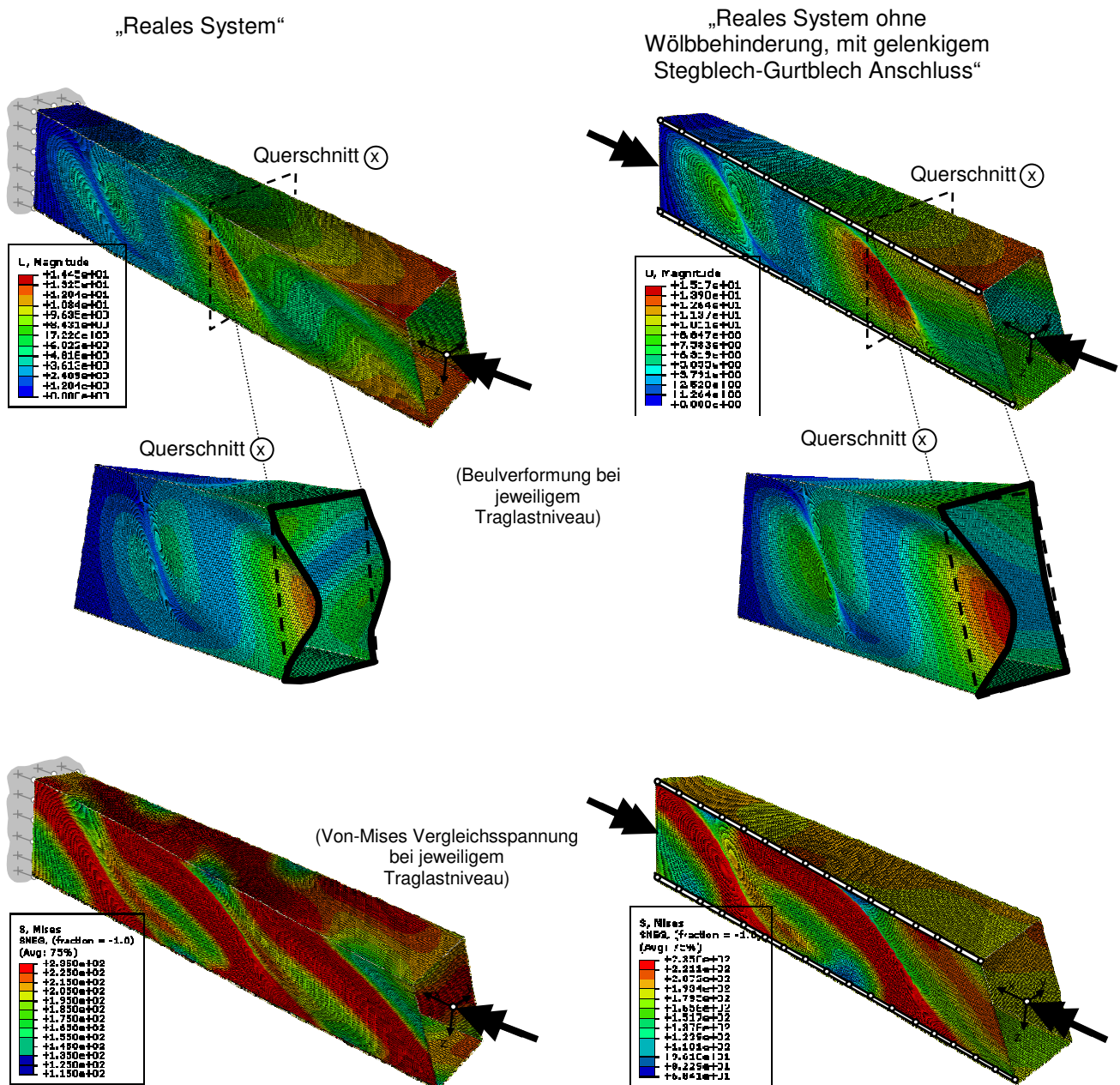


Abb.6-15: Gegenüberstellung von numerischen Ergebnisverläufen für das „Reale Modell“ und das wölbefreie System mit gelenkigem Steg-Gurtblech Anschluss für Querschnitt Typ A1,  $L/h_m = 5$ ,  $h_m/t = 80$ )

Wie Abb.6-15 entnommen werden kann, kommt es durch den gelenkigen Anschluss des Stegbleches am Restquerschnitt zu einem „lokalen Ausbeulen“ des betrachteten Stegblechs, da die Verdrehsteifigkeit des Restquerschnittes nicht aktiviert werden kann. Dies resultiert in einem deutlichen Verlust an Beultragfähigkeit.



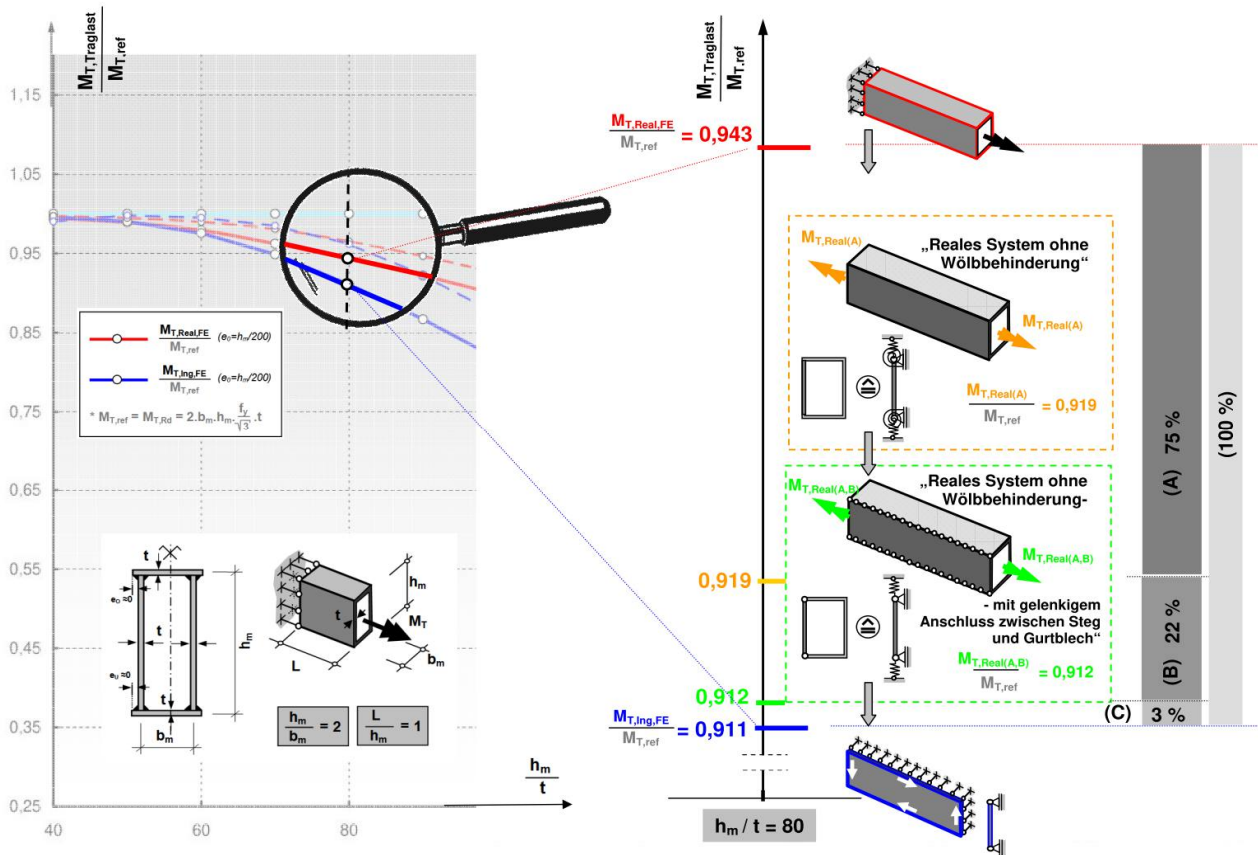


Abb.6-16: Einflüsse auf die Beultraglastdifferenz  $M_{T,Real} - M_{T,Ing,FE}$  - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=1,0$  bzw.  $h_m/t=80$ )

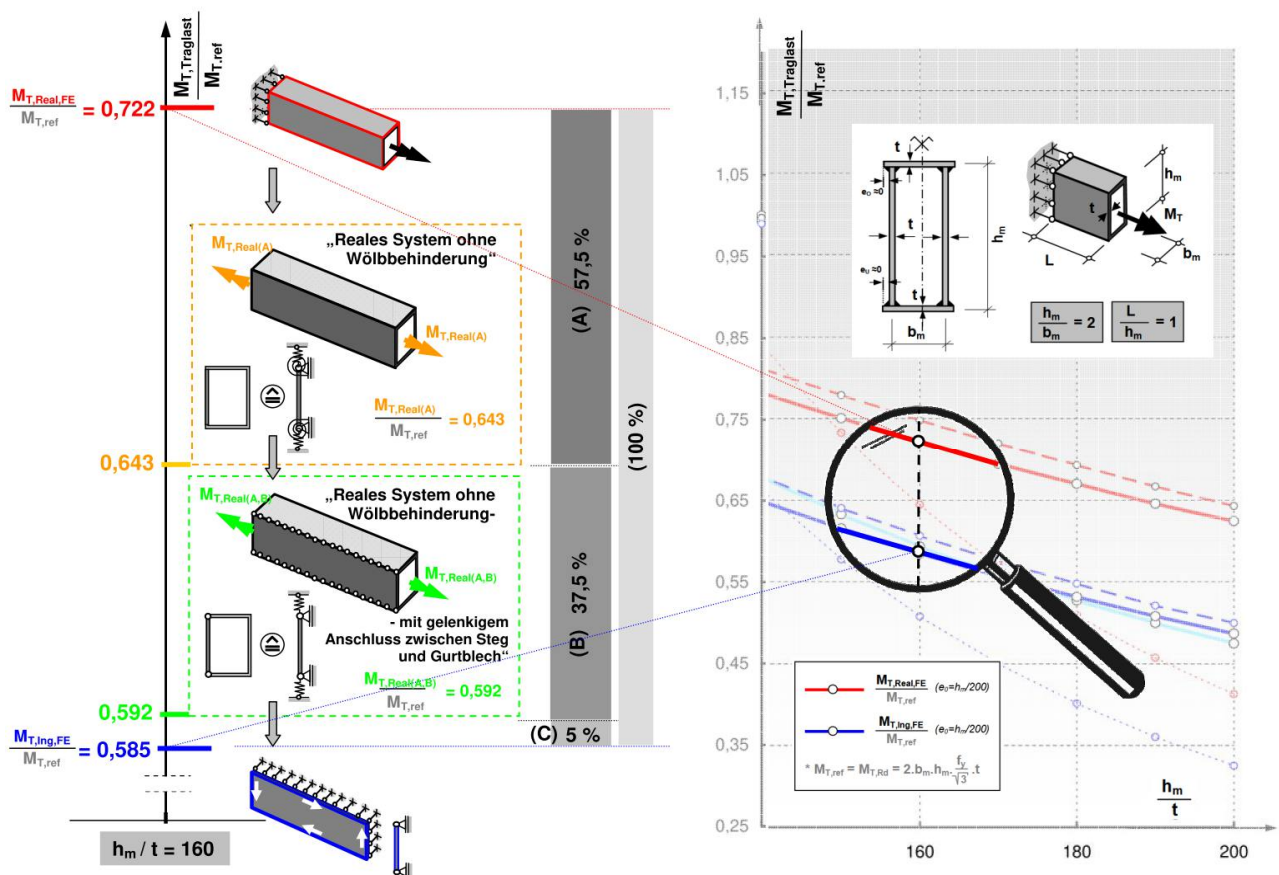
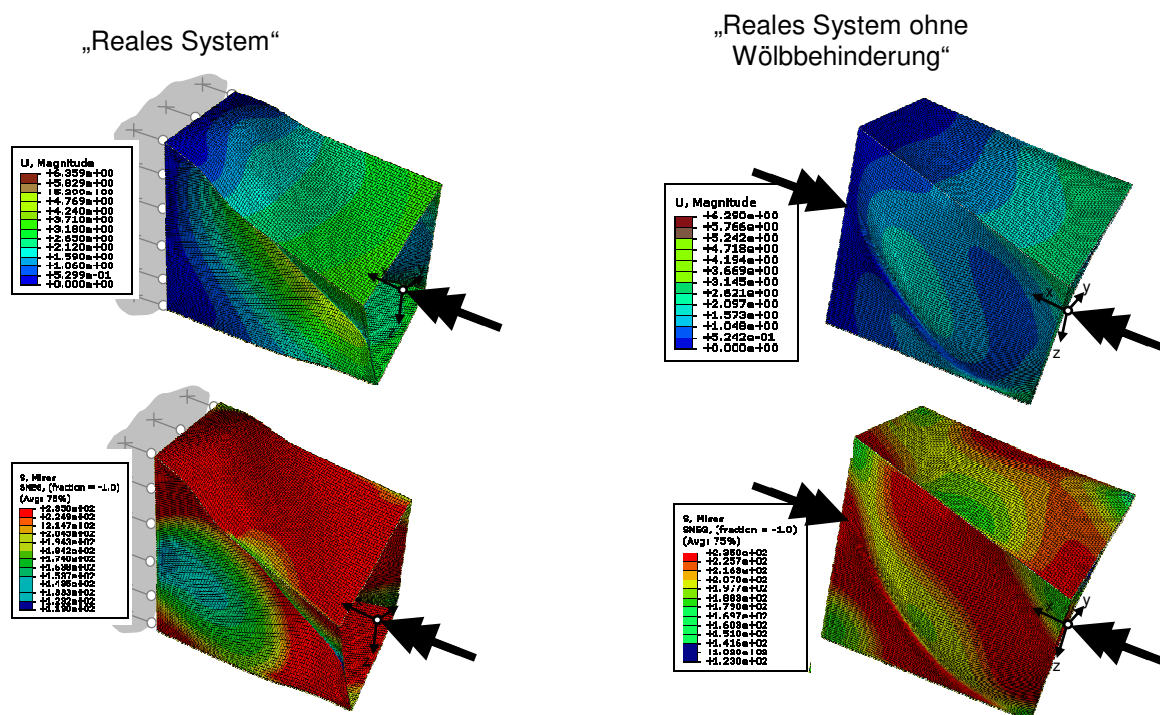


Abb.6-17: Einflüsse auf die Beultraglastdifferenz  $M_{T,Real} - M_{T,Ing,FE}$  - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=1,0$  bzw.  $h_m/t=160$ )

Bei kurzen gedrunenen Kastenträgern mit  $L/h_m=1$ , verschieben sich die Anteile der Einflüsse auf den Traglastabfall, im Vergleich zu den zuvor betrachteten Trägerlängen von  $L/h_m=5$ . Hier ist der Hauptanteil der Traglastdifferenz  $M_{T,Real} - M_{T,Ing,FE}$  der Vernachlässigung der Wölbbehinderung (A) geschuldet. Um dies zu erklären, ist in *Abb.6-18* eine exemplarische Gegenüberstellung der Beulverformung und der Von-Mises Vergleichsspannung, bei Traglastniveau des in *Abb.6-16* untersuchten Querschnittes, mit und ohne Wölbbehinderung, dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass unter Wölbbehinderung vor allem an den Gurten zusätzliche Membranspannungen aktiviert werden können, die zu einer Versteifung des Systems und somit zu einer höheren Traglast des wölbbehinderten Systems führen.



*Abb.6-18: Gegenüberstellung von numerischen Ergebnisverläufen für das „Reale Modell“ und das wölbefreie System für Querschnitt Typ A1,  $L/h_m = 1$ ,  $h_m/t = 80$*

### 6.6.8 Vergleich der Beultraglasten $M_{T,Ing,FE}$ und $M_{T,Ing,BN}$

Für die tägliche Ingenieurpraxis ist eine Berechnung der Beultraglast am „Ingenieurmodell“ mit Hilfe der FE-Berechnungsmethode nicht praktikabel. Viel eher wird die Beultraglast am ebenen Blechfeld über den in EN 1993-1-5 verankerten Beulnachweis, mit der Methode der reduzierten Spannungen, ermittelt.

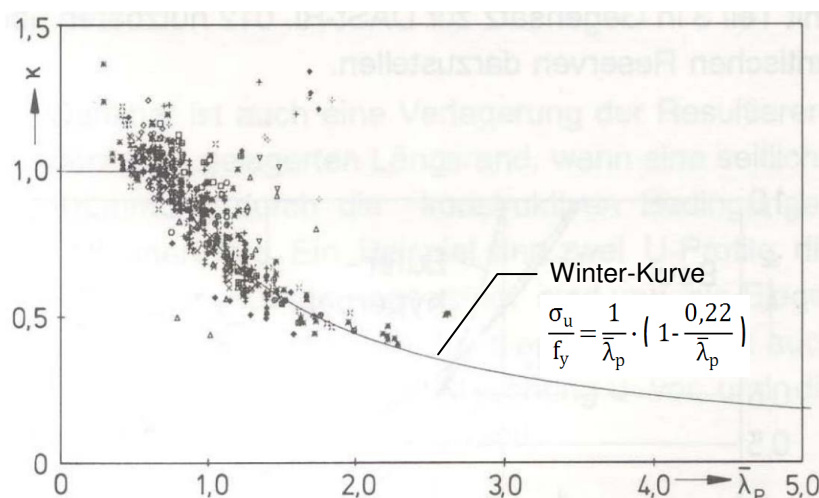
Dazu gilt es nun die Ergebnisse der am „Ingenieurmodell“ ermittelten Beultraglasten  $M_{T,Ing,FE}$ , (blaue Linien) und  $M_{T,Ing,BN}$  (türkise Linien) gegenüberzustellen. Da beide Beultraglasten zwar mit unterschiedlichen Berechnungsmethoden, jedoch am selben zugrundegelegten statischen Modell ermittelt werden, sind etwaige Differenzen nun alleinig auf die

Berechnungsmethode zurückzuführen. Während  $M_{T,Ing,FE}$  über die in Abschnitt 6.5.1 beschriebene FE-Berechnungsmethode ermittelt wird, ist der Berechnung von  $M_{T,Ing,BN}$ , die in Abschnitt 6.5.2 beschriebene Methode der reduzierten Spannungen unter Verwendung der Winter-Beulkurve, zugrundegelegt.

Bei Betrachtung von *Abb.6-7* bis *Abb.6-11* lässt sich erkennen, dass für Stegfelder mit großem  $L/h_m$ -Verhältnis die Traglast nach der Winter-Kurve vor allem bei geringen Beulschlankheiten  $h_m/t$  deutlich über der FE-basierten Beultraglast zu liegen kommt. Dies widerspricht dem ingenieurmäßigen Gedanken, in dem aufwendigere Berechnungsverfahren stets zu höheren Traglasten führen sollten, und die Abschätzung der Traglast durch vereinfachte Berechnungsverfahren stets konservativ sein sollte.

Um diese höheren Tragfähigkeiten nach der Winter-Kurve begründen zu können, muss zunächst auf die empirische Ermittlung der Winter-Kurve verwiesen werden. Der Ermittlung der in EN 1993-1-5 verankerten Winter-Kurve, liegt nicht die Theorie des elastischen Plattenbeulens zugrunde. Es handelt sich hier um eine empirisch ermittelte Beulabminderungskurve, die im Rahmen von Traglastversuchen an ebenen Blechfeldern entstanden ist.

Basierend auf früheren Forschungsarbeiten konnte die Gültigkeit der Winter-Kurve zwar bestätigt werden [5]. Unter anderem wurden darin Ergebnisse von Beulversuchen an unversteiften und versteiften Platten durchgeführt und mit der Winter-Kurve verglichen. Diese Vergleiche zeigen, dass es sich bei der "Winter-Kurve" - nicht wie im Ingenieurbau üblich - um einen unteren Fraktilwert, sondern eher um einen Mittelwert der tatsächlichen Beultragfähigkeit handelt, wie *Abb 6.19* zeigt.



*Abb.6-19: Quelle [5] Experimentelle Bestätigung der Winter-Kurve*

Zudem wird ebenso in früheren Forschungsarbeiten für normalspannungsbeanspruchte Blechfelder der Zweifel geäußert, ob durch die Verwendung der Winter-Kurve der Einfluss der Imperfektionen auf das Beultragverhalten ausreichend berücksichtigt ist [12]. Als Resümee dieser Arbeiten wird jedoch, anstelle einer „Verschärfung“ der in der Norm zugrunde gelegten Winter-Kurve, der Ansatz von spezifischen Imperfektionsformen (anstatt der schlimmstmöglichen) bei Verwendung der FE-Methode (gemäß EN 1993-1-5 Anhang C) empfohlen.

Ein Vergleich der Traglastkurven  $M_{T,Ing,BN}/M_{T,ref}$  und  $M_{T,Ing,FE}/M_{T,ref}$  (in *Abb.6-7* bis *Abb.6-11*), mit der „entschärften“ Imperfektionsamplitude  $e_0/h_m=400$ , zeigt zwar eine bessere Anpassung zwischen Winter-Kurve und FE-Berechnungsmethode, dennoch liegen die Traglasten der FE-basierten Berechnung teilweise deutlich unter jenen der Winter-Kurve. Vermutlich ist der Einfluss der Imperfektionsform wesentlich stärker, als jener der Imperfektionsamplitude. In Hinblick auf die zitierten Ergebnisse früherer Forschungsberichte und im Rahmen der für die FE-Berechnung angesetzten schlimmstmögliche (Eigenmode-konformen) Imperfektionsfigur, relativiert sich die Überschätzung der Traglast aufgrund der Winter-Kurve.

## 6.7 Beultraglastkurven nach dem „Realen Modell“ und dem „Ingenieurmodell“ für beidseitige Wölbbehinderung

### 6.7.1 Vorbemerkungen zu den Diagrammen Abschnitt 6.7.2 bis 6.7.6

Die in den Diagrammen *Abb.6-21* bis *Abb.6-25* dargestellten Traglastkurven wurden aufgrund der zuvor beschriebenen Berechnungsmodelle bzw. Berechnungsverfahren generiert. In der folgenden Übersichtstabelle soll dies nochmals übersichtlich zusammengefasst werden.



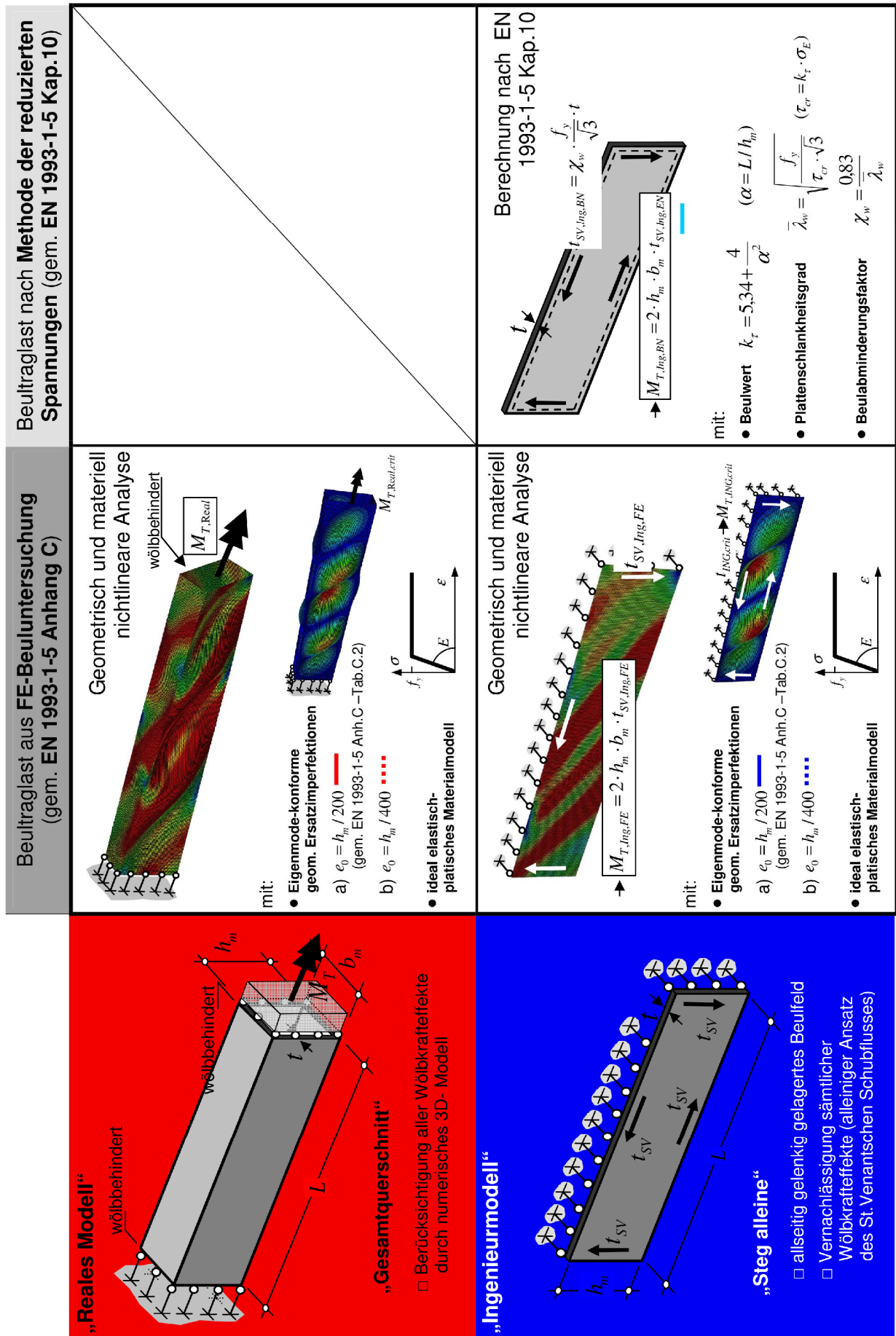


Abb.6-20: Übersicht der Traglastkurven für beidseitige Wölbehinderung ( $M_T$  alleine)



### 6.7.2 Querschnittstyp A1 - $L/h_m=1,0$ – beidseitig wölbbehindert

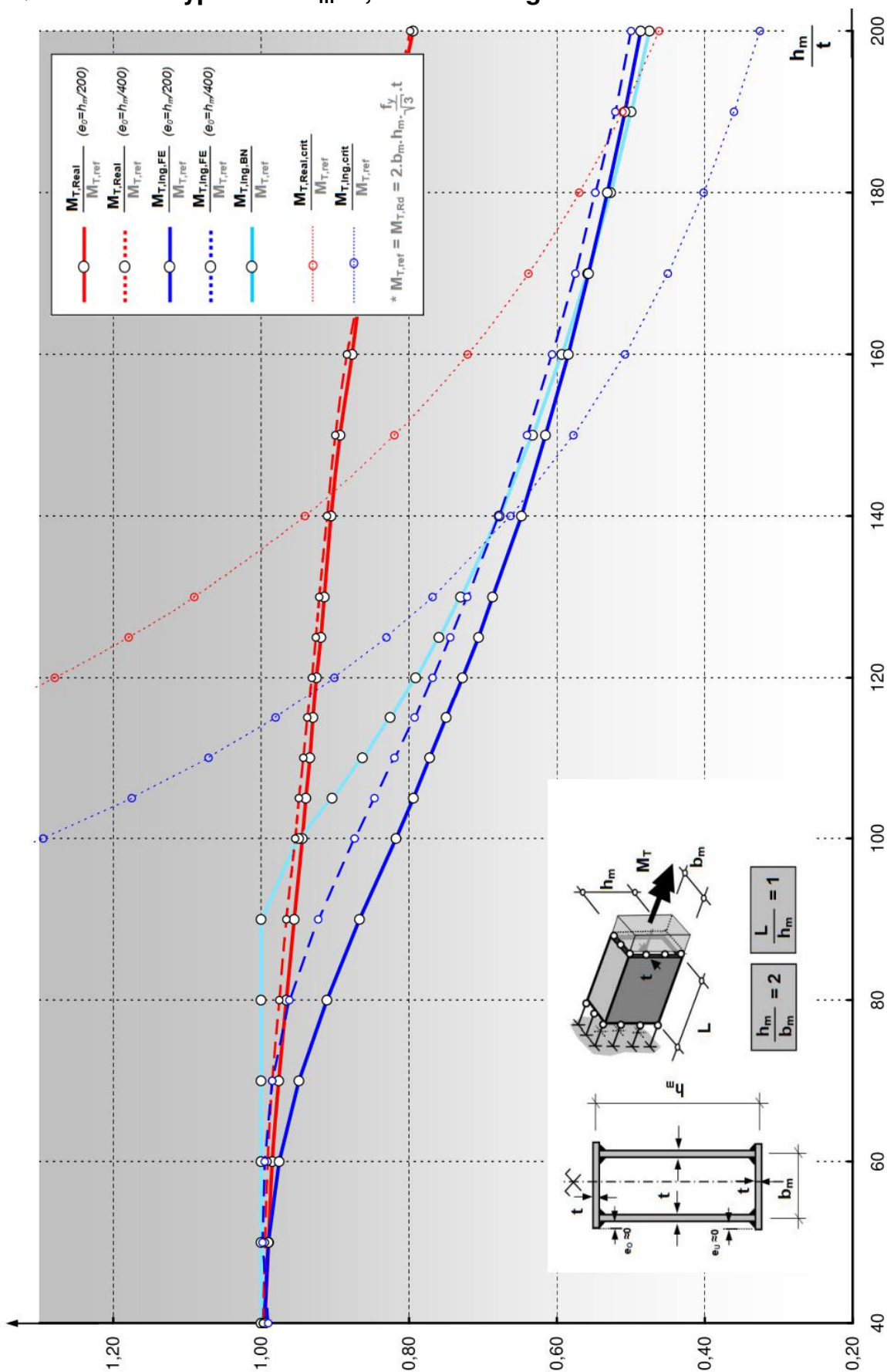


Abb.6-21: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 1,0$ ) für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)

### 6.7.3 Querschnittstyp A1 - $L/h_m=5,0$ – beidseitig wölbbehindert

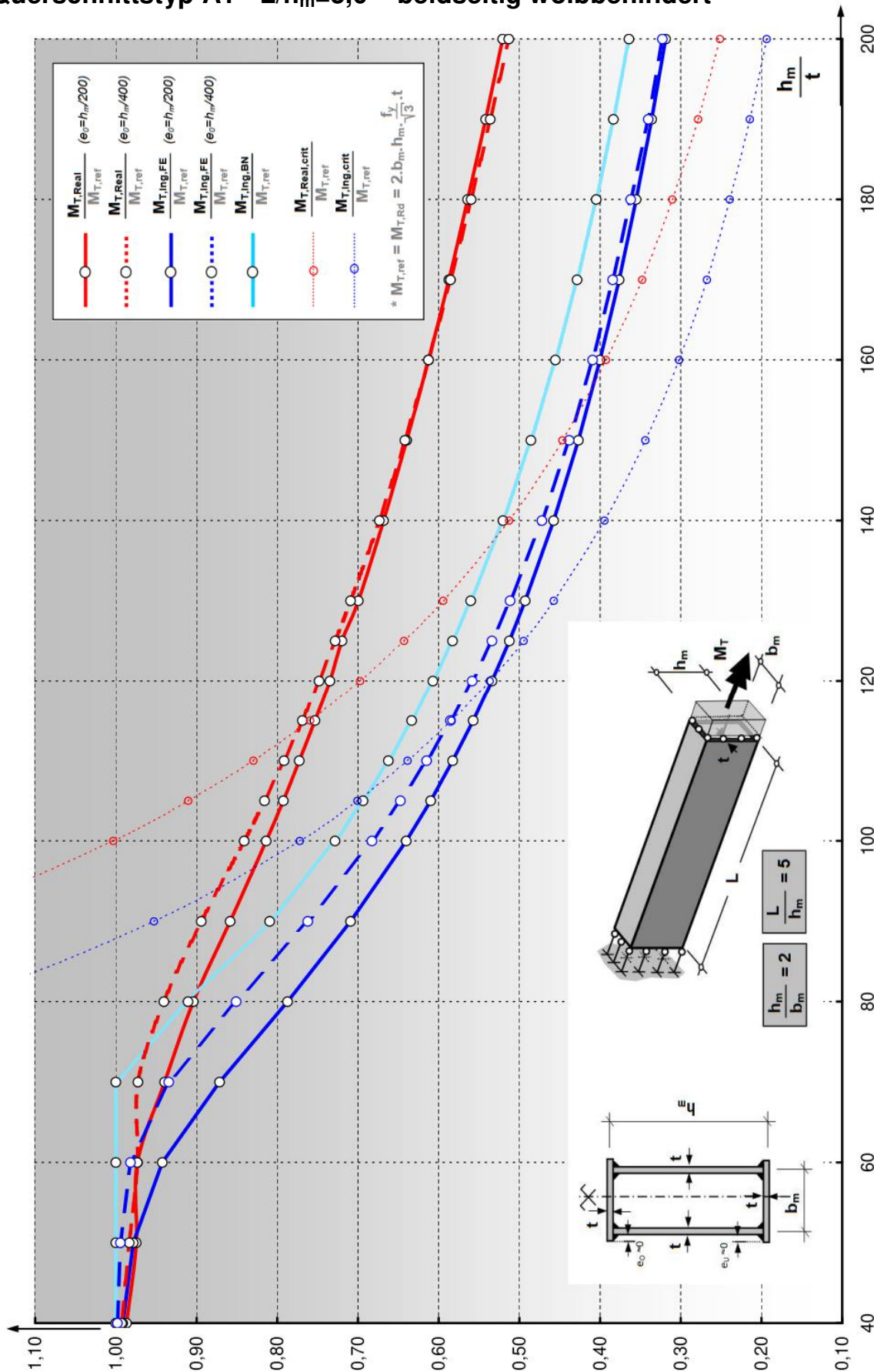


Abb.6-22: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 5,0$ ) für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)

### 6.7.4 Querschnittstyp A2 - $L/h_m=5,0$ – beidseitig wölbbehindert

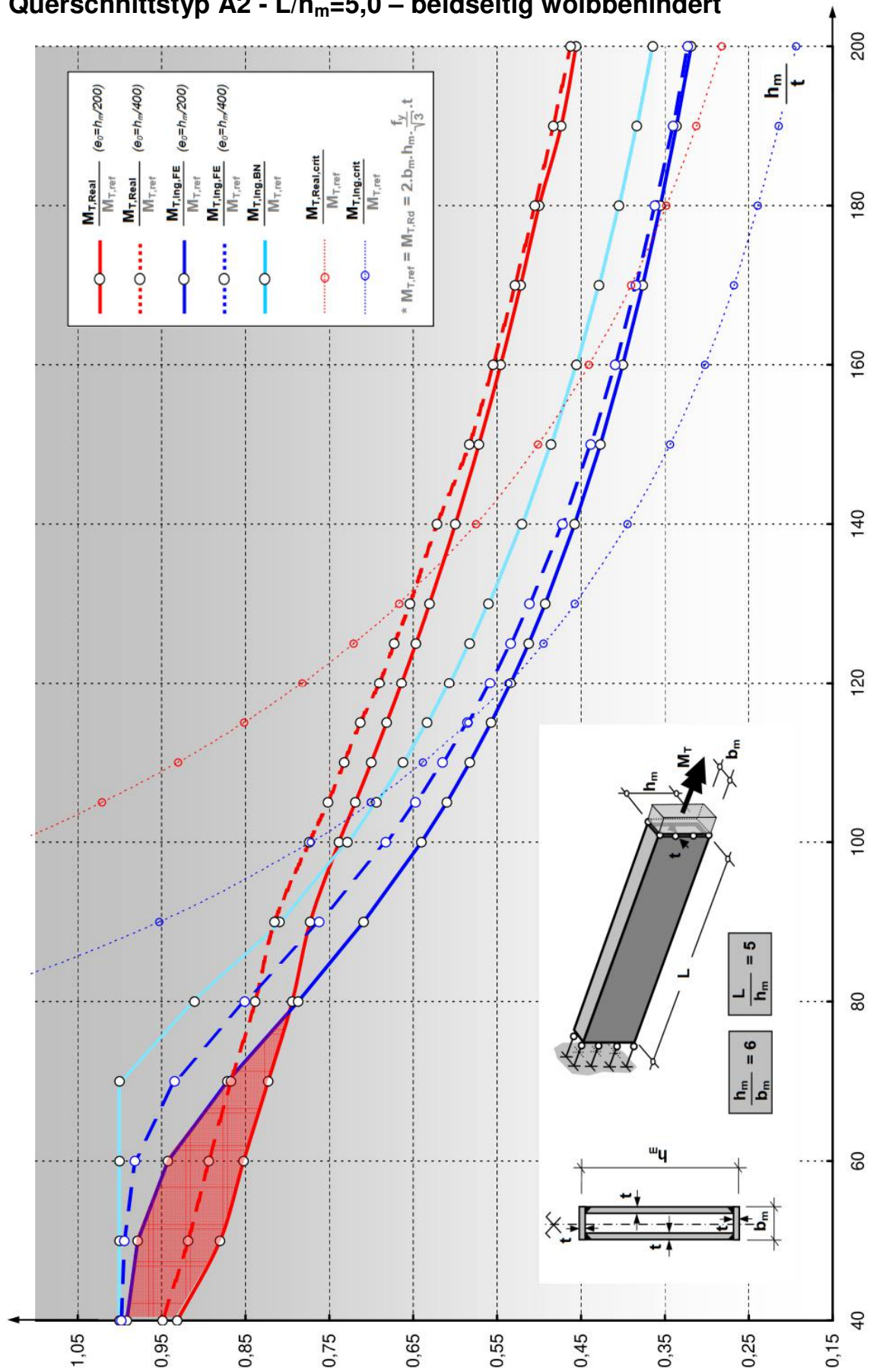


Abb.6-23: Traglastkurven - Querschnittstyp A2 ( $L/h_m = 5,0$ ) für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)



### 6.7.5 Querschnittstyp B1 - $L/h_m=1,0$ – beidseitig wölbbehindert

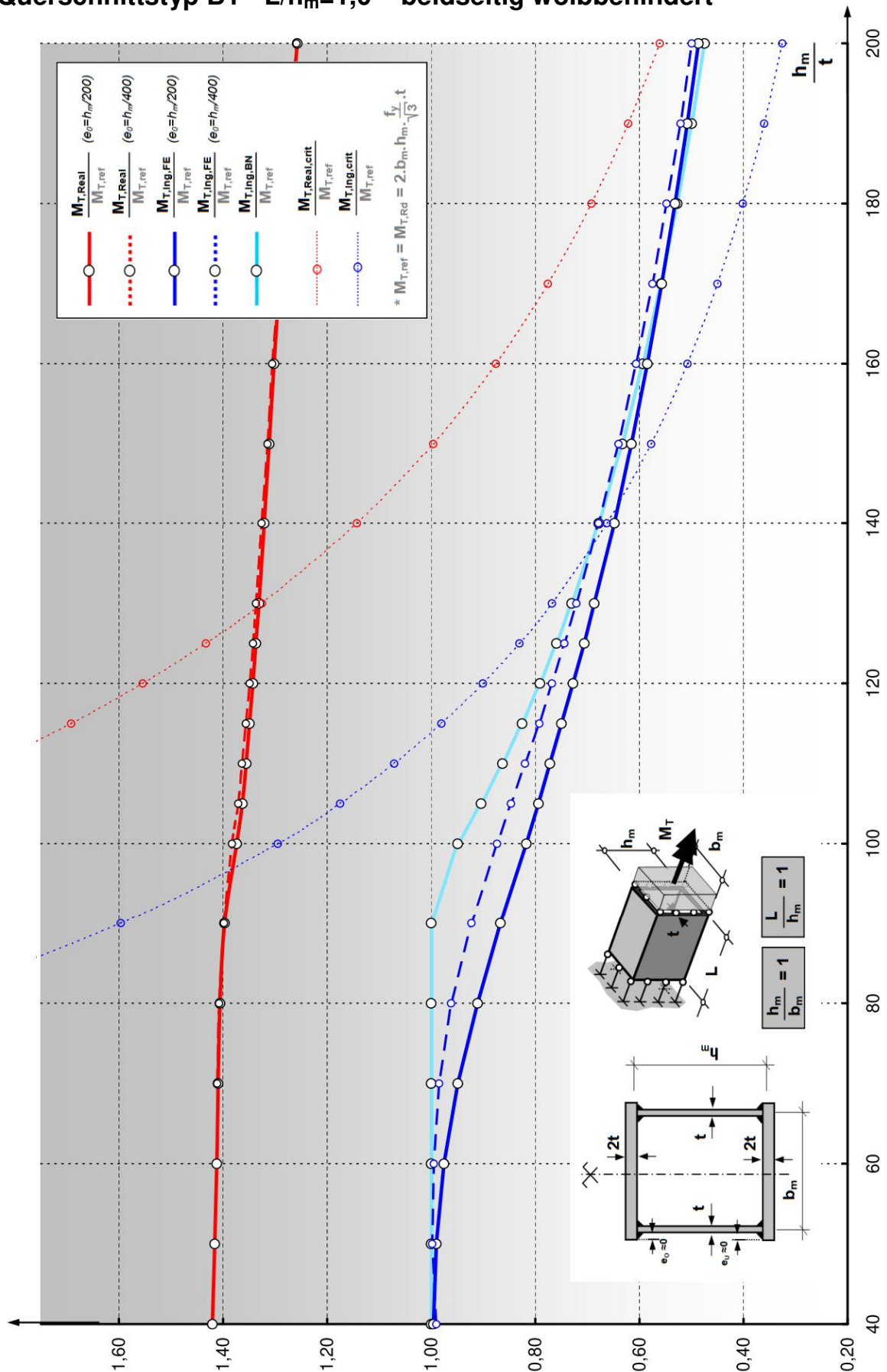


Abb.6-24: Traglastkurven - Querschnittstyp B1 ( $L/h_m = 1,0$ ) für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)

### 6.7.6 Querschnittstyp B1 - $L/h_m=5,0$ – beidseitig wölbbehindert

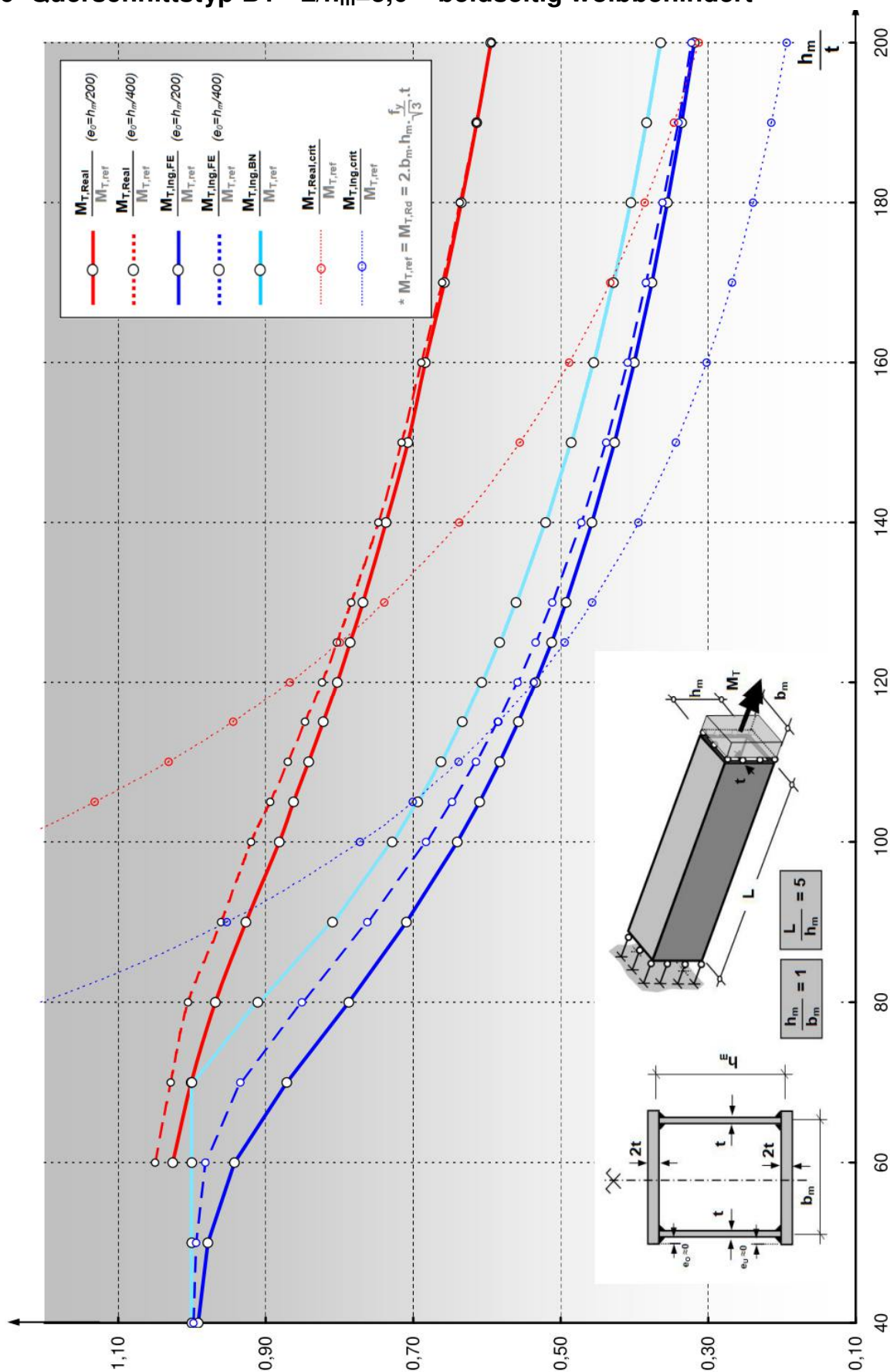


Abb.6-25: Traglastkurven - Querschnittstyp B1 ( $L/h_m = 5,0$ ) für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$  alleine)

### 6.7.7 Bemerkungen zu den Traglastkurven in Abschnitt 6.7.2 bis 6.7.6

Aus dem Vergleich der Traglastkurven unter beidseitiger Wölbbehinderung (Abschnitt 6.7.2 bis 6.7.6), mit jenen unter einseitiger Wölbbehinderung (Abschnitt 6.6.2 bis 6.6.6), ergeben sich bei gleichen Geometrieverhältnissen für ein und dieselbe Beulschlankheit  $h_m/t$  höhere Tragfähigkeiten seitens des beidseitig wölbbehinderten Kastenträgers. Besonders ausgeprägt ist diese Beobachtung bei kurzen Trägerlängen  $L/h_m=1,0$ . Dies scheint zunächst aufgrund der nun, an beiden Trägerenden auftretenden Wölbnormalspannungen etwas verwunderlich, kann jedoch aufgrund einer **ingenieurmäßigen Modellvorstellung** einfach begründet werden. Dazu werden die Wölbnormalspannungsverläufe bei einem noch elastischen Beanspruchungsniveau an der perfekten Geometrie, sowie die Beulverformungen bei Traglastniveau für einen Querschnitt (Typ A1 –  $h_m = 2b_m$ ,  $L/h_m = 1$ ,  $h_m/t = 130$ ) exemplarisch gegenübergestellt:

Einseitige Wölbbehinderung

Beidseitige Wölbbehinderung

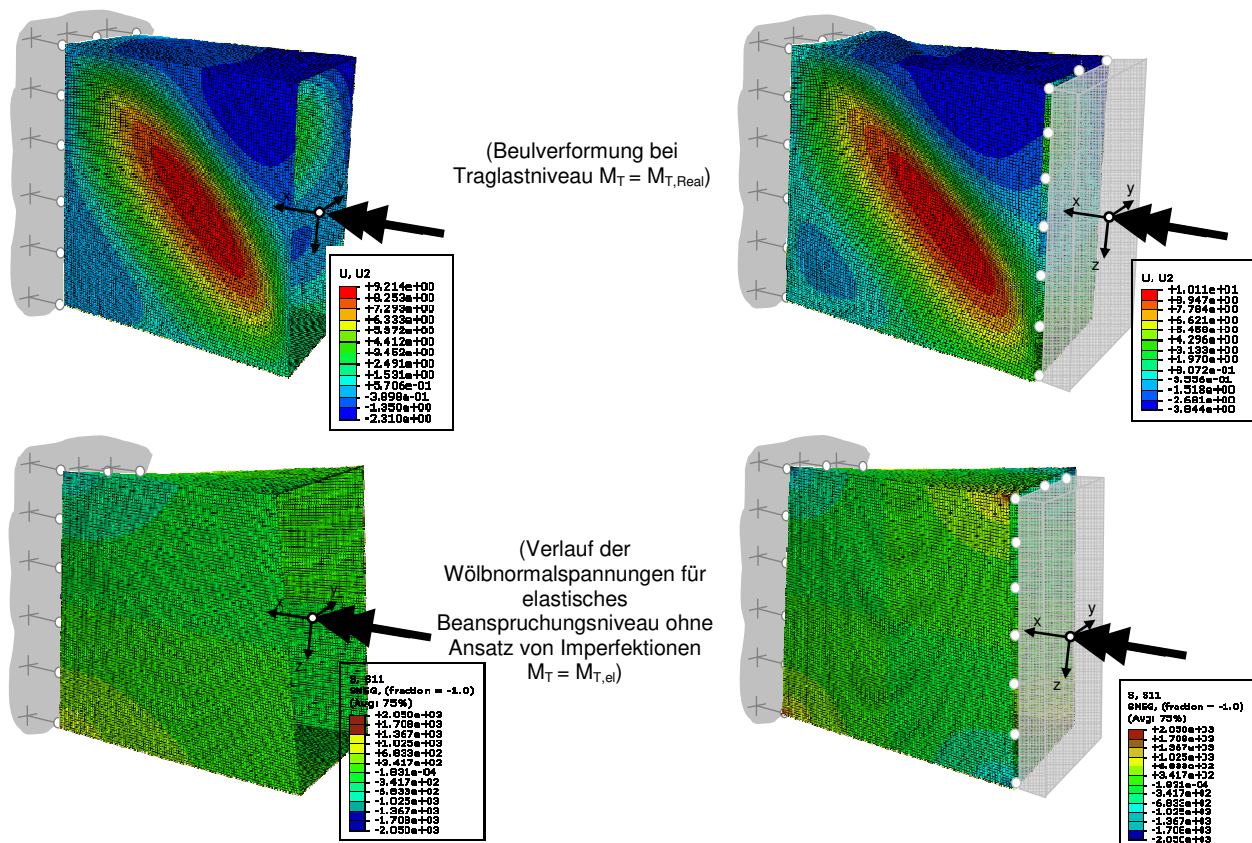
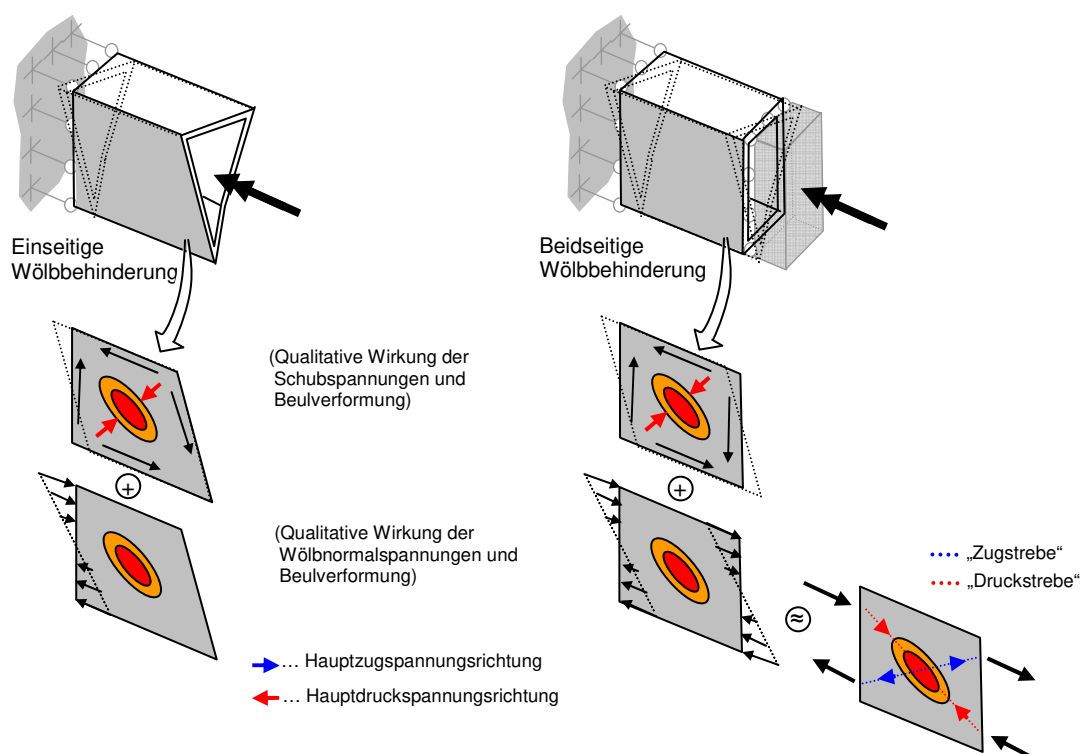


Abb.6-26: Gegenüberstellung von numerischen Ergebnisverläufen für ein- und beidseitige Wölbbehinderung für Querschnitt Typ A1 –  $h_m = 2b_m$ ,  $L/h_m = 1$ ,  $h_m/t = 130$

Wäre der torsionsbelastete Kastenträger beidseitig wölbfrei gelagert, so würde sich eine auf den Trägermittelquerschnitt bezogene antimetrische Längsverformung einstellen. Durch die Behinderung der Längsverformung an beiden Trägerenden, werden entsprechende Wölbnormalspannungen hervorgerufen, deren Verlauf an den Endquerschnitten ebenso antimetrisch bezüglich des Trägermittelquerschnittes ist. Bei

Betrachtung des Wölbnormalspannungsverlaufes am herausgelösten Stegblech, lässt sich aufgrund der Antimetrie jeweils eine diagonal über das Stegblech verlaufende „gedachte Zug- und Druckstrebe“ erkennen (Vgl. *Abb 6-27*). Unter der Annahme eines quadratischen Stegblechs, also  $L/h_m=1,0$ , verläuft die „gedachten Zugstrebe“ in der selben Richtung, wie die durch die St.Vernant'schen Schubspannung erzeugte Hauptdruckspannungsrichtung (für reine Schubbelastung unter  $45^\circ$ ).

Die die Beulverformung verursachende Hauptdruckspannung wird also durch die Wirkung der Wölbnormalspannung reduziert, das in einer höheren Beultraglast bei beidseitiger Wölbbehinderung resultiert. Auch bei größeren Trägerlängen macht sich diese Traglasterrhöhung bemerkbar, ist jedoch, aufgrund der flacheren „Zugstrebenneigung“, im Vergleich zur Hauptdruckspannungsrichtung von  $45^\circ$ , bei der reinen St. Venant'schen Schubspannung, nicht so stark ausgeprägt. Zudem klingt die Wölbnormalspannung, ausgehend von der Stelle der Wölbbehinderung, für größere Trägerlänge rascher ab. Dieses ingenieurmäßige Erklärungsmodell ist in *Abb.6-27* nochmals schematisch dargestellt.



*Abb.6-27: Schematische Darstellung der günstigen Wirkung der Wölbnormalspannung auf das Beulverhalten bei beidseitig wölbbehinderten Kastenträgern*

Mit Ausnahme der extremen Querschnittsgeometrie  $h_m/b_m=6$  (*Abb.6-23*), liegt die Beultraglast des „Realen Modells“ stets über der, mit Hilfe der FE-Methode ermittelten, Traglast des

„Ingenieurmodells“. Für kurze gedrungene Kastenträger, wie in *Abb.6-21 bis Abb.6-24 dargestellt*, ist die erhöhte Traglast des „Realen Modells“ gegenüber dem „Ingenieurmodell“ aufgrund der obigen Ausführungen besonders stark ausgeprägt. Im Vergleich zu Abschnitt 6.6, kann hier - bis auf die Querschnittsgeometrie  $h_m/b_m=6$  (*Abb.6-23*) - gezeigt werden, dass für die untersuchten Querschnitte auch das „Ingenieurmodell“, unter Anwendung der Methode der reduzierten Spannungen für übliche Beulschlankheiten, durchwegs konservative Ergebnisse gegenüber der realen Traglast liefert.

Der Einfluss der angesetzten Imperfektionsamplitude auf die Beultraglast des „Realen Modells“ ist bei beidseitiger Wölbbehinderung deutlich geringer, als bei einseitiger Wölbbehinderung.

(Vergleich der Ergebnisse für Imperfektion  $h_m/400$  bzw.  $h_m/200$ )

Die Traglastkurven des „Ingenieurmodells“  $M_{T,Ing,FE} / M_{T,ref}$  sowie  $M_{T,Ing,BN} / M_{T,ref}$  unterscheiden sich nicht gegenüber jenen aus Abschnitt 6.6, da die Wölbbehinderung nur am „Realen Modell“ ihre Wirkung zeigt und die entsprechenden zusätzlichen Wölbspannungen hervorruft.



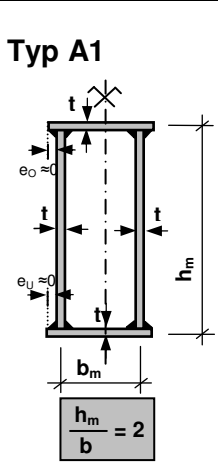


# 7 Numerische Detailuntersuchungen für kombinierte Beanspruchung $M_T+N$ bzw. $M_T+M_y$

## 7.1 Vorbemerkungen

Da reine Torsionsbeanspruchungen praktisch kaum anzutreffen sind, soll in diesem Abschnitt das Beultragverhalten von wölbbehinderten Kastenträgern unter kombinierter Beanspruchung aus Torsionsmoment und Normalkraft ( $M_T+N$ ) bzw. aus Torsionsmoment und Biegemoment ( $M_T+M_y$ ) untersucht werden. Um die praktische Einsetzbarkeit des bereits in Abschnitt 6 beschriebenen, ebenen „Ingenieurmodells“ zur Abschätzung der realen Beultraglast auch für kombinierte Beanspruchung aus Torsion und Biegemoment, bzw. Torsion und Normalkraft bestätigen zu können, werden auch hier die entsprechenden Traglastkurven des „Ingenieurmodells“ mit jenen des „Realen Modells“ gegenübergestellt.

Da bereits in Abschnitt 6 gezeigt werden konnte, dass für beidseitig wölbbehinderte Kastenträger das „Ingenieurmodell“ die reale Beultragfähigkeit deutlich unterschätzt und somit stets eine, auf der sicheren Seite liegende Abschätzung der tatsächlichen Beultraglast ermöglicht, beschränken sich die Untersuchungen für kombinierte Beanspruchung auf einseitig wölbbehinderte Systeme.

## 7.2 Untersuchte Querschnitte und Beanspruchungskombinationen

Beanspruchung		$M_T, + N$		$M_T, + M_y$	
		$L/h_m$	1,0	5,0	$L/h_m$
<b>Typ A1</b> 		siehe Diagramm <b>Abb. 7-6</b>	siehe Diagramm <b>Abb. 7-7</b>	siehe Diagramm <b>Abb. 7-12</b>	siehe Diagramm <b>Abb. 7-13</b>
		siehe Diagramm <b>Abb. 7-4</b>	siehe Diagramm <b>Abb. 7-5</b>	siehe Diagramm <b>Abb. 7-10</b>	siehe Diagramm <b>Abb. 7-11</b>

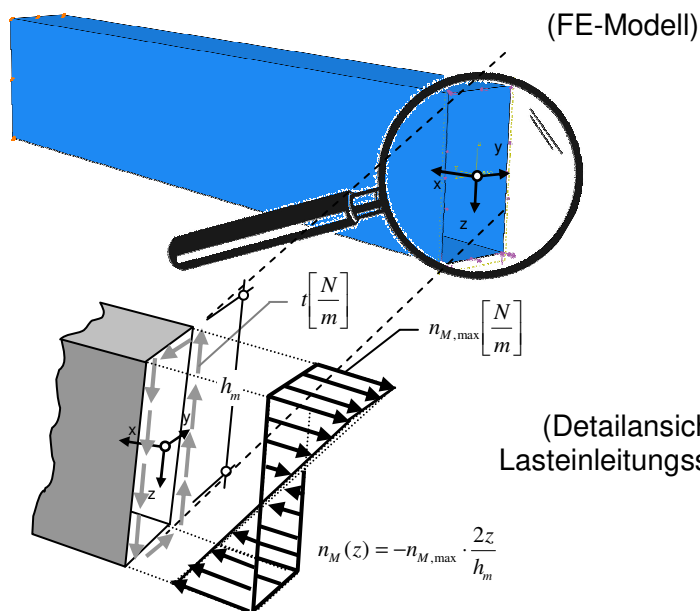
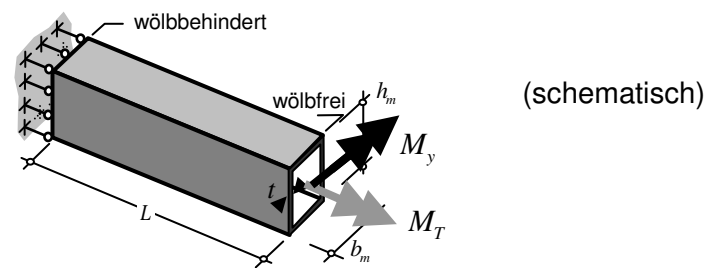
Tab.7-1: Übersicht über die untersuchten Querschnitte und Beanspruchungskombinationen

### 7.3 Numerisches Berechnungsmodell

Hinsichtlich der zugrunde gelegten numerischen Berechnungsmodelle gelten die selben Modellierungsgrundsätze, wie bereits in Abschnitt 6.3 beschrieben. Die Einleitung des Biegemoments  $M_y$  bzw. der Normalkraft  $N$ , erfolgt über eine entsprechende Kantenlinienbelastung am Endquerschnitt des Kastenträgers.

#### 7.3.1 Kombinierte Beanspruchung am „Realen Modell“

##### Lasteinleitung $M_T + M_y$



##### Lasteinleitung $M_T + N$

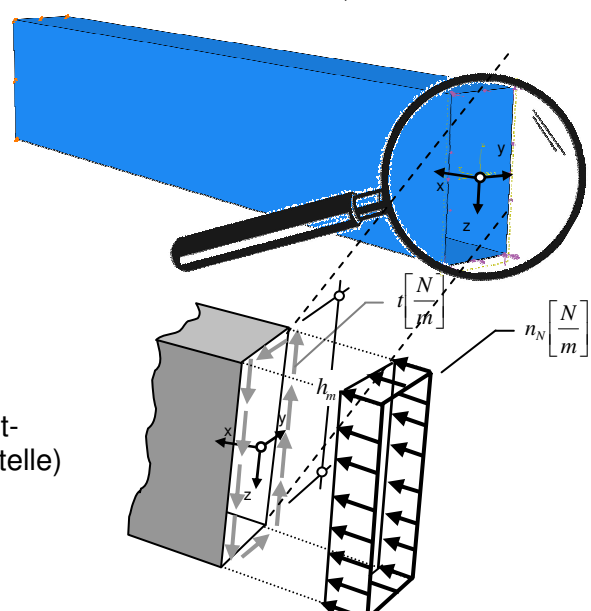
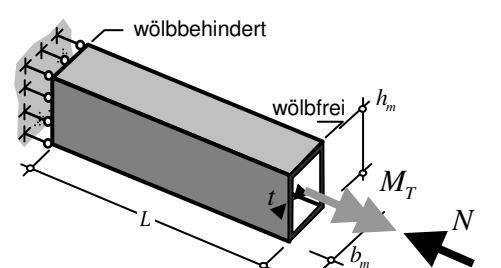


Abb.7-1: Lasteinleitung der kombinierten Beanspruchung  $M_T+N$  bzw.  $M_T+M_y$  am „Realen Modell“

Für die Größen der anzusetzenden Kantenlinienbelastungen gilt:

$$\blacksquare t \left[ \frac{N}{m} \right] = \frac{M_T [Nm]}{2 \cdot b_m [m] \cdot h_m [m]}$$

$$\blacksquare n_{M,max} \left[ \frac{N}{m} \right] = \frac{M_y [Nm]}{W_y [m^3]} \cdot t [m]$$

$$\text{mit: } W_y = \frac{2 \cdot t_s \cdot h_m^3}{12} + \left( \frac{h_m}{2} \right)^2 \cdot b_m \cdot (t_o + t_u)$$

$$\blacksquare t \left[ \frac{N}{m} \right] = \frac{M_T [Nm]}{2 \cdot b_m [m] \cdot h_m [m]}$$

$$\blacksquare n_N \left[ \frac{N}{m} \right] = \frac{N [N]}{A [m^2]} \cdot t [m]$$

$$\text{mit: } A = b_m \cdot (t_o + t_u) + 2 \cdot h_m \cdot t_s$$

Hinsichtlich der Reihenfolge der Lastaufbringung siehe Abb.7-3 und Abb.7-9.

### 7.3.2 Kombinierte Beanspruchung am „Ingenieurmodell“

Es gelten dieselbe Grundsätze wie in 7.3.1. Auch die Zusammenhänge zwischen Normalkraft  $N$  und zugehöriger Kantenlinienbelastung  $n_N$  bzw. Biegemoment  $M_y$  und zugehöriger Kantenlinienbelastung  $n_M$  können Abschnitt 7.3.1 entnommen werden. Abb.7-2 zeigt eine schematische Darstellung der Lasteinleitung im FE-Modell des „Ingenieurmodells“:

#### Lasteinleitung $M_T + M_y$

#### Lasteinleitung $M_T + N$

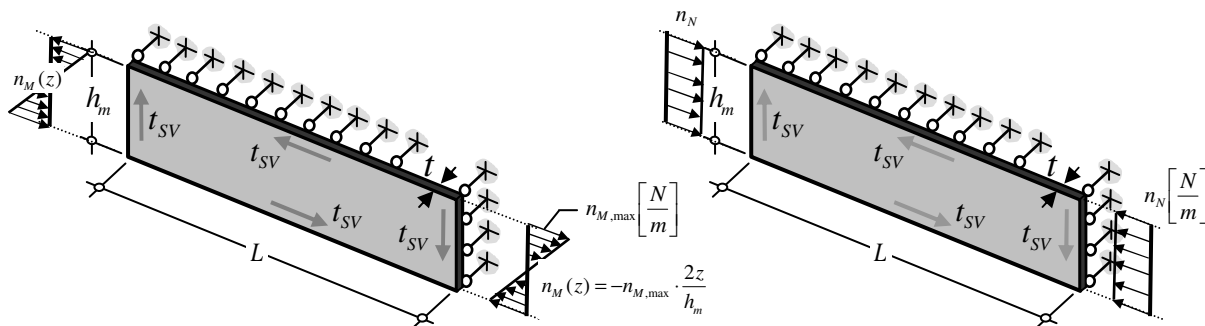


Abb.7-2: Lasteinleitung der kombinierten Beanspruchung  $M_T+M_y$  bzw.  $M_T+N$  am „Ingenieurmodell“

## 7.4 Berechnungsverfahren für die Beultraglastberechnung

### 7.4.1 Berechnungsverfahren für das „Reale Modell“

Die **Beultraglast** wird auch hier, mit der in Abschnitt 6.5.1 beschriebenen, in **EN 1993-1-5 Anhang C verankerten, FEM-basierten Berechnungsmethode** ermittelt.

Hinsichtlich der Imperfektionsannahmen und dem zugrunde gelegten Struktur- und Werkstoffverhalten gelten dieselben Voraussetzungen wie in Abschnitt 6.5.1.

### 7.4.2 Berechnungsverfahren für das „Ingenieurmodell“

Die **Beultraglast** wird, neben der FEM-basierten Berechnungsmethode, erneut auch hier über die ebenfalls in EN 1993-1-5 verankerten Methode der reduzierten Spannung berechnet.

Die Beultraglast, die sich aus dem Beulnachweis nach EN 1993-1-5, Kapitel 10 (Methode der reduzierten Spannungen) ergibt, wird als  $M_{T,Ing,BN}$  bezeichnet. Für deren Ermittlung sind im Falle der kombinierten Beanspruchung des ebenen Beulfeldes durch  $t_{SV} + n_N$  bzw.  $t_{SV} + n_M$  folgende Berechnungsschritte notwendig:

- Beulwerte für Schubspannungen und Normalspannungen

- für Wirkung von  $t_{SV}$

$$k_{\tau} = 5,34 + \frac{4}{\alpha^2} \quad (\alpha \text{ stellt das Geometrieverhältnis von Beulfeldlänge zu Beulfeldbreite dar. Im Fall des betrachteten Stegbleches gilt dafür somit } L/h_m)$$

- für Wirkung von  $n_N$  :  $k_{\sigma} = 4$

- für Wirkung von  $n_M$  :  $k_{\sigma} = 23,8$

- Ideale Beulspannung für alleinige Wirkung von  $\sigma$  (aus  $n_N$  bzw.  $n_M$ ) oder  $\tau$  (aus  $t_{SV}$ )

$$\sigma_{cr} = k_{\sigma} \cdot \sigma_E \quad \text{bzw.} \quad \tau_{cr} = k_{\tau} \cdot \sigma_E \quad (\sigma_E \dots \text{Eulersche Bezugsspannung } \sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot E}{12(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{t}{h_m}\right)^2)$$

- Kritischer Laststeigerungsfaktor  $\alpha_{ult,k}$

$$\frac{1}{\alpha_{ult,k}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{f_y}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{Ed}}{f_y}\right)^2} \quad (\text{mit: } - \tau_{Ed} = t_{SV} / t$$

$$- \sigma_{Ed} = n_{M,max} / t \quad (\text{bei Wirkung von } M_y)$$

$$- \sigma_{Ed} = n_N / t \quad (\text{bei Wirkung von } N)$$

wobei  $t$  die Querschnittsblechstärke darstellt)

- Kritischer Laststeigerungsfaktor  $\alpha_{cr}$

$$\frac{1}{\alpha_{cr}} = \frac{1+\psi}{4 \cdot \alpha_{cr,x}} + \sqrt{\left(\frac{1+\psi}{4 \cdot \alpha_{cr,x}}\right)^2 + \frac{1-\psi}{2 \cdot \alpha_{cr,x}^2} + \left(\frac{1}{\alpha_{cr,\tau}}\right)^2} \quad (\text{mit: } - \alpha_{cr,x} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{Ed}}$$

$$- \alpha_{cr,x} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_{Ed}})$$

- Bezogener Schlankheitsgrad bei kombinierter Wirkung von  $\sigma$  und  $\tau$   $\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr}}}$
- Beulabminderungsfaktoren für kombinierte Beanspruchung  $\sigma$  bzw.  $\tau$

- **Abminderungsfaktor für  $\sigma$**

$$\chi_p = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,055 \cdot (3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \quad (\psi \text{ stellt das Verhältnis der Beulfeldrandnormalspannungen } \sigma_{Ed,o} / \sigma_{Ed,u} \text{ dar und beträgt:}$$

$$- \text{ im Falle der Einwirkung von } N: \quad \psi = \frac{\sigma_{Ed,o}}{\sigma_{Ed,u}} = 1$$

$$- \text{ im Falle der Einwirkung von } M_y: \quad \psi = \frac{\sigma_{Ed,o}}{\sigma_{Ed,u}} = -1$$

- **Abminderungsfaktor für  $\tau$**   $\chi_w = \frac{0,83}{\bar{\lambda}_p}$

- Rückrechnung der Beultraglast  $M_{T,Ing,BN}$  bei gegebener Belastung  $N$  bzw.  $M_y$  aus dem Grenzzustand des Beulnachweises:

(mit  $\gamma_{M1} = 1,0$ )

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{\chi_p}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{Ed}}{\chi_w}\right)^2} = \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

## 7.5 Beultraglastkurven nach dem „Realen Modell“ und dem „Ingenieurmodell“ für kombinierte Beanspruchung $M_T + N$

### 7.5.1 Vorbemerkungen zu den Diagrammen in Abschnitt 7.5.2 bis 7.5.5

Neben den Traglastkurven für kombinierte Beanspruchung aus Torsionsmoment  $M_T$  und Drucknormalkraft  $N$ , sind in den Diagrammen in Abschnitt 7.5.2 bis 7.5.5 auch die Werte der bezogenen idealen Verzweigungslasten  $N_{Real,crit} / N_{pl}$  und  $N_{Ing,crit} / N_{pl}$ , sowie der bezogene Traglasten  $N_{Real} / N_{pl}$ ,  $N_{Ing,FE} / N_{pl}$  und  $N_{Ing,BN} / N_{pl}$  unter alleiniger Drucknormalkraftbeanspruchung auf der horizontalen Achse aufgetragen.

Die ideale Verzweigungslasten  $N_{Ing,crit}$  sowie die Traglasten  $N_{Ing,FE}$  am Ingenieurmodell werden durch entsprechende „Hochrechnung“ der jeweils numerisch errechneten Kantenlinienlast  $n_{Ing,crit}$  bzw.  $n_{Ing,FE}$  ermittelt:

$$N_{Ing,crit} = n_{Ing,crit} \left[ \frac{N}{m} \right] \cdot \frac{A[m^2]}{t[m]} \quad \text{bzw.:} \quad N_{Ing,FE} = n_{Ing,FE} \left[ \frac{N}{m} \right] \cdot \frac{A[m^2]}{t[m]}$$

$A$  ... Querschnittsfläche des Kastens  $A = b_m \cdot (t_o + t_u) + 2 \cdot h_m \cdot t_s$

$t$  ... Blechdicke ( $t_o = t_u = t_s = t$ )

Die Bezugsgröße  $N_{pl}$  entspricht der plastischen Normalkrafttragfähigkeit des Querschnitts ( $N_{pl} = f_y \cdot A$ ).

Wie der Übersicht in *Abb.7-3* entnommen werden kann, werden die Traglasten für kombinierte Beanspruchung auf zwei unterschiedliche Arten ermittelt. Einerseits wird die Normalkraft  $N$  als Vorlast aufgebracht und das Torsionsmoment  $M_T$  bis zum Erreichen der Traglast gesteigert. Andererseits wird die Normalkraft  $N$  und das Torsionsmoment  $M_T$  mit einem konstanten Verhältnis  $e = M_T / N$  bis zum Traglastniveau gesteigert. Diese Lastpfade gelten auch für die jeweiligen Eigenwertanalyse zur Generierung der Eigenmode-konformen Imperfektionsformen.

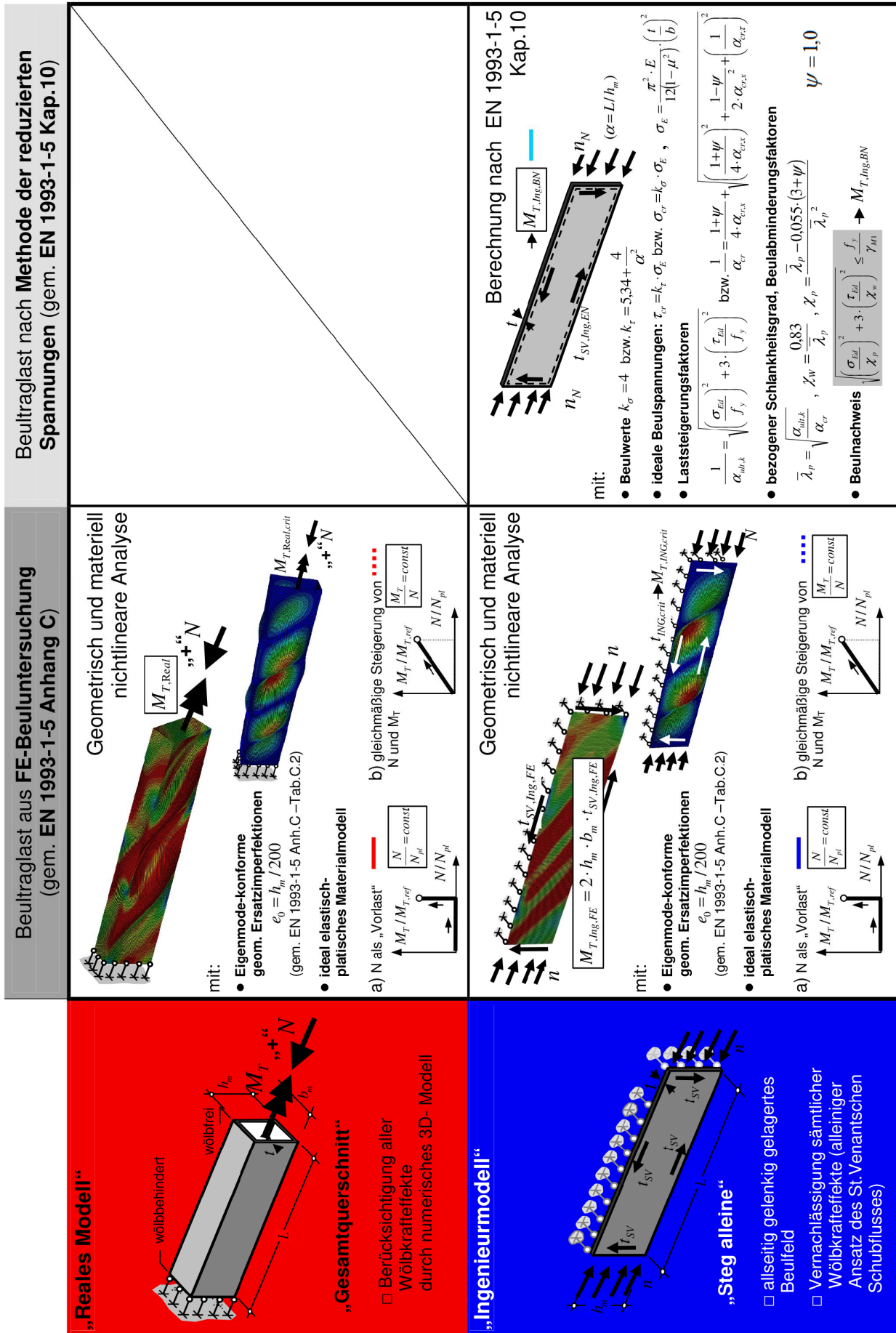


Abb.7-3: Übersicht der Traglastkurven für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T + N$ )



### 7.5.2 Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 1,0$ bzw. $h_m/t = 80$ – $M_T+N$

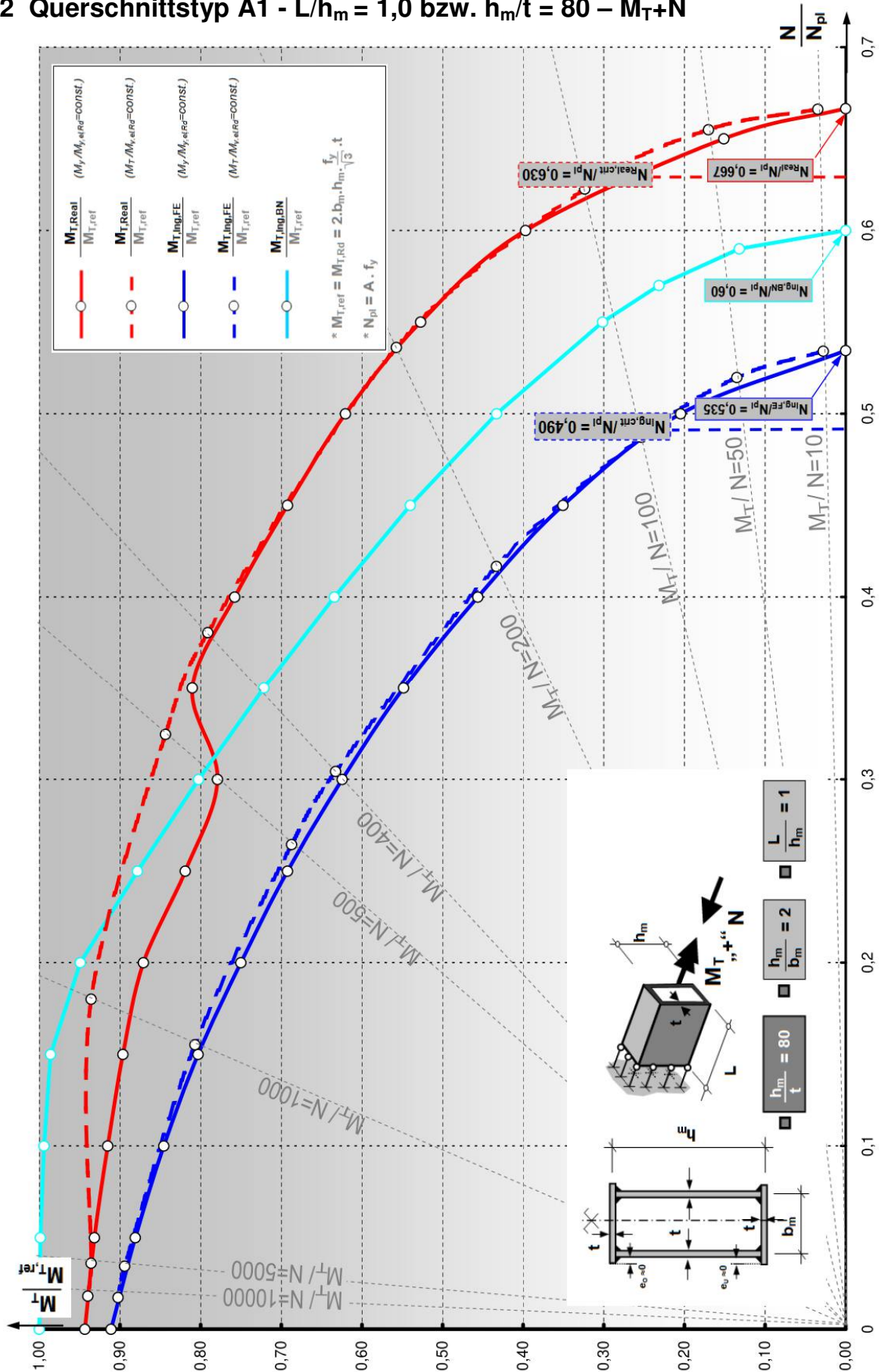


Abb.7-4: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 1,0, h_m/t=80$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+N$ )

### 7.5.3 Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 5,0$ bzw. $h_m/t = 80$ – $M_T+N$

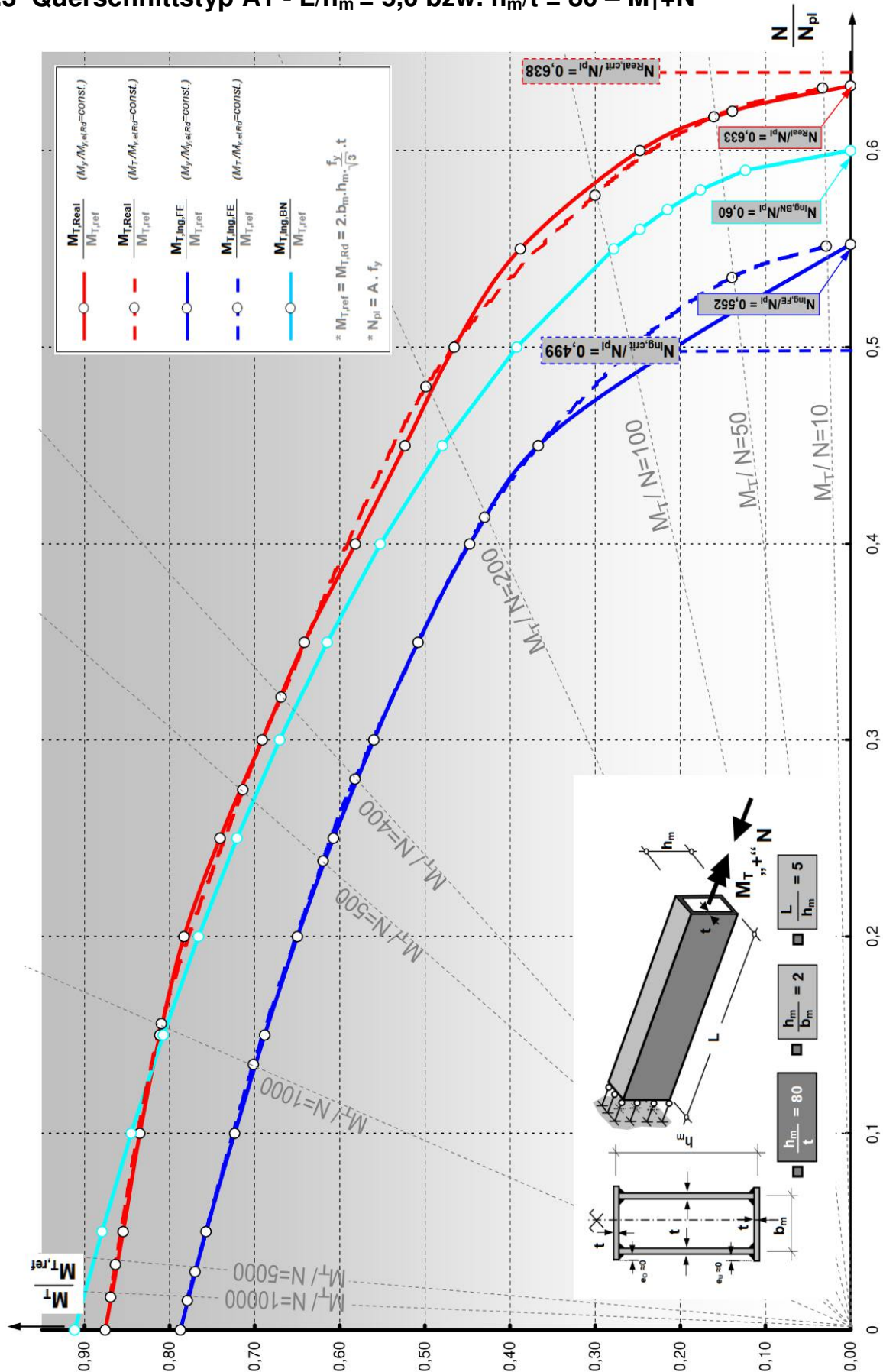


Abb.7-5: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 5,0$ ,  $h_m/t=80$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+N$ )



### 7.5.4 Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 1,0$ bzw. $h_m/t = 160$ - $M_T+N$

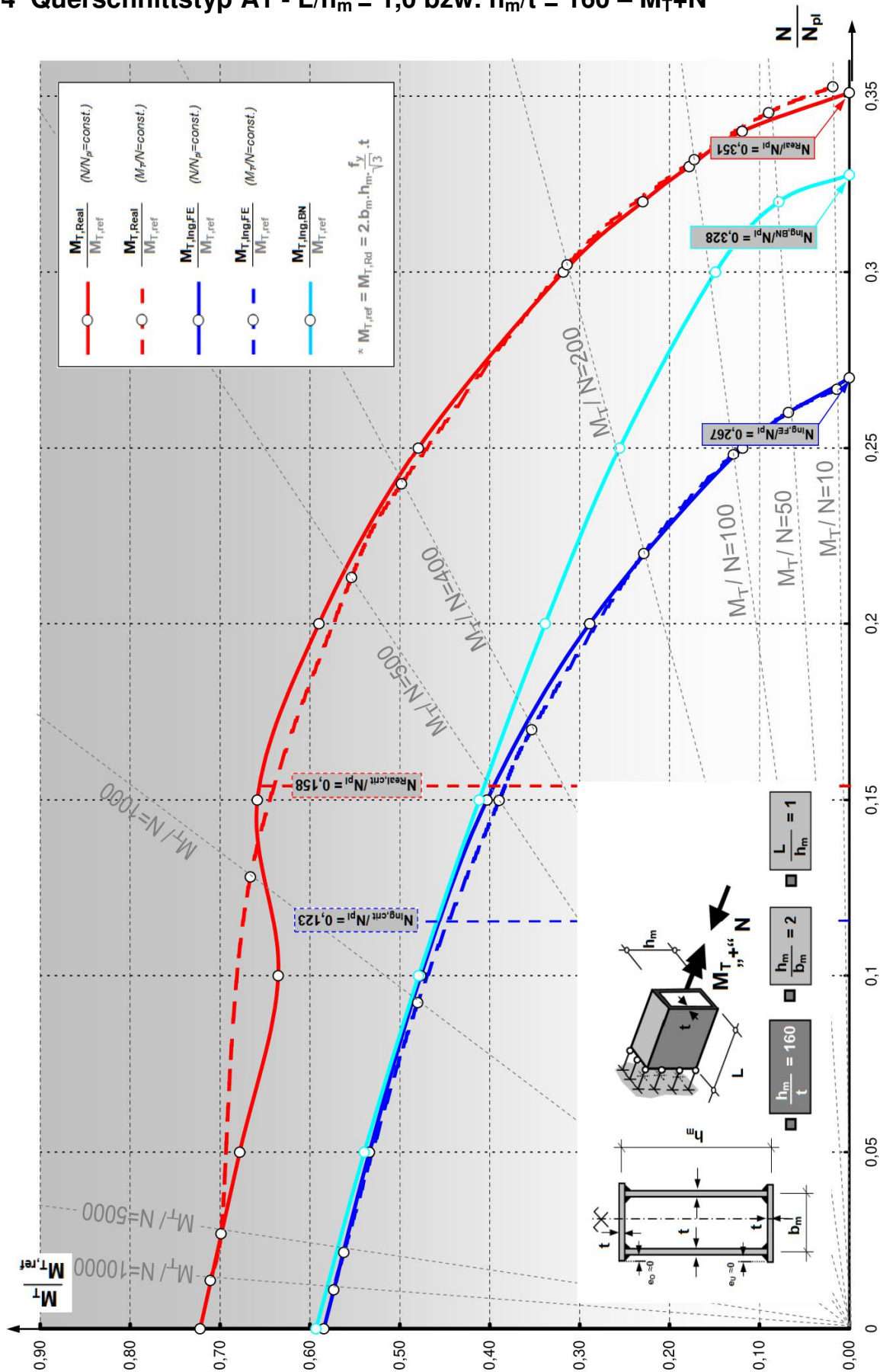


Abb.7-6: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 1,0$ ,  $h_m/t=160$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+N$ )

### 7.5.5 Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 5,0$ bzw. $h_m/t = 160$ - $M_T+N$

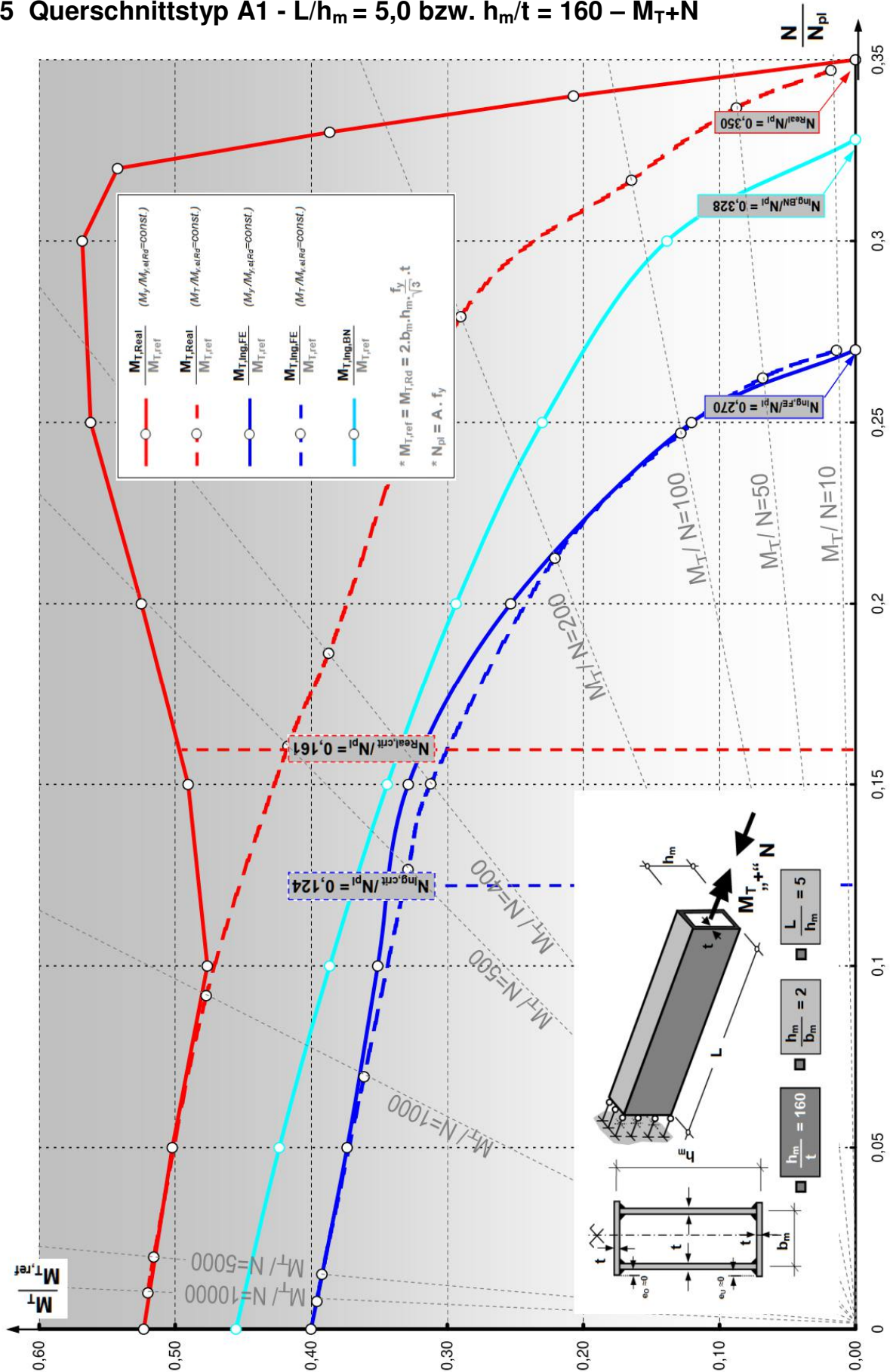


Abb.7-7: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 5,0$ ,  $h_m/t=160$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+N$ )

### 7.5.6 Bemerkungen zu den Traglastkurven in Abschnitt 7.5.2 bis 7.5.5

Wie in *Abb.7-4* und *Abb.7-5* zu erkennen ist, liegt die am „Realen Modell“ ermittelte tatsächliche Beultraglast für kleine Beulschlankheiten ( $h_m/t = 80$ ) bei alleiniger Torsionsbeanspruchung unter der, durch die Methode der reduzierten Spannungen prognostizierten Beultraglast anhand des „Ingenieurmodells“. Erklärungsmodelle hierfür wurden bereits in Abschnitt 6 diskutiert.

Wirkt nun neben dem Torsionsmoment auch eine Drucknormalkraft, hebt sich diese Traglastunterschätzung durch das vereinfachte „Ingenieurmodell“ bereits bei sehr kleinen Verhältnissen  $N/N_{pl}$  der einwirkenden Normalkraft auf. Je höher der Normalkraftsanteil an der kombinierten Beanspruchung ist, desto stärker sinkt die durch  $M_{T,Ing,BN}/M_{T,ref}$  prognostizierte Traglast (türkise Linie) unter die tatsächliche Beultraglast.

Bei alleiniger Normalkraftbeanspruchung des Kastenträgers ( $M_T/M_{T,ref} = 0$ ) zeigen sich schlussendlich durchwegs deutlich niedrigere Traglasten  $N_{Ing,BN}/N_{pl}$  im Vergleich zur tatsächlichen Traglast  $N_{Real}/N_{pl}$ .

Während die Beultraglastkurven des „Ingenieurmodells“ (blaue durchgängige bzw. strichlierte Linie) weitestgehend unabhängig vom Lastpfad (Drucknormalkraft als Vorlast bzw. gleichmäßige Steigerung von Druckkraft und Torsionsmoment) ist, zeigt sich für den in Abschnitt 7.5.5 untersuchten Kastenträger mit großer Beulschlankheit und großer Trägerlänge Gegenteiliges. Beim Aufbringen der Normalkraft als Vorlast und anschließender Steigerung des Torsionsmomentes bis zum Traglastniveau zeigen sich ab  $N/N_{pl} = 0,1$  deutlich erhöhte Beultragfähigkeit, gegenüber der gleichzeitigen Steigerung von  $M_T$  und  $N$ . In *Abb.7-8* sind für den in Abschnitt 7.5.5 untersuchten Querschnitt die zu verschiedenen Lastniveaus zugehörigen Beulverformungen für ein Vorlastniveau von  $N/N_{pl} = 0,3$  aufgetragen.

Die Ursache für diesen Effekt der deutlich höheren Traglast bei der Aufbringung von  $N$  als Vorlast liegt in den, für die Berechnung angesetzten Eigenmode-konformen Imperpektionsfiguren. Wird die Normalkraft im Fall des in Abschnitt 7.5.5 untersuchten Querschnittes als Vorlast aufgebracht, so ergeben sich für die Verhältnisse  $N/N_{pl} \geq N_{Real,crit}/N_{pl} (= 0,161)$  in der Eigenwertanalyse rein normalkraftinduzierte Beuleigenfiguren, da die ideale Verzweigungslast bereits während des Aufbringens der Vorlast erreicht wird. Diese rein normalkraftinduzierte Beulfigur wird nun als Imperfektion für die Traglastberechnung angesetzt.

Im Rahmen der Traglastberechnung kann  $N$  nun zur Gänze als Vorlast auf die imperfekte Struktur aufgebracht werden. Für das Aufbringen und schrittweise Steigern von  $M_T$  wirkt diese reine normalkraftinduzierte Beulfigur nun derart günstig, so dass die Traglasten  $M_T/M_{T,ref}$  sogar bis über die Traglast  $M_T/M_{T,ref}$  unter alleiniger Torsionsbeanspruchung ( $N/N_{pl} = 0$ ) ansteigen.

Somit sind diese erhöhten Traglasten in Abschnitt 7.5.5 unter dem Aspekt der „günstigen“ Imperfektionsform zu sehen und eignen sich nicht für die Angabe der tatsächlichen Beultraglasten. Dennoch bestätigt dieser Effekt zumindest die erwartungsgemäße Tatsache, dass die Beultraglast langer, schlanker Kastenträger sehr sensibel bezüglich der Imperfektionsannahme reagiert.

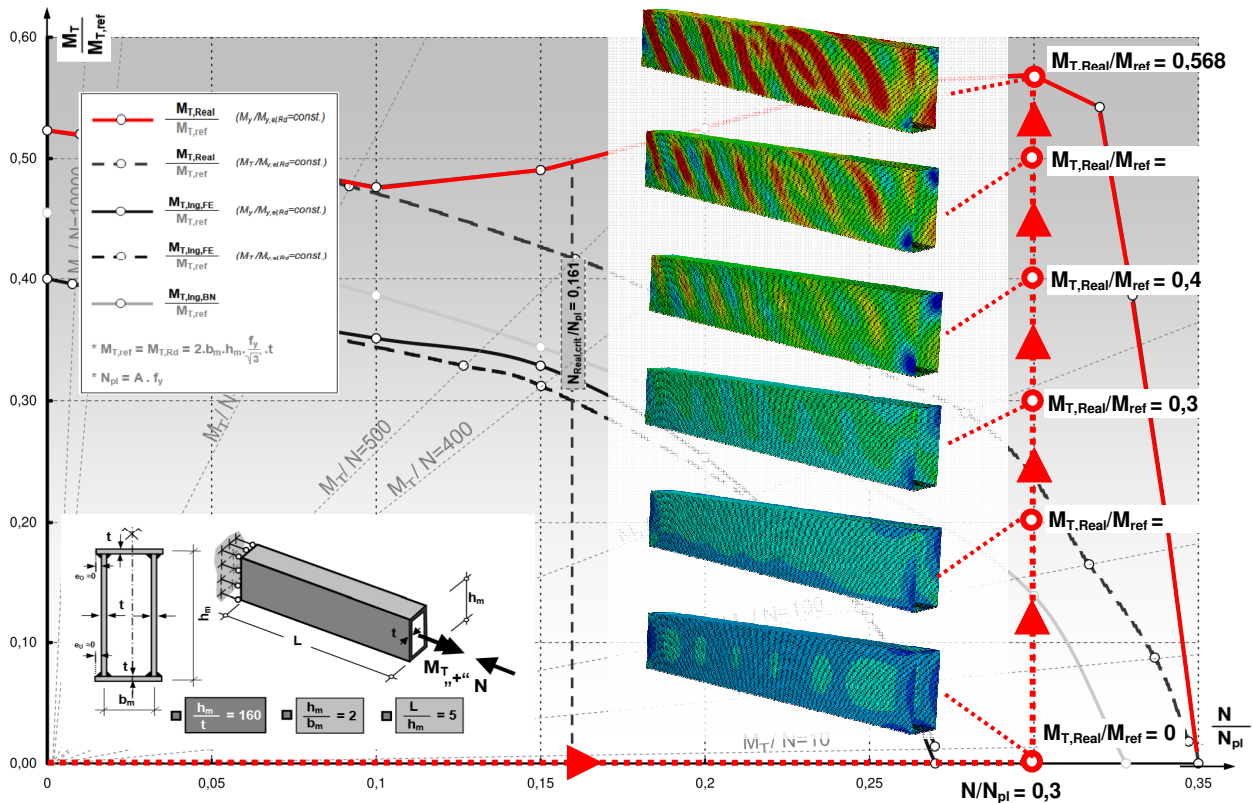


Abb.7-8: Beulverformungen für Traglastberechnung mit Vorlastniveau  $N/N_{pl}=0,3$  (Querschnitt A1- $h_m/t=160, L/h_m=5$ )

## 7.6 Beultraglastkurven nach dem „Realen Modell“ und dem „Ingenieurmodell“ für kombinierte Beanspruchung $M_T + M_y$

### 7.6.1 Vorbemerkungen zu den Diagrammen in Abschnitt 7.6.2 bis 7.6.5

Wie auch schon in Abschnitt 7.5 dargestellt, sind neben den Traglastkurven für kombinierte Beanspruchung aus Torsionsmoment  $M_T$  und Biegemoment  $M_y$  in den Diagrammen 7.5.2 bis 7.5.5 auch die Werte der bezogenen idealen Verzweigungslasten  $M_{Real,crit} / M_{y,el,Rd}$  und  $M_{Ing,crit} / M_{y,el,Rd}$ , sowie der bezogenen Traglasten  $M_{y,Real} / M_{y,el,Rd}$ ,  $M_{y,Ing,FE} / M_{y,el,Rd}$  und  $M_{y,Ing,BN} / M_{y,el,Rd}$  unter alleiniger Biegemomentenbeanspruchung eingetragen.

Die ideale Verzweigungslasten  $M_{Ing,crit}$  sowie die Traglasten  $M_{Ing,FE}$  am „Ingenieurmodell“ werden durch entsprechende „Hochrechnung“ der jeweils numerisch errechneten Kantenlinienlast  $n_{M,Ing,crit}$

bzw.  $n_{M,Ing,FE}$  ermittelt:

$$M_{Ing,crit} = n_{M,Ing,crit} \left[ \frac{N}{m} \right] \cdot \frac{W_y [m^2]}{t [m]} \quad \text{bzw.:} \quad M_{Ing,FE} = n_{M,Ing,FE} \left[ \frac{N}{m} \right] \cdot \frac{W_y [m^2]}{t [m]}$$

$W_y$  ... elastisches Widerstandsmoment des Kasten  $W_y = \frac{2 \cdot t_s \cdot h_m^3}{12} + \left( \frac{h_m}{2} \right)^2 \cdot b_m \cdot (t_o + t_u)$

$t$  ... Blechdicke ( $t_o = t_u = t_s = t$ )

Die Bezugsgröße  $M_{y,el,Rd}$  entspricht der elastischen Biegetragfähigkeit des Querschnitts

$$(M_{y,el,Rd} = f_y \cdot W_y).$$

Wie der Übersicht in *Abb.7-9* entnommen werden kann, werden die Traglasten für kombinierte Beanspruchungen erneut auf zwei unterschiedliche Arten ermittelt. Einerseits wird das Biegemoment  $M_y$  als Vorlast aufgebracht und das Torsionsmoment  $M_T$  bis zum Erreichen der Traglast gesteigert. Andererseits wird das Biegemoment  $M_y$  und das Torsionsmoment  $M_T$  mit einem konstanten Verhältnis  $M_T / M_y$  bis zum Traglastniveau gesteigert. Dies gilt auch für die jeweilige Eigenwertanalyse, zur Generierung der Eigenmode-konformen Imperfektionsform.



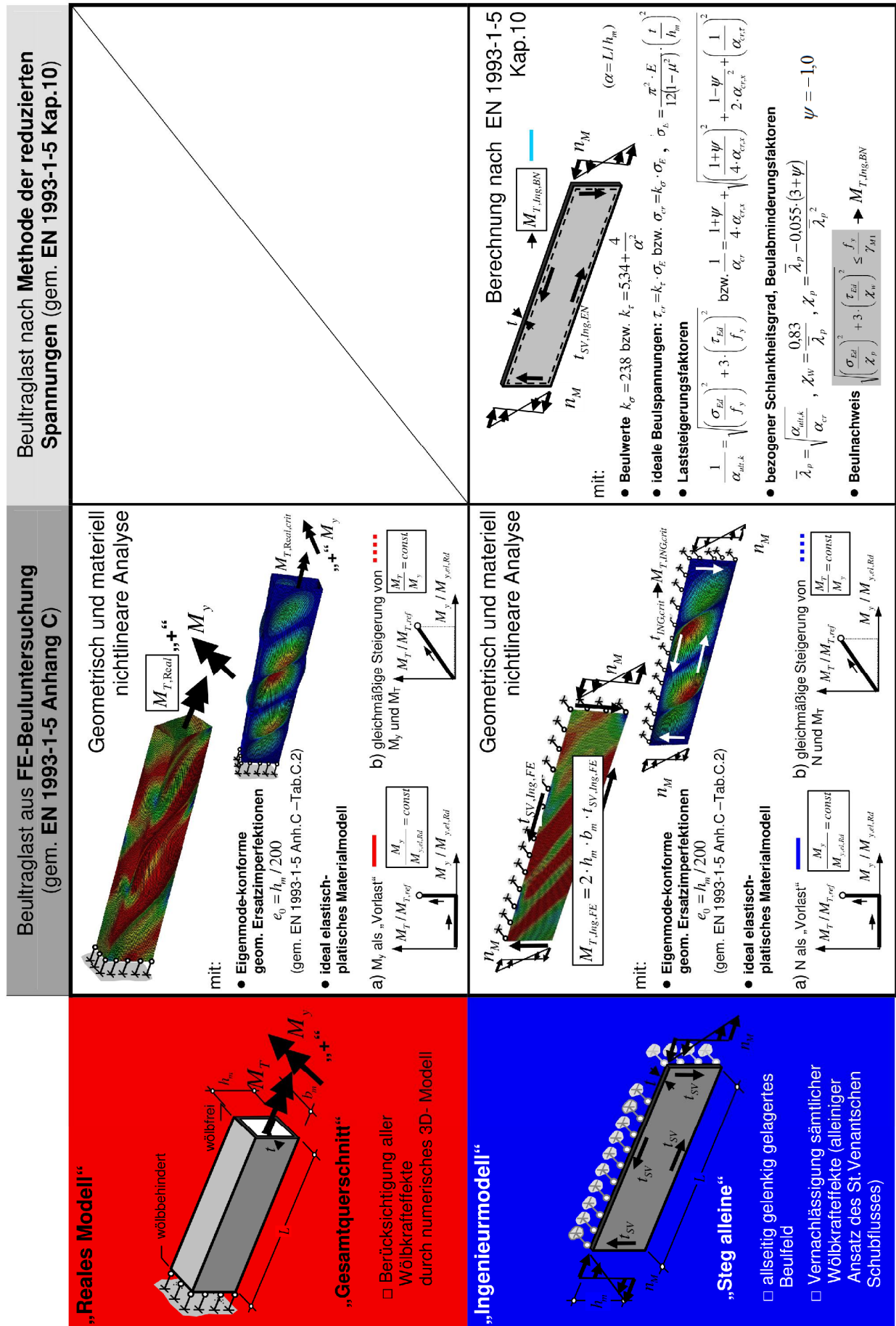


Abb.7-9: Übersicht der Traglastkurven für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T + M_y$ )

7.6.2 Querschnittstyp A1 -  $L/h_m = 1,0$  bzw.  $h_m/t = 80$  –  $M_T + M_y$

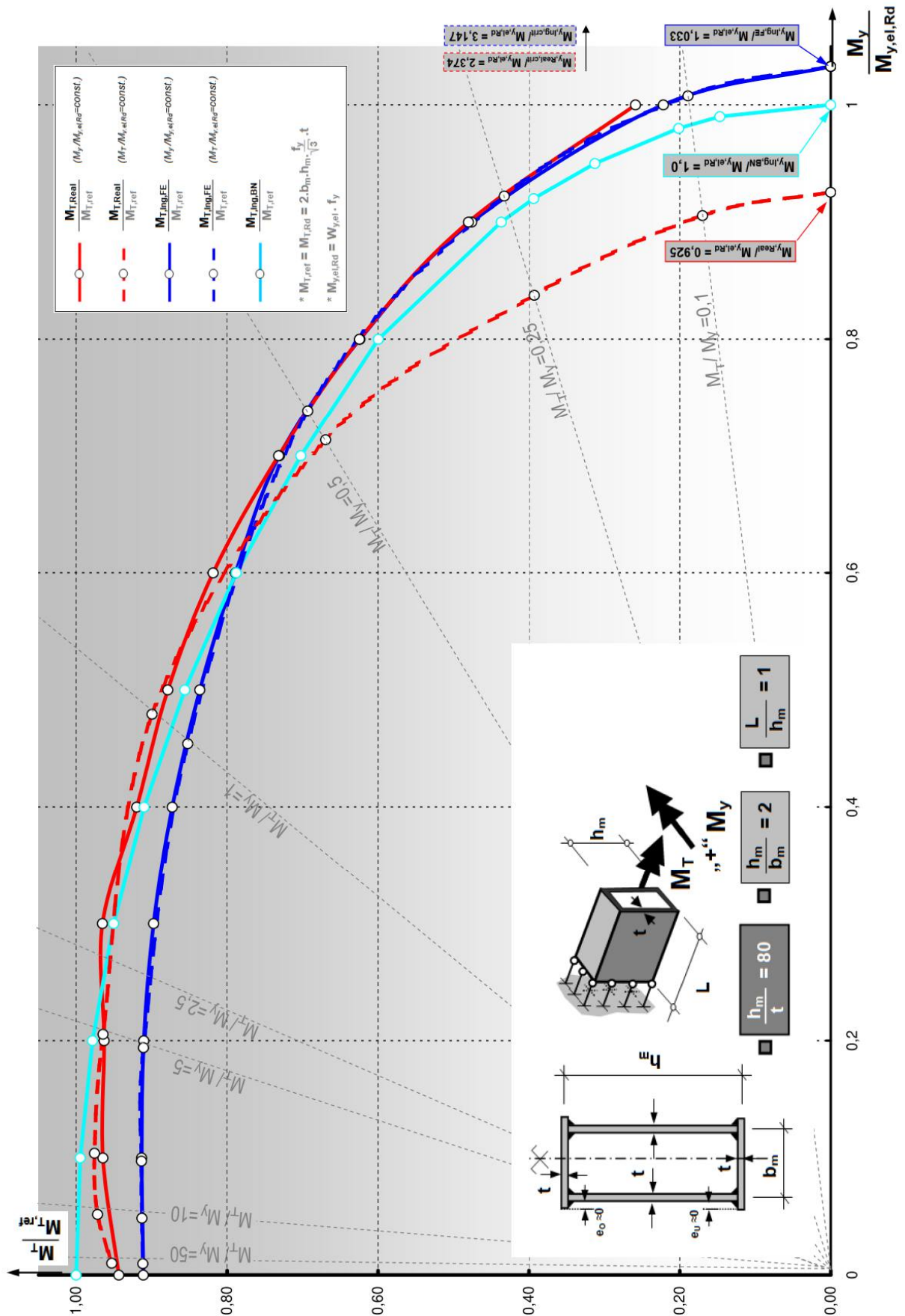


Abb.7-10: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 1,0$ ,  $h_m/t=80$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T + M_y$ )

### 7.6.3 Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 5,0$ bzw. $h_m/t = 80$ - $M_T + M_y$

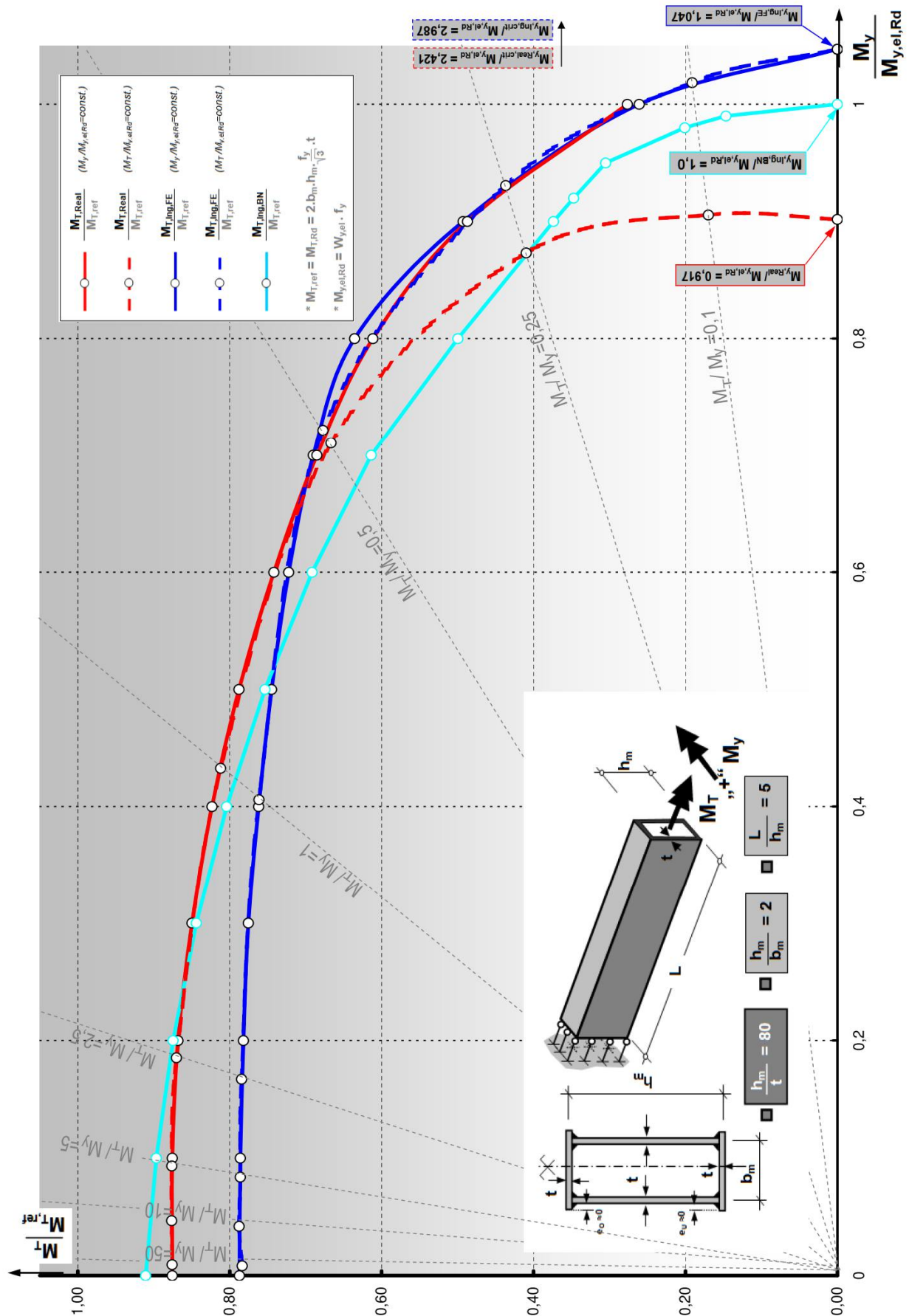


Abb.7-11: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 5,0$ ,  $h_m/t=80$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+M_y$ )



### 7.6.4 Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 1,0$ bzw. $h_m/t = 160$ - $M_T + M_y$

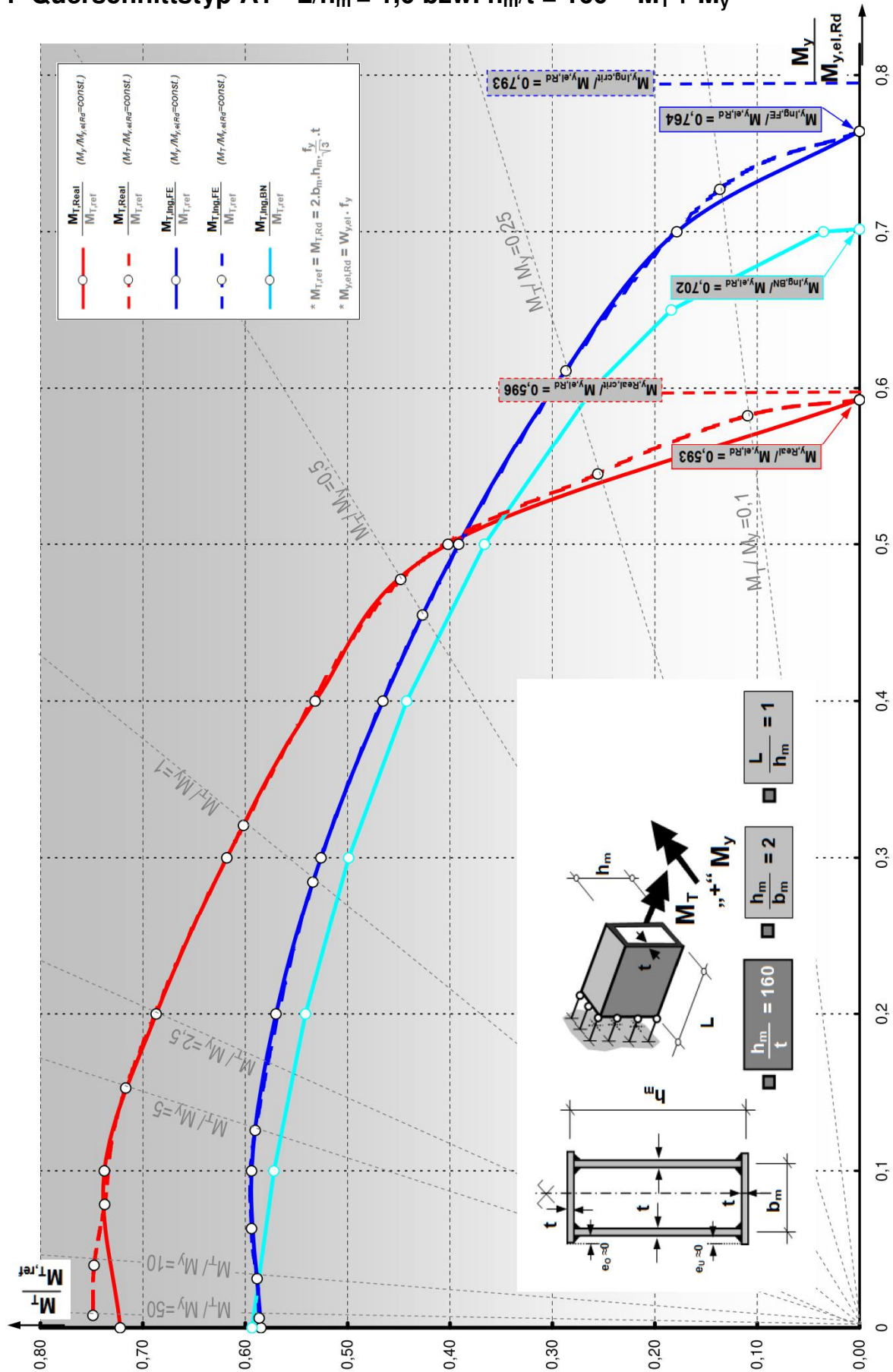


Abb.7-12: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 1,0$ ,  $h_m/t=80$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T + M_y$ )

### 7.6.5 Querschnittstyp A1 - $L/h_m = 5,0$ bzw. $h_m/t = 160$ - $M_T + M_y$

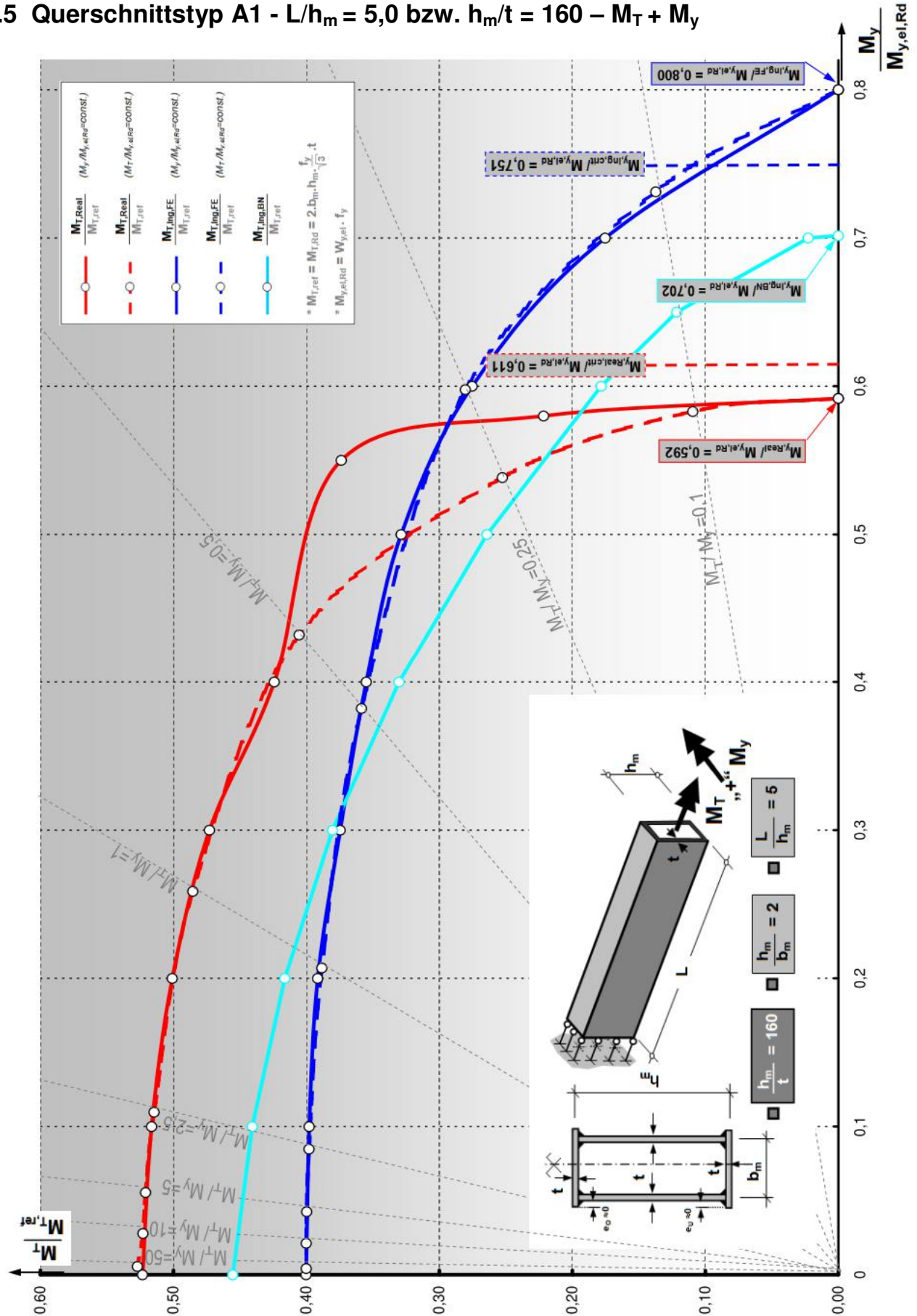


Abb.7-13: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 5,0$ ,  $h_m/t=160$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T + M_y$ )

## 7.6.6 Bemerkungen zu den Traglastkurven in Abschnitt 7.6.2 bis 7.6.5

Bei kombinierter Beanspruchung des einseitig wölbbehinderten Kastenträgers, bestehend aus Torsionsmoment  $M_T$  und Biegemoment  $M_y$ , verlaufen die Traglastkurven des „Ingenieurmodells“ für zunehmenden Biegemomentenanteil  $M_y / M_{pl}$  oberhalb jener des „Realen Modells“. Die am „Ingenieurmodell“ ermittelten Traglasten  $M_{y,Ing,FE} / M_{y,el,Rd}$  bzw.  $M_{y,Ing,BN} / M_{y,el,Rd}$  für reine Biegemomentenbeanspruchung ( $M_T / M_{T,ref} = 0$ ) liegen schlussendlich bei allen untersuchten Querschnitten über der tatsächlichen Beultragfähigkeiten  $M_{T,Real} / M_{T,ref}$ .

Diese Beobachtung ist bei langen, beuschlanken Kastenträgern (Vgl. *Abb.7-13*) wesentlich stärker ausgeprägt, als bei kurzen Trägerlängen und gedrungenen Querschnittsformen (Vgl. *Abb.7-10*)

Der Grund hierfür ist in der Spannungsverteilung zufolge reinem Biegemoment am Gesamtquerschnitt zu suchen. Aufgrund des einwirkenden Biegemomentes kommt es im Querschnittsuntergurt zu einer, über die Breite konstanten Druckspannung. Obwohl die Beuschlankheit der Gurtbleche am untersuchten Querschnitt nur halb so groß ist, wie jene des Stegbleches, kommt es aufgrund der wesentlich ungünstigeren Spannungsverteilung am Untergurt zu einem Gurtbeulen bei Erreichen des Traglastniveaus. Da das konstant gedrückte Untergurtblech nicht Teil des „Ingenieurmodells“ ist, kann diese Versagensform und somit das tatsächliche Tragverhalten nicht zutreffend erfasst werden. Das „Ingenieurmodell“ täuscht somit eine deutlich höhere Traglast auf reine Biegemomentenbeanspruchung vor.

Der Verlauf der Traglastkurven aus *Abb.7-14* lässt sich nun mit obigem Erklärungsmodell analysieren:

In Kombination der Biegemomentenbeanspruchung mit Torsion zeigt sich zunächst für kleine Verhältnisse  $M_y / M_{y,el,Rd}$  Stegbeulen als Versagensform. Die mit dem „Ingenieurmodell“ prognostizierten Traglasten liegen aufgrund der vernachlässigten Einspannwirkung zwischen Steg- und Gurtblech unterhalb der tatsächlichen Traglasten. Ab einem Verhältnis  $M_y / M_{y,el,Rd}$  von ungefähr 0,4 wird die Tragfähigkeit des „Realen Modell“ durch ein Ausbeulen des druckbeanspruchten Gurts bestimmt. Die tatsächlichen Traglasten sinken mit zunehmenden Biegemomentenanteil  $M_y / M_{y,el,Rd}$  deutlich unter jene des „Ingenieurmodells“, das nur den Beulnachweis des Steges beinhaltet.

Als Lösung kann hier vorgeschlagen werden, stets zwei „Ingenieurmodelle“ zu betrachten. Einerseits das herausgelöste Stegblech mit der St.Venant’schen Schubspannung und linear verteilter Längsnormalspannung und andererseits das herausgelöste druckbeanspruchte Gurtblech mit der St.Venant’schen Schubspannung und konstanter Längsdruckspannung. Die kleinste der beiden so errechneten Traglasten kann in weiterer Folge als konservative Prognose der tatsächlichen Traglast herangezogen werden.

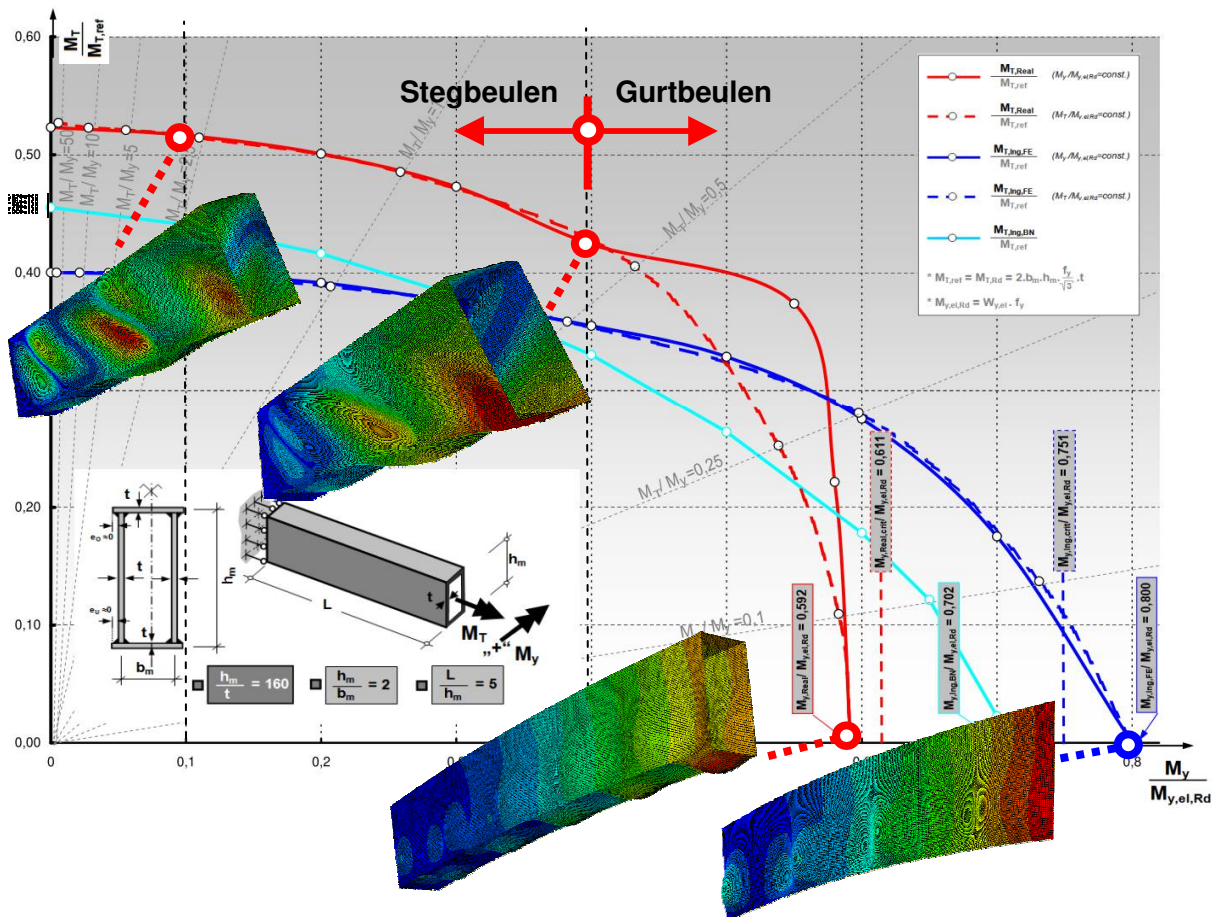


Abb.7-14: Versagensformen bei kombinierter Beanspruchung  $M_T+M_y$  (Querschnitt A1,  $h_m/t=160$ ,  $L/h_m=5$ )

# Literaturverzeichnis

- [ 1 ] ABAQUS, v. 6.14-3, Dassault Systems/Simulia, Providence, RI, USA 2014.
- [ 2 ] Guggenberger, W.: Vorlesungsskriptum - Stabilität VU, Institut für Baustatik der TU Graz, WS 2017/2018.
- [ 3 ] Hafner S.: Masterarbeit – Gesamtstabilitätsverhalten geschweisster Kastenquerschnitte unter Druck und Biegung, Institut für Stahlbau der TU Graz, 2012
- [ 4 ] <http://de.scribd.com/doc/34693510/010-Kurs-1-Kapitel-4-Torsion#scribd>, Datum des Zugriffs: 17.1.2018
- [ 5 ] Lindner, J., Scheer, J., Schmidt, H.: Stahlbauten. Erläuterungen zur DIN 18800 Teil 1 bis 4, Beuth Kommentare, Verlag Ernst&Sohn, Berlin 1994.
- [ 6 ] ÖNORM EN 1993 - 1 - 1: Eurocode 3. Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten. Teil 1 - 1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, 2014.
- [ 7 ] ÖNORM B 1993 - 1 - 1: Eurocode 3. Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten. Teil 1 - 1: Allgemeine Bemessungsregeln – Nationale Festlegungen zu ÖNORM EN 1993-1-1, nationale Erläuterungen und nationale Ergänzungen, 2017.
- [ 8 ] ÖNORM EN 1993 - 1 - 5: Eurocode 3. Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten. Teil 1 - 5: Plattenförmige Bauteile, 2017.
- [ 9 ] ÖNORM B 1993 - 1 - 5: Eurocode 3. Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten. Teil 1 - 5: Plattenförmige Bauteile – Nationale Festlegungen zu ÖNORM EN 1993-1-5, nationale Erläuterungen und nationale Ergänzungen, 2018.
- [ 10 ] Petersen, C.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen, Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1982.
- [ 11 ] Plakolb M.: Masterprojekt – Elastische Lösung der Wölbkrafttorsion für Hohlkastenquerschnitte, Institut für Stahlbau der TU Graz, 2012
- [ 12 ] Rusch, A., Lindner, J.: Tragfähigkeit von beulgefährdeten Querschnittselementen unter Berücksichtigung von Imperfektionen. Stahlbau, Vol. 70, Issue 10, S.765-774, Verlag Ernst&Sohn, Berlin 2001
- [ 13 ] Rüdiger , D.: Wölbkrafttorsion dünnwandiger Hohlquerschnitte. Archive of Applied Mechanics, Vol.33, Issue 5, S.346-350, Verlag Springer, 1964
- [ 14 ] Unterweger, H.: Vorlesungsskriptum - Stahl- und Verbundbrücken VU, Institut für Stahlbau der TU Graz, 2011.
- [ 15 ] Unterweger, H.: Vorlesungsskriptum - Stahlbau VU, Institut für Stahlbau der TU Graz, 2014.



# Abbildungsverzeichnis

Abb.0-1: Übersicht der untersuchten Traglastmodelle bei einseitiger Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine).....	13
Abb.0-2: Übersicht der untersuchten Traglastmodelle bei beidseitiger Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine).....	13
Abb.0-3: Übersicht der untersuchten Traglastmodelle bei einseitiger Wölbbehinderung ( $M_T + N$ )...	14
Abb.0-4: Übersicht der untersuchten Traglastmodelle bei einseitiger Wölbbehinderung ( $M_T + M_y$ ) .	14
Abb.1-1.: differentielles Stabelement – unverformt .....	16
Abb.1-2.: differentielles Stabelement – verformt .....	16
Abb.1-3.: geometrischer Zusammenhang Verdrehung-Verschiebung.....	16
Abb.1-4.: infinitesimales Element.....	16
Abb.1-5.: kinematische Zusammenhänge der Schubverzerrung .....	16
Abb.1-6.: Vergleich der Schubspannungsverteilung am offenen und geschlossenen Querschnitt...	17
Abb.1-7.: Verwölbung am offenen Querschnitt.....	18
Abb.1-8.: Verwölbung am geschlossenen Querschnitt.....	18
Abb.1-9.: Aufstellung des Ringintegrals .....	18
Abb.1-10.: Querschnittsverwölbung $u$ .....	21
Abb. 1-11.: Infinitesimales Element - verformt.....	23
Abb. 1-12.: Gleichgewicht am infinitesimalen Element.....	23
Abb.2-1: Gleichgewicht am infinitesimalen Stabelement.....	26
Abb.4-1: Abklingverhalten von $M_{x,\omega}$ für Querschnittstyp A.....	48
Abb.4-2: Abklingverhalten von $M_{x,\omega}$ für Querschnittstyp B.....	49
Abb.4-3: Abklingverhalten von $M_{x,\omega}$ für Querschnittstyp C.....	50
Abb.4-4: Abklingverhalten von $M_\omega$ für Querschnittstyp A.....	51
Abb.4-5: Abklingverhalten von $M_\omega$ für Querschnittstyp B.....	51
Abb.4-6: Abklingverhalten von $M_\omega$ für Querschnittstyp C.....	52
Abb.4-7: bezogene Wölbtorsionsmomente $M_{x,\omega}/M_T$ für Querschnittstyp A.....	53
Abb.4-8: bezogene Wölbtorsionsmomente $M_{x,\omega}/M_T$ für Querschnittstyp B – Variation $h_m/b_m$ und $t_o/t_s$ .....	53
Abb.4-9: bezogene Wölbtorsionsmomente $M_{x,\omega}/M_T$ für Querschnittstyp C – Variation $h_m/b_m$ und $t_o/t_s$ .....	54
Abb.4-10: bezogene Wölbmomente $M_\omega/(M_T \cdot b_m)$ für Querschnittstyp A.....	55
Abb.4-11: bezogene Wölbmomente $M_\omega/(M_T \cdot b_m)$ für Querschnittstyp B.....	56
Abb.4-12: bezogene Wölbmomente $M_\omega/(M_T \cdot b_m)$ für Querschnittstyp C.....	56
Abb.4-13: bezogene Wölbnormalspannungen $\sigma_{\omega,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$ für Querschnittstyp A.....	58
Abb.4-14: bezogene Wölbnormalspannungen $\sigma_{\omega,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$ für Querschnittstyp B.....	58

Abb.4-15: bezogene Wölbnormalspannungen $\sigma_{\omega,k}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$ für Querschnittstyp C am Untergurt .....	59
Abb.4-16: bezogene Wölbnormalspannungen $\sigma_{\omega,j}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$ für Querschnittstyp C am Obergurt .....	59
Abb.4-17: bezogene Wölbschubspannungen $\tau_{\omega,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t))$ für Querschnittstyp A in Obergurtmitte .....	61
Abb.4-18: bezogene Wölbschubspannungen $\tau_{\omega,j}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t))$ für Querschnittstyp A in Stegmitte .....	61
Abb.4-19: bezogene Wölbschubspannungen $\tau_{\omega,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_o))$ für Querschnittstyp B in Obergurtmitte .....	62
Abb.4-20: bezogene Wölbschubspannungen $\tau_{\omega,j}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$ für Querschnittstyp B in Stegmitte .....	62
Abb.4-21: bezogene Wölbschubspannungen $\tau_{\omega,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$ für Querschnittstyp C in Obergurtmitte .....	63
Abb.4-22: bezogene Wölbschubspannungen $\tau_{\omega,j}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$ für Querschnittstyp C am Obergurtrand .....	63
Abb.4-23: bezogene Wölbschubspannungen $\tau_{\omega,i}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$ für Querschnittstyp C in Stegmitte .....	64
Abb.4-24: bezogene Wölbschubspannungen $\tau_{\omega,m}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$ für Querschnittstyp C an der Stegunterseite .....	64
Abb.4-25: bezogene Wölbschubspannungen $\tau_{\omega,o}/(M_T/(2 \cdot b_m \cdot h_m \cdot t_s))$ für Querschnittstyp C in Untergurtmitte .....	65
Abb.5-6: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp A .....	76
Abb.5-7: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp B ( $t_o=0,5 t_s$ ) .....	80
Abb.5-8: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp B ( $t_o=2 t_s$ ) .....	81
Abb.5-9: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp B ( $t_o=4 t_s$ ) .....	82
Abb.5-10: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp C ( $t_u=0,5 t_s$ ) .....	85
Abb.5-11: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp C ( $t_u=2 t_s$ ) .....	86
Abb.5-12: Gegenüberstellung Beulspannungsnachweis nach RM1 und RM2 für Querschnittstyp C ( $t_u=4 t_s$ ) .....	87
Abb.6-1: Schematische Darstellung bzw. FE-Modell des „Realen Modells“ .....	92



Abb.6-2: Schematische Darstellung bzw. FE-Modell des „Ingenieurmodells“ .....	93
Abb.6-3: Quelle [8]: Ausschnitt aus Bild C.2 – Modellierung des Werkstoffverhaltens.....	95
Abb.6-4: Quelle [8]: Bild C.1 – Modellierung geometrischer Ersatzimperfectionen .....	96
Abb.6-5: Quelle [8]: Bild 5.2 – Beitrag des Steges $\chi$ zur Schubbeanspruchbarkeit.....	97
Abb.6-6: Übersicht der Traglastkurven für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine) .....	99
Abb.6-7: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=1,0$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine).....	100
Abb.6-8: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=5,0$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine).....	101
Abb.6-9: Traglastkurven - Querschnittstyp A2 ( $L/h_m=5,0$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine).....	102
Abb.6-10: Traglastkurven - Querschnittstyp B1 ( $L/h_m=1,0$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine) .....	103
Abb.6-11: Traglastkurven - Querschnittstyp B1 ( $L/h_m=5,0$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine) .....	104
Abb.6-12: Schrittweise Modellierung der Vereinfachungen aus Tab.6-2 am „Realen Modell“.....	106
Abb.6-13: Einflüsse auf die Beultraglastdifferenz $M_{T,Real} - M_{T,Ing,FE}$ - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=5,0$ bzw. $h_m/t=80$ ).....	107
Abb.6-14: Einflüsse auf die Beultraglastdifferenz $M_{T,Real} - M_{T,Ing,FE}$ - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=5,0$ bzw. $h_m/t=160$ ).....	108
Abb.6-15: Gegenüberstellung von numerischen Ergebnisverläufen für das „Reale Modell“ und das wölbfreie System mit gelenkigem Steg-Gurtblech Anschluss für Querschnitt Typ A1, $L/h_m=5$ , $h_m/t=80$ ) .....	109
Abb.6-16: Einflüsse auf die Beultraglastdifferenz $M_{T,Real} - M_{T,Ing,FE}$ - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=1,0$ bzw. $h_m/t=80$ ).....	110
Abb.6-17: Einflüsse auf die Beultraglastdifferenz $M_{T,Real} - M_{T,Ing,FE}$ - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=1,0$ bzw. $h_m/t=160$ ).....	110
Abb.6-18: Gegenüberstellung von numerischen Ergebnisverläufen für das „Reale Modell“ und das wölbfreie System für Querschnitt Typ A1, $L/h_m=1$ , $h_m/t=80$ ) .....	111
Abb.6-19: Quelle [5] Experimentelle Bestätigung der Winter-Kurve .....	112
Abb.6-20: Übersicht der Traglastkurven für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine) .....	114
Abb.6-21: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=1,0$ ) für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine) .....	115
Abb.6-22: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m=5,0$ ) für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine) .....	116

Abb.6-23: Traglastkurven - Querschnittstyp A2 ( $L/h_m = 5,0$ ) für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine) .....	117
Abb.6-24: Traglastkurven - Querschnittstyp B1 ( $L/h_m = 1,0$ ) für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine) .....	118
Abb.6-25: Traglastkurven - Querschnittstyp B1 ( $L/h_m = 5,0$ ) für beidseitige Wölbbehinderung ( $M_T$ alleine) .....	119
Abb.6-26: Gegenüberstellung von numerischen Ergebnisverläufen für ein- und beidseitige Wölbbehinderung für Querschnitt Typ A1 – $h_m = 2b_m$ , $L/h_m = 1$ , $h_m/t = 130$ .....	120
Abb.6-27: Schematische Darstellung der günstigen Wirkung der Wölbnormalspannung auf das Beulverhalten bei beidseitig wölbbehinderten Kastenträgern.....	121
Abb.7-1: Lasteinleitung der kombinierten Beanspruchung $M_T+N$ bzw. $M_T+M_y$ am „Realen Modell“ .....	124
Abb.7-2: Lasteinleitung der kombinierten Beanspruchung $M_T+M_y$ bzw. $M_T+N$ am „Ingenieurmodell“ .....	125
Abb.7-3: Übersicht der Traglastkurven für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T + N$ ).....	128
Abb.7-4: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 1,0$ , $h_m/t=80$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+N$ ).....	129
Abb.7-5: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 5,0$ , $h_m/t=80$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+N$ ).....	130
Abb.7-6: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 1,0$ , $h_m/t=160$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+N$ ).....	131
Abb.7-7: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 5,0$ , $h_m/t=160$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+N$ ).....	132
Abb.7-8: Beulverformungen für Traglastberechnung mit Vorlastniveau $N/N_{pl}=0,3$ (Querschnitt A1- $h_m/t=160, L/h_m=5$ ) .....	134
Abb.7-9: Übersicht der Traglastkurven für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T + M_y$ ) .....	136
Abb.7-10: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 1,0$ , $h_m/t=80$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+ M_y$ ).....	137
Abb.7-11: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 5,0$ , $h_m/t=80$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+ M_y$ ).....	138
Abb.7-12: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 1,0$ , $h_m/t=80$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+ M_y$ ).....	139
Abb.7-13: Traglastkurven - Querschnittstyp A1 ( $L/h_m = 5,0$ , $h_m/t=160$ ) für einseitige Wölbbehinderung ( $M_T+ M_y$ ).....	140
Abb.7-14: Versagensformen bei kombinierter Beanspruchung $M_T+M_y$ (Querschnitt A1, $h_m/t=160$ , $L/h_m=5$ ).....	142

# Tabellenverzeichnis

<i>Tab.6-1: Übersicht über die untersuchten Querschnittsgeometrien, Trägerlängen und Lagerungsverhältnisse sowie Ergebnisdarstellungen .....</i>	<i>91</i>
<i>Tab.6-2: Vereinfachungen des „Ingenieurmodells“ zum „Realen Modell“ .....</i>	<i>94</i>
<i>Tab.6-3: Quelle [8]: Tabelle C.1 – Annahmen für Berechnungen mit FEM.....</i>	<i>95</i>
<i>Tab.6-4: Quelle [8]: Tabelle C.2 – geometrische Ersatzimperfektionen.....</i>	<i>96</i>
<i>Tab.7-1: Übersicht über die untersuchten Querschnitte und Beanspruchungskombinationen.....</i>	<i>123</i>

Dies ist eine Veröffentlichung des

## **FACHBEREICHS INGENIEURBAUKUNST (IBK) AN DER TU GRAZ**

Der Fachbereich Ingenieurbaukunst umfasst die dem konstruktiven Ingenieurbau nahe stehenden Institute für Baustatik, Betonbau, Stahlbau, Holzbau & Holztechnologie, Materialprüfung & Baustofftechnologie, Baubetrieb & Bauwirtschaft, Hochbau & Industriebau, Bauinformatik und Allgemeine Mechanik der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften an der Technischen Universität Graz.

Dem Fachbereich Ingenieurbaukunst ist das Bautechnikzentrum (BTZ) zugeordnet, welches als gemeinsame hochmoderne Laboreinrichtung zur Durchführung der experimentellen Forschung aller beteiligten Institute dient. Es umfasst die drei Laboreinheiten für konstruktiven Ingenieurbau, für Bauphysik und für Baustofftechnologie.

Der Fachbereich Ingenieurbaukunst kooperiert im gemeinsamen Forschungsschwerpunkt „Advanced Construction Technology“. Dieser Forschungsschwerpunkt umfasst sowohl Grundlagen- als auch praxisorientierte Forschungs- und Entwicklungsprogramme.

Weitere Forschungs- und Entwicklungskooperationen bestehen mit anderen Instituten der Fakultät, insbesondere mit der Gruppe Geotechnik, sowie nationalen und internationalen Partnern aus Wissenschaft und Wirtschaft.

Die Lehrinhalte des Fachbereichs Ingenieurbaukunst sind aufeinander abgestimmt. Aus gemeinsam betreuten Projektarbeiten und gemeinsamen Prüfungen innerhalb der Fachmodule können alle Beteiligten einen optimalen Nutzen ziehen.

Durch den gemeinsamen, einheitlichen Auftritt in der Öffentlichkeit präsentiert sich der Fachbereich Ingenieurbaukunst als moderne Lehr- und Forschungsgemeinschaft, welche die Ziele und Visionen der TU Graz umsetzt.

Nummerierungssystematik der Schriftenreihe:

D – Diplom-, Masterarbeiten/Dissertationen | F – Forschungsberichte  
S – Skripten, Vorlesungsunterlagen | V – Vorträge, Tagungen

Institutskennzahl:

1 – Allgemeine Mechanik | 2 – Baustatik | 3 – Betonbau  
4 – Holzbau & Holztechnologie | 5 – Stahlbau & Flächentragwerke  
6 – Materialprüfung & Baustofftechnologie | 7 – Baubetrieb & Bauwirtschaft  
8 – Hochbau & Industriebau | 9 – Bauinformatik  
10 – Labor für Konstruktiven Ingenieurbau

Fortlaufende Nummer pro Reihe und Institut / Jahreszahl