

DIPL.-ING. RICHARD SEEBER

Strukturelle und quantitative Beurteilung der perspektivischen Beobachtbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

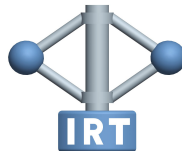
Doktor der technischen Wissenschaften

eingereicht an der

TECHNISCHEN UNIVERSITÄT GRAZ

Betreuer

EM.O.UNIV.-PROF. DR.-ING. NICOLAOS DOURDOUMAS



Institut für Regelungs- und
Automatisierungstechnik

Graz, Oktober 2015

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Dissertation identisch.

Datum

Unterschrift

Vorwort und Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als Universitätsassistent am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz. Für die begeisterte Betreuung der Arbeit, für die unzähligen hilfreichen Kommentare und für die Unterstützung bedanke ich mich ganz besonders bei Herrn Em.Univ.-Prof. Dr.-Ing. Nicolaos Dourdoumas. Herrn Prof. Dr.-Ing. Klaus Meerkötter und Herrn Univ.-Prof. Dr.techn. Martin Horn gilt mein herzlicher Dank für das Interesse an meiner Arbeit und für deren Begutachtung.

Meinen Arbeitskolleginnen und -kollegen am Institut danke ich für die gute und freundschaftliche Zusammenarbeit sowie für die zahlreichen interessanten Diskussionen. Insbesondere bei Dr.techn. Daniel Muschick, Dr.techn. Christoph Schörghuber, Ao.Univ.-Prof. Dr.techn. Anton Hofer und Ass.Prof. Dr.techn. Markus Reichhartinger bedanke ich mich für die Fachgespräche und die konstruktiven Kommentare im Zusammenhang mit dieser Arbeit.

Meinen Eltern und meinen beiden Schwestern bin ich für die Unterstützung innerhalb und außerhalb des Studiums sowie nicht zuletzt auch für die wertvollen Hinweise auf Satz- und Tippfehler dankbar. Nicht vergessen möchte ich schließlich, dass ich zur Erstellung dieser Dissertation erst durch meine vorangegangene Ausbildung befähigt wurde. Für deren Ermöglichung gilt mein Dank ebenfalls meinen Eltern sowie auch allen meinen Lehrern und Professoren.

Graz, im Oktober 2015

Richard Seeber

Kurzfassung

Die Rekonstruktion dreidimensionaler Geometrieinformationen aus deren perspektivischer Projektion, z.B. aus einem Kamerabild, ist ein Problem, das in den Bereichen Bildverarbeitung und Robotik häufig auftritt. Lässt sich die Bewegung des betrachteten Objekts durch ein lineares zeitinvariantes System beschreiben, so ist für die Rekonstruktionsaufgabe die Systemeigenschaft "perspektivische Beobachtbarkeit" von Bedeutung. Vorliegende Arbeit befasst sich mit Methoden zur Überprüfung und Bewertung dieser Eigenschaft. Zunächst werden Kriterien zu deren struktureller Beurteilung untersucht und zum Teil erweitert. Weiterhin wird gezeigt, dass nicht perspektivisch beobachtbare Systeme in eine – zur Kalman-Zerlegung nicht beobachtbarer Systeme ähnliche – kanonische Form transformiert werden können. Zur quantitativen Bewertung wird das Distanzmaß der Beobachtbarkeit auf den perspektivischen Fall erweitert. Dabei ergibt sich das Maß als Lösung eines quadratischen Programms mit quadratischen Gleichungsnebenbedingungen. Verschiedene Modifikationen des Maßes werden diskutiert, welche mitunter für seine praktische Verwendung von Vorteil sind. Zu dessen Ermittlung werden zwei numerische Verfahren vorgeschlagen und deren Anwendbarkeit anhand von Beispielen demonstriert. Abschließend wird eine alternative Möglichkeit zur quantitativen Bewertung aufgezeigt. Im Vergleich zum Distanzmaß erlaubt diese zwar keine Aussage über die Robustheit der Eigenschaft gegenüber Störungen der Systemparameter; stattdessen kann sie jedoch mit geringerem Aufwand angewendet werden.

Abstract

The reconstruction of three-dimensional geometries from their perspective projection, such as a camera image, is a recurring problem in the fields of image processing and robotics. If the object movement can be described by a linear time-invariant system, the property "perspective observability" of the system is relevant for the success of the reconstruction. This thesis studies techniques for testing and assessing this property. First, existing structural criteria are reviewed and partly extended. It is further shown that non perspective observable systems can be transformed to a canonical form similar to the Kalman decomposition of non-observable systems. For quantitative assessment, the distance measure for observability is extended to the perspective case. This measure is shown to be given by the solution of a quadratic program with quadratic equality constraints. Several modifications of the measure, that are relevant for its practical application, are discussed. For its computation two numerical algorithms are proposed, and their applicability is demonstrated in the course of examples. Finally, an alternative technique for the quantitative assessment of perspective observability is shown. Compared to the distance measure, this technique does not allow a statement about the robustness of the property with respect to perturbations of the system parameters; it can, however, be applied more easily.

Inhaltsverzeichnis

I. Einführung	1
1. Einleitung	3
2. Perspektivische Beobachtbarkeit	5
2.1. Definition anhand von homogenen Koordinaten	5
2.2. Einführende Beispiele	6
2.3. Definition für allgemeinen Dimensionsverlust	15
2.4. Zusammenfassung	17
II. Strukturelle Beurteilung perspektivischer Beobachtbarkeit	19
3. Kriterien für die perspektivische Beobachtbarkeit	21
3.1. Kriterium über den komplexen Zahlen	21
3.1.1. Verallgemeinertes Popov-Belevich-Hautus Kriterium	21
3.1.2. Alternative Formen und Deutung des Kriteriums	22
3.2. Kriterien über den reellen Zahlen	31
3.2.1. Ein Kriterium unter zusätzlichen Voraussetzungen	33
3.2.2. Lockerung einer Voraussetzung des Kriteriums	34
3.2.3. Ein notwendiges Kriterium	41
3.2.4. Offene Fragestellungen	46
3.3. Zusammenfassung	46
4. Kanonische Form nicht perspektivisch beobachtbarer Systeme	49
4.1. Kalman-Zerlegung nicht beobachtbarer Systeme	49
4.2. Zerlegung des Zustandsraums nicht perspektivisch beobachtbarer Systeme	50
4.3. Nichteindeutigkeit der kanonischen Form	58
4.4. Zusammenfassung	62
III. Quantitative Beurteilung perspektivischer Beobachtbarkeit	63
5. Distanzmaß für die perspektivische Beobachtbarkeit	65
5.1. Bisherige Arbeiten	65

5.2.	Anpassung der Maßdefinition	67
5.3.	Formulierung eines Optimierungsproblems	68
5.3.1.	Grundlegende Überlegungen	68
5.3.2.	Herleitung des Optimierungsproblems	69
5.3.3.	Alternative Zielfunktion	72
5.4.	Strukturierung des Optimierungsproblems	73
5.4.1.	Grundlegende Überlegungen	73
5.4.2.	Struktur des Optimierungsproblems	74
5.4.3.	Wertebereich der Optimierungsvariablen	76
5.4.4.	Deutung der Optimierungsvariablen	78
5.4.5.	Alternative Formen des Optimierungsproblems	81
5.5.	Schranken des Distanzmaßes	84
5.6.	Beispiele	86
5.7.	Berücksichtigung zusätzlicher Beschränkungen	88
5.7.1.	Einschränkung der betrachteten Systeme	88
5.7.2.	Beschränkung der Störung	89
5.8.	Zusammenfassung	94
6.	Modifikationen des Distanzmaßes	95
6.1.	Normiertes Distanzmaß	95
6.1.1.	Multiplikative Störung der Ausgangsmatrix	96
6.1.2.	Skalierte Störung der Ausgangsmatrix	102
6.2.	Beschränkung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte	104
6.2.1.	Lage nicht rekonstruierbarer Punkte	105
6.2.2.	Modifikation des Distanzmaßes	109
6.3.	Relaxiertes Distanzmaß	112
6.3.1.	Nichtkonvexes quadratisches Programm	113
6.3.2.	Semidefinite Relaxation	116
6.3.3.	Rang der Lösungsmatrix	120
6.3.4.	Konsistenz und Deutung des relaxierten Distanzmaßes	124
6.3.5.	Beispiele	133
6.4.	Zusammenfassung	136
7.	Lösung des Optimierungsproblems für das Distanzmaß	139
7.1.	Wahl sinnvoller Startwerte	140
7.1.1.	Startwerte anhand invarianter Unterräume der Systemmatrix	140
7.1.2.	Erweiterung von Startwerten auf höhere Dimensionsverluste	142
7.2.	Numerische Ermittlung des Distanzmaßes	143
7.2.1.	Gradientenverfahren unter Verwendung der Cayley-Transformation	143
7.2.2.	Gradienten relevanter Zielfunktionen	145
7.2.3.	Ergebnisse	146
7.3.	Numerische Ermittlung des relaxierten Distanzmaßes	147
7.3.1.	Iterativer Algorithmus	147
7.3.2.	Modifizierter iterativer Algorithmus	150

7.3.3. Ergebnisse	151
7.4. Abschließendes Beispiel	153
7.5. Zusammenfassung	161
8. Alternative Bewertung der perspektivischen Beobachtbarkeit	163
8.1. Modifikation eines Beobachtbarkeitsmaßes	163
8.2. Erweiterung auf die perspektivische Beobachtbarkeit	166
8.3. Zusammenfassung	177
9. Zusammenfassung und Ausblick	179
Literaturverzeichnis	183
Abbildungsverzeichnis	187
A. Abschätzung des Distanzmaßes anhand von Singulärwerten	189

Teil I.
Einführung

Kapitel 1.

Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit linearen zeitinvarianten Zustandsraummodellen der Form

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor \mathbf{x} , der Systemmatrix \mathbf{A} , der Ausgangsmatrix \mathbf{C} und dem Ausgangsvektor \mathbf{y} . Eine wichtige Eigenschaft solcher Systeme stellt die sogenannte Beobachtbarkeit dar. Sie gibt an, ob aus der Kenntnis des Verlaufs der Messgröße \mathbf{y} in einem endlichen Zeitintervall eindeutig der Systemzustand \mathbf{x} rekonstruiert werden kann.

In Anwendungen der Robotik, konkret bei der in diesem Zusammenhang häufigen kameragestützten Umgebungserfassung, ist die Messgröße mitunter in Form einer perspektivischen Projektion eines Punktes auf eine Bildebene gegeben. Diese Messung, d.h. die Kenntnis der Projektion, kann man so interpretieren, dass von dem Punkt nur die Richtung des Ortsvektors, nicht aber dessen Länge (d.h. der Abstand des Punktes vom Brennpunkt der Kamera) bekannt ist. Stellt die Ausgangsgröße \mathbf{y} des obigen Systems diesen Ortsvektor dar, so führt dies zum perspektivischen Beobachtbarkeitsproblem: Dieses wurde in [4] eingeführt und stellt die Frage, ob aus der Kenntnis der Richtung des Ausgangsvektors \mathbf{y} eindeutig die Richtung des Zustandsvektors \mathbf{x} rekonstruiert werden kann.

Für die klassische Beobachtbarkeit existieren Kriterien und Maße zu deren Überprüfung und quantitativen Bewertung [20]. In der vorliegenden Arbeit werden entsprechende Methoden zur strukturellen und quantitativen Beurteilung der perspektivischen Beobachtbarkeit untersucht.

Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert: Teil I umfasst neben dieser Einleitung noch Kapitel 2 und veranschaulicht grundlegende Zusammenhänge; Teil II, bestehend aus den Kapiteln 3 und 4, befasst sich mit der strukturellen Beurteilung der perspektivischen Beobachtbarkeit; Teil III schließlich diskutiert im Rahmen der Kapitel 5 bis 8 deren quantitative Bewertung.

In Kapitel 2 wird zunächst die genaue Definition des Begriffs der perspektivischen Beobachtbarkeit angegeben. Abhängig davon, ob der Systemzustand komplexe Werte annehmen kann oder auf reelle Werte beschränkt ist, wird zwischen perspektivischer Beobachtbarkeit über den komplexen und über den reellen Zahlen unterschieden. Veranschaulicht wird die Definition anhand einiger Beispiele; auf die dabei gezeigten Systeme

wird im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder zur Demonstration von Zusammenhängen zurückgegriffen. Besonders hervorgehoben sei dabei Beispiel 3, welches die Bedeutung des Konzepts bei einer kamerabasierten Positionserfassung demonstriert.

Hinsichtlich der in Kapitel 3 behandelten Kriterien für die perspektivische Beobachtbarkeit kann auf eine Reihe von Vorarbeiten zurückgegriffen werden [4, 12, 5, 25]. Zunächst wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium über den komplexen Zahlen angegeben und dessen Bedeutung veranschaulicht. Über den reellen Zahlen ist kein vergleichbares, d.h. notwendiges und hinreichendes Kriterium bekannt. Existierende Kriterien für diesen Fall werden daher untersucht und erweitert.

In Kapitel 4 wird eine kanonische Form für nicht perspektivisch beobachtbare Systeme entwickelt. Diese ist ähnlich zur Kalman-Zerlegung nicht beobachtbarer Systeme; ein nicht perspektivisch beobachtbares System in dieser kanonischen Form ist unmittelbar anhand der Struktur der System- und Ausgangsmatrix als solches erkennbar.

In Kapitel 5 wird das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit eingeführt, welches der quantitativen Bewertung der Eigenschaft dient. Es stellt die kleinstmögliche Norm einer additiven Störung der System- und Ausgangsmatrix dar, welche zu einem Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit führt. Durch Übertragung eines in [30] gezeigten Zusammenhangs zwischen der Kalman-Zerlegung und dem Distanzmaß der Steuerbarkeit bzw. der Beobachtbarkeit wird für dieses ein Optimierungsproblem hergeleitet. Basierend auf dem Optimierungsproblem werden Schranken des Distanzmaßes angegeben und Möglichkeiten zur Berücksichtigung zusätzlicher Beschränkungen (u.a. hinsichtlich der Störung) diskutiert.

Kapitel 6 schlägt einige modifizierte Varianten des Distanzmaßes vor: eine Normierung des Distanzmaßes und eine Beschränkung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte, welche durch Anwendungen im Bereich der kamerabasierten Positionserfassung von Punkten motiviert sind; mit dem Ziel einer einfacheren Lösbarkeit des Optimierungsproblems wird weiterhin die Lockerung einer Gleichungsnebenbedingung untersucht und basierend darauf ein relaxiertes Distanzmaß vorgeschlagen.

Mit der Lösung des Optimierungsproblems für das Distanzmaß befasst sich Kapitel 7. Dazu werden, zum Teil unter Verwendung des relaxierten Distanzmaßes, unterschiedliche numerische Verfahren vorgeschlagen und anhand von Beispielen demonstriert. In einem abschließenden Beispiel wird das Distanzmaß für das System aus Beispiel 3 ermittelt und die praktische Relevanz der in Kapitel 6 vorgeschlagenen Modifikationen demonstriert.

In Kapitel 8 schließlich wird, abseits von den verhältnismäßig komplizierten Zusammenhängen beim Distanzmaß, eine alternative, einfachere Möglichkeit zur quantitativen Bewertung der perspektivischen Beobachtbarkeit vorgeschlagen. Dazu wird für ein existierendes, nicht konsistentes Beobachtbarkeitsmaß aus [17] zunächst eine Erweiterung vorgeschlagen, die konsistent ist und eine obere Schranke für das Distanzmaß der Beobachtbarkeit darstellt. Dieses Maß wird anschließend auf die perspektivische Beobachtbarkeit übertragen.

Kapitel 9 fasst die Ergebnisse der Arbeit zusammen und weist auf sich daraus ergebende offene Fragestellungen hin.

Kapitel 2.

Perspektivische Beobachtbarkeit

In diesem Kapitel wird das Konzept der *perspektivischen Beobachtbarkeit* für lineare zeitinvariante Systeme erläutert.

Zunächst wird die ursprüngliche Definition aus [4] angegeben und anhand einiger Beispiele veranschaulicht. Anschließend wird eine erweiterte Definition aus [10] angeführt, welche das Konzept verallgemeinert.

2.1. Definition anhand von homogenen Koordinaten

Betrachtet wird das lineare zeitinvariante System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.1b)$$

mit der Systemmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, der Ausgangsmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jeder beliebige Anfangszustand $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(0)$ lässt sich genau dann vollständig aus dem Verlauf der Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t)$ rekonstruieren, wenn das System beobachtbar ist. Zur Beurteilung dieser Eigenschaft stehen algebraische Kriterien zur Verfügung.

Wesentlich schwieriger ist es, wenn vom Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$ z.B. nur die Richtung, nicht aber die Länge bekannt ist. In diesem Fall reduziert sich die Dimension der verfügbaren Informationen um eins. Klarerweise kann im besten Fall dann auch \mathbf{x}_0 nur bis auf eine Dimension (die unbekannte Skalierung) rekonstruiert werden. Ist das möglich, so nennt man das System *perspektivisch beobachtbar*. Mit der Einführung des sogenannten *Dimensionsverlustes* d entspricht dies dem Fall¹ $d = 1$.

Formal wurde dieses Konzept ursprünglich anhand der sogenannten homogenen Koordinaten $[\mathbf{y}]$ der Ausgangsgröße definiert [4]. Diese sind für zwei Vektoren $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ über die folgende Äquivalenzrelation definiert:

$$[\mathbf{y}_1] = [\mathbf{y}_2] \iff \exists \alpha \in \mathbb{C} : \mathbf{y}_1 = \alpha \mathbf{y}_2, \quad (2.2)$$

d.h. zwei Vektoren sind in homogenen Koordinaten genau dann äquivalent, wenn sie linear abhängig sind. Von Bedeutung ist also nur die Richtung, nicht aber der Betrag der

¹Perspektivische Beobachtbarkeit für den Dimensionsverlust $d = 0$ entspricht damit der klassischen Beobachtbarkeit.

betrachteten Vektoren. Perspektivische Beobachtbarkeit (für $d = 1$) bezeichnet die Beobachtbarkeit unter Berücksichtigung dieser Äquivalenzrelation sowohl für den Ausgang als auch für den Anfangszustand. Dies führt zu folgender

Definition 1 (Perspektivische Beobachtbarkeit für $d = 1$). Das System (2.1) heißt perspektivisch beobachtbar für den Dimensionsverlust $d = 1$, wenn aus Kenntnis der Ausgangsgröße in homogenen Koordinaten $[\mathbf{y}]$ in einem endlichen Zeitintervall $0 \leq t \leq t_1$ (mit $t_1 > 0$) der Anfangszustand $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ in homogenen Koordinaten $[\mathbf{x}_0]$ eindeutig ermittelt werden kann.

Wie man später sehen wird, ist es von entscheidender Bedeutung, ob der Anfangszustand \mathbf{x}_0 komplexe Werte annehmen kann oder ob er auf reelle Werte beschränkt ist. Unter der (die Rekonstruktion erleichternden) Voraussetzung $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ wird von *perspektivischer Beobachtbarkeit über \mathbb{R}* gesprochen:

Definition 2 (Perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{R} für $d = 1$). Das System (2.1) heißt perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} für den Dimensionsverlust $d = 1$, wenn sich unter den Voraussetzungen aus Definition 1 und der *zusätzlichen Voraussetzung* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ der Anfangszustand in homogenen Koordinaten $[\mathbf{x}_0]$ eindeutig ermitteln lässt.

Perspektivische Beobachtbarkeit im Sinne von Definition 1, bei welcher \mathbf{x}_0 beliebige Werte aus \mathbb{C}^n annehmen kann, wird zum Unterschied davon im Weiteren auch als *perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{C}* bezeichnet.

Gleichbedeutend mit Definition 1 bzw. 2 ist die Forderung, dass es keine Anfangszustände $\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}$ mit der Eigenschaft

$$[\mathbf{x}_0^{(1)}] \neq [\mathbf{x}_0^{(2)}] \quad (2.3)$$

gibt, sodass für die zugehörigen Verläufe der Ausgangsgröße des Systems (2.1)

$$[\mathbf{y}^{(1)}] \equiv [\mathbf{y}^{(2)}] \quad (2.4)$$

gilt. Ein nicht perspektivisch beobachtbares System besitzt also zumindest zwei linear unabhängige Anfangszustände so, dass die zugehörigen Ausgangsgrößen für alle Zeiten linear abhängig sind.

2.2. Einführende Beispiele

Zur Motivation für diese Fragestellung werden einige Beispiele betrachtet. Zunächst werden zur Veranschaulichung der Zusammenhänge zwei Beispiele aus [4] diskutiert. In einem dritten Beispiel wird gezeigt, dass die Rekonstruktion der Richtung des Zustandsvektors mitunter durchaus nützlich sein kann. Das vierte Beispiel schließlich zeigt einen wesentlichen Unterschied zwischen den Eigenschaften Beobachtbarkeit und perspektivische Beobachtbarkeit.

Beispiel 1 ([4]). Es wird ein Punkt auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Drehkörper betrachtet. Die Position des Punktes wird dabei mit Hilfe einer Kamera erfasst.

Zur mathematischen Beschreibung der Zusammenhänge wird ein kartesisches Koordinatensystem betrachtet, in dessen Ursprung sich die Kamera befindet. Die Koordinaten des Punktes in diesem Koordinatensystem werden zu einem Vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ zusammengefasst. Dieser erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{\Omega}\mathbf{p} \quad (2.5)$$

mit der schiefssymmetrischen Matrix

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Darin sind ω_1 , ω_2 und ω_3 konstante Parameter. Der Punkt \mathbf{p} beschreibt damit eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega := \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}. \quad (2.7)$$

um die Drehachse in Richtung des Einheitsvektors²

$$\mathbf{q} := \frac{1}{\omega} [\omega_3 \quad -\omega_2 \quad \omega_1]^T. \quad (2.8)$$

Die Ausgangsgröße ist die Position des Punktes, d.h. $\mathbf{y} = \mathbf{p}$. Mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} := \mathbf{p}$ ist das betrachtete System in der Form (2.1) mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{E} \quad (2.9)$$

gegeben.

Abbildung 2.1 zeigt für die konkreten Parameterwerte

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = -2, \quad \omega_3 = -1 \quad (2.10)$$

eine Trajektorie des Punktes $\mathbf{p}(t)$ ausgehend vom Anfangszustand

$$\mathbf{p}_0 = [-1 \quad 2 \quad 3]^T. \quad (2.11)$$

Ebenso dargestellt ist eine perspektivische Projektion dieser Trajektorie. Als Bildebene der im Ursprung befindlichen Kamera ist dabei (willkürlich) die durch $y = 1$ bestimmte

²Dieser Vektor \mathbf{q} ist ein Eigenvektor der Matrix $\mathbf{\Omega}$ zum Eigenwert null.

Parallele der x - z -Ebene gewählt; die Projektion $\tilde{\mathbf{p}}$ des Punktes \mathbf{p} ist damit durch

$$\tilde{\mathbf{p}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{x(t)}{y(t)} & 1 & \frac{z(t)}{y(t)} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

gegeben.

Durch die Kamera im Ursprung des Koordinatensystems wird nur die Richtung von \mathbf{y} , d.h. die Ausgangsgröße in homogenen Koordinaten $[\mathbf{y}]$ erfasst, was zur zuvor formulierten Frage nach der perspektivischen Beobachtbarkeit des Systems (für $d = 1$) führt. Diese kann hier sofort beantwortet werden: Anhand von Definition 1 ist offensichtlich, dass das System perspektivisch beobachtbar ist, da die Ausgangsgröße dem vollständigen Zustandsvektor entspricht³. \triangle

Beispiel 2 ([4]). Es wird ein Punkt auf einem Drehkörper betrachtet, welcher zusätzlich zu der im vorigen Beispiel beschriebenen Rotationsbewegung auch eine Translationsbewegung ausführt. Konkret soll angenommen werden, dass der Punkt \mathbf{p} und ein Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} die Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{\Omega}\mathbf{p} + \mathbf{v} \quad (2.13a)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{\Omega}\mathbf{v} \quad (2.13b)$$

mit der Matrix $\mathbf{\Omega}$ aus Relation (2.6) erfüllen. Die Bewegung des Punktes und der Verlauf von \mathbf{v} ist, mit den Anfangswerten \mathbf{p}_0 und \mathbf{v}_0 für \mathbf{p} und \mathbf{v} , durch

$$\mathbf{p}(t) = e^{\mathbf{\Omega}t} (\mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 t) \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{\Omega}t} \mathbf{v}_0 \quad (2.14b)$$

gegeben. Als Ausgangsgröße wird wie vorhin die Position \mathbf{p} gewählt. Führt man den Zustandsvektor

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ein, so liegt das System in der Form (2.1) vor, mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{E} \quad \mathbf{0}]. \quad (2.16)$$

Es wird nun die Tatsache benutzt, dass die Drehachse \mathbf{q} aus Relation (2.8) ein Eigenvektor der Matrix $\mathbf{\Omega}$ zum Eigenwert null ist und somit für alle t

$$e^{\mathbf{\Omega}t} \mathbf{q} = \mathbf{q} \quad (2.17)$$

³Wird der Zustand in homogenen Koordinaten $[\mathbf{x}]$ gemessen, so ist trivialerweise auch der Anfangszustand in homogenen Koordinaten $[\mathbf{x}_0]$ bekannt.

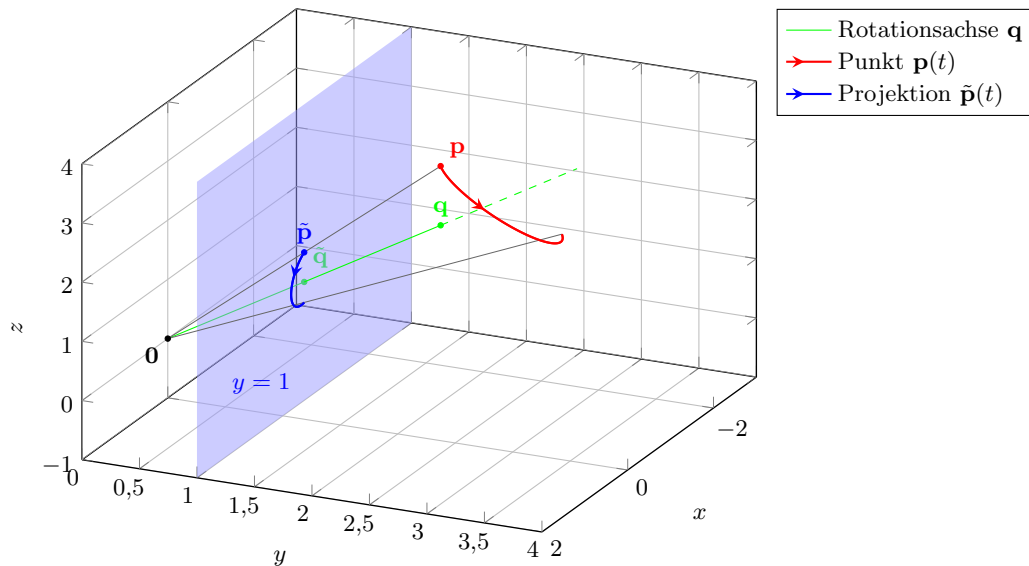


Abbildung 2.1.: Trajektorie des Punktes $\mathbf{p}(t)$ aus Beispiel 1 sowie deren perspektivische Projektion $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ in die Ebene $y = 1$

gilt. Damit sind zwei Trajektorien des Systems gemäß (2.14) durch

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} (2+t)\mathbf{q} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

gegeben. Man erkennt, dass die zugehörigen Anfangszustände linear unabhängig sind. Für die zugehörigen Ausgangsgrößenverläufe,

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{q}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = (2+t)\mathbf{q}, \quad (2.19)$$

gilt jedoch $[\mathbf{y}^{(1)}] = [\mathbf{y}^{(2)}]$; das System ist demnach nicht perspektivisch beobachtbar. Abbildung 2.2 zeigt diese beiden Trajektorien des Punktes $\mathbf{p}(t)$ sowie deren perspektivische Projektion in die Ebene $y = 1$ für die (bereits im vorangegangenen Beispiel verwendeten) Parameterwerte

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = -2, \quad \omega_3 = -1. \quad (2.20)$$

In beiden Fällen liegt der Punkt auf der Rotationsachse \mathbf{q} , sodass es zu keiner Rotationsbewegung des Punktes kommt. Damit aber ist die bei der zweiten Trajektorie auftretende Bewegung *in Richtung* der Rotationsachse nicht erkennbar, da sich der betrachtete Punkt hierbei entlang einer Geraden von der Kamera entfernt. \triangle

Bei den bisherigen Beispielen liegt der Brennpunkt der Kamera im Ursprung des Koordinatensystems; es wird nun ein Beispiel diskutiert, bei welchem diese einschränkende

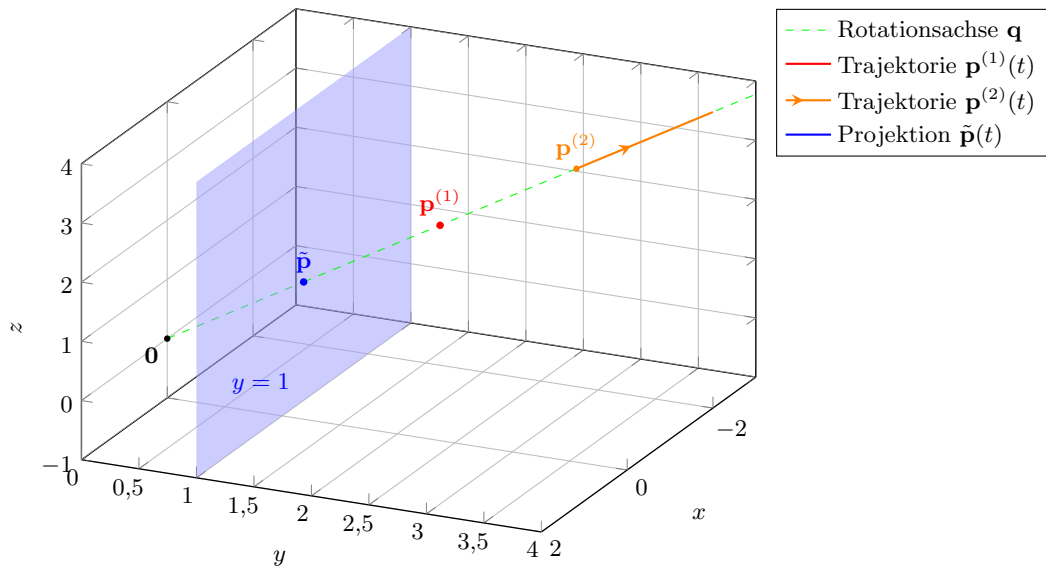


Abbildung 2.2.: Zwei Trajektorien $\mathbf{p}^{(1)}(t)$ und $\mathbf{p}^{(2)}(t)$ des bewegten Drehkörpers aus Beispiel 2 sowie deren perspektivische Projektionen in die Ebene $y = 1$

Annahme nicht getroffen wird.

Beispiel 3. Wie in den vorangegangenen Beispielen wird ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem betrachtet. Die Bildebene der Kamera umfasst alle Punkte \mathbf{p} , welche die Gleichung

$$\mathbf{h}^T \mathbf{p} = 0 \quad (2.21)$$

erfüllen; dabei stellt \mathbf{h} einen gegebenen Einheitsvektor dar, d.h. es gilt $\mathbf{h}^T \mathbf{h} = 1$. Ferner ist der Brennpunkt \mathbf{f} der Kamera durch

$$\mathbf{f} = f \cdot \mathbf{h} \quad (2.22)$$

gegeben, wobei f einen konstanten Parameter, die sogenannte Brennweite, darstellt.

Es wird angenommen, dass der Punkt \mathbf{p} die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{p} + \mathbf{v} \quad (2.23)$$

wie in Beispiel 2 erfüllt. Im Gegensatz zu diesem stellt \mathbf{v} hier aber einen *bekanntem*, konstanten Geschwindigkeitsvektor dar.

Diese Zusammenhänge lassen sich durch Einführen von homogenen Koordinaten modellieren, siehe z.B. [22]. Dazu wird der Zustandsvektor

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} w\mathbf{p} \\ w \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

eingeführt, wobei w eine beliebige, konstante (von null verschiedene) Zahl darstellt. Damit lassen sich die Koordinaten des Punktes \mathbf{p} eindeutig aus Kenntnis von \mathbf{x} in homogenen Koordinaten rekonstruieren! Es gilt nämlich

$$[\mathbf{x}] = [\tilde{\mathbf{x}}] \quad \text{mit } \tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{w}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Die Zustandsgrößen erfüllen somit das lineare zeitinvariante Differentialgleichungssystem

$$\frac{d(w\mathbf{p})}{dt} = \mathbf{\Omega}(w\mathbf{p}) + \mathbf{v}w \quad (2.26a)$$

$$\frac{dw}{dt} = 0. \quad (2.26b)$$

Die perspektivische Projektion $\tilde{\mathbf{p}}$ des Punktes \mathbf{p} in die Kameraebene ist durch den Schnittpunkt der Bildebene mit einer Geraden durch die Punkte \mathbf{p} und \mathbf{f} gegeben. Dieser ergibt sich zu⁴

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T)\mathbf{p}}{1 - \frac{\mathbf{h}^T\mathbf{p}}{f}}. \quad (2.27)$$

Wählt man dementsprechend den Ausgangsvektor

$$\mathbf{y} := \begin{bmatrix} w(\mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T)\mathbf{p} \\ w\left(1 - \frac{\mathbf{h}^T\mathbf{p}}{f}\right) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

so kann man den Bildpunkt $\tilde{\mathbf{p}}$ als perspektivische Projektion von \mathbf{y} auffassen, d.h. es gilt

$$[\mathbf{y}] = [\tilde{\mathbf{y}}] \quad \text{mit } \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Abbildung 2.3 zeigt beispielhaft eine Trajektorie $\mathbf{p}(t)$ und die zugehörige Projektion $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ für die Parameterwerte

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = -2, \quad \omega_3 = -1, \quad \mathbf{v} = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad (2.30a)$$

wobei als Bildebene die x - z -Ebene verwendet und die Brennweite zu eins gewählt wird, d.h.

$$\mathbf{h} = [0 \ -1 \ 0]^T, \quad f = 1. \quad (2.30b)$$

⁴Man überprüft leicht, dass $\mathbf{h}^T\tilde{\mathbf{p}} = 0$ gilt. Ferner gilt

$$\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{p} = \frac{\mathbf{h}^T\mathbf{p}}{f - \mathbf{h}^T\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{f}),$$

d.h. die Punkte \mathbf{p} , \mathbf{f} und $\tilde{\mathbf{p}}$ liegen auf einer Geraden.

Zusammengefasst erhält man ein LZI-System (2.1) mit den Daten⁵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{f}\mathbf{h}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Entsprechend den vorangegangenen Betrachtungen bedeutet die perspektivische Beobachtbarkeit dieses Systems, dass bei Kenntnis der Projektion $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ eindeutig die Richtung des Zustandsvektors \mathbf{x} und damit die *Koordinaten des Punktes* \mathbf{p} (und nicht nur dessen Richtung) rekonstruiert werden können!

Die perspektivische Beobachtbarkeit des Systems wird an dieser Stelle nur für die speziellen Parameterwerte $\mathbf{v} = \mathbf{h} = \mathbf{q}$, mit der Drehachse \mathbf{q} aus Relation (2.8), und $f = 1$ untersucht⁶. In diesem Spezialfall ist das System nicht perspektivisch beobachtbar, denn für die zwei Trajektorien des Systems

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} (1+t)\mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} (4+2t)\mathbf{q} \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

mit linear unabhängigen Anfangszuständen sind die Ausgangsverläufe

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -2-2t \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

linear abhängig. Hinsichtlich der betrachteten perspektivischen Projektion bedeutet dies, dass die zwei Trajektorien der Koordinaten des Punktes

$$\mathbf{p}^{(1)}(t) = (1+t)\mathbf{q}, \quad \mathbf{p}^{(2)}(t) = (2+t)\mathbf{q} \quad (2.34)$$

gemäß (2.27) auf denselben (in diesem Fall konstanten) Punkt

$$\tilde{\mathbf{p}}^{(1)}(t) = \tilde{\mathbf{p}}^{(2)}(t) = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

in der Bildebene abgebildet werden. △

Einen wesentlichen Unterschied zwischen der perspektivischen und der klassischen Beobachtbarkeit zeigt folgendes

Beispiel 4. Man betrachte das System (2.1) mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

⁵Es sei angemerkt, dass die Ausgangsmatrix nicht zeilenregulär ist, denn $[\mathbf{h}^T \ 0] \mathbf{C} = \mathbf{0}^T$.

⁶Andere Parameterwerte werden in späteren Beispielen betrachtet.

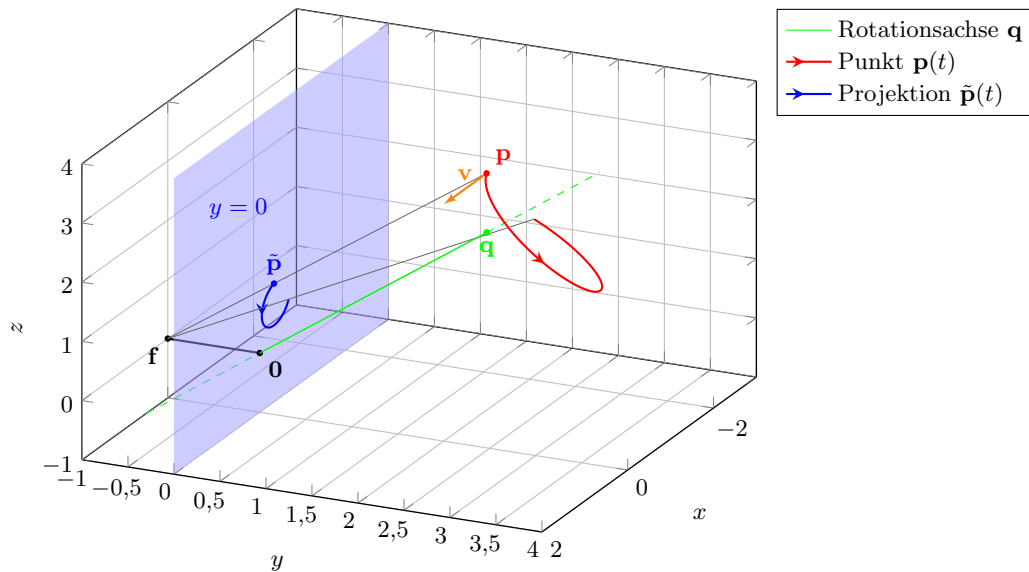


Abbildung 2.3.: Trajektorie des Punktes $\mathbf{p}(t)$ aus Beispiel 3 sowie deren perspektivische Projektion $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ in die Ebene $y = 0$

Abbildung 2.4 zeigt folgende drei ausgewählte Zustandstrajektorien dieses Systems:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 4e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Die zugehörigen Verläufe der Ausgangsgröße – gemäß Ausgangsgleichung und Relation (2.36) jeweils die Projektion des Zustandsvektors \mathbf{x} in die x_1 - x_2 -Ebene – sind ebenso dargestellt und lauten

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 4e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Man erkennt, dass

$$\mathbf{y}^{(2)}(t) = (4e^t - 2)\mathbf{y}^{(1)}(t) \quad (2.39)$$

gilt, obwohl $\mathbf{x}_0^{(1)}$ und $\mathbf{x}_0^{(2)}$ linear unabhängig sind. Das System ist somit nicht perspektivisch beobachtbar.

Es wird nun am Beispiel des dritten Ausgangsgrößenverlaufs $\mathbf{y}^{(3)}$ gezeigt, dass der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit – im Gegensatz zum Verlust der Beobachtbarkeit – *nicht* bedeutet, dass die Richtung des Anfangszustands *keinesfalls* rekonstruierbar ist. Man betrachte dazu zunächst folgende aus dem Vektor \mathbf{y} und dessen erster

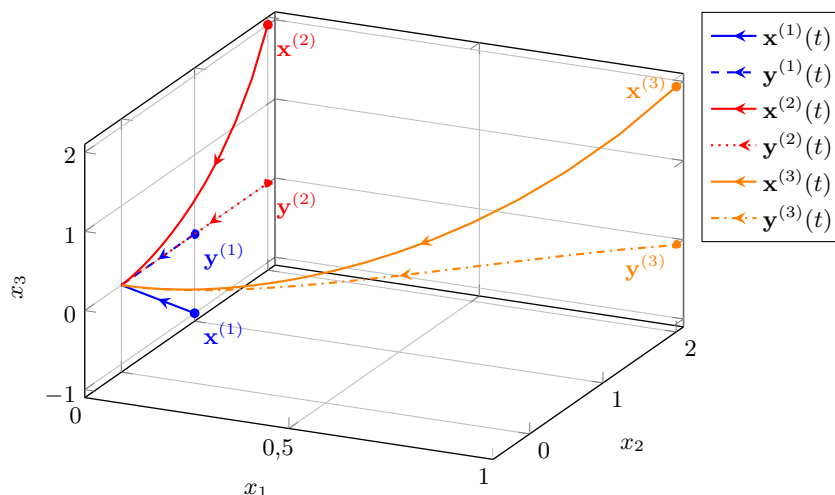


Abbildung 2.4.: Ausgewählte Trajektorien eines nicht perspektivisch beobachtbaren Systems

Komponente y_1 gebildete Zeitfunktion

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \frac{1}{y_1(t)} \mathbf{y}(t). \quad (2.40a)$$

Dieser Ausdruck erfüllt die Beziehung $[\tilde{\mathbf{y}}] = [\mathbf{y}]$ für jeden Vektor \mathbf{y} , dessen erste Komponente nicht verschwindet. D.h. $\tilde{\mathbf{y}}$ ist für $y_1 \neq 0$ eine mögliche Darstellung des Ausgangs \mathbf{y} in homogenen Koordinaten. Die zugehörige Zeitableitung ist durch

$$\frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{dt} = \frac{1}{y_1} \frac{d\mathbf{y}}{dt} - \frac{1}{y_1^2} \frac{dy_1}{dt} \mathbf{y} \quad (2.40b)$$

gegeben. Wertet man diese Ausdrücke an der Stelle $t = 0$ aus, so erhält man unter Verwendung der Systemgleichungen (2.1) die Beziehungen

$$\tilde{\mathbf{y}}|_{t=0} = \mathbf{C}(\kappa \mathbf{x}_0), \quad (2.41a)$$

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{C}\mathbf{A}(\kappa \mathbf{x}_0) - \gamma \tilde{\mathbf{y}}|_{t=0}, \quad (2.41b)$$

mit den Abkürzungen

$$\kappa := \left. \frac{1}{y_1} \right|_{t=0}, \quad \gamma := \kappa \left. \frac{dy_1}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.42)$$

Aus Kenntnis der Ausgangsgröße $\mathbf{y}^{(3)}$ in homogenen Koordinaten, d.h. anhand der Zeitfunktion $\tilde{\mathbf{y}}^{(3)}(t)$, lässt sich nun folgendermaßen der zugehörige Anfangszustand $\mathbf{x}_0^{(3)}$

bis auf eine Skalierung eindeutig bestimmen. Zunächst berechnet man

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(3)}|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.43a)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{y}}^{(3)}}{dt} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.43b)$$

und erhält daraus gemäß (2.41) folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} (\kappa \mathbf{x}_0^{(3)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} (\kappa \mathbf{x}_0^{(3)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \gamma \\ 2\gamma \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Dabei stellen γ und κ an dieser Stelle unbekannte Größen dar, da sie sich nicht direkt aus $\tilde{\mathbf{y}}^{(3)}$ berechnen lassen. Für die Größe γ erhält man jedoch unmittelbar anhand der ersten und dritten Zeile des Gleichungssystems den Wert $\gamma = -1$. Aus den übrigen Gleichungen bestimmt man damit für den gesuchten Anfangszustand die (bis auf die Skalierung κ) eindeutige Lösung

$$\kappa \mathbf{x}_0^{(3)} = [1 \quad 2 \quad 2]^T, \quad (2.45)$$

von deren Richtigkeit man sich leicht anhand von (2.37) überzeugt. \triangle

2.3. Definition für allgemeinen Dimensionsverlust

Im vorigen Abschnitt wird die perspektivische Beobachtbarkeit für einen Verlust von einer Dimension betrachtet. Mit dem Dimensionsverlust d lässt sich dieses Konzept auf den Verlust von d Dimensionen verallgemeinern [12, 10].

Dazu stellt man zunächst fest, dass die Kenntnis eines Vektors \mathbf{y} in homogenen Koordinaten bedeutet, dass \mathbf{y} bis auf einen eindimensionalen Untervektorraum – nämlich die Gerade in Richtung von \mathbf{y} – bekannt ist. Zwei Vektoren $\mathbf{y}^{(1)}$ und $\mathbf{y}^{(2)}$ auf derselben homogenen (d.h. durch den Ursprung verlaufenden) Geraden sind somit nicht unterscheidbar. Auf d Dimensionen lässt sich dies folgendermaßen verallgemeinern: Die Kenntnis eines Vektors \mathbf{y} bis auf d Dimensionen bedeutet, dass er bis auf einen d -dimensionalen Untervektorraum bekannt ist, d.h. $d + 1$ Vektoren auf derselben homogenen d -dimensionalen Hyperebene sind nicht unterscheidbar.

Eine Verallgemeinerung der Definitionen 1 und 2 führt zu den folgenden Definitionen:

Definition 3 (Perspektivische Beobachtbarkeit). Das System (2.1) heißt perspektivisch beobachtbar (über \mathbb{C}) für den Dimensionsverlust d , wenn aus Kenntnis von $\mathbf{y}(t)$ bis auf d Dimensionen in einem endlichen Zeitintervall $0 \leq t \leq t_1$ der Anfangszustand \mathbf{x}_0 bis auf d Dimensionen ermittelt werden kann.

Definition 4 (Perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{R}). Das System (2.1) heißt perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} für den Dimensionsverlust d , wenn unter den Voraussetzungen aus Definition 3 und der *zusätzlichen Voraussetzung* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Rekonstruktion des Anfangszustandes \mathbf{x}_0 bis auf d Dimensionen möglich ist.

Anhand der Dimension des Zustandsraums ist offensichtlich, dass diese Definitionen nur dann sinnvoll sind, wenn $d \leq n - 1$ ist; dies wird im Rahmen der gesamten Arbeit vorausgesetzt.

Für $d \geq 1$ kann Definition 1 auch folgendermaßen interpretiert werden: Es ist der von d verschiedenen Ausgangstrajektorien $\mathbf{y}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(d+1)}(t)$ aufgespannte Untervektorraum $Y(t)$, d.h.⁷

$$Y(t) = \langle [\mathbf{y}^{(1)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{y}^{(d)}(t)] \rangle, \quad (2.46)$$

bekannt. Das System ist perspektivisch beobachtbar, wenn daraus der Untervektorraum X_0 der zugehörigen Anfangszustände, d.h.

$$X_0 = \langle [\mathbf{x}_0^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{x}_0^{(d)}] \rangle, \quad (2.47)$$

eindeutig bestimmt werden kann⁸. Das bedeutet, dass es keine von Anfangszuständen aufgespannte d -dimensionale Untervektorräume $X_0^{(1)}$ und $X_0^{(2)}$ mit

$$X_0^{(1)} \neq X_0^{(2)} \quad (2.48)$$

gibt, so dass für die Untervektorräume $Y^{(1)}(t)$ und $Y^{(2)}(t)$ der zugehörigen Ausgangsgrößen

$$Y^{(1)}(t) \equiv Y^{(2)}(t) \quad (2.49)$$

für fast alle⁹ Werte von t aus einem nichttrivialen endlichen Intervall gilt.

In [5] wird dementsprechend folgende alternative Formulierung von Definition 3 gezeigt.

Lemma 5. *Das System (2.1) ist genau dann nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{C} bzw. über \mathbb{R} , wenn es $d + 1$ linear unabhängige Anfangszustände $\mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_0^{(d+1)}$ aus \mathbb{C}^n bzw. aus \mathbb{R}^n gibt, d.h.*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^{(1)} & \dots & \mathbf{x}_0^{(d+1)} \end{bmatrix} = d + 1, \quad (2.50)$$

⁷Für eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ bezeichnet $\langle \mathbf{M} \rangle := \{\mathbf{M}\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{C}^m\}$ den von den Spalten von \mathbf{M} aufgespannten Untervektorraum des \mathbb{C}^n .

⁸Für $d = 1$ sind $Y(t)$ bzw. X_0 homogene Geraden, deren gegebene bzw. gesuchte Richtungen den Richtungen von $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ bzw. $\mathbf{x}_0^{(1)}$ entsprechen.

⁹“Fast alle” bedeutet dabei alle bis auf endlich viele Ausnahmen.

sodass die zugehörigen Ausgangsverläufe $\mathbf{y}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(d+1)}(t)$ für alle t linear abhängig sind, d.h.

$$\text{rang} [\mathbf{y}^{(1)}(t) \ \dots \ \mathbf{y}^{(d+1)}(t)] \leq d. \quad (2.51)$$

Es ist klar, dass ein nicht beobachtbares System niemals perspektivisch beobachtbar sein kann. Allgemein gilt

Lemma 6. *Das System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) sei nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{C} bzw. über \mathbb{R} für den Dimensionsverlust p . Dann ist es für jeden Dimensionsverlust d mit $p \leq d \leq n-1$ nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{C} bzw. über \mathbb{R} .*

Beweis. Für die zu den linear unabhängigen Anfangszuständen $\mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_0^{(p+1)}$ gehörigen Ausgangstrajektorien gelte

$$\text{rang} [\mathbf{y}^{(1)}(t) \ \dots \ \mathbf{y}^{(p+1)}(t)] \leq p. \quad (2.52)$$

Diese Anfangszustände lassen sich durch geeignet gewählte Vektoren $\mathbf{x}_0^{(p+2)}, \dots, \mathbf{x}_0^{(d+1)}$ zu insgesamt $d+1$ linear unabhängigen Anfangszuständen ergänzen. Da sich der Rang einer um zusätzliche Spalten erweiterten Matrix höchstens um die Anzahl der hinzugefügten Spalten erhöhen kann, gilt für die entsprechend erweiterte Matrix der zugehörigen Ausgangstrajektorien

$$\text{rang} [\mathbf{y}^{(1)}(t) \ \dots \ \mathbf{y}^{(p+1)}(t) \ \mathbf{y}^{(p+2)}(t) \ \dots \ \mathbf{y}^{(d+1)}(t)] \leq p + (p - d) \leq d. \quad (2.53)$$

Somit ist das System gemäß Lemma 5 nicht perspektivisch beobachtbar für den Dimensionsverlust d . \square

2.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Begriff der perspektivischen Beobachtbarkeit eingeführt. Das Vorliegen dieser Eigenschaft bedeutet für den Dimensionsverlust $d = 1$ anschaulich, dass die Richtung des Anfangszustandes eines Systems aus dem Verlauf der Richtung des Ausgangsvektors rekonstruiert werden kann. Anhand von Beispielen wurde veranschaulicht, dass diese Eigenschaft unter anderem bei der kameragestützten Positionsbestimmung relevant ist. Weiterhin wurde ein entscheidender Unterschied zur klassischen Beobachtbarkeit gezeigt: Der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit bedeutet nicht, dass die Richtung des Anfangszustandes keinesfalls rekonstruierbar ist! Abschließend wurde eine Definition für allgemeine Dimensionsverluste angegeben. Von wesentlicher Bedeutung ist dabei, dass der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit für einen Dimensionsverlust auch den Verlust dieser für alle weiteren (d.h. höheren) Dimensionsverluste impliziert.

Teil II.

Strukturelle Beurteilung perspektivischer Beobachtbarkeit

Kapitel 3.

Kriterien für die perspektivische Beobachtbarkeit

In diesem Kapitel werden Kriterien für die perspektivische Beobachtbarkeit angegeben und diskutiert. Zunächst wird auf existierende notwendige und hinreichende Bedingungen für die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{C} eingegangen. Anschließend wird der Fall der perspektivischen Beobachtbarkeit über \mathbb{R} genauer untersucht, da für diese (außer für den Fall $d = 0$) noch keine unter allen Umständen anwendbaren notwendigen und hinreichenden Kriterien bekannt sind.

3.1. Kriterium über den komplexen Zahlen

In diesem Abschnitt wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{C} angeführt und dessen Anwendung anhand von Beispielen demonstriert. Zur besseren Einsicht in die Zusammenhänge werden anschließend alternative Formen des Kriteriums gezeigt.

3.1.1. Verallgemeinertes Popov-Belevich-Hautus Kriterium

In [12] wird das folgende notwendige und hinreichende Kriterium für die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{C} bewiesen:

Satz 7 (Verallgemeinertes Popov-Belevich-Hautus Kriterium, [12]). *Das System (2.1) ist genau dann perspektivisch beobachtbar über \mathbb{C} für den Dimensionsverlust d , wenn für alle Zahlen*

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1} \in \Lambda(\mathbf{A})$$

aus der Menge $\Lambda(\mathbf{A})$ der Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} die Rangbedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \quad (3.1)$$

erfüllt ist.

Dieses Kriterium hat die Form einer Verallgemeinerung des wohlbekannten Popov-Belevich-Hautus Kriteriums für die Beobachtbarkeit. Letzteres besagt, dass das System (2.1) genau dann beobachtbar ist, wenn für alle Zahlen λ aus den Eigenwerten der Systemmatrix \mathbf{A}

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \quad (3.2)$$

gilt. Es werden daher das Kriterium aus Satz 7 im Weiteren auch kurz als *PBH-Kriterium* und die darin auftretende Matrix als *PBH-Matrix* bezeichnet.

Die Anwendung des Kriteriums wird anhand zweier Beispiele demonstriert:

Beispiel 5. Es wird der Drehkörper aus Beispiel 1 mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{E} \quad (3.3)$$

betrachtet. Wie bereits erwähnt ist dieses System für den Dimensionsverlust $d = 1$ trivialerweise perspektivisch beobachtbar. Dies lässt sich auch anhand des PBH-Kriteriums verifizieren, denn für beliebige Zahlen λ_1, λ_2 gilt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{\Omega})(\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{\Omega}) \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \text{rang} \mathbf{E} = 3 = n. \quad (3.4)$$

△

Beispiel 6. Es wird der für den Dimensionsverlust $d = 1$ nicht perspektivisch beobachtbare, bewegte Drehkörper aus Beispiel 2 mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{E} \quad \mathbf{0}] \quad (3.5)$$

betrachtet. Für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ erhält man einen Rangverlust der PBH-Matrix, da mit dem Eigenvektor \mathbf{q} der Matrix $\mathbf{\Omega}$ zum Eigenwert null aus Relation (2.8)

$$\begin{bmatrix} (0\mathbf{E} - \mathbf{A})^2 \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}^2 & \mathbf{\Omega} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}^2 \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

gilt.

△

3.1.2. Alternative Formen und Deutung des Kriteriums

Für die Beobachtbarkeit existieren neben dem Rangkriterium (3.1) noch weitere Kriterien. Ein System ist genau dann nicht beobachtbar, wenn es einen Eigenvektor \mathbf{p} der Systemmatrix gibt, d.h.

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}s, \quad (3.7a)$$

sodass

$$\mathbf{C}\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.7b)$$

gilt. Äquivalent dazu ist das System genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{B}_y := \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.8a)$$

vollen Rang hat, d.h. wenn gilt

$$\text{rang } \mathbf{B}_y = n. \quad (3.8b)$$

Dieser Abschnitt zeigt Analogien zu diesen Kriterien für die perspektivische Beobachtbarkeit auf und erlaubt dadurch eine Einsicht in das PBH-Kriterium.

Man betrachtet dazu zunächst folgendes

Beispiel 7. Gegeben sei das System mit den Daten

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad (3.9b)$$

welches auch in Beispiel 4 betrachtet wird. Da \mathbf{A} in Form einer Dreiecksmatrix vorliegt, kann man ihre, im Weiteren mit s_1 , s_2 und s_3 bezeichneten Eigenwerte sofort ablesen:

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -3. \quad (3.10)$$

Berechnet man außerdem zugehörige Eigenvektoren \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 und \mathbf{p}_3 so erhält man

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Man überprüft nun leicht, dass für die Matrix aus Relation (3.1)

$$\begin{bmatrix} (s_2\mathbf{E} - \mathbf{A})(s_3\mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

gilt und diese somit einen Rangverlust aufweist. Dies bedeutet nach Satz 7, dass das

System nicht perspektivisch beobachtbar ist, was mit dem Ergebnis aus Beispiel 4 übereinstimmt¹.

Man erkennt, dass der dabei in Relation (3.12) auftretende Vektor eine Linearkombination von Eigenvektoren zu den Eigenwerten s_2 und s_3 ist:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3. \quad (3.13)$$

Damit besagt Relation (3.12), dass diese Linearkombination zweier Eigenvektoren

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

erfüllt. Wie dieser Umstand zu einem Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit führt, kann man anhand der in Abbildung 3.1 gemeinsam mit den Eigenvektoren des Systems dargestellten Trajektorien aus Beispiel 4 erkennen: Jede Linearkombination der beiden Eigenbewegungen wird durch die Ausgangsmatrix auf dieselbe homogene Gerade abgebildet.

△

Man kann demnach, wie auch in [5] gezeigt wird, die perspektivische Beobachtbarkeit eines Systems bzw. den Verlust dieser Eigenschaft anhand sogenannter \mathbf{A} -invarianter Unterräume² charakterisieren, welche eine Verallgemeinerung der Eigenvektoren bzw. Eigenräume der Matrix \mathbf{A} darstellen. Man betrachte dazu bei verletztem PBH-Rangkriterium, d.h. für ein nicht perspektivisch beobachtbares System, den durch³

$$V := \ker \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \quad (3.15a)$$

gegebenen \mathbf{A} -invarianten Untervektorraum V . Dann gibt es einen Vektor $\mathbf{w} \in V$, d.h. eine Linearkombination von Eigen- bzw. Hauptvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$ der Matrix \mathbf{A} , sodass

$$\mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.15b)$$

gilt. Man kann damit folgende alternative Form von Satz 7 zeigen⁴:

¹Aus Satz 7 folgt hier allerdings nur, dass das System nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{C} ist, während dies in Beispiel 4 über \mathbb{R} gezeigt wurde. (Später wird man sehen, dass für *dieses System* das PBH-Kriterium (3.1) auch über \mathbb{R} notwendig und hinreichend ist.)

²Der Untervektorraum V heißt \mathbf{A} -invariant, wenn für alle Vektoren $\mathbf{v} \in V$ auch $\mathbf{A}\mathbf{v} \in V$ gilt. Wird der Raum V von den Spalten der Matrix \mathbf{V} aufgespannt, so gilt $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{S}$ für eine geeignete Matrix \mathbf{S} .

³Der sogenannte Nullraum oder Kern $\ker \mathbf{M}$ der Matrix \mathbf{M} ist der Untervektorraum aller Vektoren \mathbf{v} für die $\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ gilt.

⁴Der Satz wird auch in [5] in Form des später noch angegebenen Lemmas 17 gezeigt. Der einzige Unterschied ist dabei, dass die Aussage hier für die Matrix \mathbf{V} anstatt für den \mathbf{A} -invarianten Unterraum $\langle \mathbf{V} \rangle$ formuliert wird, und die Matrix \mathbf{V} spaltenregulär ist.

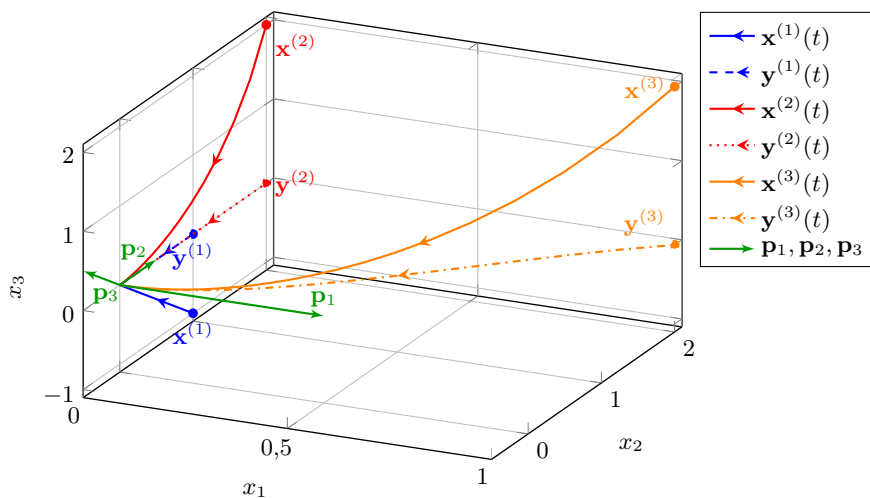


Abbildung 3.1.: Eigenvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ und ausgewählte Trajektorien eines nicht perspektivisch beobachtbaren Systems

Satz 8 (Alternative Form des verallgemeinerten PBH-Kriteriums). *Das System ist genau dann nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{C} mit dem Dimensionsverlust d , wenn es eine spaltenreguläre Matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)}$, eine quadratische Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}$ und einen Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1}$ mit*

$$\mathbf{V}\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad (3.16)$$

gibt, sodass

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{S}, \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.17b)$$

gilt. Bezeichnen $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$ die Eigenwerte der Matrix \mathbf{S} so gilt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} < n. \quad (3.18)$$

Anmerkung. Man erkennt, dass dieser Zusammenhang eine Verallgemeinerung der Relation (3.7) darstellt.

Beweis. Es wird zunächst die Existenz solcher Matrizen \mathbf{V} , \mathbf{S} und eines solchen Vektors \mathbf{u} vorausgesetzt. Die Spalten der Matrix \mathbf{V} spannen dann aufgrund von (3.17a) einen \mathbf{A} -invarianten Unterraum auf, dessen Dimension gleich der Anzahl der Spalten von \mathbf{V} , d.h. $d + 1$, ist. Für die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$ der Matrix \mathbf{S} folgt mit dem Satz von

Cayley-Hamilton

$$\prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{V} = \mathbf{V} \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{S}) = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Zusammen mit Relation (3.17b) ergibt sich so, mit der Abkürzung $\mathbf{w} := \mathbf{V}\mathbf{u}$,

$$\begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (3.20)$$

woraus aufgrund von (3.16) ein Rangverlust dieser Matrix und damit gemäß Satz 7 der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit folgt.

Umgekehrt kann man bei Verletzung der Rangbedingung (3.1) immer einen von null verschiedenen Vektor \mathbf{w} angeben, welcher die Relation (3.20) erfüllt. Es wird nun das Minimalpolynom⁵ $p(s)$ dieses Vektors \mathbf{w} betrachtet. Dessen Grad wird mit $l \leq d + 1$ bezeichnet. Daraus bildet man das Polynom

$$q(s) := \prod_{j=1}^{d+1-l} (s - \tilde{\lambda}_j) p(s) = s^{d+1} + \sum_{k=0}^d a_k s^k, \quad (3.21)$$

wobei die Zahlen $\tilde{\lambda}_j$ so aus den Eigenwerten der Matrix \mathbf{A} gewählt werden, dass

$$\dim \ker q(\mathbf{A}) \geq d + 1 \quad (3.22)$$

gilt. Da der Vektor \mathbf{w} die Relation

$$q(\mathbf{A})\mathbf{w} = \prod_{j=1}^{d+1-l} (\mathbf{A} - \tilde{\lambda}_j \mathbf{E}) p(\mathbf{A})\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

erfüllt, existiert ein Vektor $\mathbf{v} \in \ker q(\mathbf{A})$, sodass mit einem geeigneten Polynom $r(s)$

$$\mathbf{w} = r(\mathbf{A})\mathbf{v} \quad (3.24)$$

gilt und $q(s)$ das Minimalpolynom dieses Vektors ist. Da $q(s)$ den Grad $d + 1$ aufweist, ist die Matrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v} \quad \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \dots \quad \mathbf{A}^d \mathbf{v}] \quad (3.25)$$

spaltenregulär und ihre Spalten spannen einen \mathbf{A} -invarianten, sogenannten zyklischen

⁵Ein Polynom $p(s)$ heißt Minimalpolynom des Vektors \mathbf{w} , wenn es das Polynom niedrigsten Grades ist, für welches $p(\mathbf{A})\mathbf{w} = \mathbf{0}$ gilt.

Unterraum auf [9]. Konkret ist Relation (3.24) mit der Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_d \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

erfüllt, wobei a_k die Koeffizienten des Polynoms $q(s)$ darstellen. Aufgrund von Relation (3.24) ist \mathbf{w} ferner als Linearkombination der Spalten der Matrix \mathbf{V} darstellbar, d.h. es existiert ein Vektor \mathbf{u} , sodass

$$\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

gilt. □

Für den Dimensionsverlust $d = 1$ bedeutet Satz 8, dass für zwei Eigenvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ (siehe Beispiel 7), oder aber für einen Eigenvektor \mathbf{p}_1 und den zugehörigen Hauptvektor \mathbf{p}_2 (siehe Beispiel 2, wie im folgenden Beispiel 8 gezeigt wird) die Vektoren $\mathbf{C}\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{C}\mathbf{p}_2$ linear abhängig sind.

Beispiel 8. Es wird der bewegte Drehkörper aus Beispiel 2 betrachtet. Dieses System, mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{E} \quad \mathbf{0}], \quad (3.28)$$

ist, wie bereits diskutiert, für den Dimensionsverlust $d = 1$ nicht perspektivisch beobachtbar.

Mit dem Vektor \mathbf{q} aus Relation (2.8) erfüllen dementsprechend

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

die Relationen (3.17)

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{S}, \quad (3.30a)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.30b)$$

Anhand von \mathbf{S} erkennt man, dass die erste Spalte von \mathbf{V} einen Eigenvektor und die zweite den zugehörigen Hauptvektor der Matrix \mathbf{A} zum Eigenwert null darstellen. \triangle

Man kann auch folgende Deutung der perspektivischen Beobachtbarkeit angeben: Man betrachte ein gegenüber (2.1) modifiziertes System mit dem Ausgang

$$\tilde{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Theta}\mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (3.31)$$

Dabei gelte für den Nullraum der Matrix Θ

$$\dim \ker \Theta = d = 1, \quad (3.32)$$

d.h. es gebe genau eine Richtung \mathbf{v} , sodass

$$\Theta \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

ist. Die Matrix Θ legt also die Richtung \mathbf{v} fest, in welcher man keine Informationen über den ursprünglichen Ausgang \mathbf{y} erhält. Dann ist naheliegend, dass das ursprüngliche System nur dann perspektivisch beobachtbar ist, wenn für beliebige derartige Matrizen Θ der nicht beobachtbare Unterraum des modifizierten Systems höchstens Dimension eins hat. Dies lässt sich allgemein zeigen:

Satz 9. *Das System (2.1) ist genau dann perspektivisch beobachtbar über \mathbb{C} für den Dimensionsverlust d , wenn für alle Matrizen $\Theta \in \mathbb{C}^{r \times m}$ mit $r \geq m - d$ und*

$$\dim \ker \Theta \leq d \quad (3.34)$$

der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix für die Ausgangsgröße $\Theta \mathbf{y}$

$$\mathbf{B}_{\Theta \mathbf{y}} := \begin{bmatrix} \Theta \mathbf{C} \\ \Theta \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \Theta \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \Theta \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.35a)$$

die Ungleichung

$$\text{rang } \mathbf{B}_{\Theta \mathbf{y}} \geq n - d \quad (3.35b)$$

erfüllt.

Anmerkung. Dieser Zusammenhang stellt im Prinzip eine Verallgemeinerung des Beobachtbarkeitskriteriums (3.8) dar. Für den Dimensionsverlust $d \geq 1$ eignet er sich jedoch nicht als Kriterium, da hierbei der Rang einer unendlichen Zahl von Beobachtbarkeitsmatrizen untersucht werden müsste.

Beweis. Es wird zunächst angenommen, dass die Ungleichung (3.35b) für alle zulässigen Matrizen Θ erfüllt ist, das System aber nicht perspektivisch beobachtbar ist. Dann gibt es gemäß Satz 8 eine $(d + 1)$ -spaltige Matrix \mathbf{V} mit

$$\text{rang } \mathbf{V} = d + 1, \quad (3.36)$$

eine quadratische Matrix \mathbf{S} und einen Vektor \mathbf{u} , sodass die Relationen (3.16) und (3.17)

erfüllt sind. Insbesondere folgt für den Rang der Matrix \mathbf{CV} aus (3.16) und (3.17b)

$$\text{rang } \mathbf{CV} \leq d. \quad (3.37)$$

Es gibt somit eine Matrix Θ mit $\dim \ker \Theta \leq d$, welche

$$\Theta \mathbf{CV} = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

erfüllt. Damit erhält man unter Verwendung von Relation (3.17a)

$$\mathbf{B}_{\Theta y} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \Theta \mathbf{CV} \\ \Theta \mathbf{CAV} \\ \vdots \\ \Theta \mathbf{CA}^{n-1} \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta \mathbf{CV} \\ \Theta \mathbf{CVS} \\ \vdots \\ \Theta \mathbf{CVS}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.39)$$

Da die Matrix \mathbf{V} aus $d+1$ linear unabhängigen Spalten besteht, folgt für den Rang der Matrix $\mathbf{B}_{\Theta y}$

$$\text{rang } \mathbf{B}_{\Theta y} \leq n - (d+1) < n - d, \quad (3.40)$$

was einen Widerspruch darstellt.

Umgekehrt sei angenommen, dass das System perspektivisch beobachtbar ist, es aber $d+1$ linear unabhängige Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{d+1}$ und eine Matrix Θ mit

$$\mathbf{B}_{\Theta y} [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_{d+1}] = \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

gibt. Man wählt nun diese Vektoren als Anfangszustände $\mathbf{x}_0^{(i)} = \mathbf{v}_i$ (für $i = 1, \dots, d+1$) des Systems und betrachtet für ganzzahlige Werte $k > 0$ die Zeitableitungen

$$\left\{ \frac{d^k}{dt^k} \Theta [\mathbf{C}\mathbf{x}^{(1)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{x}^{(d+1)}(t)] \right\} \Big|_{t=0} = \Theta [\mathbf{CA}^k \mathbf{x}_0^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{CA}^k \mathbf{x}_0^{(d+1)}] \\ = [\Theta \mathbf{CA}^k \mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \Theta \mathbf{CA}^k \mathbf{v}_{d+1}]. \quad (3.42)$$

Aufgrund von (3.41) und der linearen Abhängigkeit der Matrizen $\mathbf{A}^n, \mathbf{A}^{n-1}, \dots, \mathbf{A}^0$ gilt für jeden ganzzahligen Wert $k > 0$

$$\Theta \mathbf{CA}^k = \mathbf{0}, \quad (3.43)$$

sodass sämtliche betrachtete Zeitableitungen verschwinden. Es muss also

$$\Theta [\mathbf{C}\mathbf{x}^{(1)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{x}^{(d+1)}(t)] \equiv \mathbf{0} \quad (3.44)$$

gelten, da die Einträge dieser Matrix analytische Funktionen in t sind, deren sämtliche

Ableitungen an der Stelle $t = 0$ verschwinden. Damit gilt aber für alle t

$$\text{rang} [\mathbf{C}\mathbf{x}^{(1)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{x}^{(d+1)}(t)] \leq \dim \ker \Theta \leq d. \quad (3.45)$$

Das steht (gemäß Lemma 5) im Widerspruch zur angenommenen perspektivischen Beobachtbarkeit des Systems. \square

Ausschließlich für den Dimensionsverlust $d = 1$ folgt aus den bisherigen Betrachtungen folgendes

Lemma 10. *Für drei Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 der Matrix \mathbf{A} mit $\lambda_1 \neq \lambda_3$ gelte*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \quad (3.46)$$

sowie

$$\text{rang} \begin{bmatrix} (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A})(\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} < n, \quad (3.47a)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} (\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A})(\lambda_3 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} < n, \quad (3.47b)$$

d.h. der Eigenwert λ_2 sei beobachtbar und die zwei Eigenwertpaare λ_1, λ_2 und λ_2, λ_3 verletzen die PBH-Rangbedingung. Ferner sei die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ_2 gleich eins. Dann gilt auch

$$\text{rang} \begin{bmatrix} (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A})(\lambda_3 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} < n. \quad (3.48)$$

Beweis. Es werden mit \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_3 Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 und λ_3 und mit \mathbf{p}_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 bezeichnet. Gilt $\lambda_1 = \lambda_2$ oder $\lambda_2 = \lambda_3$ so ist nichts zu zeigen. Andernfalls sind die Paare $\mathbf{C}\mathbf{p}_1, \mathbf{C}\mathbf{p}_2$ und $\mathbf{C}\mathbf{p}_2, \mathbf{C}\mathbf{p}_3$ jeweils linear abhängig, wobei aufgrund der Voraussetzungen bezüglich geometrischer Vielfachheit und Beobachtbarkeit des Eigenwertes λ_2 der Eigenvektor \mathbf{p}_2 eindeutig und der Vektor $\mathbf{C}\mathbf{p}_2$ verschieden von null ist. Damit ist auch das Paar $\mathbf{C}\mathbf{p}_1, \mathbf{C}\mathbf{p}_3$ linear abhängig, woraus mit $\lambda_1 \neq \lambda_3$ die Behauptung des Lemmas folgt. \square

Sind also bei einem beobachtbaren System mit nichtderogatorischer Systemmatrix⁶ die Eigenwertpaare (λ_1, λ_2) , mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, und (λ_2, λ_3) , mit $\lambda_2 \neq \lambda_3$, nicht perspektivisch beobachtbar, so gilt dies auch für das Eigenwertpaar (λ_1, λ_3) . Es handelt sich offenbar um eine *Transitivitätseigenschaft* der Relation

$$\lambda_1 \sim \lambda_2 \Leftrightarrow \text{Eigenwertpaar } (\lambda_1, \lambda_2) \text{ ist nicht persp. beobachtbar}, \quad (3.49)$$

⁶Eine Matrix heißt nichtderogatorisch, wenn ihr charakteristisches Polynom zugleich ihr Minimalpolynom darstellt. Das ist genau dann der Fall, wenn die geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte gleich eins ist.

für diese Klasse von Systemen.

3.2. Kriterien über den reellen Zahlen

Ein offenes Problem ist die Überprüfung der perspektivischen Beobachtbarkeit über \mathbb{R} . In [12] wird zu diesem Fall lediglich folgendes ausgesagt:

Satz 11. *Sind die Eigenwerte der Matrix reell, d.h.*

$$\Lambda(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{R}, \quad (3.50)$$

oder gilt $d = 0$, so ist die Rangbedingung (3.1) notwendig und hinreichend für die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{R} für den Dimensionsverlust d .

Ist keine dieser beiden Voraussetzungen erfüllt, so ist die Rangbedingung hinreichend (im Allgemeinen aber nicht notwendig) für die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{R} .

Dieses Kriterium ist leider bei manchen praktisch interessanten Beispielen nicht anwendbar. Dazu zeigt das folgende Beispiel ein über \mathbb{C} für $d = 1$ nicht perspektivisch beobachtbares System, zu dessen perspektivischer Beobachtbarkeit über \mathbb{R} mit Satz 11 keine Aussage gemacht werden kann.

Beispiel 9. Es wird ein Drehkörper, ähnlich wie in Beispiel 1, betrachtet, dessen Drehachse jedoch anstatt durch den Ursprung durch einen festen Punkt \mathbf{r} verläuft. Ein Punkt \mathbf{p} auf dem Körper sowie der Punkt \mathbf{r} erfüllen in diesem Fall die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} - \mathbf{r}) = \mathbf{\Omega}(\mathbf{p} - \mathbf{r}), \quad (3.51a)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}, \quad (3.51b)$$

wobei die Matrix $\mathbf{\Omega}$ in Relation (2.6) angegeben ist.

Eine Möglichkeit dieses System zu modellieren wäre es, den Punkt \mathbf{r} als Zustandsvariable einzuführen. Dabei ergäbe sich allerdings das Problem, dass die Lage von \mathbf{r} auf der Rotationsachse keinen Einfluss auf den Punkt \mathbf{p} hat und man somit von vornherein ein *nicht beobachtbares* System erhielte.

Um nur die beobachtbaren Teile des Systems zu modellieren werden zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren der Rotationsmatrix $\mathbf{\Omega}$ näher betrachtet. Ein Eigenvektor von $\mathbf{\Omega}$ wird bereits in Beispiel 2 verwendet: der Einheitsvektor \mathbf{q} aus Relation (2.8), mit zugehörigem Eigenwert null. Daneben besitzt die Rotationsmatrix das konjugiert komplexe Eigenwertpaar $\pm j\omega$, wobei ω die in (2.7) angegebene Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Der zu diesem Eigenwertpaar gehörige $\mathbf{\Omega}$ -invariante Unterraum wird z.B. von den Spalten der Matrix

$$\mathbf{R} := \frac{1}{\omega \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \begin{bmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 & 0 \\ \omega_2 \omega_3 & \omega_1 \omega \\ -\omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

aufgespannt; konkret gilt

$$\mathbf{\Omega R} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{RW}. \quad (3.53)$$

Der Punkt \mathbf{r} lässt sich damit eindeutig in der Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{Rz} + \mathbf{q}\alpha \quad (3.54)$$

mit einem Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ und einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ darstellen. Außerdem gilt

$$\mathbf{\Omega r} = \mathbf{\Omega Rz} = \mathbf{RWz}. \quad (3.55)$$

Anhand der obigen Überlegungen ist klar, dass die skalare Größe α – als Zustandsvariable betrachtet – bezüglich der Ausgangsgröße \mathbf{p} nicht beobachtbar ist. Um ein beobachtbares System zu erhalten wird als Zustandsvektor \mathbf{x} daher

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{Wz} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

gewählt. Es ergibt sich damit ein System in der Form (2.1) mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} & -\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{E} \quad \mathbf{0}]. \quad (3.57)$$

Man betrachtet nun das PBH-Rangkriterium für das Eigenwertpaar $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = j\omega$. Man erhält

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} -\mathbf{A}(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}^2 - j\omega\mathbf{\Omega} & (j\omega\mathbf{E} - \mathbf{\Omega})\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}^2 - j\omega\mathbf{\Omega} & \mathbf{R}(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{W}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \text{rang } \mathbf{E} + \text{rang } \mathbf{R}(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{W}) = 3 + 1 < 5 = n, \end{aligned} \quad (3.58)$$

wobei sich der Rangverlust der zweispaltigen Matrix $\mathbf{R}(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{W})$ aus der Tatsache ergibt, dass $j\omega$ ein Eigenwert der Matrix \mathbf{W} ist. Das System ist also für den Dimensionsverlust $d = 1$ nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{C} . Zur perspektivischen Beobachtbarkeit des Systems über \mathbb{R} erlaubt Satz 11 wegen des konjugiert komplexen Eigenwertpaars keine Aussage. \triangle

Andere notwendige und hinreichende Kriterien für die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{R} wurden bisher nur für den Dimensionsverlust $d = 1$ genauer untersucht [5, 25, 21]. Aufgrund der komplizierten Zusammenhänge werden auch die folgenden Betrachtungen auf diesen Fall beschränkt.

3.2.1. Ein Kriterium unter zusätzlichen Voraussetzungen

Für den Fall, dass die Matrix \mathbf{A} nicht ausschließlich reelle Eigenwerte hat, wurde eine notwendige und hinreichende Bedingung unter folgenden zusätzlichen Voraussetzungen formuliert [5, 25]:

Definition 12 (Starke Regularität). Eine Matrix \mathbf{A} heißt stark regulär, wenn sie keine mehrfachen Eigenwerte besitzt und, abgesehen von konjugiert komplexen Eigenwertpaaren, auch alle Realteile paarweise verschieden sind, d.h. wenn⁷

$$\operatorname{Re} \{s_i\} \neq \operatorname{Re} \{s_j\} \quad \text{für } i \neq j \text{ und } s_i \neq s_j^*. \quad (3.59)$$

gilt.

Definition 13 (Irrationalitätsbedingung). Eine Matrix \mathbf{A} erfüllt die Irrationalitätsbedingung, wenn für alle komplexen Eigenwertpaare s_i, s_j von \mathbf{A} mit $\operatorname{Im} \{s_j\} \neq 0$ der Quotient ihrer Imaginärteile irrational ist, d.h. wenn

$$\frac{\operatorname{Im} \{s_i\}}{\operatorname{Im} \{s_j\}} \notin \mathbb{Q} \quad \text{für } i \neq j \text{ und } s_i \neq s_j^* \quad (3.60)$$

gilt⁸.

Unter der Voraussetzung, dass die Systemmatrix diese beiden Eigenschaften besitzt, lässt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung angeben. In [5] wird folgender Satz gezeigt:

Satz 14 ([5]). Die Systemmatrix \mathbf{A} des Systems (2.1) sei stark regulär und erfülle die Irrationalitätsbedingung. Unter diesen Voraussetzungen ist das System genau dann perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} für den Dimensionsverlust $d = 1$, wenn für alle reellen und paarweise konjugiert komplexen Zahlen λ_1, λ_2

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A}) & (\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \quad (3.61)$$

gilt.

Eine Überprüfung dieses Kriteriums für alle reellen und paarweise konjugiert komplexen Zahlen ist in der Praxis nicht durchführbar. Ein Rangverlust kann allerdings nur eintreten, falls λ_1 bzw. λ_2 Eigenwerte von \mathbf{A} sind. In [25, 21] wird daher eine Kandidatenliste von Paaren (λ_1, λ_2) ermittelt, für welche obige Rangbedingung überprüft werden muss. Es reicht die Überprüfung von (3.61) für alle reellen und konjugiert komplexen

⁷Für eine komplexe Zahl z bezeichnet z^* die zugehörige komplex konjugierte Zahl.

⁸Hierbei bezeichnet \mathbb{Q} die Menge der rationalen Zahlen.

Eigenwertpaare von \mathbf{A} , d.h. für folgende Zahlen aus⁹:

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda(\mathbf{A}) \wedge (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \vee \lambda_1 = \lambda_2^* \in \mathbb{C}). \quad (3.62)$$

3.2.2. Lockerung einer Voraussetzung des Kriteriums

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass das Kriterium auch bei Ersatz der Irrationalitätsbedingung durch eine weniger einschränkende Voraussetzung gilt. Dazu wird zunächst der Beweis von Satz 14 genauer untersucht.

Untersuchung der Irrationalitätsbedingung

In [5] wird beim Beweis von Satz 14 die Äquivalenz der perspektivischen Beobachtbarkeit von (2.1) über¹⁰ \mathbb{K} mit der Beobachtbarkeit des auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit¹¹ $\mathbb{G}_{d+1}(\mathbb{K}^n)$ definierten Systems

$$\frac{d \langle \mathbf{X} \rangle}{dt} = \mathbf{A} \langle \mathbf{X} \rangle \quad (3.63a)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \langle \mathbf{X} \rangle \quad (3.63b)$$

genutzt. Dabei bezeichnet $\langle \mathbf{X} \rangle \in \mathbb{G}_{d+1}(\mathbb{K}^n)$ den von den Spalten von $\mathbf{X} \in \mathbb{K}^{n \times (d+1)}$ aufgespannten Untervektorraum.

Die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{K} (für den Dimensionsverlust $d = 1$) lässt sich mit Hilfe der sogenannten ω -Grenzmenge charakterisieren. Diese entspricht für einen gegebenen Anfangsvektorraum $W \in \mathbb{G}_2(\mathbb{K}^n)$ der Menge aller Häufungspunkte der Systemtrajektorie $e^{\mathbf{A}t}W$ des Systems (3.63):

$$\omega(W) := \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} e^{t_k \mathbf{A}} W \mid t_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty \right\}. \quad (3.64)$$

Konkret wird Folgendes gezeigt:

Proposition 15 ([5]). *Das System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) ist genau dann perspektivisch beobachtbar über \mathbb{K} für $d = 1$, wenn es zu jedem $W \in \mathbb{G}_2(\mathbb{K}^n)$ ein $W_\infty \in \omega(W)$ gibt, sodass $\dim \mathbf{C}W_\infty = 2$ ist.*

Über \mathbb{R} lässt sich die ω -Grenzmenge des Systems (3.63) bei Vorliegen einer stark regulären Systemmatrix folgendermaßen charakterisieren¹²:

⁹Der in [25] ebenfalls berücksichtigte Fall, dass λ_1 ein reeller Eigenwert und λ_2 kein Eigenwert ist, muss nicht separat berücksichtigt werden. Ein Rangverlust in diesem Fall hat auch für beliebige $\lambda_2 \in \Lambda(\mathbf{A})$ einen Rangverlust zur Folge, was mit den Kandidaten aus (3.62) bereits überprüft wird.

¹⁰Später wird $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eingesetzt, je nachdem ob die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{R} oder \mathbb{C} untersucht wird.

¹¹Die Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathbb{G}_m(\mathbb{K}^n)$ bezeichnet die Menge aller m -dimensionalen Vektorräume, d.h. $\mathbb{G}_m(\mathbb{K}^n) := \{ \langle \mathbf{X} \rangle \mid \mathbf{X} \in \mathbb{K}^{n \times m}, \text{rang } \mathbf{X} = m \}$.

¹²Für zwei Untervektorräume $S_1 = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ und $S_2 = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \rangle$ ist ihre Summe

$$S_1 + S_2 = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \rangle$$

Satz 16 ([5]). *Es sei \mathbf{A} stark regulär und $W \in \mathbb{G}_2(\mathbb{R}^n)$. Dann nimmt $\omega(W)$ eine der folgenden Formen an:*

- (a) $\omega(W) = \{V\}$ mit einem reellen, zweidimensionalen \mathbf{A} -invarianten Unterraum V .
- (b) $\omega(W) = \{V \oplus \langle \cos(\nu t)\mathbf{z} + \sin(\nu t)\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R} \rangle\}$ mit einem eindimensionalen reellen Eigenraum V von \mathbf{A} und dem komplexen Eigenvektor $\mathbf{z} + j\mathbf{w}$ zum Eigenwert $\mu + j\nu$ mit $\nu \neq 0$.
- (c) $\omega(W) = \text{cl} \{ \langle \cos(\nu_1 t)\mathbf{z}_1 + \sin(\nu_1 t)\mathbf{w}_1 \rangle \oplus \langle \cos(\nu_2 t)\mathbf{z}_2 + \sin(\nu_2 t)\mathbf{w}_2 \rangle \mid t \in \mathbb{R} \}$ mit den zwei echt komplexen Eigenvektoren $\mathbf{z}_1 + j\mathbf{w}_1, \mathbf{z}_2 + j\mathbf{w}_2$ zu den Eigenwerten $\mu_1 + j\nu_1, \mu_2 + j\nu_2$ mit $\nu_2 \neq 0 \neq \nu_1$ und der abgeschlossenen Hülle $\text{cl } M$ von M in $\mathbb{G}_2(\mathbb{R}^n)$.

Außerdem wird in [5] folgende Äquivalenz gezeigt, welche über die Relation $V = \langle \mathbf{V} \rangle$ im Wesentlichen der Aussage von Satz 8 entspricht:

Lemma 17 ([5]). *Folgende Aussagen sind sowohl für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ als auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ äquivalent:*

1. Für alle Zahlen $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$ gilt

$$\text{rang} \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}^{d+1} + \sum_{k=0}^d a_k \mathbf{A}^k \\ \mathbf{C} \end{array} \right] = n. \quad (3.65)$$

2. Für alle bis zu $(d+1)$ -dimensionalen \mathbf{A} -invarianten Unterräume V des \mathbb{K}^n gilt

$$\dim \mathbf{C}V = \dim V. \quad (3.66)$$

Anmerkung. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $d = 1$ entspricht die Bedingung (3.65) der Forderung, dass für alle reellen und konjugiert komplexen Zahlen λ_1, λ_2

$$\text{rang} \left[\begin{array}{c} (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A}) (\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{array} \right] = n \quad (3.67)$$

gilt.

Lockerung der konservativen Irrationalitätsbedingung

Unter Verwendung von Proposition 15, Satz 16 und Lemma 17 wird in [5] die Gültigkeit von Satz 14 gezeigt. Im Unterschied zur dortigen Vorgehensweise lässt sich jedoch die Irrationalitätsbedingung auch durch die schwächere Forderung ersetzen, dass alle komplexen Eigenwerte paarweise unterschiedliche Imaginärteile besitzen! Dies wird im Folgenden gezeigt.

der von allen Vektoren aus S_1 und S_2 aufgespannte Untervektorraum. Gilt $\dim S_1 \cap S_2 = 0$, so handelt es sich um eine direkte Summe, die als $S_1 \oplus S_2$ geschrieben wird.

Beim Beweis von Satz 14 wird die Irrationalitätsbedingung nur für den Nachweis der Suffizienz des Kriteriums im Fall von ω -Grenzmengen benutzt, die nach Satz 16 vom Typ (c) sind. Daher wird hier nur auf diesen Teil des Beweises eingegangen.

Es ist zu zeigen, dass aus der Annahme eines über \mathbb{R} nicht perspektivisch beobachtbaren Systems (\mathbf{A}, \mathbf{C}) folgender Widerspruch zur Rangbedingung (3.61) folgt (vergleiche Lemma 17): Es gibt einen ein- oder zweidimensionalen \mathbf{A} -invarianten Unterraum V für welchen

$$\dim \mathbf{C}V < \dim V \quad (3.68)$$

gilt.

Da (\mathbf{A}, \mathbf{C}) über \mathbb{R} nicht perspektivisch beobachtbar ist, gibt es nach Proposition 15 einen Untervektorraum $W \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass für alle $W_\infty \in \omega(W)$

$$\dim \mathbf{C}W_\infty < 2 \quad (3.69)$$

gilt. Dabei kann $\omega(W)$ eine der drei Formen aus Satz 16 annehmen. Hier wird nur der Fall betrachtet, dass $\omega(W)$ vom Typ (c) ist, der Beweis für die zwei anderen Fälle kann unverändert aus [5] übernommen werden. Man sieht durch Einsetzen von $t = 0$, dass

$$\langle \mathbf{z}_1 \rangle \oplus \langle \mathbf{z}_2 \rangle \in \omega(W) \quad (3.70)$$

gilt. Unter der Voraussetzung, dass die Eigenwerte von \mathbf{A} paarweise verschiedene Imaginärteile aufweisen, gilt insbesondere

$$\nu_1 \neq \nu_2 \quad (3.71)$$

und man kann t so wählen, dass

$$\cos(\nu_1 t) = 1, \quad \sin(\nu_1 t) = 0, \quad (3.72a)$$

$$\cos(\nu_2 t) =: \alpha, \quad \sin(\nu_2 t) =: \beta \neq 0 \quad (3.72b)$$

gilt. Somit folgt

$$\langle \mathbf{z}_1 \rangle \oplus \langle \alpha \mathbf{z}_2 + \beta \mathbf{w}_2 \rangle \in \omega(W). \quad (3.73)$$

Aus (3.69) folgt dann, dass die Paare $(\mathbf{C}\mathbf{z}_1, \mathbf{C}\mathbf{z}_2)$ sowie $(\mathbf{C}\mathbf{z}_1, \alpha \mathbf{C}\mathbf{z}_2 + \beta \mathbf{C}\mathbf{w}_2)$ jeweils linear abhängig sind. Ist $\mathbf{C}\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0}$, so folgt daraus aufgrund von $\beta \neq 0$ unmittelbar die lineare Abhängigkeit der Vektoren $(\mathbf{C}\mathbf{z}_2, \mathbf{C}\mathbf{w}_2)$. Gilt dagegen $\mathbf{C}\mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$, so sind trivialeweise $(\mathbf{C}\mathbf{z}_1, \mathbf{C}\mathbf{w}_1)$ linear abhängig. Damit gilt für den von $\mathbf{z}_1 \pm j\mathbf{w}_1$ bzw. $\mathbf{z}_2 \pm j\mathbf{w}_2$ aufgespannten, reellen \mathbf{A} -invarianten Unterraum V

$$\dim \mathbf{C}V \leq 1 < \dim V = 2, \quad (3.74)$$

was den Beweis abschließt.

Erweitertes Kriterium

Aus den vorangegangenen Überlegungen ergibt sich folgende Erweiterung von Satz 14:

Satz 18. Die Systemmatrix \mathbf{A} des Systems (2.1) sei stark regulär und es gelte

$$\operatorname{Im} \{s_i\} \neq \operatorname{Im} \{s_j\} \quad (3.75)$$

für alle paarweise verschiedenen Eigenwerte $s_i \neq s_j$ von \mathbf{A} . Das System (2.1) ist genau dann perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} für den Dimensionsverlust $d = 1$, wenn für alle reellen und paarweise konjugiert komplexen Eigenwerte λ_1, λ_2 der Matrix \mathbf{A}

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A}) & (\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \quad (3.76)$$

gilt.

Beweis. Folgt aus den Ausführungen in [5] und den obigen Überlegungen. \square

Zum besseren Verständnis der Zusammenhänge werden zwei Beispiele besprochen. Mit diesen wird gezeigt, dass die Aussage von Satz 18 bei Verletzung jeweils einer der beiden Voraussetzungen nicht gilt: In diesem Fall kann es auch dann zum Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit kommen, wenn die Rangbedingung für alle reellen und konjugiert komplexen Eigenwerte erfüllt ist.

Im ersten Beispiel wird die Auswirkung von Eigenwerten mit gleichem Imaginärteil gezeigt.

Beispiel 10. Man betrachte ein System vierter Ordnung mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & -2 & \omega \\ & & -\omega & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

und dem reellen Parameter $\omega > 0$. Man erkennt aufgrund der Blockdiagonalstruktur von \mathbf{A} die Eigenwerte

$$\Lambda(\mathbf{A}) = \{\pm j, -2 \pm j\omega\}. \quad (3.78)$$

Für einen beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 ist die Ausgangsgröße durch

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) & e^{-2t}(2 \sin(\omega t) + \cos(\omega t)) & e^{-2t}(\sin(\omega t) - 2 \cos(\omega t)) \\ -\sin(t) & \cos(t) & e^{-2t}(-\sin(\omega t) + 2 \cos(\omega t)) & e^{-2t}(2 \sin(\omega t) + \cos(\omega t)) \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 \quad (3.79)$$

gegeben. Damit erhält man für die Anfangswerte

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = [0 \ 0 \ a \ b]^T \quad (3.80)$$

mit beliebigen, reellen Werten a, b die Ausgangsgrößen

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} (b+2a)\sin(\omega t) + (a-2b)\cos(\omega t) \\ (2b-a)\sin(\omega t) + (b+2a)\cos(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Man überzeugt sich nun leicht davon, dass das Rangkriterium (Satz 7) ausschließlich für die zwei Eigenwertpaare

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in \{(j, -2 + j\omega), (-j, -2 - j\omega)\} \quad (3.82)$$

verletzt ist und das System über \mathbb{C} daher nicht perspektivisch beobachtbar ist.

Für $\omega = 1$ ist Satz 18 nicht anwendbar, da dann die Eigenwerte j und $2 + j$ denselben Imaginärteil aufweisen. Setzt man in obigen Anfangszuständen $a = 2b$ so gilt

$$\mathbf{y}^{(2)}(t) = 5be^{-t}\mathbf{y}^{(1)}(t), \quad (3.83)$$

sodass das System in diesem Fall *nicht* perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} ist. Dies ist auch anhand von Abbildung 3.2 ersichtlich. Diese stellt die Verläufe der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}^{(1)}$ und $\mathbf{y}^{(2)}$ für die Parameterwerte $a = 2b = \frac{4}{5}$ und für $0 \leq t \leq \pi$ dar. Explizit hervorgehoben sind die Werte zu den Zeitpunkten

$$t = \frac{k\pi}{7} \quad \text{für } k = 0, \dots, 7, \quad (3.84)$$

anhand derer die lineare Abhängigkeit von $\mathbf{y}^{(1)}$ und $\mathbf{y}^{(2)}$ ersichtlich ist.

Für $\omega \neq 1$ ist nach Satz 18 die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{R} sehr wohl gegeben. Somit ist es unmöglich reelle Zahlen a, b und Funktion $\alpha(t)$ so zu finden, dass

$$\mathbf{y}^{(2)}(t) = \alpha(t)\mathbf{y}^{(1)}(t) \quad (3.85)$$

für alle Zeiten erfüllt ist. △

Im folgenden Beispiel wird ein System betrachtet, dessen Systemmatrix nicht stark regulär ist.

Beispiel 11. Gegeben sei ein System sechster Ordnung mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 & 2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -2 & -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 3 \\ & & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Für eine einfache Vorabüberprüfung erweist sich folgendes Lemma als hilfreich, welches

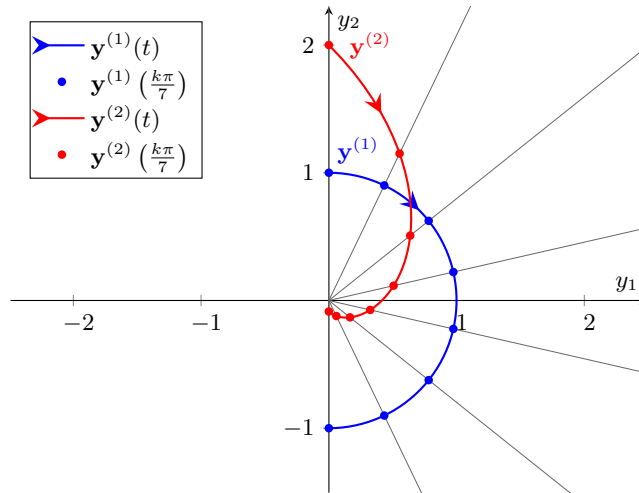


Abbildung 3.2.: Zwei Ausgangsgrößenverläufe des Systems aus Beispiel 10

eine direkte Konsequenz von Lemma 17 ist¹³:

Lemma 19. Für zwei reelle oder konjugiert komplexe Eigenwerte λ_1, λ_2 der Matrix \mathbf{A} gelte

$$\text{rang} \begin{bmatrix} (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A}) & (\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix} < n. \quad (3.87)$$

Dann ist das System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} .

Beweis. Da die Eigenwerte λ_1, λ_2 entweder reell oder konjugiert komplex sind, besitzt das Polynom

$$p(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 + a_1 s + a_0 \quad (3.88)$$

reellwertige Koeffizienten a_0 und a_1 . Gemäß Lemma 17 gibt es daher einen höchstens zweidimensionalen (nichttrivialen) \mathbf{A} -invarianten Unterraum V des \mathbb{R}^n , für welchen

$$\dim \mathbf{C}V < \dim V \quad (3.89)$$

gilt.

Ist die Dimension des Unterraums V gleich eins, so wird er von einem Rechts-Eigenvektor von \mathbf{A} aufgespannt und das System ist nicht beobachtbar; gemäß Satz 11 und Lemma 6 ist es dann auch nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} . Andernfalls kann man zwei linear unabhängige, reellwertige Anfangszustände $\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}$ aus V auswählen.

¹³Dieser Zusammenhang wird unter anderem auch in [11] bewiesen. Die (dort ebenfalls bewiesene) Umkehrung dagegen gilt nicht. Sie wird in [5] durch ein Gegenbeispiel widerlegt.

Aufgrund der \mathbf{A} -Invarianz von V gilt dann für die gesamten Trajektorien

$$\mathbf{x}^{(i)}(t) \in V \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (3.90)$$

Daraus folgt

$$\text{rang} [\mathbf{y}^{(1)}(t) \quad \mathbf{y}^{(2)}(t)] \leq \dim \mathbf{C}V < 2, \quad (3.91)$$

d.h. die Ausgangsverläufe sind zu jedem Zeitpunkt linear abhängig. Somit ist das System nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} . \square

Es ist also zunächst zu überprüfen, ob für alle reellen und konjugiert komplexen Paare λ_1, λ_2 aus den Eigenwerten

$$\Lambda(\mathbf{A}) = \{\pm j, -1 \pm 2j, \pm 3j\} \quad (3.92)$$

die Rangbedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A}) & (\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix} = n = 6 \quad (3.93)$$

erfüllt ist. Dabei ist hilfreich, dass die Matrix \mathbf{A} in Blockdiagonalform vorliegt und jedem konjugiert komplexen Eigenwertpaar einer der Blöcke entspricht. Es reicht daher aus, das Rangkriterium separat für folgende drei Teilsysteme zu überprüfen:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.94a)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.94b)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.94c)$$

Man verifiziert dessen Gültigkeit unmittelbar anhand der Regularität der Matrizen \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 und \mathbf{C}_3 .

Die Matrix \mathbf{A} ist jedoch nicht stark regulär, sodass Satz 18 nicht anwendbar ist. Außerdem ist das System über \mathbb{C} nicht perspektivisch beobachtbar, wie man anhand des Eigenwertpaares

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (j, 3j) \quad (3.95)$$

mit Satz 7 überprüft.

Wählt man die linear unabhängigen Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \left[\frac{3}{10} \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{5} \right]^T \quad (3.96)$$

so erhält man die Ausgangsgrößen

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \sin(2t) \\ e^{-t} \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} \sin(3t) + \sin(t) \\ \cos(3t) + \cos(t) \end{bmatrix}, \quad (3.97)$$

welche in Abbildung 3.3 graphisch dargestellt sind. Man kann überprüfen, dass

$$\mathbf{y}^{(2)}(t) = 2e^t \cos(t) \cdot \mathbf{y}^{(1)}(t) \quad (3.98)$$

gilt. Somit ist das System *nicht* perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} .

Bemerkenswert ist, dass das Rangkriterium unter anderem für

$$\lambda_1 = j, \quad \lambda_2 = -1 + 2j \quad (3.99)$$

sowie für

$$\lambda_1 = -1 + 2j, \quad \lambda_2 = 3j \quad (3.100)$$

verletzt ist und die Differenz der jeweiligen Imaginärteile gleich ist. Dieser Umstand erlaubt es hier, den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^{(2)}$ als Linearkombination aus den Eigenräumen zu den Eigenwerten $\pm j$ und $\pm 3j$ so zu wählen, dass sich die entsprechende Systemantwort $\mathbf{y}^{(2)}(t)$ durch Multiplikation mit $e^t \cos(t)$ in $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ überführen lässt. \triangle

3.2.3. Ein notwendiges Kriterium

Eine Verallgemeinerung der im vorangegangenen Abschnitt besprochenen Beispiele führt zu einem notwendigen Kriterium für die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{R} . Dieses wird der Einfachheit halber in negierter Form angegeben, d.h. als *hinreichende* Bedingung für den *Verlust* der perspektivischen Beobachtbarkeit. Es stellt im Wesentlichen eine Reihe von Anforderungen an die Eigenwerte dar, welche das PBH-Rangkriterium verletzen.

Satz 20. Für drei Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix \mathbf{A} gelte

$$\text{rang} \begin{bmatrix} (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A})(\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} < n, \quad (3.101a)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} (\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A})(\lambda_3 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} < n. \quad (3.101b)$$

Ferner sei die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ_2 gleich eins und es seien die Bedingung

$$\text{Re} \{ \lambda_1 \} = \text{Re} \{ \lambda_3 \} \quad (3.102)$$

sowie zumindest eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

$$\text{Im} \{ \lambda_2 \} - \text{Im} \{ \lambda_1 \} = \text{Im} \{ \lambda_3 \} - \text{Im} \{ \lambda_2 \} \quad (3.103a)$$

$$\text{oder} \quad \text{Im} \{ \lambda_2 \} + \text{Im} \{ \lambda_1 \} = \text{Im} \{ \lambda_3 \} + \text{Im} \{ \lambda_2 \} = \text{Re} \{ \lambda_1 \} - \text{Re} \{ \lambda_2 \} = 0. \quad (3.103b)$$

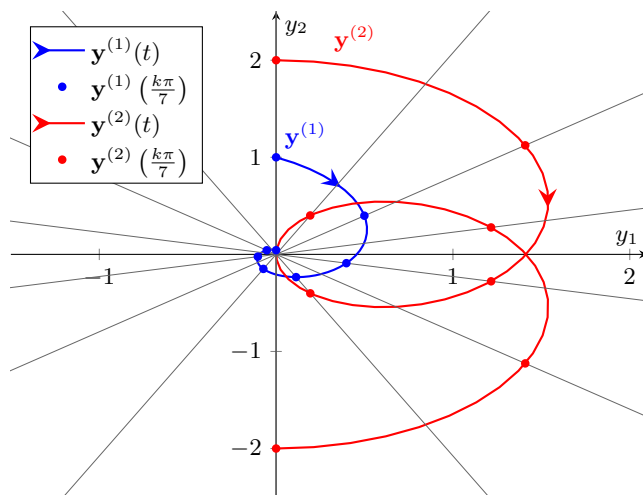


Abbildung 3.3.: Zwei Ausgangsgrößenverläufe des Systems aus Beispiel 11

Dann ist das System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} für den Dimensionsverlust $d = 1$.

Anmerkung. Ist die zweite der obigen Bedingungen (3.103b) erfüllt, so gilt $\lambda_1 = \lambda_3$ und das Zahlenpaar (λ_1, λ_2) erfüllt

$$\lambda_1 = \lambda_2^*. \quad (3.104)$$

Setzt man umgekehrt $\lambda_1 = \lambda_3$ voraus, so erkennt man, dass sich die erste Bedingung (3.103a) zur Relation

$$\text{Im} \{ \lambda_1 \} = \text{Im} \{ \lambda_2 \} \quad (3.105)$$

vereinfacht, welche als Spezialfall $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ einschließt. In diesen Fällen wird effektiv nur die Existenz eines Zahlenpaares (λ_1, λ_2) benötigt, welches (3.104) oder (3.105) erfüllt und die Rangbedingung (3.101a) verletzt. Andernfalls setzt die Anwendbarkeit des Satzes die Verletzung der Rangbedingung für zwei (verschiedene) Eigenwertpaare (λ_1, λ_2) und (λ_2, λ_3) voraus, welche die Relationen (3.102) und (3.103a), d.h.

$$\text{Re} \{ \lambda_1 \} = \text{Re} \{ \lambda_3 \}, \quad (3.106a)$$

$$\text{Im} \{ \lambda_2 \} - \text{Im} \{ \lambda_1 \} = \text{Im} \{ \lambda_3 \} - \text{Im} \{ \lambda_2 \} \quad (3.106b)$$

erfüllen. Abbildung 3.4 stellt die Anforderungen des Satzes an die Lage der Eigenwerte, welche die Rangbedingung verletzen, graphisch dar.

Beweis. Es werden zwei Fälle unterschieden. Zunächst sei

$$\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda, \quad (3.107)$$

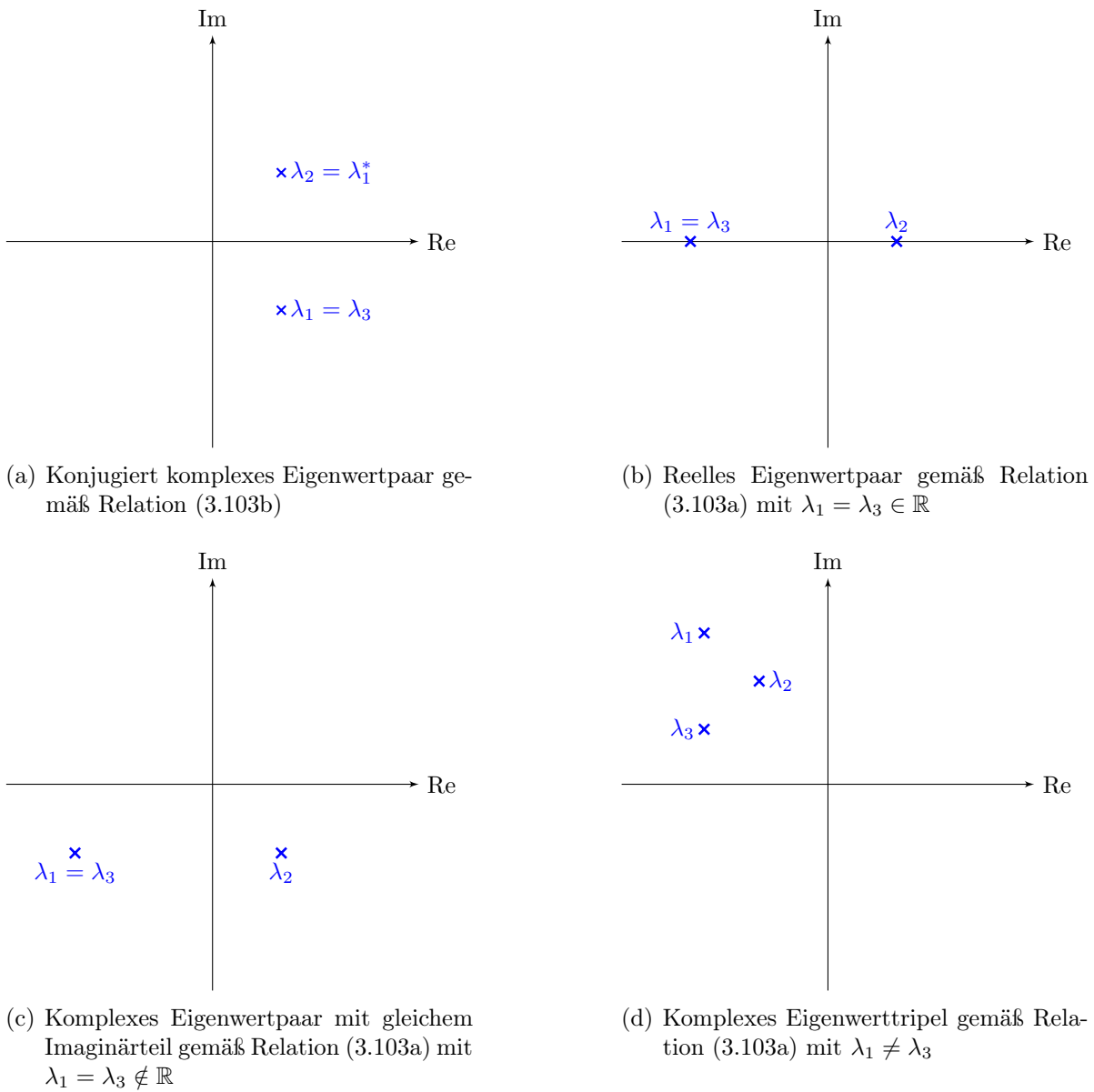


Abbildung 3.4.: Graphische Darstellung der Anforderungen von Satz 20 an die Lage des Eigenwertpaares bzw. -tripels, welches die PBH-Rangbedingung(en) verletzt

d.h. mit $\lambda_3 = \lambda_1$ ist Voraussetzung (3.103a) erfüllt und es gilt gemäß (3.101a)

$$\text{rang} \begin{bmatrix} (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})^2 \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} < n. \quad (3.108)$$

Es sei nun \mathbf{p}_1 ein Eigenvektor und \mathbf{p}_2 ein Hauptvektor¹⁴ zum Eigenwert λ , sodass

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_2 = \lambda\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 \quad (3.109)$$

gilt. Damit ist für beliebige Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die Trajektorie des Systems zum Anfangswert

$$\mathbf{x}_0 = \alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2 \quad (3.110)$$

durch

$$\mathbf{x}(t) = (\beta t + \alpha)\mathbf{p}_1 e^{\lambda t} + \beta\mathbf{p}_2 e^{\lambda t} \quad (3.111)$$

gegeben.

Aufgrund des Rangverlustes der Matrix in Relation (3.108) gibt es zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$, sodass

$$a\mathbf{C}\mathbf{p}_1 + b\mathbf{C}\mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \quad (3.112)$$

gilt. Wählt man die linear unabhängigen, reellwertigen Anfangszustände¹⁵

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = b\mathbf{p}_1 + b^*\mathbf{p}_1^*, \quad (3.113a)$$

$$\mathbf{x}_0^{(2)} = (a+b)\mathbf{p}_1 + b\mathbf{p}_2 + (a^*+b^*)\mathbf{p}_1^* + b^*\mathbf{p}_2^*, \quad (3.113b)$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(2)}(t) &= [(a+b+bt)\mathbf{C}\mathbf{p}_1 + b\mathbf{C}\mathbf{p}_2] e^{\lambda t} + [(a^*+b^*+b^*t)\mathbf{C}\mathbf{p}_1^* + b^*\mathbf{C}\mathbf{p}_2^*] e^{\lambda t} \\ &= (b+bt)\mathbf{C}\mathbf{p}_1 e^{\lambda t} + (b^*+b^*t)\mathbf{C}\mathbf{p}_1^* e^{\lambda^* t} \\ &= (1+t)(b\mathbf{C}\mathbf{p}_1 e^{\lambda t} + b^*\mathbf{C}\mathbf{p}_1^* e^{\lambda^* t}) \\ &= (1+t) \cdot \mathbf{y}^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (3.114)$$

Somit ist das System in diesem Fall nicht perspektivisch beobachtbar.

Es wird nun $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vorausgesetzt. Gemäß den Voraussetzungen gilt dann ebenso $\lambda_2 \neq \lambda_3$ und es existieren drei Eigenvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Dabei sind jedenfalls die Vektorpaare $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ sowie $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ linear unabhängig. Aufgrund der vorausgesetzten Verletzungen der Rangbedingung gilt für drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{C}$

$$a\mathbf{C}\mathbf{p}_1 + b\mathbf{C}\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}, \quad (3.115a)$$

$$b\mathbf{C}\mathbf{p}_2 + c\mathbf{C}\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}. \quad (3.115b)$$

¹⁴Existiert kein Hauptvektor, so ist für den Eigenwert λ die Beobachtbarkeitsbedingung verletzt und das System ist trivialerweise nicht perspektivisch beobachtbar.

¹⁵Dabei bezeichnet \mathbf{p}^* den aus \mathbf{p} durch komplexe Konjugation erhaltenen Vektor.

Dabei wird $b \neq 0$ vorausgesetzt (andernfalls ist das System nicht beobachtbar).

Erfüllen die Eigenwerte Relation (3.103b), so gilt wie bereits angemerkt $\lambda_1 = \lambda_2^*$. In diesem Fall folgt aus Lemma 19 der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit. Andernfalls ist gemäß Voraussetzung die Relation (3.103a) erfüllt, d.h.

$$\operatorname{Im} \{\lambda_2\} - \operatorname{Im} \{\lambda_1\} = \operatorname{Im} \{\lambda_3\} - \operatorname{Im} \{\lambda_2\} =: \delta_I. \quad (3.116a)$$

Definiert man außerdem

$$\operatorname{Re} \{\lambda_1\} - \operatorname{Re} \{\lambda_2\} = \operatorname{Re} \{\lambda_3\} - \operatorname{Re} \{\lambda_2\} =: \delta_R \quad (3.116b)$$

und damit

$$\delta := \delta_R + j\delta_I \quad (3.117)$$

so gilt

$$\lambda_3 = \lambda_2 + \delta, \quad (3.118a)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \delta^*. \quad (3.118b)$$

Man wählt nun die reellwertigen Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = a\mathbf{p}_1 + a^*\mathbf{p}_1^* + c\mathbf{p}_3 + c^*\mathbf{p}_3^*, \quad (3.119a)$$

$$\mathbf{x}_0^{(2)} = b\mathbf{p}_2 + b^*\mathbf{p}_2^* \quad (3.119b)$$

Sind diese linear abhängig, so gilt (aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektorpaaare $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ und $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$)

$$a\mathbf{p}_1 + c\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \quad (3.120)$$

Mit (3.115) impliziert dies aber $\mathbf{C}\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ und damit einen Verlust der Beobachtbarkeit. Es werden daher $\mathbf{x}_0^{(1)}$ und $\mathbf{x}_0^{(2)}$ als linear unabhängig vorausgesetzt. Für die Ausgangsgröße ergeben sich die Verläufe

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = a\mathbf{C}\mathbf{p}_1 e^{\lambda_1 t} + a^*\mathbf{C}\mathbf{p}_1^* e^{\lambda_1^* t} + c\mathbf{C}\mathbf{p}_3 e^{\lambda_3 t} + c^*\mathbf{C}\mathbf{p}_3^* e^{\lambda_3^* t}, \quad (3.121a)$$

$$\mathbf{y}^{(2)}(t) = b\mathbf{C}\mathbf{p}_2 e^{\lambda_2 t} + b^*\mathbf{C}\mathbf{p}_2^* e^{\lambda_2^* t}. \quad (3.121b)$$

Mit der reellen Zeitfunktion

$$\alpha(t) := e^{\delta t} + e^{\delta^* t} = 2e^{\delta_R t} \cos(\delta_I t) \quad (3.122)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)}(t) + \alpha(t) \cdot \mathbf{y}^{(2)}(t) &= a\mathbf{C}\mathbf{p}_1 e^{\lambda_1 t} + a^*\mathbf{C}\mathbf{p}_1^* e^{\lambda_1^* t} + c\mathbf{C}\mathbf{p}_3 e^{\lambda_3 t} + c^*\mathbf{C}\mathbf{p}_3^* e^{\lambda_3^* t} \\ &\quad + b\mathbf{C}\mathbf{p}_2 e^{\lambda_1 t} + b^*\mathbf{C}\mathbf{p}_2^* e^{\lambda_1^* t} + b\mathbf{C}\mathbf{p}_2 e^{\lambda_3 t} + b^*\mathbf{C}\mathbf{p}_2^* e^{\lambda_3^* t} \\ &= (a\mathbf{C}\mathbf{p}_1 + b\mathbf{C}\mathbf{p}_2) e^{\lambda_1 t} + (a^*\mathbf{C}\mathbf{p}_1^* + b^*\mathbf{C}\mathbf{p}_2^*) e^{\lambda_1^* t} \\ &\quad + (b\mathbf{C}\mathbf{p}_2 + c\mathbf{C}\mathbf{p}_3) e^{\lambda_3 t} + (b^*\mathbf{C}\mathbf{p}_2^* + c^*\mathbf{C}\mathbf{p}_3^*) e^{\lambda_3^* t}. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Unter Berücksichtigung von Relation (3.115) erkennt man, dass

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) + \alpha(t)\mathbf{y}^{(2)}(t) \equiv 0 \quad (3.124)$$

gilt und das System somit nicht perspektivisch beobachtbar ist. \square

3.2.4. Offene Fragestellungen

Offen bleibt die Frage nach einem notwendigen und hinreichenden Kriterium für die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{R} für den Dimensionsverlust $d = 1$. Hierzu kann an dieser Stelle lediglich *vermutet* werden, dass zumindest unter Voraussetzung einer nichtderogatorischen Systemmatrix Satz 20 auch ein hinreichendes Kriterium darstellt (d.h. dass die dort angegebenen Bedingungen auch notwendig für einen Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit sind). Ein Beweis dieser Vermutung ist bisher leider nicht gelungen.

3.3. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Kriterien für die perspektivische Beobachtbarkeit vorgestellt. Für den Fall der perspektivischen Beobachtbarkeit über \mathbb{C} sind davon vor allem folgende zwei (äquivalente) Kriterien von Bedeutung: das PBH-Rangkriterium (Satz 7) und die Charakterisierung anhand von \mathbf{A} -invarianten Unterräumen (Satz 8). Das System (2.1) ist demnach genau dann nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{C} mit dem Dimensionsverlust d , wenn es einen nichttrivialen Vektor \mathbf{w} gibt, sodass für Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$ der Matrix \mathbf{A} die Relation

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.125)$$

gilt. Äquivalent dazu ist, dass sich der nichttriviale Vektor \mathbf{w} in der Form

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}\mathbf{u} \quad (3.126)$$

mit einer $(d + 1)$ -spaltigen Matrix \mathbf{V} und einem Vektor \mathbf{u} darstellen lässt, sodass mit einer Matrix \mathbf{S} (mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$) die Relationen

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{S} \quad (3.127)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.128)$$

erfüllt sind.

Im Falle der perspektivischen Beobachtbarkeit über \mathbb{R} existiert kein allgemein gültiges Kriterium, welches notwendig und hinreichend ist. Hier konnten für den Dimensionsverlust $d = 1$ die zusätzlichen Voraussetzungen eines existierenden notwendigen und hinreichenden Kriteriums abgeschwächt werden. Außerdem wurde eine notwendige Bedingung

für die perspektivische Beobachtbarkeit angegeben: Ein System ist für den Dimensionsverlust $d = 1$ jedenfalls dann nicht perspektivisch beobachtbar, wenn das Rangkriterium für zwei Eigenwertpaare λ_1, λ_2 und λ_2, λ_3 verletzt ist, welche die Voraussetzungen von Satz 20 erfüllen, welche also insbesondere in einer der in Abbildung 3.4 dargestellten Konfigurationen vorliegen.

Kapitel 4.

Kanonische Form nicht perspektivisch beobachtbarer Systeme

In diesem Kapitel wird – in (teilweiser) Analogie zur sogenannten *Kalman-Zerlegung* nicht beobachtbarer Systeme – eine kanonische Form für nicht perspektivisch beobachtbare Systeme entwickelt. Als Motivation dafür dient der Zusammenhang zwischen dem Distanzmaß der Steuerbarkeit und der Kalman-Zerlegung, der in [30] gezeigt und auf welchen im nächsten Kapitel – im Rahmen der Betrachtungen zum Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit – noch näher eingegangen wird.

4.1. Kalman-Zerlegung nicht beobachtbarer Systeme

Liegt ein nicht beobachtbares System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) vor, so kann der Zustandsraum mittels der Kalman-Zerlegung in einen beobachtbaren und einen dazu orthogonalen nicht beobachtbaren Unterraum zerlegt werden. Das heißt es existiert eine orthogonale¹ Transformationsmatrix \mathbf{U} , sodass das transformierte System die kanonische Form

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \mathbf{0}] \quad (4.1b)$$

hat. Hierbei ist das Paar $(\hat{\mathbf{A}}_{11}, \hat{\mathbf{C}}_1)$ beobachtbar und $\hat{\mathbf{A}}_{11}$ ist eine $r \times r$ Matrix wobei r der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{B}_y aus Relation (3.8a) ist. Abbildung 4.1 zeigt ein Strukturbild des transformierten Systems. Man erkennt unmittelbar, dass das dargestellte System nicht beobachtbar ist, denn ein Teil des Systemzustands trägt nicht zum Ausgang bei.

Bei dieser Transformation wird die Tatsache genutzt, dass sich der Zustandsraum orthogonal in einen beobachtbaren und einen nicht-beobachtbaren Teil zerlegen lässt.

¹Eine orthogonale Matrix \mathbf{M} erfüllt die Relationen $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M}^T = \mathbf{E}$.

Partitioniert man die Matrix \mathbf{U} gemäß

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \quad (4.2)$$

so spannen die Spalten von \mathbf{U}_2 den nicht beobachtbaren Unterraum auf; dieser ist \mathbf{A} -invariant, denn es gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2\hat{\mathbf{A}}_{22}. \quad (4.3)$$

4.2. Zerlegung des Zustandsraums nicht perspektivisch beobachtbarer Systeme

Anhand der Überlegungen in Abschnitt 3.1.2 lässt sich bei einem nicht perspektivisch beobachtbaren System ein Analogon zum nicht beobachtbaren Unterraum eines nicht beobachtbaren Systems identifizieren: der \mathbf{A} -invariante Unterraum V aus Relation (3.15a). Es ist naheliegend, auch in diesem Fall eine Zerlegung des Zustandsraums durchzuführen. Ein nicht perspektivisch beobachtbares System lässt sich somit ebenfalls in einer kanonischen Form darstellen:

Satz 21. *Es sei (\mathbf{A}, \mathbf{C}) ein über \mathbb{R} oder \mathbb{C} nicht perspektivisch beobachtbares System. Dann existiert eine unitäre Zustandstransformation $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sodass das transformierte System die Form*

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \hat{\mathbf{C}}_2] \quad (4.4b)$$

mit $\hat{\mathbf{A}}_{22} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}$, $\hat{\mathbf{C}}_2 \in \mathbb{C}^{m \times (d+1)}$ und

$$\text{rang } \hat{\mathbf{C}}_2 \leq d \quad (4.4c)$$

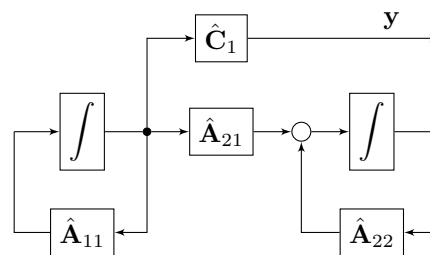


Abbildung 4.1.: Strukturbild eines gemäß der Kalman-Zerlegung transformierten, nicht beobachtbaren Systems

4.2. Zerlegung des Zustandsraums nicht perspektivisch beobachtbarer Systeme

hat. Dabei gilt für die Eigenwerte λ_i der Matrix $\hat{\mathbf{A}}_{22}$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} < n. \quad (4.5)$$

Beweis. Da das System nicht perspektivisch beobachtbar ist, gibt es nach Lemma 17 einen \mathbf{A} -invarianten Unterraum V der Dimension $d + 1$, sodass

$$\dim \mathbf{C}V \leq d \quad (4.6)$$

ist. Mittels der Schur-Zerlegung [9] lässt sich eine unitäre Matrix \mathbf{Q} bestimmen, welche die Matrix \mathbf{A} in Dreiecksgestalt bringt:

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{A} \mathbf{Q} =: \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{Q} =: [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2]. \quad (4.7b)$$

Durch geeignete Anordnung der auf der Hauptdiagonale der transformierten Systemmatrix stehenden Eigenwerte im Zuge der Schur-Zerlegung kann dabei erreicht werden, dass V von den $d + 1$ Spalten folgender Matrix aufgespannt wird:

$$V = \left\langle \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \right\rangle. \quad (4.8)$$

Damit gilt

$$\text{rang} \mathbf{H}_2 = \text{rang} [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \text{rang} \mathbf{C} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \dim \mathbf{C}V \leq d. \quad (4.9)$$

Sind nun λ_i die $d + 1$ Eigenwerte der Matrix \mathbf{L}_{22} , so gilt nach Cayley-Hamilton

$$\prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{Q}^H \mathbf{A} \mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{21} & \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{L}_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{12} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

mit geeigneten Matrizen \mathbf{M}_{11} und \mathbf{M}_{21} . Damit ergibt sich

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{Q}^H \mathbf{A} \mathbf{Q}) \\ \mathbf{C} \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} < n, \quad (4.11)$$

da die letzten $d + 1$ Spalten dieser Matrix aufgrund von (4.9) linear abhängig sind. Somit ist $\mathbf{U} = \mathbf{Q}$ die gesuchte Transformationsmatrix. \square

Anmerkung. Die Transformationsmatrix \mathbf{U} ist im Allgemeinen komplexwertig. Man kann anhand des Beweises erkennen, dass \mathbf{U} genau dann reellwertig gewählt werden kann,

wenn die PBH-Rangbedingung für zwei reelle oder konjugiert komplexe Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} verletzt ist. Somit kann einem über \mathbb{R} nicht perspektivisch beobachtbaren System mit dem vorliegenden Satz mitunter nur eine echt komplexwertige kanonische Form zugeordnet werden.

Umgekehrt ist jedes System, welches sich auf diese Weise zerlegen lässt, zumindest über \mathbb{C} nicht perspektivisch beobachtbar. Insbesondere können sofort linear unabhängige Anfangszustände so angegeben werden, dass die resultierenden Ausgangstrajektorien für alle Zeiten linear abhängig sind; mit Lemma 5 folgt daraus der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit.

Korollar 22. *Ein System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) liege in der Form*

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \hat{\mathbf{C}}_2], \quad (4.12b)$$

mit $\hat{\mathbf{A}}_{22} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}$, $\hat{\mathbf{C}}_2 \in \mathbb{C}^{m \times (d+1)}$ und

$$\text{rang } \hat{\mathbf{C}}_2 \leq d, \quad (4.12c)$$

d.h. in zerlegter Form wie in Satz 21, vor. Dann ist (\mathbf{A}, \mathbf{C}) für den Dimensionsverlust d über \mathbb{C} nicht perspektivisch beobachtbar. Wählt man insbesondere die $d + 1$ linear unabhängigen Anfangszustände²

$$\mathbf{x}_0^{(k)} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix} \quad \text{für } k = 1, \dots, d + 1 \quad (4.13)$$

so sind die zugehörigen Ausgangstrajektorien $\mathbf{y}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(d+1)}(t)$ linear abhängig, d.h. es gilt für alle t

$$\text{rang} [\mathbf{y}^{(1)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{y}^{(d+1)}(t)] \leq d. \quad (4.14)$$

Beweis. Für die angegebenen Anfangszustände erhält man unter Verwendung der Transitionsmatrix

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} e^{\hat{\mathbf{A}}_{11}t} & \mathbf{0} \\ \int_0^t e^{\hat{\mathbf{A}}_{11}\tau} e^{\hat{\mathbf{A}}_{22}(t-\tau)} d\tau & e^{\hat{\mathbf{A}}_{22}t} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H \quad (4.15)$$

die Zustandstrajektorien

$$\mathbf{x}^{(k)}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0^{(k)} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ e^{\hat{\mathbf{A}}_{22}t} \mathbf{e}_k \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

²Dabei bezeichnet \mathbf{e}_k den k -ten Standardbasisvektor des \mathbb{R}^{d+1} .

Somit gilt

$$\mathbf{y}^{(k)}(t) = \hat{\mathbf{C}}_2 e^{\hat{\mathbf{A}}_{22}t} \mathbf{e}_k, \quad (4.17)$$

woraus aufgrund von (4.12c) die behauptete Rangungleichung (4.14) und damit die lineare Abhängigkeit der Ausgangstrajektorien folgt. Gemäß Lemma 5 ist das System somit nicht perspektivisch beobachtbar. \square

Zur Veranschaulichung der Struktur des gemäß dieses Satzes transformierten Systems wird der Dimensionsverlust $d = 1$ betrachtet. In diesem Fall gilt $\text{rang } \hat{\mathbf{C}}_2 \leq 1$ und die Matrix $\hat{\mathbf{C}}_2$ kann daher, mit geeigneten Vektoren $\tilde{\mathbf{c}}_2$ und \mathbf{h} , in der Form

$$\hat{\mathbf{C}}_2 =: \tilde{\mathbf{c}}_2 \mathbf{h}^T \quad (4.18)$$

dargestellt werden. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache ist in Abbildung 4.2 die Struktur des transformierten Systems zu sehen. Analog zu Abbildung 4.1 tritt ein Teilsystem auf, dessen Zustand nur auf dem Wege einer *skalaren* Ausgangsgröße \tilde{y} zum Ausgang \mathbf{y} des Gesamtsystems beiträgt. Ein System mit skalarer Ausgangsgröße aber ist niemals perspektivisch beobachtbar. Damit ist auch hier anhand der Struktur erkennbar, dass das System nicht perspektivisch beobachtbar ist.

Die vorgestellten Zusammenhänge werden anhand eines Beispiels demonstriert.

Beispiel 12. Das System mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

ist für den Dimensionsverlust $d = 1$ nicht perspektivisch beobachtbar, die Rangbedingung ist (ausschließlich) für das Eigenwertpaar

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 2) \quad (4.20)$$

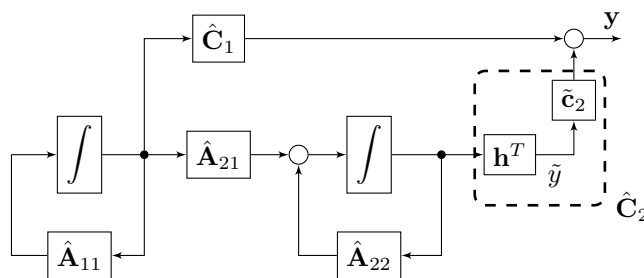


Abbildung 4.2.: Strukturbild eines gemäß Satz 21 transformierten, für den Dimensionsverlust $d = 1$ nicht perspektivisch beobachtbaren Systems

verletzt. Mit der unitären Transformationsmatrix

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

lässt sich das System in die kanonische Form (4.4) bringen:

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{27} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.22b)$$

Wählt man die Anfangszustände anhand von Korollar 22 zu

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

so erhält man die Zustandstrajektorien

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^{2t} - e^t \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -e^t \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Die zugehörigen Ausgangsverläufe

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = -\frac{e^t + 2e^{2t}}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

sind offensichtlich für alle Werte von t linear abhängig. \triangle

Das folgende Beispiel zeigt, dass es mitunter auch nicht perspektivisch beobachtbare Anfangszustände gibt, welche sich grundlegend von den Anfangszuständen aus Korollar 22 unterscheiden, d.h., welche nicht als Linearkombinationen der in Relation (4.13) angegebenen Anfangszustände darstellbar sind.

Beispiel 13. Man betrachte das System vierter Ordnung mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & \mathbf{0} & \\ & & 4 & 1 \\ \mathbf{0} & & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

für den Dimensionsverlust $d = 1$. Da die Matrix \mathbf{A} in Jordan-Form vorliegt erkennt man,

4.2. Zerlegung des Zustandsraums nicht perspektivisch beobachtbarer Systeme

dass sie die Eigenwerte $s_1 = 2$ und $s_2 = 4$, jeweils mit algebraischer Vielfachheit zwei und geometrischer Vielfachheit eins, besitzt. Die PBH-Rangbedingung ist (ausschließlich) für das Eigenwertpaar $(2, 4)$ verletzt und das System ist somit gemäß Satz 11 nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} . Wählt man als Transformationsmatrix \mathbf{U} die Permutationsmatrix

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

so liegt das transformierte System in kanonischer Form vor:

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Gemäß Korollar 22 erhält man für die Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{U} \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{U} \mathbf{e}_4 \quad (4.29)$$

die linear abhängigen Ausgangsverläufe

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{4t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Aber auch die Wahl

$$\mathbf{x}_0^{(3)} = \mathbf{U} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x}_0^{(4)} = \mathbf{U} \mathbf{e}_2 \quad (4.31)$$

führt zu linear abhängigen Ausgangsverläufen: man erhält

$$\mathbf{y}^{(3)}(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2t+2)e^{2t} \\ (2t+4)e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(4)}(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ te^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+1)e^{4t} \\ (t+2)e^{4t} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

mit

$$\mathbf{y}^{(3)}(t) = 2e^{-2t} \mathbf{y}^{(4)}(t). \quad (4.33)$$

△

Der von den letzten $d+1$ Spalten der Matrix \mathbf{U} aufgespannte \mathbf{A} -invariante Unterraum umfasst also mitunter nicht alle nicht perspektivisch beobachtbaren Paare von Anfangswerten. Zu einem ähnlichen Problem kommt es im Falle der Beobachtbarkeit: Von einem nicht beobachtbaren System ist jedenfalls der von denjenigen Eigenvektoren \mathbf{p}_i aufge-

spannte Unterraum nicht beobachtbar, für welche $\mathbf{C}\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ gilt. Mitunter umfasst der nicht beobachtbare Unterraum jedoch auch Hauptvektoren der Systemmatrix; in diesem Fall ist zur Ermittlung des nicht beobachtbaren Unterraums die Bestimmung des Nullraums der Beobachtbarkeitsmatrix notwendig. Diese Vorgehensweise lässt sich leider nicht auf die perspektivischen Beobachtbarkeit übertragen, da ein direktes Analogon zur Beobachtbarkeitsmatrix für Dimensionsverluste $d \geq 1$ fehlt³.

Die kanonische Form aus Satz 21 lässt sich hinsichtlich der Form der transformierten Ausgangsmatrix noch weiter konkretisieren:

Korollar 23. *In Satz 21 kann die Transformationsmatrix \mathbf{U} immer so gewählt werden, dass die letzte Spalte der Matrix $\hat{\mathbf{C}}_2 \in \mathbb{C}^{m \times d+1}$ eine Nullspalte ist, d.h.*

$$\hat{\mathbf{C}}_2 = [\tilde{\mathbf{C}}_2 \quad \mathbf{0}] \quad (4.34)$$

mit $\tilde{\mathbf{C}}_2 \in \mathbb{C}^{m \times d}$.

Beweis. Da im Beweis von Satz 21 für die $(d+1)$ -spaltige Matrix \mathbf{H}_2

$$\text{rang } \mathbf{H}_2 \leq d \quad (4.35)$$

gilt, lässt sie sich in der Form

$$\mathbf{H}_2 \mathbf{R} = [\tilde{\mathbf{C}}_2 \quad \mathbf{0}] \quad (4.36)$$

mit unitärer Matrix \mathbf{R} darstellen. Mit

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

ergibt sich die gewünschte Form

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}^H \mathbf{L}_{21} & \mathbf{R}^H \mathbf{L}_{22} \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.38a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2 \mathbf{R}]. \quad (4.38b)$$

□

Im Hinblick auf das in Abbildung 4.2 dargestellte Strukturbild bzw. Relation (4.18) bedeutet dies, dass die Transformationsmatrix so gewählt werden kann, dass

$$\mathbf{h}^T = [1 \quad 0] \quad (4.39)$$

gilt.

³Einem solchen Analogon am nächsten kommt Satz 9. Dieser führt für den Dimensionsverlust $d = 0$ zur klassischen Beobachtbarkeitsmatrix. Im Fall $d \geq 1$ müssen allerdings eine unendliche Anzahl von Matrizen untersucht werden.

Beispiel 13 (Fortsetzung). Wählt man als unitäre Transformationsmatrix

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

so erhält man

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.41a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{27} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.41b)$$

für die Daten des transformierten Systems. \triangle

Die Zusammenhänge werden abschließend in einem weiteren Beispiel auf den nicht perspektivisch beobachtbaren Drehkörper aus Beispiel 2 angewandt.

Beispiel 14. Es wird das System des bewegten Drehkörpers betrachtet (siehe Beispiele 2 und 8). Die Systemparameter lauten gemäß (2.16)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{E} \quad \mathbf{0}], \quad (4.42)$$

wobei die Matrix $\boldsymbol{\Omega}$ in (2.6) angegeben ist. Die Transformation dieses nicht perspektivisch beobachtbaren Systems auf kanonische Form gemäß Korollar 23 wird nachfolgend demonstriert.

Dazu werden die in den Beispielen 2 und 9 ermittelten Eigenräume der Matrix $\boldsymbol{\Omega}$, d.h. der Eigenvektor \mathbf{q} aus (2.8) und die Matrix \mathbf{R} aus (3.52), verwendet. Diese erfüllen die Beziehungen

$$\boldsymbol{\Omega} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.43a)$$

$$\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{W}. \quad (4.43b)$$

Durch geschickte Wahl von \mathbf{R} und \mathbf{q} in den vorangegangenen Beispielen sind diese bereits orthonormal, d.h. es gilt $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{E}$ und $\mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1$. Außerdem überprüft man leicht, dass $\mathbf{R}^T \mathbf{q} = \mathbf{0}$ gilt und die Matrix

$$\mathbf{U} := \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

somit unitär ist. Führt man damit eine Zustandstransformation durch, so ergibt sich

unter Berücksichtigung von (4.43)

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{E} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & & \\ & & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.45a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = [\mathbf{R} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{q} \quad \mathbf{0}]. \quad (4.45b)$$

Es ist bemerkenswert, dass bei diesem besonderen Beispiel die Systemmatrix nicht nur die in Korollar 23 behauptete Dreiecksstruktur, sondern sogar Blockdiagonalstruktur aufweist. Verantwortlich dafür ist die Matrix $\mathbf{\Omega}$; da es sich um eine schiefsymmetrische Matrix handelt, lässt sich diese durch eine orthogonale Transformation auf Blockdiagonalform bringen. \triangle

4.3. Nichteindeutigkeit der kanonischen Form

Im Fall der Kalman-Zerlegung spannen die r letzten Spalten der Transformationsmatrix, d.h. die Spalten der Matrix \mathbf{U}_2 aus Relation (4.2), den eindeutigen nicht beobachtbaren Unterraum des Systems auf; in diesem Sinne ist die entsprechende kanonische Form des Systems eindeutig, insbesondere auch hinsichtlich der Eigenwerte der in (4.1) auftretenden Matrizen $\hat{\mathbf{A}}_{11}$ und $\hat{\mathbf{A}}_{22}$.

Die kanonische Form gemäß Satz 21 dagegen ist trotz der Ähnlichkeit zur Kalman-Zerlegung *nicht eindeutig!* Hierzu betrachte man folgende zwei Beispiele:

Beispiel 15. Gegeben sei das System fünfter Ordnung mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{4} & 2 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Für den Dimensionsverlust $d = 1$ ist das System nicht perspektivisch beobachtbar. Die entsprechende Rangbedingung ist für die Eigenwertpaare

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in \{(1, 2), (-1, -2)\} \quad (4.47)$$

verletzt. Wie man anhand der linearen Abhängigkeit der zwei letzten Spalten von \mathbf{C} erkennt, liegt das System bereits in kanonischer Form vor. Die zugehörige Transformationsmatrix ist die Einheitsmatrix, d.h. $\mathbf{U} = \mathbf{E}$. Spaltet man den nicht perspektivisch beobachtbaren Teil des Systems, welcher offensichtlich zum Eigenwertpaar $(1, 2)$ gehört,

ab, so verbleibt das System $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{C}_1)$ mit

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Es läge nahe, von diesem System einen weiteren nicht perspektivisch beobachtbaren Systemteil abzuspalten, der zum Eigenwertpaar $(-1, -2)$ gehört. Dies ist jedoch nicht möglich, das System $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{C}_1)$ ist perspektivisch beobachtbar⁴! Das System lässt sich somit als Hintereinanderschaltung eines perspektivisch beobachtbaren Teilsystems dritter Ordnung und eines nicht perspektivisch beobachtbaren Teilsystems der Ordnung zwei darstellen.

Führt man eine orthogonale Transformation von (\mathbf{A}, \mathbf{C}) mit der Transformationsmatrix

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{69}} & -\frac{12}{\sqrt{161}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{21}} & -\frac{7}{\sqrt{69}} & \frac{4}{\sqrt{161}} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{21}} & -\frac{4}{\sqrt{69}} & -\frac{1}{\sqrt{161}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

durch, so erhält man als kanonische Form des Systems bezüglich des Eigenwertpaares $(-1, -2)$

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{A} \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2\sqrt{23}}{3\sqrt{7}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{23}} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} & -2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{69}} & -\frac{12}{\sqrt{161}} & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.50a)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} & -\frac{5}{\sqrt{69}} & -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{23}} & 1 \\ -1 & \frac{7\sqrt{7}}{4\sqrt{3}} & -\frac{13}{2\sqrt{69}} & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{23}} & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.50b)$$

Nach Abspaltung (d.h. Weglassen) des nicht perspektivisch beobachtbaren Teils verbleibt das System dritter Ordnung $(\hat{\mathbf{A}}_{11}, \hat{\mathbf{C}}_1)$ mit

$$\hat{\mathbf{A}}_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2\sqrt{23}}{3\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{23}} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_1 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} & -\frac{5}{\sqrt{69}} \\ -1 & \frac{7\sqrt{7}}{4\sqrt{3}} & -\frac{13}{2\sqrt{69}} \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Auch dieses System ist perspektivisch beobachtbar. Seine Systemmatrix unterscheidet

⁴Eine Verletzung der Rangbedingung für das Eigenwertpaar $(-1, -2)$ würde sich in einer linearen Abhängigkeit der letzten beiden Spalten von \mathbf{C}_1 äußern.

sich jedoch hinsichtlich der Eigenwerte von der Matrix \mathbf{A}_{11} .

Dementsprechend erkennt man außerdem, dass die letzten, in \mathbf{U}_1 bzw. \mathbf{U}_2 zusammengefassten zwei Spalten der Transformationsmatrizen \mathbf{U} bzw. $\hat{\mathbf{U}}$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{U}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{12}{\sqrt{161}} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{161}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{161}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

unterschiedliche Unterräume aufspannen. Eine *eindeutige* Zerlegung des gegebenen Systems in einen nicht perspektivisch beobachtbaren und einen perspektivisch beobachtbaren Teil ist hier somit *nicht möglich*. \triangle

Beispiel 16. Gegeben sei das System fünfter Ordnung mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 6 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Das System ist für den Dimensionsverlust $d = 2$ nicht perspektivisch beobachtbar, die Rangbedingung ist ausschließlich für die zwei Eigenwerttripel

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{(1, 2, 3), (3, 4, 5)\} \quad (4.54)$$

verletzt. Insbesondere liegt das System bezüglich dem Tripel $(3, 4, 5)$ bereits in kanonischer Form vor⁵.

Mittels einer Eigenvektorberechnung erhält man für die \mathbf{A} -invarianten Unterräume V_1 und V_2 zu den Eigenwerten $(1, 2, 3)$ und $(3, 4, 5)$

$$V_1 = \ker(\mathbf{E} - \mathbf{A})(2\mathbf{E} - \mathbf{A})(3\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \langle \mathbf{V}_1 \rangle \quad \text{mit } \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{11}{8} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.55a)$$

$$V_2 = \ker(3\mathbf{E} - \mathbf{A})(4\mathbf{E} - \mathbf{A})(5\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \langle \mathbf{V}_2 \rangle \quad \text{mit } \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad (4.55b)$$

⁵Natürlich existiert auch für das Tripel $(1, 2, 3)$ eine Transformation gemäß Satz 21, die hier jedoch nicht angegeben wird.

4.3. Nichteindeutigkeit der kanonischen Form

Die Dimension der Unterräume V_1 und V_2 reduziert sich bei Multiplikation mit \mathbf{C} von drei auf⁶

$$\dim \mathbf{C}V_1 = \text{rang } \mathbf{C}V_1 = \text{rang} \begin{bmatrix} -\frac{17}{8} & \frac{9}{2} & 3 \\ -\frac{11}{4} & \frac{17}{2} & 4 \\ -\frac{17}{8} & \frac{9}{2} & 3 \end{bmatrix} = 2 < 3, \quad (4.56a)$$

$$\dim \mathbf{C}V_2 = \text{rang } \mathbf{C}V_2 = \text{rang} \begin{bmatrix} 3 & 7 & \frac{17}{3} \\ 4 & 11 & \frac{26}{3} \\ 3 & 11 & \frac{25}{3} \end{bmatrix} = 2 < 3, \quad (4.56b)$$

womit nochmals verifiziert ist, dass es sich dabei um zwei nicht perspektivisch beobachtbare Unterräume (im Sinne von Satz 8) handelt.

Ferner sieht man anhand der Basisvektoren von V_1 und V_2 , dass es sich um verschiedene Unterräume handelt, für deren Durchschnitt (siehe Abbildung 4.3)

$$\dim V_1 \cap V_2 = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \quad (4.57)$$

gilt und deren Summe durchaus perspektivisch beobachtbar ist:

$$\dim \mathbf{C}(V_1 + V_2) = \dim \mathbf{C}\mathbb{R}^5 = \text{rang } \mathbf{C} = 3. \quad (4.58)$$

Nach Abspaltung von V_1 oder V_2 verbleibt damit jeweils ein anderes perspektivisch beobachtbares System. \triangle

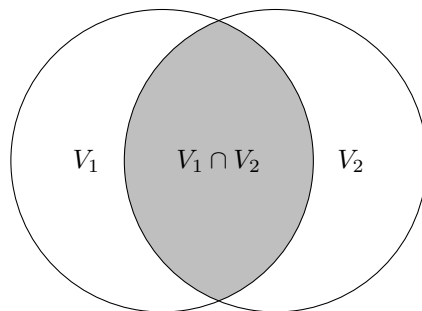


Abbildung 4.3.: Durchschnitt $V_1 \cap V_2$ zweier Mengen V_1 und V_2

⁶Für $\mathbf{C}V_1$ lässt sich der Rangverlust anhand der linearen Abhängigkeit der ersten und dritten Zeile überprüfen. Für $\mathbf{C}V_2$ ergibt er sich aus der Nullspalte der Matrix \mathbf{C} .

4.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde eine kanonische Form für nicht perspektivisch beobachtbare Systeme gezeigt, welche man durch unitäre Transformation des Systems erhält. Sie ist für den Dimensionsverlust d durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet: Es liegen zwei Teilsysteme vor; davon weist das zweite die Dimension $d + 1$ auf, ist nicht perspektivisch beobachtbar und wirkt sich nicht auf die Zustandsgrößen des ersten Teilsystems aus (siehe Abbildung 4.2). Zur Kalman-Zerlegung weist diese kanonische Form zwei entscheidende Unterschiede auf: Sie ist nicht eindeutig, da ein System im Allgemeinen keinen eindeutigen nicht perspektivisch beobachtbaren Unterraum aufweist. Weiterhin ist auch bei Vorliegen reellwertiger Systemparameter die Transformationsmatrix im Allgemeinen nicht notwendigerweise reellwertig.

Teil III.

Quantitative Beurteilung perspektivischer Beobachtbarkeit

Kapitel 5.

Distanzmaß für die perspektivische Beobachtbarkeit

Wie im vorigen Abschnitt diskutiert, ist die Überprüfung eines Systems auf perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{R} angesichts der in diesem Fall “unvollständigen” Kriterien im Allgemeinen sehr schwierig. Aber auch die Überprüfung eines Systems auf perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{C} ist mitunter ein nichttriviales Problem. Dieses ergibt sich daraus, dass die erweiterte PBH-Rangbedingung ein algebraisches Kriterium ist, dessen zuverlässige numerische Überprüfung im Allgemeinen eine Herausforderung darstellt. In [21] wird daher unter anderem eine Möglichkeit zur Durchführung dieser Überprüfung vorgeschlagen.

Aber auch abseits von numerischen Schwierigkeiten stellt sich das Problem, dass das Kriterium lediglich eine binäre Aussage liefert. Man erhält keine Information darüber, wie „gut“ perspektivisch beobachtbar ein gegebenes System ist. In diesem Kapitel wird daher ein Maß für die perspektivische Beobachtbarkeit, das sogenannte *Distanzmaß*, diskutiert.

Es wird dabei zunächst auf bisherige Arbeiten in diesem Bereich eingegangen. Anschließend wird, nach einer geringfügigen Modifikation der Maßdefinition, ein Optimierungsproblem hergeleitet, als dessen Lösung sich das Distanzmaß ergibt. Die Struktur dieses Optimierungsproblems und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für das Distanzmaß werden diskutiert.

5.1. Bisherige Arbeiten

EISING schlägt in [8] ein Distanzmaß für die Steuerbarkeit von linearen zeitinvarianten Systemen vor. Dieses Maß wird in [25] aufgegriffen und mit

$$\mu := \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C}} \left\{ \sqrt{\|\delta\mathbf{A}\|_2^2 + \|\delta\mathbf{C}\|_2^2} \mid (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) \text{ nicht persp. beobachtbar} \right\} \quad (5.1)$$

an die perspektivische Beobachtbarkeit angepasst¹.

¹Es bezeichnet $\|\mathbf{M}\|_2$ die sogenannte Spektralnorm oder 2-Norm einer Matrix \mathbf{M} . Sie entspricht deren größtem Singulärwert.

Es wird außerdem ausgehend von [8] ein Algorithmus zur Ermittlung dieses Maßes durch Lösen eines Optimierungsproblems vorgeschlagen. Dieser basiert auf den folgenden Überlegungen. Ausgehend von einem Vektor \mathbf{x} wird die Störung

$$\delta\mathbf{A} = - \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^H}{\mathbf{x}^H\mathbf{x}} \right) \mathbf{A} \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^H}{\mathbf{x}^H\mathbf{x}} \quad (5.2)$$

vorgegeben. Das ist die Störung kleinster Norm, bei welcher der Vektor \mathbf{x} ein Eigenvektor der gestörten Matrix $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ ist. Anschließend wird $\delta\mathbf{C}$ mit minimaler Norm so gewählt, dass für einen Eigenvektor \mathbf{v} von $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ und eine beliebige Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(\mathbf{C} + \delta\mathbf{C})(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

gilt². Zur Ermittlung des Maßes wird die Funktion

$$\mu(\mathbf{x}) = \sqrt{\|\delta\mathbf{A}(\mathbf{x})\|_2^2 + \|\delta\mathbf{C}(\mathbf{x})\|_2^2} \quad (5.4)$$

über alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ minimiert.

Dieser Algorithmus findet jedoch nicht notwendigerweise das gesuchte Minimum, da der höchstmögliche Rang der Störung $\delta\mathbf{A}$ gemäß (5.2) gleich eins ist! Man betrachte hierzu folgendes

Beispiel 17. Die Systemdaten seien durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

mit dem reellen Parameter ε gegeben. Wählt man die Störung zu

$$\delta\mathbf{A} = -\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

so ergibt sich das nicht perspektivisch beobachtbare gestörte System

$$\mathbf{A} + \delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} + \delta\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

²Ist $\alpha = 0$ bzw. sind \mathbf{v} und \mathbf{x} linear abhängig, so ist das gestörte System insbesondere nicht beobachtbar.

Die Störung erfüllt $\text{rang } \delta \mathbf{A} = 4$; ihre Norm stellt eine obere Schranke für μ dar, d.h.

$$\mu \leq \|\delta \mathbf{A}\|_2 = \sqrt{2}\varepsilon. \quad (5.8)$$

Der Algorithmus aus [25] liefert aufgrund der erwähnten Einschränkung für obiges System mit $\varepsilon = 10^{-7}$ aber

$$\mu \approx 0,05373 > \sqrt{2}\varepsilon \approx 1,4142 \cdot 10^{-7}, \quad (5.9)$$

einen deutlich größeren Wert. \triangle

Diese Überlegungen legen nahe, dass bei Berechnung eines Distanzmaßes für die perspektivische Beobachtbarkeit, im Gegensatz zur klassischen Beobachtbarkeit, auch Störungen $\delta \mathbf{A}$ in Betracht gezogen werden müssen, deren Rang größer als eins ist! Später wird man sehen, dass für die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{C} die Störungen minimaler Norm immer $\text{rang } \delta \mathbf{A} \leq d + 1$ und $\text{rang } \delta \mathbf{C} \leq 1$ erfüllen.

5.2. Anpassung der Maßdefinition

Bei der perspektivischen Beobachtbarkeit gilt für die Störmatrix im Allgemeinen

$$\text{rang } \delta \mathbf{A} > 1. \quad (5.10)$$

Aufgrund dieser Tatsache ist es zur Vereinfachung der Betrachtungen sinnvoll, die Spektralnorm in der Maßdefinition durch die Frobeniusnorm zu ersetzen³. Letztere kann nämlich für eine gegebene Matrix \mathbf{M} direkt über

$$\|\mathbf{M}\|_{\text{F}} := \sqrt{\text{spur } \mathbf{M}^H \mathbf{M}} = \sqrt{\text{spur } \mathbf{M} \mathbf{M}^H} \quad (5.11)$$

berechnet werden. Die Spektralnorm $\|\mathbf{M}\|_2$ dagegen ergibt sich aus dem größten Singulärwert von \mathbf{M} , für den im Allgemeinen kein geschlossener Ausdruck angegeben werden kann. Ferner gilt, zum Unterschied von der Spektralnorm,

$$\left\| \begin{bmatrix} \delta \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{C} \end{bmatrix} \right\|_{\text{F}} = \sqrt{\|\delta \mathbf{A}\|_{\text{F}}^2 + \|\delta \mathbf{C}\|_{\text{F}}^2}. \quad (5.12)$$

Es muss bei der Definition grundsätzlich unterschieden werden, ob einerseits die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{C} oder \mathbb{R} betrachtet wird, und ob andererseits die Störungen komplexwertig sein können oder ob diese auf reelle Werte beschränkt sind. Die Betrachtungen werden dabei zunächst auf den Fall der perspektivischen Beobachtbarkeit über \mathbb{C} und komplexwertige Störungen beschränkt. Bezeichnet $\overline{\mathcal{P}}_d$ die Menge der über \mathbb{C} für den Dimensionsverlust d nicht perspektivisch beobachtbaren Systeme, so

³Für eine Matrix \mathbf{M} mit $\text{rang } \mathbf{M} = 1$ liefern Spektralnorm und Frobeniusnorm denselben Wert, d.h. $\|\mathbf{M}\|_{\text{F}} = \|\mathbf{M}\|_2$. Für $\text{rang } \mathbf{M} > 1$ ist dies nicht mehr der Fall.

wird sohin im Weiteren die Größe

$$\mu_d := \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{C} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{F}} \mid \delta\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \delta\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}, (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) \in \overline{\mathcal{P}}_d \right\} \quad (5.13)$$

als Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit für den Dimensionsverlust d festgelegt. Diese Maßdefinition ist auch mit dem Distanzmaß der Beobachtbarkeit konsistent! Bemerkenswerterweise sind nämlich für den Dimensionsverlust $d = 0$ die Maßdefinitionen

$$\mu_0 := \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{C} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{F}} \mid (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) \text{ nicht beobachtbar} \right\} \quad (5.14a)$$

$$= \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{C} \end{bmatrix} \right\|_2 \mid (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) \text{ nicht beobachtbar} \right\} \quad (5.14b)$$

$$= \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C}} \left\{ \sqrt{\|\delta\mathbf{A}\|_2^2 + \|\delta\mathbf{C}\|_2^2} \mid (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) \text{ nicht beobachtbar} \right\} \quad (5.14c)$$

für das (hier konsequenterweise mit μ_0 bezeichnete) Distanzmaß der Beobachtbarkeit äquivalent. Der Grund hierfür liegt darin, dass für die resultierende, kleinstmögliche Störung jeweils

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{C} \end{bmatrix} = 1 \quad (5.15)$$

gilt.

5.3. Formulierung eines Optimierungsproblems

In diesem Abschnitt wird ein Optimierungsproblem für das Distanzmaß hergeleitet. Dazu wird ein Zusammenhang zwischen der Kalman-Zerlegung und dem Distanzmaß der Beobachtbarkeit auf die perspektivische Beobachtbarkeit übertragen.

5.3.1. Grundlegende Überlegungen

In [30] wird folgender Zusammenhang zwischen dem Distanzmaß der Beobachtbarkeit⁴ und der Kalman-Zerlegung hergestellt. Man betrachtet orthogonale Transformationen mit der Transformationsmatrix \mathbf{U} eines beobachtbaren Systems (\mathbf{A}, \mathbf{C}) . Die Daten des transformierten Systems lauten also

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.16a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \hat{\mathbf{C}}_2]. \quad (5.16b)$$

⁴In [30] wird eigentlich das Distanzmaß der Steuerbarkeit betrachtet. Die Zusammenhänge werden hier auf die Beobachtbarkeit übertragen.

Die kleinstmögliche Störung, welche dieses System in die bei einer Kalman-Zerlegung resultierende Form (4.1) bringt und so zum Verlust der Beobachtbarkeit führt, ist durch

$$\mathbf{U}^T \delta \mathbf{A} \mathbf{U} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.17a)$$

$$\delta \mathbf{C} \mathbf{U} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \quad (5.17b)$$

gegeben, wobei $\hat{\mathbf{A}}_{12}$ und $\hat{\mathbf{C}}_2$ von der Matrix \mathbf{U} abhängen. Das Distanzmaß der Beobachtbarkeit erhält man durch Minimierung der Norm dieser Störung über alle orthogonalen Transformationsmatrizen \mathbf{U} .

5.3.2. Herleitung des Optimierungsproblems

Diese Vorgehensweise wird nun auf das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit übertragen: Dazu wird das nicht perspektivisch beobachtbare, gestörte System $(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta \mathbf{C})$ betrachtet. Dieses kann mit einer unitären Transformationsmatrix \mathbf{U} in die kanonische Form gemäß Korollar 23 gebracht werden. Für das transformierte System gilt

$$\mathbf{U}^H (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \mathbf{U} =: \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} & \hat{\mathbf{a}}_{33} \\ \hat{\mathbf{a}}_{31}^H & \hat{\mathbf{a}}_{32}^H & \hat{a}_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.18a)$$

$$(\mathbf{C} + \delta \mathbf{C}) \mathbf{U} =: [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \hat{\mathbf{C}}_2 \quad \mathbf{0}], \quad (5.18b)$$

d.h. die letzte Spalte der transformierten Ausgangsmatrix und der rechte obere Block der Größe $(n - d - 1) \times (d + 1)$ der transformierten Systemmatrix sind gleich null. Diese Beziehungen kann man kompakt in Form zweier Gleichungen schreiben: bezeichnet \mathbf{E}_k die Einheitsmatrix der Dimension k so gilt

$$[\mathbf{E}_{n-d-1} \quad \mathbf{0}] \mathbf{U}^H (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{d+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.19a)$$

$$(\mathbf{C} + \delta \mathbf{C}) \mathbf{U} \mathbf{e}_n = \mathbf{0}. \quad (5.19b)$$

Soll die Norm der Störung minimal sein, so müssen die Matrizen $\delta \mathbf{A}$ und $\delta \mathbf{C}$ die Minimum-Norm Lösung dieses Gleichungssystems (5.19) sein⁵. Schreibt man die Glei-

⁵Da die transformierten Matrizen $\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U}$ und $\mathbf{C} \mathbf{U}$ im Allgemeinen komplexwertig sind, gelten diese Betrachtungen nur dann, wenn auch die Störung $(\delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{C})$ komplexe Werte annehmen kann. Eine Einschränkung auf reellwertige Störungen führt zu wesentlich komplizierteren Zusammenhängen. Auf diesen Fall wird an späterer Stelle – in Abschnitt 5.7.2 – eingegangen.

chungen in der Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{n-d-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H \delta \mathbf{A} \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{d+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{n-d-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{d+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.20a)$$

$$\delta \mathbf{C} \mathbf{U} \mathbf{e}_n = - \mathbf{C} \mathbf{U} \mathbf{e}_n \quad (5.20b)$$

an, so erhält man diese Lösung durch Multiplikation mit den Pseudoinversen der jeweiligen Matrizen von rechts bzw. bei der ersten Gleichung auch von links. Es ergeben sich die (von der Matrix \mathbf{U} abhängigen) Ausdrücke

$$\delta \mathbf{A}(\mathbf{U}) = - \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{n-d-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{d+1} \end{bmatrix}, \mathbf{U}^H \quad (5.21a)$$

$$\delta \mathbf{C}(\mathbf{U}) = - \mathbf{C} \mathbf{U} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T \mathbf{U}^H \quad (5.21b)$$

für die kleinstmögliche Störung bei gegebener Transformationsmatrix \mathbf{U} . Wertet man diese aus, so erhält man mit der Abkürzung

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} =: \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} & \hat{\mathbf{a}}_{13} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} & \hat{\mathbf{a}}_{33} \\ \hat{\mathbf{a}}_{31}^H & \hat{\mathbf{a}}_{32}^H & \hat{a}_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.22a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{U} =: [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \hat{\mathbf{C}}_2 \quad \hat{\mathbf{c}}_3] \quad (5.22b)$$

in Analogie zu Relation (5.17) für die *transformierte* Störung

$$\mathbf{U}^H \delta \mathbf{A}(\mathbf{U}) \mathbf{U} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}_{12} & \hat{\mathbf{a}}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.23a)$$

$$\delta \mathbf{C}(\mathbf{U}) \mathbf{U} = - [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \hat{\mathbf{c}}_3], \quad (5.23b)$$

d.h. es werden wie erwartet ausschließlich die letzte Spalte der transformierten Ausgangsmatrix und der rechte obere Block der transformierten Systemmatrix kompensiert.

Die Norm dieser Störung wird dann minimal, wenn \mathbf{U} die Transformationsmatrix gemäß Korollar 23 für das nächstgelegene, nicht perspektivisch beobachtbare System darstellt. Eine Minimierung dieser Norm über alle unitären Matrizen \mathbf{U} liefert daher das Distanzmaß μ_d .

Bevor dieses Optimierungsproblem konkret angegeben wird, werden die Zusammenhänge noch etwas vereinfacht. Dazu partitioniert man die Matrix \mathbf{U} gemäß

$$\mathbf{U} =: [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{V} \mathbf{Q}], \quad (5.24)$$

wobei \mathbf{U}_1 und \mathbf{V} orthonormale Matrizen darstellen und \mathbf{Q} eine beliebige unitäre Matrix ist. Letztere soll die Größe $d+1$ haben, d.h. es gilt $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)}$.

Man führt außerdem die Abkürzung

$$\mathbf{u} := \mathbf{Q}^H \mathbf{e}_{d+1} \quad (5.25)$$

ein. Durch eine geeignete *Wahl* der Matrix \mathbf{Q} kann für \mathbf{u} jeder beliebiger Einheitsvektor vorgegeben werden⁶.

Unter Verwendung der Identitäten

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H = \mathbf{E} - \mathbf{V} \mathbf{V}^H, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{e}_{d+1} = \mathbf{Q} \mathbf{u} \quad (5.27)$$

sowie der mit der Matrix \mathbf{U} konsistenten Partitionierung⁷

$$\mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_{d+1} \mathbf{e}_{d+1}^T \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

erhält man dann aus Relation (5.21) die Störung zu

$$\delta \mathbf{A}(\mathbf{V}) = -\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{V}^H = -(\mathbf{E} - \mathbf{V} \mathbf{V}^H) \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{V}^H, \quad (5.29a)$$

$$\delta \mathbf{C}(\mathbf{V}) = -\mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{Q} \mathbf{e}_{d+1} \mathbf{e}_{d+1}^T \mathbf{Q}^H \mathbf{V}^H = -\mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{u}^H \mathbf{V}^H. \quad (5.29b)$$

Diese Ausdrücke hängen bemerkenswerterweise nur mehr von der orthonormalen Matrix \mathbf{V} ab, welche sich aus den $d + 1$ letzten Spalten der Matrix \mathbf{U} ergibt. Das Quadrat der Frobeniusnorm der Störung ist durch

$$\left\| \begin{bmatrix} \delta \mathbf{A}(\mathbf{V}) \\ \delta \mathbf{C}(\mathbf{V}) \end{bmatrix} \right\|_{\mathbf{F}}^2 = \|(\mathbf{E} - \mathbf{V} \mathbf{V}^H) \mathbf{A} \mathbf{V}\|_{\mathbf{F}}^2 + \|\mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u}\|_2^2 \quad (5.30)$$

gegeben.

Zusammenfassend erhält man folgende zentrale Aussagen:

Satz 24 (Optimierungsproblem für das Distanzmaß). *Es sei $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1}$ ein Vektor, welcher $\mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1$ erfüllt. Dann gilt für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit für den Dimensionsverlust d*

$$\mu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{pu}}(\mathbf{V}, \mathbf{u})}, \quad (5.31)$$

wobei die Funktion J_{pu} durch

$$J_{\text{pu}}(\mathbf{V}, \mathbf{u}) = \|(\mathbf{E} - \mathbf{V} \mathbf{V}^H) \mathbf{A} \mathbf{V}\|_{\mathbf{F}}^2 + \|\mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u}\|_2^2 \quad (5.32)$$

gegeben ist. Ist die Matrix \mathbf{V} eine Lösung dieses Optimierungsproblems, so lautet die zu

⁶Die Einführung des Vektors \mathbf{u} dient der etwas allgemeineren Formulierung der Zusammenhänge. Die Wahl $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{d+1}$ (dies entspricht $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$) ist hier selbstverständlich erlaubt.

⁷D.h. in Relation (5.28) ist $\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{e}_{d+1} \in \mathbb{R}^{d+1}$

μ_d gehörige Störung

$$\delta \mathbf{A} = -(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^H, \quad (5.33a)$$

$$\delta \mathbf{C} = -\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\mathbf{u}^H\mathbf{V}^H. \quad (5.33b)$$

Beweis. Folgt aus den vorangegangenen Überlegungen. \square

5.3.3. Alternative Zielfunktion

Es wird nun eine zur Funktion (5.32) alternative Zielfunktion gezeigt, welche bei Minimierung über alle orthonormalen Matrizen dasselbe Minimum wie das in Satz 24 formulierte Optimierungsproblem aufweist:

Proposition 25. *Das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit erfüllt*

$$\mu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H\mathbf{V}=\mathbf{E}}} \sqrt{J_{p\sigma}(\mathbf{V})}, \quad (5.34)$$

mit der Funktion

$$J_{p\sigma}(\mathbf{V}) = \|(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{A}\mathbf{V}\|_{\mathbb{F}}^2 + \sigma_{\min}(\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{C}\mathbf{V}). \quad (5.35)$$

Wird das Minimum für die Matrix \mathbf{V} angenommen und wird mit \mathbf{u} ein zum kleinsten Singulärwert der Matrix $\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{C}\mathbf{V}$ gehöriger Singulärvektor bezeichnet, so ist die zu μ_d gehörige kleinstmögliche Störung durch Relation (5.33) gegeben.

Beweis. Da die Lösung des Optimierungsproblems (5.31) für beliebige Einheitsvektoren \mathbf{u} gleich μ_d ist und somit nicht von \mathbf{u} abhängt, gilt trivialerweise

$$\mu_d^2 = \min_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1} \\ \mathbf{u}^H\mathbf{u}=1}} \min_{\substack{\mathbf{V} \\ \mathbf{V}^H\mathbf{V}=\mathbf{E}}} \|(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{A}\mathbf{V}\|_{\mathbb{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2. \quad (5.36)$$

Vertauscht man die Reihenfolge der Optimierung, so erhält man die behauptete Aussage

$$\begin{aligned} \mu_d^2 &= \min_{\substack{\mathbf{V} \\ \mathbf{V}^H\mathbf{V}=\mathbf{E}}} \left[\|(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{A}\mathbf{V}\|_{\mathbb{F}}^2 + \min_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1} \\ \mathbf{u}^H\mathbf{u}=1}} \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2 \right] \\ &= \min_{\substack{\mathbf{V} \\ \mathbf{V}^H\mathbf{V}=\mathbf{E}}} \left[\|(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{A}\mathbf{V}\|_{\mathbb{F}}^2 + \sigma_{\min}(\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{C}\mathbf{V}) \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Die Aussage hinsichtlich der Störung $(\delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{C})$ folgt aus Relation (5.33) und aus der Tatsache, dass für den Singulärvektor \mathbf{u} zum kleinsten Singulärwert der Matrix $\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{C}\mathbf{V}$

$$\|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2 = \sigma_{\min}(\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{C}\mathbf{V}) \quad (5.38)$$

gilt. \square

Diese Zielfunktion $J_{p\sigma}$ erlaubt es in gewissem Sinne, bei gegebener Matrix \mathbf{V} eine möglichst gute obere Schranke für das Distanzmaß zu ermitteln. Konkret gilt für jede unitäre Matrix \mathbf{Q}

$$J_{p\sigma}(\mathbf{VQ}) = J_{p\sigma}(\mathbf{V}), \quad (5.39)$$

d.h. der Zielfunktionswert hängt nur von dem Unterraum ab, den die Spalten von \mathbf{V} aufspannen.

5.4. Strukturierung des Optimierungsproblems

In diesem Abschnitt wird eine Zerlegung des Optimierungsproblems in zwei Teilprobleme gezeigt. Diese erlaubt eine interessante Einsicht in die Struktur des Problems. Außerdem wird sich diese Strukturierung des Problems bei der Suche nach Lösungsstrategien für das Optimierungsproblem als vorteilhaft erweisen.

5.4.1. Grundlegende Überlegungen

Es wird zunächst der Dimensionsverlust $d = 0$ betrachtet. In diesem Fall ergibt sich das Distanzmaß für die Beobachtbarkeit: Man erhält die Zielfunktion

$$J_p(\mathbf{v}) = \|(\mathbf{E} - \mathbf{v}\mathbf{v}^H) \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{v}\|_2^2, \quad (5.40)$$

welche ursprünglich in [8] hergeleitet wurde.

In [30] werden die folgenden Zusammenhänge gezeigt, welche eine bessere Einsicht in die Struktur obiger Zielfunktion erlauben. Man führt eine komplexe Variable s ein und untersucht den Ausdruck $(\mathbf{A} - s\mathbf{E})\mathbf{v}$. Für diesen lässt sich die orthogonale Zerlegung

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - s\mathbf{E})\mathbf{v} &= (\mathbf{E} - \mathbf{v}\mathbf{v}^H) \mathbf{A}\mathbf{v} \\ &\quad + (\mathbf{v}^H \mathbf{A}\mathbf{v} - s) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.41)$$

angeben. Somit gilt

$$\|(\mathbf{A} - s\mathbf{E})\mathbf{v}\|_2^2 = \|(\mathbf{E} - \mathbf{v}\mathbf{v}^H) \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + |\mathbf{v}^H \mathbf{A}\mathbf{v} - s|^2. \quad (5.42)$$

Es ist offensichtlich, dass das Minimum bezüglich s durch

$$\min_{s \in \mathbb{C}} \|(\mathbf{A} - s\mathbf{E})\mathbf{v}\|_2 = \|(\mathbf{E} - \mathbf{v}\mathbf{v}^H) \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2 \quad (5.43)$$

gegeben ist und für

$$\arg \min_{s \in \mathbb{C}} \|(\mathbf{A} - s\mathbf{E})\mathbf{v}\|_2 = \mathbf{v}^H \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (5.44)$$

angenommen wird. Erweitert man daher die Funktion (5.40) zu

$$J_{\text{ps}}(\mathbf{v}, s) = \|(\mathbf{A} - s\mathbf{E})\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{v}\|_2^2, \quad (5.45)$$

so gilt gemäß Relation (5.43)

$$J_{\text{p}}(\mathbf{v}) = \min_{s \in \mathbb{C}} J_{\text{ps}}(\mathbf{v}, s) \quad (5.46)$$

und aufgrund der Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Minimierungen erhält man unter Verwendung von Relation (5.31) das Distanzmaß der Beobachtbarkeit zu

$$\mu_0 = \min_{s \in \mathbb{C}} \min_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v}^H \mathbf{v} = 1}} \sqrt{J_{\text{ps}}(\mathbf{v}, s)}. \quad (5.47)$$

Bezüglich \mathbf{v} lässt sich dieses Optimierungsproblem geschlossen lösen. Dazu schreibt man die Zielfunktion (5.45) in der Form

$$\begin{aligned} J_{\text{ps}}(\mathbf{v}, s) &= \mathbf{v}^H \left[(\mathbf{A} - s\mathbf{E})^H (\mathbf{A} - s\mathbf{E}) + \mathbf{C}^H \mathbf{C} \right] \mathbf{v} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{E} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{v} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (5.48)$$

an, woraus sich das Minimum zu

$$\min_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v}^H \mathbf{v} = 1}} J_{\text{ps}}(\mathbf{v}, s) = \sigma_{\min}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{E} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

ergibt. Man erhält folgendes bekannte Optimierungsproblem für das Distanzmaß, für dessen Lösung eine Reihe mächtiger Verfahren existieren [20].

Satz 26 (Distanzmaß der Beobachtbarkeit, [7]). *Das Distanzmaß μ_0 der perspektivischen Beobachtbarkeit für den Dimensionsverlust $d = 0$, d.h. das Distanzmaß der Beobachtbarkeit erhält man als Lösung des Optimierungsproblems*

$$\mu_0 = \min_{s \in \mathbb{C}} \sigma_{\min} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{E} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

d.h. durch Minimierung des kleinsten Singulärwertes der Hautus-Matrix.

5.4.2. Struktur des Optimierungsproblems

Die vorangegangenen Überlegungen werden nun auf den Fall eines Dimensionsverlustes $d > 0$, d.h. auf die perspektivische Beobachtbarkeit übertragen. In teilweiser Analogie zu Satz 26 kann man folgende Kernaussage dieses Kapitels zeigen:

Satz 27 (Strukturiertes Optimierungsproblem für das Distanzmaß). *Es sei $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1}$ ein Vektor, welcher $\mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1$ erfüllt. Dann gilt für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit für den Dimensionsverlust d*

$$\mu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u})}. \quad (5.51)$$

Dabei ist die Funktion J_{psu} durch

$$J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{AV} - \mathbf{VS}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{CVu}\|_2^2 \quad (5.52)$$

gegeben. Für jede zulässige (d.h. orthonormale) Matrix \mathbf{V} nimmt J_{psu} bezüglich \mathbf{S} für

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}^H \mathbf{AV} \quad (5.53)$$

ein Minimum an.

Sind insbesondere die Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{S} eine Lösung des Optimierungsproblems, so lautet die zugehörige Störung

$$\delta \mathbf{A} = -\mathbf{AVV}^H + \mathbf{VSV}^H, \quad (5.54a)$$

$$\delta \mathbf{C} = -\mathbf{CVuu}^H \mathbf{V}^H. \quad (5.54b)$$

Beweis. In Analogie zu Relation (5.41) aus dem vorigen Abschnitt kann man unter der Voraussetzung

$$\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E} \quad (5.55)$$

für beliebige Matrizen $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}$ die orthogonale Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathbf{AV} - \mathbf{VS} &= (\mathbf{E} - \mathbf{VV}^H) \mathbf{AV} \\ &\quad + \mathbf{V} (\mathbf{V}^H \mathbf{AV} - \mathbf{S}) \end{aligned} \quad (5.56)$$

angeben. Damit kann man die Funktion J_{psu} aus Relation (5.52) in der Form

$$J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) = \|(\mathbf{E} - \mathbf{VV}^H) \mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{V}^H \mathbf{AV} - \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{CVu}\|_2^2 \quad (5.57)$$

anschreiben und sieht daran unmittelbar, dass

$$J_{\text{pu}}(\mathbf{V}, \mathbf{u}) = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) \quad (5.58)$$

gilt. Man erhält das behauptete Optimierungsproblem (5.51) damit aus Satz 24 durch Vertauschung der Reihenfolge der Minimierungen. Anhand von Relation (5.57) erkennt

man außerdem, dass das Minimum bezüglich \mathbf{S} für

$$\arg \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) = \mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (5.59)$$

angenommen wird.

Die Behauptung hinsichtlich der Störung folgt damit aus Relation (5.33); konkret erhält man für $\delta \mathbf{A}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{A} &= -(\mathbf{E} - \mathbf{V} \mathbf{V}^H) \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{V}^H \\ &= -\mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{V}^H + \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{V}^H \\ &= -\mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{V}^H + \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^H, \end{aligned} \quad (5.60)$$

was den Beweis abschließt. \square

Das zweite (äußere) Optimierungsproblem in (5.51) hat mit den $(d+1)^2$ Einträgen der Matrix \mathbf{S} eine von der Systemordnung n unabhängige Anzahl an Optimierungsvariablen. Allerdings lässt sich die erste Minimierung (bei gegebener Matrix \mathbf{S}) für $d > 0$ leider nicht mehr auf die Berechnung eines Singulärwertes zurückführen.

5.4.3. Wertebereich der Optimierungsvariablen

In diesem Abschnitt wird diskutiert, welche Eigenschaften die Matrix \mathbf{S} aufweisen muss, damit sie als Lösung des Optimierungsproblems (5.51) prinzipiell in Frage kommen kann.

Dazu wird zunächst der Dimensionsverlust $d = 0$, d.h. das Distanzmaß der Beobachtbarkeit (5.50) betrachtet. Für dieses ist bekannt, dass bei der Bestimmung des Minimums nur Werte der Optimierungsvariablen s aus dem sogenannten Wertebereich W der Systemmatrix \mathbf{A}

$$W(\mathbf{A}) := \left\{ \frac{\mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H \mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^H \mathbf{v} \neq 0 \right\} = \{ \mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v} \mid \mathbf{v}^H \mathbf{v} = 1 \} \quad (5.61)$$

untersucht werden müssen [20]. Auch anhand der Betrachtungen aus Abschnitt 5.4.1, konkret anhand von Relation (5.44) ist dies klar: Das Minimum bezüglich s wird für

$$s = \mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (5.62)$$

angenommen, wobei $\mathbf{v}^H \mathbf{v} = 1$ gilt.

In Analogie dazu müssen bei der Lösung des Optimierungsproblems (5.51) für allgemeinen Dimensionsverlust d nur Matrizen \mathbf{S} aus der Menge

$$W_d(\mathbf{A}) := \{ \mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V} \mid \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E} \} \quad (5.63)$$

untersucht werden. Diese Menge W_d kann als Verallgemeinerung des Wertebereichs W

aufgefasst werden; es gilt

$$W(\mathbf{A}) = W_0(\mathbf{A}). \quad (5.64)$$

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften von W und W_d diskutiert.

Der Wertebereich W ist konvex [13], d.h. für zwei beliebige Werte $s_1, s_2 \in W(\mathbf{A})$ gilt für jede konvexe Kombination dieser Werte

$$\alpha s_1 + (1 - \alpha)s_2 \in W(\mathbf{A}) \quad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (5.65)$$

Für W_d mit $d \geq 1$ gilt dies nicht mehr, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 18. Es wird die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

betrachtet. Für die zwei orthonormalen Matrizen

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

erhält man die Elemente

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{V}_1^H \mathbf{A} \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \mathbf{V}_2^H \mathbf{A} \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

der Menge W_d . Allerdings gibt es keine orthonormale (und in diesem Fall somit insbesondere unitäre) Matrix \mathbf{V} , sodass für die durch konvexe Kombination von \mathbf{S}_1 und \mathbf{S}_2 erhaltene Einheitsmatrix

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{S}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{S}_2 \quad (5.69)$$

die Relation

$$\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{E} \quad (5.70)$$

gilt. Dazu müsste nämlich aufgrund der Unitarität der Matrix \mathbf{V}

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{V}^H = \mathbf{E} \quad (5.71)$$

gelten. △

Für beliebige Werte von d ist der Wertebereich jeder Matrix $\mathbf{S} \in W_d(\mathbf{A})$ im Wertebereich von \mathbf{A} enthalten, d.h.

$$W_0(\mathbf{S}) \subseteq W(\mathbf{A}). \quad (5.72)$$

Es erfüllt nämlich jeder Vektor \mathbf{u} geeigneter Dimension mit $\mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1$ die Beziehung

$$\mathbf{u}^H \mathbf{S} \mathbf{u} = \mathbf{u}^H \mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{u} \in W(\mathbf{A}). \quad (5.73)$$

Da alle Eigenwerte sowie alle Diagonalelemente einer Matrix in deren Wertebereich enthalten sind, liegen somit insbesondere alle Eigenwerte und Diagonalelemente der Matrix \mathbf{S} im Wertebereich von \mathbf{A} . Allerdings ist für $d \geq 1$ nicht jede Matrix \mathbf{S} , deren Wertebereich diese Anforderungen erfüllt, ein Element der Menge $W_d(\mathbf{A})$:

Beispiel 18 (Fortsetzung). Es gilt

$$W(\mathbf{E}) = \{1\} \subset [0; 2] = W(\mathbf{A}). \quad (5.74)$$

Dennoch ist wie zuvor gezeigt die Einheitsmatrix kein Element von $W_2(\mathbf{A})$. \triangle

5.4.4. Deutung der Optimierungsvariablen

Es wird nun eine Deutung der im Optimierungsproblem (5.51) auftretenden Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{S} angegeben. Dazu wird angenommen, dass die Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{S} eine Lösung des Optimierungsproblems für das Distanzmaß gemäß Satz 27 und $(\delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{C})$ die zugehörige kleinstmögliche Störung sind. Mithilfe von Relation (5.54a) erhält man unter Berücksichtigung der Orthonormalität der Matrix \mathbf{V} die Beziehung

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \mathbf{V} &= [\mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{V} \mathbf{V}^H) + \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^H] \mathbf{V} \\ &= \mathbf{V} \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (5.75a)$$

Analog erhält man unter Verwendung von (5.54b)

$$(\mathbf{C} + \delta \mathbf{C}) \mathbf{V} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (5.75b)$$

Anhand von Satz 8 erkennt man, dass die Spalten von \mathbf{V} denjenigen $(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})$ -invarianten Unterraum aufspannen, der für den Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit des gestörten Systems verantwortlich ist. Die zu diesem Unterraum gehörigen Eigenwerte sind durch die Eigenwerte λ_i von \mathbf{S} gegeben; gemäß Satz 8 gilt somit

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A} - \delta \mathbf{A}) \\ \mathbf{C} + \delta \mathbf{C} \end{bmatrix} < n, \quad (5.76)$$

d.h. die Eigenwerte von \mathbf{S} bilden ein nicht perspektivisch beobachtbares Eigenwerttupel des gestörten Systems.

Diese Einsicht in das Optimierungsproblem wird in folgender Proposition zusammengefasst, welche die Bedeutung des inneren Teilproblems aus Relation (5.51) hervorhebt.

Proposition 28. *Es sei $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}$ eine beliebige Matrix und $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1}$ ein Vektor, welcher $\mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1$ erfüllt. Weiterhin sei $\mu_{d,\mathbf{S}}$ die kleinstmögliche Norm einer Störung $(\delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{C})$, sodass das System $(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta \mathbf{C})$ nicht perspektivisch beobachtbar ist und*

dieses zusätzlich die Voraussetzungen von Satz 8, d.h.

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{S}, \quad (5.77a)$$

$$(\mathbf{C} + \delta\mathbf{C})\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (5.77b)$$

mit einer orthonormalen Matrix \mathbf{V} , d.h.

$$\mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{E}, \quad (5.77c)$$

erfüllt:

$$\mu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) := \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{C} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{F}} \mid \delta\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \delta\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \text{Relation (5.77) gilt} \right\}. \quad (5.78)$$

Dann ist $\mu_{d,\mathbf{S}}$ Lösung des Optimierungsproblems

$$\mu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u})} \quad (5.79)$$

mit der Funktion J_{psu} aus Relation (5.52). Bezeichnet die Matrix \mathbf{V} eine Lösung des obigen Optimierungsproblems, so ist die zugehörige Störung durch Relation (5.54) gegeben.

Anmerkung. Die Distanz $\mu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ hängt klarerweise neben den Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{C} und \mathbf{S} auch vom Vektor \mathbf{u} ab. Diese Abhängigkeit wird der Einfachheit halber, zur Vermeidung einer unnötig komplizierten Notation, nicht explizit angegeben.

Beweis. Die Aussage wird zur besseren Einsicht in die Zusammenhänge nicht unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, sondern direkt bewiesen. Gemäß Relation (5.77) erfüllt die Störung die Gleichungen

$$\delta\mathbf{A}\mathbf{V} = -\mathbf{A}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{S}, \quad (5.80a)$$

$$\delta\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u} = -\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}. \quad (5.80b)$$

bei minimaler Norm. Sie ist somit Minimum-Norm Lösung dieser Gleichungen; man erhält

$$\delta\mathbf{A} = -\mathbf{A}\mathbf{V}(\mathbf{V}^H\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^H + \mathbf{V}\mathbf{S}(\mathbf{V}^H\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^H \quad (5.81a)$$

$$\delta\mathbf{C} = -\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}(\mathbf{u}^H\mathbf{V}^H\mathbf{V}\mathbf{u})^{-1}\mathbf{u}^H\mathbf{V}^H. \quad (5.81b)$$

Unter Berücksichtigung der Orthonormalitätseigenschaft (5.77c) ergibt sich daraus die Störung gemäß Relation (5.54) sowie, als deren quadrierte Frobeniusnorm, die Zielfunktion J_{psu} . \square

An dieser Stelle sei angemerkt, dass man die Zielfunktion J_{psu} auch in einer etwas anderen Form darstellen kann:

Proposition 29. Für beliebige Matrizen \mathbf{V} , \mathbf{S} und beliebigen Vektor \mathbf{u} geeigneter Dimensionen gilt

$$\begin{aligned} J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) &= \|\mathbf{AV} - \mathbf{VS}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{CVu}\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{CVu}\|_2^2 - \|\mathbf{V}^H \mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 \\ &\quad + \|\mathbf{S} - \mathbf{V}^H \mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 - \|\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{VS}\|_{\text{F}}^2. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Erfüllt die Matrix \mathbf{V} insbesondere die Bedingung

$$\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E} \quad (5.83)$$

so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{CVu}\|_2^2 - \|\mathbf{V}^H \mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{S} - \mathbf{V}^H \mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2. \quad (5.84)$$

Beweis. Allgemein gilt⁸

$$\|\mathbf{AV} - \mathbf{VS}\|_{\text{F}}^2 = \|\mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 - \text{spur } \mathbf{V}^H \mathbf{A}^H \mathbf{VS} - \text{spur } \mathbf{S}^H \mathbf{V}^H \mathbf{AV} + \|\mathbf{VS}\|_{\text{F}}^2 \quad (5.85)$$

sowie

$$\|\mathbf{S} - \mathbf{V}^H \mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 = \|\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 - \text{spur } \mathbf{V}^H \mathbf{A}^H \mathbf{VS} - \text{spur } \mathbf{S}^H \mathbf{V}^H \mathbf{AV} + \|\mathbf{V}^H \mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2. \quad (5.86)$$

Subtrahiert man die zweite dieser Gleichungen von der ersten, so erhält man

$$\|\mathbf{AV} - \mathbf{VS}\|_{\text{F}}^2 - \|\mathbf{S} - \mathbf{V}^H \mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 = \|\mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 - \|\mathbf{V}^H \mathbf{AV}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{VS}\|_{\text{F}}^2 - \|\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2, \quad (5.87)$$

woraus sich durch Umstellen und Addition von $\|\mathbf{CVu}\|_2^2$ unmittelbar die erste behauptete Relation (5.82) ergibt.

Erfüllen die Matrizen \mathbf{V} die Orthonormalitätsbedingung (5.83), so gilt außerdem

$$\|\mathbf{VS}\|_{\text{F}}^2 = \text{spur } \mathbf{S}^H \mathbf{V}^H \mathbf{VS} = \text{spur } \mathbf{S}^H \mathbf{S} = \|\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2. \quad (5.88)$$

Einsetzen dieser Beziehung liefert die zweite Relation (5.84). \square

Diese Darstellung der Zielfunktion, konkret Relation (5.84), hebt nochmals den Zusammenhang mit der kanonische Form nicht perspektivisch beobachtbarer Systeme gemäß Korollar 23 hervor, von welchem ursprünglich in Abschnitt 5.3.2 ausgegangen wurde. Dazu betrachtet man das mit Hilfe der unitären Transformationsmatrix⁹

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{V}] \quad (5.89)$$

⁸Es wird folgende für beliebige Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{N} passender Dimensionen gültige Beziehung benutzt:

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{N}\|_{\text{F}}^2 = \|\mathbf{M}\|_{\text{F}}^2 - \text{spur } \mathbf{M}^H \mathbf{N} - \text{spur } \mathbf{N}^H \mathbf{M} + \|\mathbf{N}\|_{\text{F}}^2.$$

⁹Das ist die Transformationsmatrix aus Relation (5.24) mit $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$.

transformierte System:

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^H \mathbf{A} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_1^H \mathbf{A} \mathbf{V} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{U}_1 & \mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad (5.90a)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = [\mathbf{C} \mathbf{U}_1 \quad \mathbf{C} \mathbf{V}]. \quad (5.90b)$$

Mit der Störung (5.54a) lauten die Daten des transformierten, gestörten Systems

$$\mathbf{U}^H (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^H \mathbf{A} \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{U}_1 & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad (5.91a)$$

$$(\mathbf{C} + \delta \mathbf{C}) \mathbf{U} = [\mathbf{C} \mathbf{U}_1 \quad \mathbf{C} \mathbf{V} (\mathbf{E} - \mathbf{u} \mathbf{u}^H)]. \quad (5.91b)$$

Man erkennt, dass die Ausdrücke $\|\mathbf{A} \mathbf{V}\|_F$ bzw. $\|\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V}\|_F$ die Normen der zweiten Spalte bzw. des rechten unteren Blocks dieser Matrix sind. Die Differenz von deren Quadraten entspricht somit der quadrierten Norm des rechten oberen Blocks $\mathbf{U}_1^H \mathbf{A} \mathbf{V}$. Der letzte Term in (5.84) ergibt sich daraus, dass der rechte untere Block $\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V}$ der transformierten Systemmatrix durch die Matrix \mathbf{S} ersetzt wird. Der Ausdruck $\|\mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u}\|_2$ schließlich entspricht z.B. für $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{d+1}$ der Norm der letzten Spalte der transformierten Ausgangsmatrix.

5.4.5. Alternative Formen des Optimierungsproblems

Ähnlich wie in Abschnitt 5.3.3 kann auch der Vektor \mathbf{u} als Optimierungsvariable betrachtet und dadurch eine alternative Form des Optimierungsproblems (5.51) erhalten werden. Diese Vorgangsweise erlaubt es hier, sich bei der Minimierung bezüglich der Matrix \mathbf{S} auf obere (oder untere) Dreiecksmatrizen zu beschränken. Dadurch kann man, wie später noch diskutiert wird, auf einfache Weise Beschränkungen für die Eigenwerte der Matrix \mathbf{S} vorgeben¹⁰. Außerdem lässt sich dadurch die Anzahl der Freiheitsgrade des äußeren Optimierungsproblems reduzieren.

Proposition 30. *Es bezeichne $\mathbb{D}^l \subset \mathbb{C}^{l \times l}$ die Menge der komplexwertigen quadratischen oberen (bzw. unteren) Dreiecksmatrizen der Größe l . Das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit für den Dimensionsverlust d ist Lösung des Optimierungsproblems*

$$\mu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{D}^{d+1}} \min_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1} \\ \mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u})}, \quad (5.92)$$

mit der Funktion J_{psu} aus Relation (5.52).

¹⁰Eine Beschränkung der Eigenwerte der Matrix \mathbf{S} ist z.B. im Hinblick auf jene Klasse von über \mathbb{R} nicht perspektivisch beobachtbaren Systemen interessant, welche die Voraussetzungen von Satz 20 erfüllen.

Beweis. Gemäß Satz 27 ist das Distanzmaß μ_d durch

$$\mu_d = \min_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1} \\ \mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1}} \mu_d = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1} \\ \mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u})} \quad (5.93)$$

gegeben. Weiterhin erhält man, unter Verwendung der Invarianz der Frobeniusnorm unter Multiplikationen mit unitären Matrizen, für jede unitäre Matrix \mathbf{Q}

$$\begin{aligned} J_{\text{psu}}(\mathbf{V}\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^H \mathbf{S} \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^H \mathbf{u}) &= \|\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{Q} - \mathbf{V}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H \mathbf{S} \mathbf{Q}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H \mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \|(\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S})\mathbf{Q}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.94)$$

Gemäß dem Satz von Schur [9] kann man bei gegebener Matrix \mathbf{S} immer eine unitäre Matrix \mathbf{Q} und eine Matrix in Dreiecksform $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathbb{D}^{d+1}$ finden, sodass

$$\mathbf{S} =: \mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{Q} \quad (5.95)$$

gilt. Man verwendet daher anstelle von \mathbf{S} die Matrizen $\tilde{\mathbf{S}}$ und \mathbf{Q} als Optimierungsvariablen und führt ferner die Abkürzungen

$$\mathbf{V} =: \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{Q} \quad (5.96a)$$

$$\mathbf{u} =: \mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{u}} \quad (5.96b)$$

ein. Für letztere folgt

$$\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}}^H \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}} \quad (5.97a)$$

$$\mathbf{u}^H \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}^H \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^H \tilde{\mathbf{u}}, \quad (5.97b)$$

sodass man das Optimierungsproblem (5.93) unter Verwendung von Relation (5.94) äquivalent in der Form

$$\begin{aligned} \mu_d^2 &= \min_{\substack{\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)} \\ \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{E}}} \min_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathbb{D}^{d+1}} \min_{\substack{\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}^{d+1} \\ \tilde{\mathbf{u}}^H \tilde{\mathbf{u}} = 1}} \min_{\substack{\tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{psu}}(\tilde{\mathbf{V}} \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{u}})} \\ &= \min_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathbb{D}^{d+1}} \min_{\substack{\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}^{d+1} \\ \tilde{\mathbf{u}}^H \tilde{\mathbf{u}} = 1}} \min_{\substack{\tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{psu}}(\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{u}})} \end{aligned} \quad (5.98)$$

anschreiben kann. □

Die Minimierung bezüglich \mathbf{u} lässt sich in geschlossener Form durchführen, sodass man die Anzahl der Freiheitsgrade noch weiter reduzieren kann.

Korollar 31. *Es bezeichne $\mathbb{D}^l \subset \mathbb{C}^{l \times l}$ die Menge der komplexwertigen, quadratischen,*

oberen (bzw. unteren) Dreiecksmatrizen der Größe l . Für das Distanzmaß μ_d gilt

$$\mu_d = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{D}^{d+1}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{ps}\sigma}(\mathbf{V}, \mathbf{S})}, \quad (5.99)$$

wobei die Funktion $J_{\text{ps}\sigma}$ durch

$$J_{\text{ps}\sigma}(\mathbf{V}, \mathbf{S}) = \|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \sigma_{\min}(\mathbf{V}^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{V}) \quad (5.100)$$

gegeben ist.

Beweis. Die Aussage erhält man aus Proposition 30 unmittelbar durch Minimierung der Funktion J_{psu} bezüglich \mathbf{u} . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1} \\ \mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1}} J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) &= \|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \min_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1} \\ \mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1}} \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \sigma_{\min}(\mathbf{V}^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{V}) \\ &= J_{\text{ps}\sigma}(\mathbf{V}, \mathbf{S}). \end{aligned} \quad (5.101)$$

□

Anmerkung. Für lokale Minima in Form der Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{S} dieser beiden Optimierungsprobleme aus Proposition 30 bzw. Korollar 31 gilt Relation (5.53) im Allgemeinen *nicht*, da die Matrix $\mathbf{V}^H \mathbf{A}\mathbf{V}$ nicht notwendigerweise eine Dreiecksmatrix ist. Es gilt aber

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^H \mathbf{V}^H \mathbf{A}\mathbf{V} \mathbf{Q} \quad (5.102)$$

für eine geeignete unitäre Matrix \mathbf{Q} , d.h. \mathbf{S} und $\mathbf{V}^H \mathbf{A}\mathbf{V}$ besitzen insbesondere dieselben Eigenwerte.

In Proposition 30 ist die Anzahl der Freiheitsgrade der Minimierung bezüglich \mathbf{u} durch d , also durch die Anzahl der Komponenten von \mathbf{u} abzüglich der Anzahl der Nebenbedingungen gegeben; bezüglich \mathbf{S} stellen die $1/2(d+1)(d+2)$ Einträge der Dreiecksmatrix Freiheitsgrade dar. Insgesamt beträgt ihre Zahl für die beiden äußeren Optimierungen damit

$$\frac{1}{2}d^2 + \frac{5}{2}d + 1 = (d+1)^2 - \frac{1}{2}d(d-1). \quad (5.103)$$

Diese Zahl ist für Dimensionsverluste $d \geq 2$ kleiner als die Anzahl der Einträge von \mathbf{S} im Optimierungsproblem aus Satz 27.

In Korollar 31 weist das äußere Optimierungsproblem nur die

$$\frac{1}{2}d^2 + \frac{3}{2}d + 1 = (d+1)^2 - \frac{1}{2}d(d+1) \quad (5.104)$$

Einträge der Dreiecksmatrix \mathbf{S} als Optimierungsvariablen auf. Hier ergibt sich bereits ab $d \geq 1$ eine Reduktion gegenüber Satz 27, jedoch um den Preis einer komplizierteren

Struktur der Zielfunktion¹¹.

5.5. Schranken des Distanzmaßes

Man kann anhand der bisherigen Ergebnisse folgende Schranken für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit angeben:

Proposition 32 (Triviale Schranken des Distanzmaßes). *Für ein gegebenes System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) erfüllt das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit die Ungleichungen*

$$\|\mathbf{C}\|_2 \geq \mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1} = \begin{cases} \sigma_{\min}(\mathbf{C}) & \text{rang } \mathbf{C} = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.105)$$

Beweis. Man betrachtet zunächst den Dimensionsverlust $d = n - 1$. Für diesen ist gemäß Proposition 25 das Quadrat des Distanzmaßes durch

$$\mu_{n-1}^2 = \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \left(\|(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H) \mathbf{A}\mathbf{V}\|_{\mathbb{F}}^2 + \sigma_{\min}(\mathbf{V}^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{V}) \right) \quad (5.106)$$

gegeben. Da die Matrix \mathbf{V} in diesem Fall quadratisch und damit unitär ist, gilt $\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{E}$ und der Ausdruck vereinfacht sich zu

$$\mu_{n-1}^2 = \sigma_{\min}(\mathbf{C}^H \mathbf{C}) = \begin{cases} \sigma_{\min}^2(\mathbf{C}) & \text{rang } \mathbf{C} = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.107)$$

Umgekehrt erhält man für den Dimensionsverlust $d = 0$ für einen beliebigen, zur Länge eins normierten Eigenvektor \mathbf{v} der Systemmatrix \mathbf{A} anhand des Optimierungsproblems die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu_0^2 &\leq \underbrace{\|(\mathbf{E} - \mathbf{v}\mathbf{v}^H) \mathbf{A}\mathbf{v}\|_{\mathbb{F}}^2}_{=0} + \|\mathbf{C}\mathbf{v}\|_2^2 \\ &\leq \|\mathbf{C}\|_2^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 = \|\mathbf{C}\|_2^2. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Die Gültigkeit der restlichen Ungleichungen erkennt man anhand der Tatsache, dass gemäß Lemma 6 aus dem Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit für den Dimensionsverlust d auch der Verlust dieser Eigenschaft für den Dimensionsverlust $d + 1$ folgt.

D.h. es gilt

$$\bar{\mathcal{P}}_d \subseteq \bar{\mathcal{P}}_{d+1}, \quad (5.109)$$

womit die Ungleichungen unmittelbar aus der Definition des Distanzmaßes in Relation (5.13) folgen. \square

¹¹Es existiert kein allgemein gültiger analytischer Ausdruck für den kleinsten Singulärwert einer Matrix; dieser lässt sich bei gegebener Matrix in der Regel nur numerisch bestimmen.

Diese Abschätzungen erlauben es auch unter Beibehaltung eines Wertes der Zielfunktion J_{psu} aus Satz 27, der für die Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{S} sowie einem Vektor \mathbf{u} angenommen wird, den Dimensionsverlust d zum Dimensionsverlust $d + l$ zu vergrößern. Diese Betrachtung ist unter anderem im Hinblick auf die später diskutierte numerische Lösung des Optimierungsproblems und die dabei notwendige Wahl sinnvoller Startwerte von Bedeutung.

Proposition 33. *Es seien für einen Dimensionsverlust d eine orthonormale Matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)}$, eine Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}$ und ein Einheitsvektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1}$ gegeben, für welche die Zielfunktion (5.52) des Optimierungsproblems aus Satz 27 den Zielfunktionswert*

$$\kappa := J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) \geq \mu_d^2 \quad (5.110)$$

annimmt. Weiterhin sollen zwei Matrizen $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n \times l}$ und $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{l \times l}$ die Gleichungen

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{T}, \quad (5.111a)$$

$$\mathbf{W}^H(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{W} = \mathbf{E} \quad (5.111b)$$

erfüllen, wobei die Matrix $\hat{\mathbf{A}}$ durch

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H) + \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{V}^H \quad (5.112)$$

gegeben ist¹². D.h. die Spalten der Matrix \mathbf{W} sollen einen $\hat{\mathbf{A}}$ -invarianten Unterraum aufspannen, für dessen Durchschnitt mit dem von der Matrix \mathbf{V} aufgespannten Unterraum

$$\dim \langle \mathbf{W} \rangle \cap \langle \mathbf{V} \rangle = 0 \quad (5.113)$$

gilt^{13,14}.

Dann erfüllen für den Dimensionsverlust $d + l$ die Matrizen bzw. der Vektor

$$\tilde{\mathbf{V}} = [(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{W} \quad \mathbf{V}], \quad (5.114a)$$

¹²Mit der Matrix $\delta\mathbf{A}$ aus Relation (5.54a) kann $\hat{\mathbf{A}}$ als $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ geschrieben werden.

¹³Wie man leicht überprüft, spannen auch die Spalten der Matrix \mathbf{V} einen $\hat{\mathbf{A}}$ -invarianten Unterraum auf; es gilt $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{S}$.

¹⁴Ist die Bedingung (5.111b) nicht erfüllt, so kann aus einer Matrix \mathbf{W} , deren Spalten einen $\hat{\mathbf{A}}$ -invarianten Unterraum aufspannen, mit Hilfe der Vorschrift

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} [\mathbf{W}^H(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{W}]^{-\frac{1}{2}}$$

eine Matrix $\tilde{\mathbf{W}}$ bestimmt werden, welche diese Bedingung erfüllt. Dazu muss jedoch die Matrix $\mathbf{W}^H(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{W}$ regulär sein. Das ist genau dann der Fall, wenn es keinen nichttrivialen Vektor aus dem Unterraum $\langle \mathbf{V} \rangle$ gibt, der auch in $\langle \mathbf{W} \rangle$ liegt; diese Bedingung ist äquivalent zu Relation (5.113).

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{W} \mathbf{T} - \mathbf{S} \mathbf{V}^H \mathbf{W} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad (5.114b)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (5.114c)$$

die (Neben-)bedingungen des Optimierungsproblems aus Satz 27 bei gleichbleibendem Zielfunktionswert

$$J_{\text{psu}}(\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \kappa = J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{U}). \quad (5.115)$$

Beweis. Unter Verwendung von Relation (5.111b) und der vorausgesetzten Orthonormalität der Matrix \mathbf{V} und des Vektors \mathbf{u} erhält man zunächst

$$\tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}^H (\mathbf{E} - \mathbf{V} \mathbf{V}^H) \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^H \mathbf{V} \end{bmatrix} = \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{u}}^H \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1, \quad (5.116)$$

d.h. $\tilde{\mathbf{V}}$ und $\tilde{\mathbf{u}}$ erfüllen die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems. Weiterhin lässt sich Relation (5.111a) zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{V} \mathbf{V}^H) \mathbf{W} = -\mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^H \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{T} \quad (5.117)$$

umformen. Man erhält daher

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{S}} &= [\mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{V} \mathbf{V}^H) \mathbf{W} \quad \mathbf{A} \mathbf{V}] - [\mathbf{W} \mathbf{T} - \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^H \mathbf{W} \quad \mathbf{V} \mathbf{S}] \\ &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{A} \mathbf{V} - \mathbf{V} \mathbf{S}], \end{aligned} \quad (5.118a)$$

$$\mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u}, \quad (5.118b)$$

woraus die behauptete Beziehung

$$\begin{aligned} J_{\text{psu}}(\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{u}}) &= \left\| \mathbf{A} \tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{S}} \right\|_{\text{F}}^2 + \left\| \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{u}} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \mathbf{A} \mathbf{V} - \mathbf{V} \mathbf{S} \right\|_{\text{F}}^2 + \left\| \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u} \right\|_2^2 = J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (5.119)$$

folgt. □

5.6. Beispiele

Es werden zwei einfache Beispiele gezeigt, für welche (ausnahmsweise) eine analytische Ermittlung des Distanzmaßes möglich ist.

Beispiel 19. Man betrachte den Drehkörper aus Beispiel 1, welcher durch ein System mit den Parametern gemäß (2.9)

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{E}, \quad (5.120)$$

mit der Matrix $\mathbf{\Omega}$ aus Relation (2.6), beschrieben wird. Für dieses System gilt gemäß Satz 27 (für beliebigen Dimensionsverlust d)

$$\begin{aligned}\mu_d^2 &= \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \|\mathbf{\Omega}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \|\mathbf{\Omega}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + 1.\end{aligned}\quad (5.121)$$

Spannen die Spalten der Matrix \mathbf{V} einen zweidimensionalen $\mathbf{\Omega}$ -invarianten Unterraum auf, wählt man also z.B. $\mathbf{V} = \mathbf{R}$ und $\mathbf{S} = \mathbf{W}$ mit den Matrizen \mathbf{R} und \mathbf{W} aus Relation (3.53), so verschwindet die in obigem Ausdruck verbleibende Norm. Somit beträgt das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit für dieses System

$$\mu_d = 1. \quad (5.122)$$

Hinsichtlich der oberen Schranke aus Relation (5.105) ist dies der bestmögliche Wert.

Das Ergebnis dieses Beispiels lässt sich auf beliebige Systeme verallgemeinern, deren Ausgangsmatrix ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix ist: gilt $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{E}$ so erhält man, unabhängig von Systemmatrix \mathbf{A} und Dimensionsverlust d ,

$$\mu_d = \alpha \quad (5.123)$$

für das Distanzmaß. △

Beispiel 20. Es wird der bewegte Drehkörper aus Beispiel 2 betrachtet. Die Systemdaten sind durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{E} \quad \mathbf{0}] \quad (5.124)$$

gegeben.

Dieses System ist nicht perspektivisch beobachtbar. Man überzeugt sich leicht davon, dass die in Beispiel 8 für dieses System ermittelten Matrizen

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.125)$$

mit \mathbf{q} aus Relation (2.8) die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems aus Satz 27 erfüllen, und dass für diese gemäß Relation (3.30) das Minimum

$$\mu_d = 0 \quad (5.126)$$

angenommen wird. △

5.7. Berücksichtigung zusätzlicher Beschränkungen

Bisher wurde, wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, nur das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit über \mathbb{C} bei einer komplexwertigen Störung betrachtet. In diesem Abschnitt wird die Berücksichtigung zusätzlicher Einschränkungen dieser Vorgaben diskutiert. Dazu wird eine Menge \mathcal{B} vorgegeben, welche im Allgemeinen auch von den Systemdaten \mathbf{A} und \mathbf{C} abhängen kann. Für das Distanzmaß $\mu_{\mathcal{B},d}$ bezüglich dieser Menge werden nur nicht perspektivisch beobachtbare Systeme berücksichtigt, welche auch in dieser Menge \mathcal{B} liegen:

$$\mu_{\mathcal{B},d}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) := \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{C} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{F}} \mid (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) \in \mathcal{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \cap \overline{\mathcal{P}}_d \right\}. \quad (5.127)$$

Man erkennt, dass \mathcal{B} prinzipiell auch perspektivisch beobachtbare Systeme enthalten kann; diese haben aber keinen Einfluss auf das erhaltene Distanzmaß.

Es können grundsätzlich zwei Arten von Beschränkungen unterschieden werden: eine Einschränkung der berücksichtigten nicht perspektivisch beobachtbaren Systeme auf eine Menge \mathcal{T} , z.B. auf (einen Teil der) über \mathbb{R} nicht perspektivisch beobachtbaren Systeme, und eine Einschränkung der Störung $(\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C})$ auf eine gegebene Menge \mathcal{S} , z.B. auf eine reellwertige Störung. In ersterem Fall ist die Menge \mathcal{B} durch die von \mathbf{A} und \mathbf{C} unabhängige Menge

$$\mathcal{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mathcal{T} \quad (5.128)$$

gegeben, während sie in zweiterem Fall in der Regel von \mathbf{A} und \mathbf{C} abhängt:

$$\mathcal{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \{(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) \mid (\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C}) \in \mathcal{S}\}. \quad (5.129)$$

Die Behandlung einiger interessanter Spezialfälle dieser zwei Typen von Beschränkungen wird im Weiteren diskutiert.

5.7.1. Einschränkung der betrachteten Systeme

In diesem Abschnitt wird eine Einschränkung der für das Distanzmaß berücksichtigten Systeme hinsichtlich ihres nicht perspektivisch beobachtbaren Eigenwerttupels diskutiert. D.h. es werden nur Systeme betrachtet, welche das PBH-Rangkriterium für eine Menge von Werten $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}\}$ aus einer gegebenen Menge $\mathcal{L} \subseteq 2^{\mathbb{C}}$ verletzen¹⁵. Für die Menge \mathcal{B} gilt demnach in diesem Abschnitt:

$$\mathcal{B} = \{(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \mid \text{Bedingung (3.1) ist verletzt, } \{\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}\} \in \mathcal{L}\}. \quad (5.130)$$

Damit lässt sich für $\mu_{\mathcal{B},d}$ folgendermaßen ein Optimierungsproblem angeben: Anhand

¹⁵Es bezeichnet $2^{\mathbb{C}}$ die Menge aller Teilmengen (die sogenannte Potenzmenge) von \mathbb{C} . Die Elemente der Menge \mathcal{L} sind somit selbst Mengen, von welchen aber nur solche mit bis zu $(d+1)$ Elementen relevant sind.

von Proposition 28 und Satz 8 ist ersichtlich, dass die Ermittlung einer solchen Distanz durch entsprechende Einschränkung der Eigenwerte der Matrix \mathbf{S} möglich ist. Man erhält daher,

$$\mu_{\mathcal{B},d} = \min_{\substack{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)} \\ \Lambda(\mathbf{S}) \in \mathcal{L}}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u})}, \quad (5.131)$$

wobei $\Lambda(\mathbf{S})$ die Menge der Eigenwerte von \mathbf{S} bezeichnet. Besonders nützlich ist in diesem Zusammenhang die alternative Formulierung des Optimierungsproblems aus Proposition 30. Da die Matrix \mathbf{S} in diesem Fall von vornherein auf die Menge \mathbb{D}^{d+1} der Dreiecksmatrizen beschränkt ist, lässt sich eine Beschränkung ihrer Eigenwerte sehr einfach realisieren: Schreibt man $\text{diag}(\mathbf{S})$ für die Menge der Diagonalelemente von \mathbf{S} , so gilt

$$\mu_{\mathcal{B},d} = \min_{\substack{\mathbf{S} \in \mathbb{D}^{d+1} \\ \text{diag}(\mathbf{S}) \in \mathcal{L}}} \min_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1} \\ \mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u})}. \quad (5.132)$$

Beschränkt man sich für den Dimensionsverlust $d = 1$ auf jenen *Teil* der über \mathbb{R} nicht perspektivisch beobachtbaren Systeme, welche die Voraussetzungen von Lemma 19 erfüllen, so ergeben sich besonders einfache Zusammenhänge. Für diese ist das PBH-Rangkriterium für zwei reelle oder konjugiert komplexe Zahlen verletzt; die Menge \mathcal{L} ist dementsprechend durch

$$\mathcal{L} = \{ \{ \lambda_1, \lambda_2 \} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} \cup \{ \{ \sigma + j\omega, \sigma - j\omega \} \mid \sigma, \omega \in \mathbb{R} \} \quad (5.133)$$

gegeben. In diesem Fall reicht die Beschränkung der Matrix \mathbf{S} auf reellwertige Matrizen aus¹⁶, d.h.

$$\mu_{\mathcal{B},d} = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u})}. \quad (5.134)$$

5.7.2. Beschränkung der Störung

In diesem Abschnitt wird auf die Berücksichtigung einer Beschränkung der Störung in Form von Gleichungsnebenbedingungen eingegangen. Konkret soll die Störung die Gleichungen

$$\mathbf{f}(\delta \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (5.135a)$$

$$\mathbf{g}(\delta \mathbf{C}) = \mathbf{0} \quad (5.135b)$$

¹⁶Jede komplexwertige 2×2 Matrix mit einem reellen oder konjugiert komplexen Eigenwertpaar ist unitär ähnlich zu einer reellwertigen Matrix.

erfüllen, wobei \mathbf{f} und \mathbf{g} gegebene vektorwertige Funktionen sind. Die Menge \mathcal{B} ist demnach durch

$$\mathcal{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \{(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) \mid \mathbf{f}(\delta\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\delta\mathbf{C}) = \mathbf{0}\} \quad (5.136)$$

vorgegeben.

Allgemeine Zusammenhänge

Es wird zunächst die prinzipielle Vorgangsweise zur Ermittlung des Distanzmaßes $\mu_{\mathcal{B},d}$ skizziert. Ausgangspunkt ist der Beweis von Proposition 28, in welchem die Distanz $\mu_{d,\mathbf{S}}$ anhand einer Minimum-Norm Lösung des Gleichungssystems (5.80) ermittelt wird. Dieses Gleichungssystem erweitert sich hier um die Nebenbedingungen für die Störung zu

$$\delta\mathbf{A}\mathbf{V} = -\mathbf{A}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{S}, \quad (5.137a)$$

$$\delta\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u} = -\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}, \quad (5.137b)$$

$$\mathbf{f}(\delta\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \quad (5.137c)$$

$$\mathbf{g}(\delta\mathbf{C}) = \mathbf{0}. \quad (5.137d)$$

Zur Ermittlung von $\mu_{\mathcal{B},d}$ bestimmt man die Minimum-Norm Lösung dieses Gleichungssystems¹⁷ und minimiert anschließend deren Norm bezüglich der Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{S} .

Reellwertige Störungen

Es wird nun die Beschränkung der Störung auf reellwertige Matrizen diskutiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass auch die Systemdaten \mathbf{A} und \mathbf{C} reellwertig sind. Die soeben skizzierte Vorgehensweise wird, mit geringfügigen Modifikationen, auf die Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) &= \{(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) \mid \delta\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \delta\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}\} \\ &= \{(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{C}}) \mid \hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m \times m}\} \end{aligned} \quad (5.138)$$

angewandt. Der Einfachheit halber wird nur der Dimensionsverlust $d = 1$ betrachtet.

Ist das System $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C})$ nicht perspektivisch beobachtbar, so gibt es gemäß Satz 8 eine spaltenreguläre Matrix \mathbf{V} , eine Matrix \mathbf{S} und einen von null verschiedenen Vektor \mathbf{u} , sodass¹⁸

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{S} \quad (5.139a)$$

¹⁷Es erscheint verlockend, das Optimierungsproblem (5.31) unter Verwendung der Ausdrücke für $\delta\mathbf{A}$ und $\delta\mathbf{C}$ aus Relation (5.33) um die Nebenbedingungen (5.135) zu erweitern. Dies führt im Allgemeinen jedoch zu einem falschen Ergebnis, da sich Relation (5.33) im Zuge der Herleitung als Minimum-Norm Lösung ohne zusätzliche Beschränkungen ergibt.

¹⁸Anders als bei Proposition 28 wird an dieser Stelle *nicht* vorausgesetzt, dass $\mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{E}$ oder $\mathbf{u}^H\mathbf{u} = 1$ gilt.

gilt, d.h. die Spalten von \mathbf{V} spannen einen $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})$ -invarianten Unterraum auf, und die Relation

$$(\mathbf{C} + \delta\mathbf{C})\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5.139b)$$

erfüllt ist. Es wird angenommen, dass \mathbf{S} eine 2×2 Matrix mit zwei echt komplexen Eigenwerten λ_1, λ_2 ist, d.h. dass $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2^*$ gilt¹⁹.

Sollen $\delta\mathbf{A}$ und $\delta\mathbf{C}$ reellwertig sein, so muss neben den Gleichungen (5.139) ebenso

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^*\mathbf{S}^* \quad (5.140a)$$

$$(\mathbf{C} + \delta\mathbf{C})\mathbf{V}^*\mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad (5.140b)$$

mit entsprechend komplex konjugierten Matrizen \mathbf{V}^* , \mathbf{S}^* und Vektor \mathbf{u}^* gelten. Mit den Abkürzungen

$$\tilde{\mathbf{V}} := [\mathbf{V} \quad \mathbf{V}^*], \quad \tilde{\mathbf{S}} := \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{U}} := \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}^* \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

muss die Störung $(\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C})$ somit folgende Gleichungen erfüllen:

$$\delta\mathbf{A}\tilde{\mathbf{V}} = -(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{S}}) \quad (5.142a)$$

$$\delta\mathbf{C}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}} = -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}}. \quad (5.142b)$$

Die Koeffizienten dieses Gleichungssystems sind komplexwertig; ihre Minimum-Norm Lösung

$$\delta\mathbf{A} = -(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{S}})(\tilde{\mathbf{V}}^H\tilde{\mathbf{V}})^{-1}\tilde{\mathbf{V}}^H \quad (5.143a)$$

$$\delta\mathbf{C} = -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{U}}^H\tilde{\mathbf{V}}^H\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}})^{-1}\tilde{\mathbf{U}}^H\tilde{\mathbf{V}}^H \quad (5.143b)$$

ist aber reell. Man erhält nämlich durch Multiplikation der ersten bzw. zweiten Gleichung mit den unitären Matrizen

$$\mathbf{M} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -j\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & j\mathbf{E} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{N} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad (5.144)$$

bei gleichbleibender Minimum-Norm Lösung ein Gleichungssystem mit den reellwertigen

¹⁹Ist $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so besitzt das gestörte System gemäß Lemma 10 in der Regel auch ein nicht perspektivisch beobachtbares, konjugiert komplexes Eigenwertpaar λ_2, λ_2^* bzw. λ_1, λ_1^* . Derartige Fälle lassen sich durch Lösung des Optimierungsproblems (5.51) mit Beschränkung der Optimierungsvariablen \mathbf{S} und \mathbf{V} auf reellwertige Matrizen berücksichtigen.

Koeffizienten

$$\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{M} = \sqrt{2} [\operatorname{Re}\{\mathbf{V}\} \quad \operatorname{Im}\{\mathbf{V}\}], \quad (5.145)$$

$$\mathbf{M}^H \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{\mathbf{S}\} & \operatorname{Im}\{\mathbf{S}\} \\ -\operatorname{Im}\{\mathbf{S}\} & \operatorname{Re}\{\mathbf{S}\} \end{bmatrix}, \quad (5.146)$$

$$\mathbf{M}^H \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{\mathbf{u}\} & \operatorname{Im}\{\mathbf{u}\} \\ -\operatorname{Im}\{\mathbf{u}\} & \operatorname{Re}\{\mathbf{u}\} \end{bmatrix}. \quad (5.147)$$

Mit den dementsprechend reellwertigen²⁰ Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &:= \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{M}(\mathbf{M}^H \tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{M})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \tilde{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{M}, \end{aligned} \quad (5.148a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &:= (\mathbf{M}^H \tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{M})^{\frac{1}{2}}\mathbf{M}^H \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}(\mathbf{M}^H \tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{M})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{M}^H(\tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}})^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{M}, \end{aligned} \quad (5.148b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &:= (\mathbf{M}^H \tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{M})^{\frac{1}{2}}\mathbf{M}^H \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{N}(\mathbf{N}^H \tilde{\mathbf{U}}^H \mathbf{M}\mathbf{M}^H \tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{M}\mathbf{M}^H \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{N})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{M}^H(\tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}})^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{U}}^H \tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{N} \end{aligned} \quad (5.148c)$$

kann man die Störung in der Form

$$\delta\mathbf{A} = -(\mathbf{A}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{T})\mathbf{W}^T \quad (5.149a)$$

$$\delta\mathbf{C} = -\mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{W}^T \quad (5.149b)$$

schreiben. Man überprüft leicht, dass $\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \mathbf{E}$ und $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{E}$ gilt. Somit erhält man für die Norm der Störung

$$\left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{C} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbf{F}}^2 = \|\mathbf{A}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{T}\|_{\mathbf{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{U}\|_{\mathbf{F}}^2. \quad (5.150)$$

Dieser Ausdruck gleicht strukturell der Zielfunktion J_{psu} aus (5.52), mit dem Unterschied, dass anstelle des Einheitsvektors \mathbf{u} eine zweispaltige orthonormale Matrix \mathbf{U} auftritt.

Es verbleibt zu überprüfen, unter welchen Bedingungen auch bei Vorgabe der orthonormalen Matrizen \mathbf{W} und \mathbf{U} sowie der Matrix \mathbf{T} das (gemäß Relation (5.143)) gestörte System nicht perspektivisch beobachtbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn Beziehung (5.148) invertiert, d.h. nach \mathbf{V} , \mathbf{S} und \mathbf{u} aufgelöst, werden kann. Man erkennt zunächst, dass die Matrix \mathbf{T} dieselben Eigenwerte wie die Matrix $\tilde{\mathbf{S}}$ aufweisen muss, gemäß der Annahme also zwei konjugiert komplexe Eigenwertpaare. Erfüllt die Matrix \mathbf{T} diese Bedingung, so kann man durch (teilweise) Diagonalisierung von \mathbf{T} immer eine

²⁰Für eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix \mathbf{P} wird mit der Quadratwurzel $\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$ die eindeutige symmetrische, positiv semidefinite Matrix \mathbf{R} bezeichnet, die $\mathbf{R}^H\mathbf{R} = \mathbf{R}^2 = \mathbf{P}$ erfüllt [9]. Stellt $\mathbf{P} = \mathbf{U} \operatorname{diag}(\sigma_i) \mathbf{U}^H$ eine Singulärwertzerlegung vom \mathbf{P} dar, so gilt $\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{U} \operatorname{diag}(\sqrt{\sigma_i}) \mathbf{U}^H$. Daran erkennt man, dass für eine unitäre Matrix \mathbf{Q} die Relation $(\mathbf{Q}^H\mathbf{P}\mathbf{Q})^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Q}^H\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}$ gilt.

reguläre Matrix \mathbf{R} finden, sodass

$$\mathbf{TR} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^* \end{bmatrix} \quad (5.151)$$

gilt und \mathbf{R} die Form

$$\mathbf{R} = [\tilde{\mathbf{R}} \quad \tilde{\mathbf{R}}^*] \quad (5.152)$$

mit einer komplexwertigen $n \times 2$ -Matrix $\tilde{\mathbf{R}}$ hat. Mit der Wahl $\mathbf{M}^H(\tilde{\mathbf{V}}^H\tilde{\mathbf{V}})^{\frac{1}{2}} = \mathbf{R}$ erhält man

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{WR} \quad (5.153)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{TR}. \quad (5.154)$$

Diese Wahl impliziert weiterhin, dass $\mathbf{R}^H\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{V}}^H\tilde{\mathbf{V}}$ gilt.

Um auch eine Matrix $\tilde{\mathbf{U}}$ zu finden, welche Relation (5.148c) erfüllt, muss eine weitere Voraussetzung erfüllt sein: Es muss einen komplexwertigen Vektor \mathbf{h} geben, sodass der Vektor $\mathbf{U}\mathbf{h}$ als Linearkombination der Spalten von $\tilde{\mathbf{R}}$ darstellbar ist. Ist das der Fall, so lässt sich ein Vektor \mathbf{u} bestimmen, sodass $\mathbf{U}\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}$ gilt. Dann ist die Matrix

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}^* \end{bmatrix} \quad (5.155)$$

die gesuchte Matrix $\tilde{\mathbf{U}}$: Mit der regulären²¹ Matrix

$$\mathbf{H} := [\mathbf{h} \quad \mathbf{h}^*] \quad (5.156)$$

erfüllt diese die Gleichung

$$\mathbf{R}\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{UH}. \quad (5.157)$$

Die Auswertung der rechten Seite von Relation (5.148c) liefert somit

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{U}}^H\mathbf{R}^H\mathbf{R}\tilde{\mathbf{U}})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{N} &= \mathbf{UH}(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{N} \\ &= \mathbf{UQ}. \end{aligned} \quad (5.158)$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich nur um die orthogonale²² (und damit reellwertige)

²¹Bei singulärer Matrix \mathbf{H} wäre $\mathbf{h} = \mathbf{h}^*$, woraus $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{h} = \mathbf{U}^*\mathbf{h}^* = \tilde{\mathbf{R}}^*\mathbf{u}^*$ und damit

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ -\mathbf{u}^* \end{bmatrix} = [\tilde{\mathbf{R}} \quad \tilde{\mathbf{R}}^*] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ -\mathbf{u}^* \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

folgt. Das ist ein Widerspruch zur Regularität von \mathbf{R} .

²²Wie man leicht überprüft gilt $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \mathbf{E}$.

Matrix

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}\mathbf{N}(\mathbf{N}^H\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{N})^{-\frac{1}{2}} \quad (5.159)$$

von der Matrix \mathbf{U} . Dies ist jedoch kein Problem: Die Matrix $\mathbf{U}\mathbf{Q}$ ist nach wie vor reellwertig und man erhält mit ihr dieselbe Störung (5.149) und damit denselben Zielfunktionswert wie mit \mathbf{U} .

Zusammengefasst erhält man die kleinste reellwertige Störung, für welche das gestörte System das PBH-Rangkriterium für zwei komplexe Eigenwerte verletzt, durch Minimierung der Norm (5.150) bezüglich \mathbf{W} und \mathbf{T} unter folgenden Nebenbedingungen: die Matrix $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times 4}$ erfüllt $\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \mathbf{E}$, die Matrix $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ besitzt zwei konjugiert komplexe Eigenwertpaare und eine Linearkombination der Spalten der Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$, welche $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{E}$ erfüllt, liegt in einem zweidimensionalen \mathbf{T} -invarianten Unterraum.

5.8. Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit untersucht. Dabei wurden die Betrachtungen zunächst auf die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{C} und eine komplexwertige Störung beschränkt. Für diesen Fall wurde ein Optimierungsproblem hergeleitet und hinsichtlich seiner Struktur untersucht. Das Distanzmaß μ_d für das System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) ist demnach durch

$$\mu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{\|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\mathbb{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_{\mathbb{F}}^2}. \quad (5.160)$$

gegeben. Die zum optimalen Zielfunktionswert gehörigen Argumente \mathbf{V} und \mathbf{S} charakterisieren dabei einen (im Sinne von Satz 8) nicht perspektivisch beobachtbaren Unterraum des gestörten Systems.

Anschließend wurde die Berücksichtigung zusätzlicher Beschränkungen diskutiert. Dazu kann zum Teil, z.B. bei einer Einschränkung der berücksichtigten Systeme anhand von ihren nicht perspektivisch beobachtbaren Eigenwerttupel, das Optimierungsproblem in einfacher Weise erweitert werden. Mitunter, z.B. bei Beschränkung auf eine reellwertige Störung, ergeben sich aber auch deutlich kompliziertere Zusammenhänge.

Kapitel 6.

Modifikationen des Distanzmaßes

In diesem Kapitel werden einige Modifikationen des Distanzmaßes für die perspektivische Beobachtbarkeit vorgestellt.

Zunächst wird die Anwendbarkeit des Maßes auf Aufgaben aus der Bildverarbeitung untersucht. Die Sinnhaftigkeit des Einflusses einer Skalierung der Ausgangsmatrix auf das Distanzmaß wird kritisch hinterfragt. In diesem Zusammenhang werden zwei alternative Formen der Störung der Ausgangsmatrix betrachtet, was zu zwei verschiedenen Varianten eines *normierten Distanzmaßes* führt. Weiterhin wird für Systeme, welche die Bewegung von Punkten in homogenen Koordinaten beschreiben, ein Zusammenhang zwischen bezüglich ihrer Richtung nicht unterscheidbaren Anfangszuständen und nicht rekonstruierbaren Punkten hergestellt. Bei praktischen Aufgabenstellungen ist mitunter die Norm solcher Punkte relevant. Es wird daher eine Möglichkeit gezeigt, für das Distanzmaß nur solche Systeme zu berücksichtigen, welche nicht rekonstruierbare Punkte mit einer vorgegebenen Norm besitzen.

Anschließend wird, mit dem Ziel einer leichteren Lösbarkeit des Optimierungsproblems, die Lockerung (d.h. Relaxation) der nichtkonvexen Nebenbedingungen diskutiert. Es wird gezeigt, dass eine solche zu einer konsistenten unteren Schranke für das Distanzmaß führt, welche als *relaxiertes Distanzmaß* bezeichnet wird.

6.1. Normiertes Distanzmaß

Bei Aufgabenstellungen aus der Bildverarbeitung ergibt sich im Rahmen der Modellbildung die Ausgangsmatrix \mathbf{C} nur bis auf ein von null verschiedenes skalares Vielfaches (siehe etwa Beispiel 3). In diesen Fällen ist es daher nicht sinnvoll eine additive Störung der Ausgangsmatrix zu betrachten. In diesem Abschnitt werden für solche Fälle zwei alternative Formen der Störung diskutiert: eine multiplikative Störung der Ausgangsmatrix und eine skalierte Störung der Ausgangsmatrix. Der Unterschied besteht dabei darin, dass die Störung im ersten Fall mit der Ausgangsmatrix selbst und im zweiten Fall mit einer skalaren Funktion der Ausgangsmatrix multipliziert wird.

6.1.1. Multiplikative Störung der Ausgangsmatrix

Es wird zunächst eine Störung der Ausgangsmatrix \mathbf{C} der Form

$$\delta\mathbf{C} = (\mathbf{E} + \delta\mathbf{F})\mathbf{C}(\mathbf{E} + \delta\mathbf{G}) \quad (6.1)$$

betrachtet, wobei $\delta\mathbf{F}$ eine $m \times m$ und $\delta\mathbf{G}$ eine $n \times n$ Matrix ist. Das Distanzmaß für diese Form der Störung wird mit $\tilde{\mu}_d$ bezeichnet:

$$\tilde{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) := \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{F}, \delta\mathbf{G}} \left\{ \sqrt{\left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{G} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbf{F}}^2 + \|\delta\mathbf{F}\|_{\mathbf{F}}^2} \mid \delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \delta\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{m \times m}, \right. \\ \left. (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, [\mathbf{E} + \delta\mathbf{F}]\mathbf{C}[\mathbf{E} + \delta\mathbf{G}]) \in \overline{\mathcal{P}}_d \right\}. \quad (6.2)$$

Man kann leicht nachvollziehen, dass damit $\tilde{\mu}_d(\mathbf{A}, \alpha\mathbf{C}) = \tilde{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ für jede beliebige Zahl $\alpha \neq 0$ gilt. Erstaunlicherweise lässt sich dieses Problem auf das bisher betrachtete Distanzmaß μ_d zurückführen:

Satz 34 (Normiertes Distanzmaß). *Zwischen dem Distanzmaß $\tilde{\mu}_d$ bei multiplikativer Störung der Ausgangsmatrix und dem klassischen Distanzmaß μ_d der perspektivischen Beobachtbarkeit besteht der Zusammenhang*

$$\tilde{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mu_d(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{C}}), \quad (6.3)$$

wobei die Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$ durch die gemäß

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^+\mathbf{C} \quad (6.4)$$

normierte Ausgangsmatrix gegeben ist^{1 2}. Stellt $(\delta\tilde{\mathbf{A}}, \delta\tilde{\mathbf{C}})$ die zu $\mu_d(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{C}})$ gehörige Störung dar, so ist die zu $\tilde{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ gehörige Störung $(\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{F}, \delta\mathbf{G})$ durch

$$\delta\mathbf{A} = \delta\tilde{\mathbf{A}} \quad (6.5a)$$

$$\delta\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (6.5b)$$

$$\delta\mathbf{G} = \delta\tilde{\mathbf{C}} \quad (6.5c)$$

gegeben.

Beweis. Für das gestörte, nicht perspektivisch beobachtbare System gibt es gemäß Satz 8 eine orthonormale Matrix \mathbf{V} , eine Matrix \mathbf{S} und einen Einheitsvektor \mathbf{u} , sodass die

¹Für eine Matrix \mathbf{M} bezeichnet \mathbf{M}^+ die zugehörige Pseudoinverse.

²Ist die Matrix $\mathbf{C}\mathbf{C}^H$ invertierbar, so lautet diese Normierungsvorschrift $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^H(\mathbf{C}\mathbf{C}^H)^{-1}\mathbf{C}$.

Gleichungen

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{S}, \quad (6.6a)$$

$$(\mathbf{E} + \delta\mathbf{F})\mathbf{C}(\mathbf{E} + \delta\mathbf{G})\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6.6b)$$

erfüllt sind. Die Matrix $\delta\mathbf{A}$ muss jedenfalls Minimum-Norm Lösung der ersten Gleichung sein; man erhält für diese daher den bekannten Ausdruck (5.54a). Die zweite dieser Gleichungen lautet umgeformt

$$\delta\mathbf{F}\mathbf{C}(\mathbf{E} + \delta\mathbf{G})\mathbf{V}\mathbf{u} = -\mathbf{C}(\mathbf{E} + \delta\mathbf{G})\mathbf{V}\mathbf{u}. \quad (6.7)$$

Aufgrund der Minimalität der Norm der Matrix $\delta\mathbf{F}$ muss diese die Minimum-Norm Lösung der zweiten Gleichung sein, d.h.

$$\delta\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{w} = \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^H}{\mathbf{w}^H\mathbf{w}} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.8)$$

mit der Abkürzung

$$\mathbf{w} := \mathbf{C}(\mathbf{E} + \delta\mathbf{G})\mathbf{V}\mathbf{u}. \quad (6.9)$$

Die Frobenius-Norm dieser Matrix ist durch

$$\|\delta\mathbf{F}\|_{\mathbf{F}} = \begin{cases} 0 & \mathbf{C}(\mathbf{E} + \delta\mathbf{G})\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.10)$$

gegeben. Im ersten dieser Fälle muss die Matrix $\delta\mathbf{G}$ so gewählt werden, dass sie bei minimaler Norm die Gleichung

$$\mathbf{C}\delta\mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{u} = -\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u} \quad (6.11)$$

erfüllt. Diese erhält man durch Multiplikation der Gleichung von links bzw. von rechts mit den Pseudoinversen der Matrix \mathbf{C} bzw. des Vektors $\mathbf{V}\mathbf{u}$:

$$\delta\mathbf{G} = -\mathbf{C}^+\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\mathbf{u}^H\mathbf{V}. \quad (6.12)$$

Es wird nun die Matrix $\mathbf{C}^+\mathbf{C}$ näher betrachtet. Dazu sei

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{W}^H \quad (6.13)$$

eine Singulärwertzerlegung der Matrix \mathbf{C} , wobei die Diagonalmatrix $\mathbf{\Sigma}$ die von null verschiedenen Singulärwerte enthalten soll³. Die Pseudoinverse von \mathbf{C} ist dann durch

³Ist \mathbf{C} zeilenregulär, so ist die Singulärwertzerlegung durch $\mathbf{C} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{W}^H$ gegeben, d.h. es treten keine verschwindenden Singulärwerte auf.

die Matrix

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{W} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H \quad (6.14)$$

gegeben. Somit gilt

$$\mathbf{C}^+ \mathbf{C} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{W}^H, \quad (6.15)$$

d.h. alle von null verschiedenen Singulärwerte dieser Matrix sind gleich eins. Daraus folgt

$$\|\mathbf{C}^+ \mathbf{C}\|_2 = 1, \quad (6.16)$$

womit man für die Norm der Matrix $\delta \mathbf{G}$ aus Relation (6.12) die Ungleichung

$$\|\delta \mathbf{G}\|_F = \|\mathbf{C}^+ \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u}\|_2 \leq \|\mathbf{C}^+ \mathbf{C}\|_2 \|\mathbf{V} \mathbf{u}\|_2 = 1 \quad (6.17)$$

erhält.

Unter Berücksichtigung von Relation (6.10) wird die Norm der Störung daher, bei gegebenen Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{S} , und Vektor \mathbf{u} , jedenfalls durch

$$\delta \mathbf{A} = -\mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{V}^H + \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^H, \quad (6.18a)$$

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (6.18b)$$

$$\delta \mathbf{G} = -\mathbf{C}^+ \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{u}^H \mathbf{V} \quad (6.18c)$$

minimiert. Nur in dem besonderen Fall, dass $\|\mathbf{C}^+ \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u}\|_F = 1$ gilt, wird das Minimum *zusätzlich* für

$$\delta \mathbf{A} = -\mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{V}^H + \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^H, \quad (6.19a)$$

$$\delta \mathbf{F} = -\frac{\mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{u}^H \mathbf{V}^H \mathbf{C}^H}{\mathbf{u}^H \mathbf{V}^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u}} \quad (6.19b)$$

$$\delta \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (6.19c)$$

angenommen.

Wählt man in allen Fällen das erste dieser Minima, so erhält man für $\tilde{\mu}_d$ das Optimierungsproblem

$$\tilde{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{\|\mathbf{A} \mathbf{V} - \mathbf{V} \mathbf{S}\|_F^2 + \|\mathbf{C}^+ \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u}\|_2^2}. \quad (6.20)$$

Dieses gleicht strukturell dem Optimierungsproblem (5.51) für das klassische Distanzmaß μ_d , woraus die behauptete Relation (6.3) folgt. Den Zusammenhang (6.5) hinsichtlich der jeweiligen Störungen erhält man unmittelbar durch Vergleich der Relationen (6.18) und (5.54). \square

Unter Verwendung der Beziehung (6.16) erhält man aus Proposition 32 die Schranken⁴

$$0 \leq \tilde{\mu}_d \leq 1 \quad (6.21)$$

für das Distanzmaß bei multiplikativer Störung der Ausgangsmatrix. Aufgrund dieser Normierung der von $\tilde{\mu}_d$ angenommenen Werte auf das Intervall $[0; 1]$, sowie der Tatsache, dass sich $\tilde{\mu}_d$ aus dem klassischen Distanzmaß μ_d durch eine Normierung der Ausgangsmatrix ergibt, wird $\tilde{\mu}_d$ als *normiertes Distanzmaß* der perspektivischen Beobachtbarkeit bezeichnet.

Die anhand des vorangegangenen Beweises ersichtlichen Tatsachen, dass die Störung $\delta\mathbf{F}$ immer gleich null gewählt werden kann und alle von null verschiedenen Singulärwerte der normierten Ausgangsmatrix gleich eins sind, erlaubt außerdem zwei alternative Charakterisierungen des normierten Distanzmaßes $\tilde{\mu}_d$.

Korollar 35 (Alternative Charakterisierungen des normierten Distanzmaßes). *Das normierte Distanzmaß $\tilde{\mu}_d$ erfüllt*

$$\tilde{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{G}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{G} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{F}} \left| \delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times n}, (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C}[\mathbf{E} + \delta\mathbf{G}]) \in \overline{\mathcal{P}}_d \right. \right\} \quad (6.22)$$

sowie

$$\tilde{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mu_d(\mathbf{A}, \overline{\mathbf{C}}), \quad (6.23)$$

wobei die Matrix $\overline{\mathbf{C}}$ durch

$$\overline{\mathbf{C}} = \left((\mathbf{C}\mathbf{C}^H)^{\frac{1}{2}} \right)^+ \mathbf{C} \quad (6.24)$$

gegeben ist. Die zu $\mu_d(\mathbf{A}, \overline{\mathbf{C}})$ und $\tilde{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ gehörigen Störungen $(\delta\overline{\mathbf{A}}, \delta\overline{\mathbf{C}})$ und $(\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{G})$ hängen über

$$\delta\mathbf{A} = \delta\overline{\mathbf{A}} \quad (6.25a)$$

$$\delta\mathbf{G} = \overline{\mathbf{C}}^H \delta\overline{\mathbf{C}} \quad (6.25b)$$

zusammen.

Beweis. Die erste Äquivalenz folgt unmittelbar anhand von $\delta\mathbf{F} = \mathbf{0}$ aus Satz 34. Die alternative Normierung der Ausgangsmatrix ergibt sich aufgrund der Tatsache, dass mit

⁴Falls $\text{rang } \mathbf{C} = n$ ist, so gilt $\tilde{\mu}_d = 1$ für beliebigen Dimensionsverlust d , denn die normierte Ausgangsmatrix lautet in diesem Fall

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^+ \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{E}.$$

der Singulärwertzerlegung (6.13)

$$(\mathbf{C}\mathbf{C}^H)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}^2)^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H \quad (6.26)$$

und somit, unter Berücksichtigung von Relation (6.15),

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{W}^H \\ &= (\mathbf{U}\mathbf{W}^H)\mathbf{C}^+\mathbf{C} = (\mathbf{U}\mathbf{W}^H)\tilde{\mathbf{C}} \end{aligned} \quad (6.27)$$

gilt. Da die Matrix $\mathbf{U}\mathbf{W}^H$ unitär ist, folgt die behauptete Äquivalenz

$$\mu_d(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{C}}) = \mu_d(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{C}}) \quad (6.28)$$

aus der Invarianz der in der Zielfunktion (5.51) auftretenden Norm unter Multiplikation mit unitären Matrizen.

Ebenso erkennt man anhand von (6.15), dass

$$\tilde{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}^H \bar{\mathbf{C}} \quad (6.29)$$

gilt und die zu diesen beiden Distanzmaßen gehörigen additiven Störungen $\delta\bar{\mathbf{C}}$ bzw. $\delta\tilde{\mathbf{C}}$ der Ausgangsmatrizen $\bar{\mathbf{C}}$ bzw. $\tilde{\mathbf{C}}$ somit über

$$\delta\tilde{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}^H \delta\bar{\mathbf{C}} \quad (6.30)$$

zusammenhängen. Mit Satz 34 folgt daraus die behauptete Form der Störung. \square

Der Einfluss dieser Normierung der Ausgangsmatrix wird nun anhand eines Beispiels veranschaulicht.

Beispiel 21. Es wird das System aus Beispiel 3 betrachtet, welches jedoch etwas modifiziert wird. Es wird zunächst die Größe \mathbf{p} der regulären Transformation

$$\mathbf{p} = \beta \mathbf{r} \quad (6.31)$$

mit der reellen Konstante $\beta > 0$ unterworfen. Da \mathbf{p} Teil des Zustandsvektors (2.24) ist, stellt diese Beziehung eine reguläre Zustandstransformation dar. Weiterhin werde anstelle der Projektion $\tilde{\mathbf{p}}$ die Größe

$$\tilde{\mathbf{z}} = \gamma \tilde{\mathbf{p}} = \frac{\gamma (\mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T) \mathbf{p}}{1 - \frac{\mathbf{h}^T \mathbf{p}}{f}} = \frac{\beta \gamma (\mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T) \mathbf{r}}{1 - \frac{\beta \mathbf{h}^T \mathbf{r}}{f}} \quad (6.32)$$

mit einer Konstanten $\gamma > 0$ gemessen, d.h. die Koordinaten der Projektion $\tilde{\mathbf{p}}$ werden mit dem positiven Faktor γ skaliert.

Die Größe $\tilde{\mathbf{z}}$ lässt sich somit als perspektivische Projektion der Ausgangsgröße eines Systems mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \frac{1}{\beta} \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta\gamma(\mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T) & \mathbf{0} \\ -\frac{\beta}{f}\mathbf{h}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

auffassen, welches im Weiteren untersucht wird. Dabei stellt $\boldsymbol{\Omega}$ eine schiefsymmetrische Matrix und f die Brennweite dar und der Vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ erfüllt die Gleichung $\mathbf{h}^T \mathbf{h} = 1$. Die Ausgangsmatrix \mathbf{C} ist nicht zeilenregulär, es gilt

$$[\mathbf{h}^T \ 0] \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (6.34)$$

Mit einer beliebigen orthonormalen 3×2 Matrix \mathbf{Q} , welche

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T \quad (6.35)$$

erfüllt⁵, kann man eine Singulärwertzerlegung der Ausgangsmatrix \mathbf{C} angeben:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \mathbf{h} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\beta^2+f^2}}{f} & & \\ & \beta\gamma\mathbf{E} & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+f^2}}\mathbf{h}^T & \frac{f}{\sqrt{\beta^2+f^2}} \\ \mathbf{Q}^T & 0 \\ \frac{f}{\sqrt{\beta^2+f^2}}\mathbf{h}^T & \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+f^2}} \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

Man erhält somit unter Berücksichtigung von Relation (6.35) die normierten Ausgangsmatrizen

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^+ \mathbf{C} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \mathbf{E} & \\ & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{E} - \frac{f^2}{\beta^2+f^2} \mathbf{h}\mathbf{h}^T & -\frac{\beta f}{\beta^2+f^2} \mathbf{h} \\ -\frac{\beta f}{\beta^2+f^2} \mathbf{h}^T & \frac{f^2}{\beta^2+f^2} \end{bmatrix}, \quad (6.37a)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \left((\mathbf{C}\mathbf{C}^H)^{\frac{1}{2}} \right)^+ \mathbf{C} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \mathbf{E} & \\ & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T & \mathbf{0} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+f^2}} \mathbf{h}^T & \frac{f}{\sqrt{\beta^2+f^2}} \end{bmatrix}. \quad (6.37b)$$

Erstere lässt sich insbesondere unter Verwendung des Vektors

$$\mathbf{w}^T = \frac{1}{\sqrt{\beta^2+f^2}} [f\mathbf{h}^T \ \beta], \quad (6.38)$$

welcher die letzte Zeile der Matrix \mathbf{W} darstellt, in der kompakten Form

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{E} - \mathbf{w}\mathbf{w}^T \quad (6.39)$$

anschreiben.

Es ist anzumerken, dass diese Vorgehensweise, wenngleich sie die Probleme mit der Mehrdeutigkeit der Skalierung von \mathbf{C} behebt, nicht unter allen Umständen sinnvoll ist.

⁵Damit gilt auch $\mathbf{Q}^T \mathbf{h} = \mathbf{0}$, denn $\mathbf{h}^T \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \mathbf{h} = \|\mathbf{Q}^T \mathbf{h}\|_2^2 = 0$.

So erkennt man etwa, dass die normierten Ausgangsmatrizen zwar von dem Parameter β der Zustandstransformation, nicht aber von dem Skalierungsfaktor γ der Messgröße abhängen! Damit hängt auch das normierte Distanzmaß des betrachteten Systems nicht von γ ab. Weiterhin nimmt $\tilde{\mathbf{C}}$ im Gegensatz zur nicht normierten Ausgangsmatrix \mathbf{C} für den Fall $f = 0$ den endlichen Wert

$$\lim_{f \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

an. Im Kontext des ursprünglichen Problems aus Beispiel 3 bedeutet dies, dass auch bei verschwindender Brennweite die Richtung der Größe $w\mathbf{p}$ und damit die Richtung des Punktes \mathbf{p} gemessen werden kann. Tatsächlich ist dies mit dem betrachteten Kamerasystem aber nicht möglich, denn die Brennweite ist null und alle Punkte außerhalb der Bildebene werden somit auf den Ursprung projiziert! \triangle

Das erste dieser Probleme, die Invarianz von $\tilde{\mathbf{C}}$ gegenüber der Skalierung von Zeilen der Ausgangsmatrix, lässt sich verallgemeinern:

Lemma 36. *Es sei $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine beliebige Matrix und*

$$\mathbf{D} = \mathbf{RC} \quad (6.41)$$

mit einer regulären Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Dann gilt

$$\mathbf{C}^+\mathbf{C} = \mathbf{D}^+\mathbf{D}. \quad (6.42)$$

Beweis. Anhand der Darstellung der Matrix $\mathbf{C}^+\mathbf{C}$ in Relation (6.15) erkennt man, dass diese durch ihren Nullraum, d.h. den Raum aller Vektoren \mathbf{w} , für welche

$$\mathbf{C}^+\mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (6.43)$$

gilt, *eindeutig* charakterisiert wird. Da \mathbf{R} regulär ist und die Matrizen $\mathbf{C}^+\mathbf{C}$ und \mathbf{C} bzw. $\mathbf{D}^+\mathbf{D}$ und \mathbf{D} jeweils denselben Rang haben, gelten die Äquivalenzen

$$\mathbf{D}^+\mathbf{D}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{RC}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}^+\mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (6.44)$$

woraus die behauptete Aussage folgt. \square

6.1.2. Skalierte Störung der Ausgangsmatrix

Anhand der Betrachtungen im vorigen Abschnitt ist klar, dass eine Normierung der Ausgangsmatrix grundsätzlich sinnvoll ist. Die dort angeführten Probleme motivieren jedoch zu einer alternativen Normierungsvorschrift. Man führt eine Normierung der Ausgangsmatrix gemäß

$$\hat{\mathbf{C}} := \frac{1}{\|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2} \mathbf{C} \quad (6.45)$$

durch. D.h. die Spektralnorm der letzten Zeile von \mathbf{C} wird zu

$$\left\| \mathbf{e}_m^T \hat{\mathbf{C}} \right\|_2 = 1 \quad (6.46)$$

normiert; man ermittelt dann das Distanzmaß für das System $(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{C}})$ bei additiver Störung der Systemparameter. Dieses ist invariant unter Skalierung der Ausgangsmatrix \mathbf{C} mit einem konstanten Faktor, nicht aber (anders als die Normierungsvorschrift aus dem vorangegangenen Abschnitt) unter unterschiedlicher Skalierung von deren Singulärwerten.

Diese Normierung liefert das Distanzmaß bei einer Skalierung der Störung der Ausgangsmatrix; konkret erhält man das Maß

$$\hat{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) := \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{C} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{F}} \left| \begin{array}{l} \delta\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \delta\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \\ (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2 \delta\mathbf{C}) \in \bar{\mathcal{P}}_d \end{array} \right. \right\}, \quad (6.47)$$

wie der folgende Satz zeigt. Die Maßzahl $\hat{\mu}_d$ wird im Weiteren auch als *bezüglich der letzten Zeile normiertes Distanzmaß* der perspektivischen Beobachtbarkeit bezeichnet. Im Gegensatz zur im vorangegangenen Abschnitt erhaltenen Relation (6.21) lassen sich jedoch keine von der Ausgangsmatrix \mathbf{C} unabhängigen Schranken für $\hat{\mu}_d$ angeben.

Satz 37 (Bezüglich der letzten Zeile der Ausgangsmatrix normiertes Distanzmaß). *Es sei $\|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2 \neq 0$. Dann ist das bezüglich der letzten Zeile normierte Distanzmaß $\hat{\mu}_d$ durch*

$$\hat{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mu_d(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{C}}) \quad (6.48)$$

mit der normierten Ausgangsmatrix

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{\|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2} \mathbf{C} \quad (6.49)$$

gegeben. Ist $(\delta\hat{\mathbf{A}}, \delta\hat{\mathbf{C}})$ die zu $\mu_d(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{C}})$ gehörige Störung, so lautet die Störung kleinster Norm zu $\hat{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C})$

$$\delta\mathbf{A} = \delta\hat{\mathbf{A}} \quad (6.50a)$$

$$\delta\mathbf{C} = \delta\hat{\mathbf{C}} \quad (6.50b)$$

Beweis. Geht man analog zum Beweis von Satz 34 vor, so erhält man hier für $\delta\mathbf{C}$ die Gleichung

$$(\mathbf{C} + \|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2 \delta\mathbf{C}) \mathbf{V} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (6.51)$$

deren Minimum-Norm Lösung durch

$$\delta \mathbf{C} = -\frac{1}{\|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2} \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{u}^H \mathbf{V}^H \quad (6.52)$$

gegeben ist. Die Gültigkeit der behaupteten Aussagen ist damit anhand eines Vergleichs mit Proposition 28 offensichtlich.

Alternativ erkennt man die Gültigkeit der Aussagen auch direkt anhand der Tatsache

$$(\mathbf{A} + \delta \bar{\mathbf{A}}, \frac{1}{\|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2} \mathbf{C} + \delta \bar{\mathbf{C}}) \in \bar{\mathcal{P}}_d \Leftrightarrow (\mathbf{A} + \delta \bar{\mathbf{A}}, \mathbf{C} + \|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2 \delta \bar{\mathbf{C}}) \in \bar{\mathcal{P}}_d, \quad (6.53)$$

d.h. anhand der Invarianz der Eigenschaft der perspektivischen Beobachtbarkeit bei Skalierung der Ausgangsmatrix mit einer von null verschiedenen Konstanten. \square

Mit dem so normierten Distanzmaß erhält man bei Beispiel 21 sinnvollere Ergebnisse, wie dessen Fortsetzung zeigt:

Beispiel 21 (Fortsetzung). Die vorgeschlagene Normierung wird auf die Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta \gamma (\mathbf{E} - \mathbf{h} \mathbf{h}^T) & \mathbf{0} \\ -\frac{\beta}{f} \mathbf{h}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

angewandt. Die normierte Ausgangsmatrix ergibt sich – unter Berücksichtigung des Umstandes $\mathbf{h}^T \mathbf{h} = 1$ – zu

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\beta \gamma f}{\sqrt{\beta^2 + f^2}} (\mathbf{E} - \mathbf{h} \mathbf{h}^T) & \mathbf{0} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + f^2}} \mathbf{h}^T & \frac{f}{\sqrt{\beta^2 + f^2}} \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

Für $f = 0$ liefert dieser Ausdruck eine endliche Matrix

$$\lim_{f \rightarrow 0} \hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{h}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

deren Rang gleich eins ist. Das normierte System ist demnach (unabhängig von der Systemmatrix) nicht perspektivisch beobachtbar für den Dimensionsverlust $d = 1$. Im Gegensatz zu vorhin spiegelt dieser Umstand den Verlust jeglicher Information über den Punkt \mathbf{p} bei verschwindender Brennweite wider. Ferner erkennt man, dass die Matrix $\hat{\mathbf{C}}$ im Gegensatz zu $\tilde{\mathbf{C}}$ neben β auch von der Skalierung γ der gemessenen Projektion abhängt. \triangle

6.2. Beschränkung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte

In diesem Abschnitt werden für den Dimensionsverlust $d = 1$ Systeme betrachtet, deren Zustands- und Ausgangsvektoren homogene Koordinaten eines Punktes \mathbf{p} und der

zugehörigen perspektivischen Projektion $\tilde{\mathbf{p}}$ darstellen, so wie dies etwa in Beispiel 3 der Fall ist. Der Zustandsvektor hat dementsprechend die Form

$$\mathbf{x} = [w\mathbf{p}^T \quad w]^T, \quad (6.57)$$

wobei w eine von null verschiedene Zahl bezeichnet. Es wird untersucht, ob und in welchem Abstand von Koordinatenursprung es sogenannte *nicht rekonstruierbare Punkte* gibt, deren Position nicht aus Kenntnis des Verlaufs der zugehörigen perspektivischen Projektion rekonstruiert werden kann.

6.2.1. Lage nicht rekonstruierbarer Punkte

Unter einem nicht rekonstruierbaren Punkt wird ein Punkt \mathbf{p} verstanden, zu welchem zumindest ein weiterer Punkt \mathbf{r} existiert, sodass die Richtungen der Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

nicht anhand der Richtungen der zugehörigen Ausgangsverläufe unterscheidbar sind. Es ist klar, dass die Position eines solchen Punktes nicht aus Kenntnis der zugehörigen perspektivischen Projektion rekonstruiert werden kann.

Im Weiteren wird die Lage nicht rekonstruierbarer Punkte untersucht. Dazu wird zunächst folgendes Beispiel betrachtet:

Beispiel 22. Es wird das System aus Beispiel 3 für sehr große Werte der Brennweite f , d.h. für den Grenzfall $f \rightarrow \infty$ betrachtet. Weiterhin soll der Vektor \mathbf{h} durch die erste Spalte der Matrix \mathbf{R} aus Relation (3.52) gegeben sein, d.h.

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}\mathbf{e}_1. \quad (6.59)$$

Die Daten des Systems lauten somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} - \mathbf{R}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T\mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

Für den Dimensionsverlust $d = 1$ ist dieses System unabhängig von \mathbf{v} nicht perspektivisch beobachtbar über \mathbb{R} . Man erkennt dies daran, dass

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E} - \mathbf{R}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T\mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.61)$$

gilt und das System somit die Voraussetzungen von Satz 8 mit den reellwertigen Matrizen bzw. dem reellwertigen Vektor

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{W}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 \quad (6.62)$$

erfüllt. Die Matrix \mathbf{W} ist dabei in Relation (3.53) angegeben. Das PBH-Rangkriterium (3.1) ist dementsprechend für das konjugiert komplexe Eigenwertpaar $\pm j\omega$ der schief-symmetrischen Matrix $\mathbf{\Omega}$ verletzt.

Zur Beurteilung, welche Punkte nicht rekonstruierbar sind, wird zunächst das ursprüngliche System mit der Differentialgleichung (2.23)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{\Omega}\mathbf{p} + \mathbf{v} \quad (6.63)$$

und der perspektivischen Projektion $\tilde{\mathbf{p}}$ des Punktes \mathbf{p} gemäß Relation (2.27) als Ausgangsgröße betrachtet. Für $f \rightarrow \infty$ geht letztere in eine Parallelprojektion über; der Bildpunkt $\tilde{\mathbf{p}}$ ist durch

$$\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{E} - \mathbf{R}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T\mathbf{R}^T)\mathbf{p} \quad (6.64)$$

gegeben. Es liegt somit ein *lineares* System mit dem Zustandsvektor \mathbf{p} und einer konstanten Eingangsgröße \mathbf{v} vor. Setzt man $\mathbf{\Omega} \neq \mathbf{0}$ voraus, so ist dieses *beobachtbar*: Der Vektor $\mathbf{R}\mathbf{e}_1$ ist nämlich kein Eigenvektor⁶ der Matrix $\mathbf{\Omega}$, aber nur für diesen Vektor bzw. für skalare Vielfache dieses Vektors gilt

$$(\mathbf{E} - \mathbf{R}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T\mathbf{R}^T)\mathbf{R}\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}. \quad (6.65)$$

Der Punkt \mathbf{p} ist somit für beliebige Werte des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} eindeutig aus Kenntnis der Projektion $\tilde{\mathbf{p}}$ rekonstruierbar!

Um eine Einsicht in dieses scheinbar paradoxe Ergebnis zu erhalten, wird folgendes Paar $\mathbf{x}_0^{(1)}$, $\mathbf{x}_0^{(2)}$ linear unabhängiger Anfangszustände betrachtet:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{V}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{V}\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{e}_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.66)$$

Die zugehörigen Ausgangstrajektorien sind durch

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{C}\mathbf{V}e^{\mathbf{S}t}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \mathbf{C}\mathbf{V}e^{\mathbf{S}t}\mathbf{e}_2 \quad (6.67)$$

gegeben und damit für alle t linear abhängig (vgl. Korollar 22), d.h. $\mathbf{x}_0^{(1)}$, $\mathbf{x}_0^{(2)}$ stellen ein nicht perspektivisch beobachtbares Paar von Anfangszuständen dar. Interpretiert man diese Anfangszustände als homogene Koordinaten zweier Punkte $\mathbf{p}_0^{(1)}$ und $\mathbf{p}_0^{(2)}$ gemäß Relation (6.57), d.h.

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^{(1)}\mathbf{p}_0^{(1)} \\ w^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{e}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^{(2)}\mathbf{p}_0^{(2)} \\ w^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (6.68)$$

so erkennt man den Grund für die unterschiedlichen Ergebnisse der beiden Untersu-

⁶Konkret handelt es sich bei $\mathbf{R}\mathbf{e}_1$ um eine Linearkombination der konjugiert komplexen Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\pm j\omega$.

chungen: Die nicht rekonstruierbaren Punkte $\mathbf{p}_0^{(1)}$ und $\mathbf{p}_0^{(2)}$ liegen im Unendlichen, da $w^{(1)} = w^{(2)} = 0$ gilt, d.h. es existieren keine (endlichen) nicht rekonstruierbaren Punkte!

In diesem Fall ist somit der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit für die eigentliche Aufgabe, die Rekonstruktion der Position des Punktes \mathbf{p} , nicht von Bedeutung. Vielmehr muss überprüft werden, ob nicht rekonstruierbare Punkte existieren; dies ist hier nicht der Fall. \triangle

Im Weiteren bezeichnet $\overline{\mathcal{R}}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ die Menge der nicht rekonstruierbaren Punkte⁷ eines Systems (\mathbf{A}, \mathbf{C}) mit der Systemordnung n :

$$\overline{\mathcal{R}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) := \{ \mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \mathbf{p} \text{ ist nicht rekonstruierbarer Punkt von } (\mathbf{A}, \mathbf{C}) \}. \quad (6.69)$$

Von besonderem Interesse ist der *Mindestabstand* ρ derartiger Punkte vom Ursprung; dieser soll für ein gegebenes System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) die kleinstmögliche Norm eines nicht rekonstruierbaren Punktes darstellen, d.h.

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{C}) := \begin{cases} \min \{ \|\mathbf{p}\|_2 \mid \mathbf{p} \in \overline{\mathcal{R}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \} & \overline{\mathcal{R}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.70)$$

Es ist klar, dass ein perspektivisch beobachtbares System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) keine nicht rekonstruierbaren Punkte besitzt und für dieses somit $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \infty$ gilt. Wie im vorangegangenen Beispiel gezeigt, kann dies aber auch bei Vorliegen eines nicht perspektivisch beobachtbaren Systems der Fall sein. Zur praktischen Beurteilung, ob der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit ein Problem darstellt, ist daher eine obere Schranke für ρ von Interesse. Eine solche liefert der folgende

Satz 38 (Norm nicht rekonstruierbarer Punkte). *Für ein gegebenes System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) sei $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times 2}$ eine orthonormale Matrix, d.h.*

$$\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}, \quad (6.71)$$

welche zusammen mit einer Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ und einem Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^2$ die Voraussetzungen von Satz 8 für den Dimensionsverlust $d = 1$ erfüllt, d.h.

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{S} \quad (6.72a)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (6.72b)$$

Dann stellt

$$\bar{\rho}(\mathbf{V}) := \frac{\sqrt{1 - \|\mathbf{e}_n^T \mathbf{V}\|_2^2}}{\|\mathbf{e}_n^T \mathbf{V}\|_2} \quad (6.73)$$

⁷In Analogie zur Unterscheidung zwischen perspektivischer Beobachtbarkeit über \mathbb{C} und über \mathbb{R} kann auch zwischen den Mengen komplexwertiger und reellwertiger nicht rekonstruierbarer Punkte unterschieden werden. Hier wird der Einfachheit halber die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{C} betrachtet; dementsprechend werden auch komplexwertige Punkte zugelassen.

eine obere Schranke für die Mindestnorm $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ nicht rekonstruierbarer Punkte des Systems dar, d.h. es gilt

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \leq \bar{\rho}(\mathbf{V}). \quad (6.74)$$

Nimmt $\bar{\rho}(\mathbf{V})$ einen endlichen Wert an, so gibt es insbesondere für jede Zahl $\kappa \geq \bar{\rho}(\mathbf{V})$ einen nicht rekonstruierbaren Punkt \mathbf{p} mit der Norm $\|\mathbf{p}\|_2 = \kappa$.

Beweis. Mit einer geeigneten unitären Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ kann \mathbf{V} in die Form

$$\mathbf{VQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \\ 0 & h \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

gebracht werden. Wählt man als Anfangszustände $\mathbf{x}_0^{(1)}$, $\mathbf{x}_0^{(2)}$ zwei linear unabhängige Linearkombinationen der Spalten dieser Matrix, d.h.

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{VQ}\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{VQ}\mathbf{u}_2 \quad (6.76)$$

mit linear unabhängigen Vektoren \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 , so sind die zugehörigen Ausgangsverläufe

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{C}\mathbf{V}e^{\mathbf{S}t}\mathbf{Q}\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \mathbf{C}\mathbf{V}e^{\mathbf{S}t}\mathbf{Q}\mathbf{u}_2 \quad (6.77)$$

aufgrund des Rangverlustes der Matrix $\mathbf{C}\mathbf{V}$ linear abhängig.

Jede beliebige Linearkombination der Spalten von \mathbf{V} entspricht somit den homogenen Koordinaten eines nicht rekonstruierbaren Punktes \mathbf{p} . Sofern h ungleich null ist, gibt es für beliebige Konstanten α und β mit $\beta \neq 0$ einen nicht rekonstruierbaren Punkt \mathbf{p} , welcher mit einer von null verschiedenen Zahl w

$$\begin{bmatrix} w\mathbf{p} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{h}_1 + \beta\mathbf{h}_2 \\ \beta h \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

erfüllt. Unter Berücksichtigung der Orthonormalität der Matrix \mathbf{V} , d.h.

$$\begin{bmatrix} \|\mathbf{h}_1\|_2^2 & \mathbf{h}_1^H \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_2^H \mathbf{h}_1 & \|\mathbf{h}_2\|_2^2 + |h|^2 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^H \mathbf{V}^H \mathbf{V} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.79)$$

erhält man für das Quadrat der Norm des Punktes \mathbf{p}

$$\|\mathbf{p}\|_2^2 = \frac{\|w\mathbf{p}\|_2^2}{|w|^2} = \frac{\|\alpha\mathbf{h}_1 + \beta\mathbf{h}_2\|_2^2}{|\beta h|^2} = \frac{1 - |h|^2}{|h|^2} + \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 \frac{1}{|h|^2}. \quad (6.80)$$

Daraus ergibt sich mit der Äquivalenz

$$|h| = \|\mathbf{e}_n^T \mathbf{V} \mathbf{Q}\|_2 = \|\mathbf{e}_n^T \mathbf{V}\|_2 \quad (6.81)$$

die Norm von \mathbf{p} zu

$$\|\mathbf{p}\|_2 = \sqrt{\bar{\rho}^2(\mathbf{V}) + \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 \frac{1}{\|\mathbf{e}_n^T \mathbf{V}\|_2^2}}. \quad (6.82)$$

Dieser Ausdruck nimmt für $\alpha = 0$ ein Minimum an, woraus sich die behauptete Ungleichung

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \leq \|\mathbf{p}\|_2 = \bar{\rho}(\mathbf{V}) \quad (6.83)$$

ergibt. Ferner erhält man für eine beliebige Zahl $\kappa \geq \bar{\rho}(\mathbf{V})$ einen nicht rekonstruierbaren Punkt \mathbf{p} mit der Norm $\|\mathbf{p}\|_2 = \kappa$, indem man für α den Wert

$$\alpha = \beta \|\mathbf{e}_n^T \mathbf{V}\|_2 \sqrt{\kappa^2 - \bar{\rho}^2(\mathbf{V})} \quad (6.84)$$

wählt. □

6.2.2. Modifikation des Distanzmaßes

Bei praktischen Aufgaben stellt der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit mitunter nur dann ein Problem dar, wenn es dadurch zu nicht rekonstruierbaren Punkten innerhalb eines vorgegebenen Abstands R vom Ursprung kommt. Es ist daher sinnvoll, in solchen Fällen auch das Distanzmaß auf Systeme $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C})$ zu beschränken, bei welchen die Mindestnorm ρ nach oben durch R beschränkt ist, d.h. für welche

$$\rho(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) \leq R \quad (6.85)$$

gilt.

Eine einfache Möglichkeit dies sicherzustellen bietet die zuvor ermittelte obere Schranke für ρ aus Satz 38: Da die Optimierungsvariable \mathbf{V} – wie in Abschnitt 5.4.4 diskutiert – für das gestörte System $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \delta\mathbf{C})$ die Anforderungen von Satz 8 erfüllt, ergänzt man das Optimierungsproblem um die Nebenbedingung

$$\bar{\rho}(\mathbf{V}) \leq R. \quad (6.86)$$

Diese kann man zur nichtkonvexen, quadratischen Ungleichungsnebenbedingung

$$\mathbf{e}_n^T \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{e}_n \geq \frac{1}{1 + R^2} \quad (6.87)$$

umformen. Weiterhin ist erwähnenswert, dass diese für $R = 0$ zu einer Gleichungsnebenbedingung wird, da aufgrund der Orthonormalität der Matrix \mathbf{V} von vornherein

$$\mathbf{e}_n^T \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{e}_n = \|\mathbf{e}_n^T \mathbf{V}\|_2^2 \leq \|\mathbf{e}_n\|_2^2 \|\mathbf{V}\|_2^2 = 1 \quad (6.88)$$

gilt.

Die beschriebene Modifikation wird hier auf das bezüglich der letzten Zeile normierte Distanzmaß angewandt. Wie im vorigen Abschnitt 6.1 ausgeführt, eignet sich besonders diese Variante des Distanzmaßes für die in diesem Abschnitt betrachteten Systeme. Das so modifizierte Maß wird als Distanzmaß bei Beschränkung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte bezeichnet und mit $\hat{\eta}_R$ symbolisiert:

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_R(\mathbf{A}, \mathbf{C}) &:= \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times 2} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E} \\ \mathbf{e}_n^T \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{e}_n \geq \frac{1}{1+R^2}}} \sqrt{\|(\mathbf{E} - \mathbf{V} \mathbf{V}^H) \mathbf{A} \mathbf{V}\|_F^2 + \|\hat{\mathbf{C}} \mathbf{V} \mathbf{u}\|_2^2} \\ &= \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times 2} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E} \\ \mathbf{e}_n^T \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{e}_n \geq \frac{1}{1+R^2}}} \sqrt{\|\mathbf{A} \mathbf{V} - \mathbf{V} \mathbf{S}\|_F^2 + \|\hat{\mathbf{C}} \mathbf{V} \mathbf{u}\|_2^2}.\end{aligned}\quad (6.89)$$

Dabei stellt $\hat{\mathbf{C}}$ die gemäß Relation (6.49) normierte Ausgangsmatrix

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{\|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2} \mathbf{C} \quad (6.90)$$

dar.

Es sei darauf hingewiesen, dass das Maß $\hat{\eta}_R$ kein Distanzmaß für die perspektivische Beobachtbarkeit im eigentlichen Sinne mehr darstellt. Es nimmt nämlich mitunter auch für nicht perspektivisch beobachtbare Systeme einen von null verschiedenen Wert an; so etwa auch für das System aus dem vorangegangenen Beispiel, wie dessen Fortsetzung zeigt:

Beispiel 22 (Fortsetzung). Es wird das System für den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ betrachtet, d.h. Systemmatrix und (bezüglich der letzten Zeile normierte) Ausgangsmatrix lauten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} - \mathbf{R} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.91)$$

Ermittelt wird das Distanzmaß bei Beschränkung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte für $R = 0$, d.h. $\hat{\eta}_0$.

In diesem Fall wird, wie zuvor angemerkt, die Ungleichungsnebenbedingung (6.87) zu der Gleichungsnebenbedingung

$$\mathbf{e}_n^T \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{e}_n = 1. \quad (6.92)$$

Für eine geeignete unitäre Matrix \mathbf{Q} lässt sich die orthonormale zweispaltige Matrix \mathbf{V} somit in die Form

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

bringen, wobei \mathbf{d} einen Vektor mit Länge eins darstellt, d.h. es gilt $\mathbf{d}^H \mathbf{d} = 1$. Als Zielfunktion bietet sich die Funktion $J_{p\sigma}$ aus Relation (5.35) an, da diese $J_{p\sigma}(\mathbf{V}\mathbf{Q}) = J_{p\sigma}(\mathbf{V})$ erfüllt. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass

$$(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^H)\mathbf{A}\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{E} - \mathbf{d}\mathbf{d}^H)\boldsymbol{\Omega}\mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.94a)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}^H \hat{\mathbf{C}}^H \hat{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \|(\mathbf{E} - \mathbf{R}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T\mathbf{R}^T)\mathbf{d}\|_2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.94b)$$

gilt und der erste Diagonaleintrag letzterer Matrix immer kleiner oder gleich eins ist, lautet das Optimierungsproblem für $\hat{\eta}_0$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_0(\mathbf{A}, \mathbf{C}) &= \min_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{n-1} \\ \mathbf{h}^H \mathbf{h} = 1}} \sqrt{\|(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^H)\mathbf{A}\tilde{\mathbf{V}}\|_F^2 + \sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{V}}^H \hat{\mathbf{C}}^H \hat{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{V}})} \\ &= \min_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{n-1} \\ \mathbf{h}^H \mathbf{h} = 1}} \sqrt{\|(\mathbf{E} - \mathbf{d}\mathbf{d}^H)\boldsymbol{\Omega}\mathbf{d}\|_F^2 + \|(\mathbf{E} - \mathbf{R}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T\mathbf{R}^T)\mathbf{d}\|_2^2}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Durch Vergleich mit Relation (5.40) erkennt man, dass dies ein Optimierungsproblem für das Distanzmaß der Beobachtbarkeit darstellt! Konkret gilt

$$\hat{\eta}_0(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mu_0(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{E} - \mathbf{R}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T\mathbf{R}^T). \quad (6.96)$$

Dieses Distanzmaß lässt sich im vorliegenden Fall geschlossen ermitteln. Führt man mit der orthogonalen Matrix

$$\mathbf{P} := [\mathbf{R} \quad \mathbf{q}] \quad (6.97)$$

eine Zustands- und Ausgangstransformation durch, so erhält man

$$\mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.98a)$$

$$\mathbf{P}^T (\mathbf{E} - \mathbf{R}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T\mathbf{R}^T) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.98b)$$

d.h. das System ist als Nebeneinanderschaltung zweier Teilsysteme darstellbar. Das Distanzmaß der Beobachtbarkeit des Gesamtsystems entspricht damit dem kleinsten Distanzmaß der beiden Teilsysteme:

$$\mu_0(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{E} - \mathbf{R}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T\mathbf{R}^T) = \min \{ \mu_0(\mathbf{W}, \mathbf{E} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T), \mu_0(0, 1) \} = \mu_0(\mathbf{W}, \mathbf{E} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T). \quad (6.99)$$

Die zweite Äquivalenz folgt dabei aus der Tatsache, dass die beiden Distanzmaße gemäß Proposition 32 die Ungleichung

$$\mu_0(\mathbf{W}, \mathbf{E} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T) \leq \|\mathbf{E} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T\|_2 = 1 = \mu_0(0, 1) \quad (6.100)$$

erfüllen. Das letztlich für das Distanzmaß ausschlaggebende Teilsystem mit den Systemdaten

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.101)$$

hat die Systemordnung zwei. Zur Ermittlung von dessen Distanzmaß kann auf die in [20] für diesen Fall angegebenen Berechnungen⁸ zurückgegriffen werden. Man erhält so für das Distanzmaß der Beobachtbarkeit und damit zugleich für das gesuchte Distanzmaß bei Beschränkung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte

$$\hat{\eta}_0(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mu_0(\mathbf{W}, \mathbf{E} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T) = \begin{cases} |\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16|\omega|^2}} & |\omega| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (6.102)$$

In Abbildung 6.1 ist der Verlauf dieses Maßes in Abhängigkeit von ω dargestellt.

Alternativ erhält man dasselbe Ergebnis direkt durch Berechnung des kleinsten Singulärwerts der Matrix

$$\mathbf{M}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{E} - \mathbf{W} \\ \mathbf{E} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.103)$$

Mit der Abkürzung $\psi := \arg s$ für den Winkel der komplexen Zahl s entspricht diesem die Wurzel des kleinsten Eigenwerts der Matrix

$$\mathbf{M}^H(s)\mathbf{M}(s) = \begin{bmatrix} |s|^2 + |\omega|^2 & -2j\omega |s| \sin \psi \\ 2j\omega |s| \sin \psi & |s|^2 + |\omega|^2 + 1 \end{bmatrix}. \quad (6.104)$$

Man erhält so

$$\sigma_{\min} \{\mathbf{M}(s)\} = \sqrt{|\omega|^2 + |s|^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + 16 |\omega|^2 |s|^2 \sin^2 \psi} \right)}, \quad (6.105)$$

woraus sich bei Minimierung bezüglich s das oben angegebene Distanzmaß ergibt. \triangle

6.3. Relaxiertes Distanzmaß

In diesem Abschnitt wird ein relaxiertes Distanzmaß für die perspektivische Beobachtbarkeit diskutiert. Im Allgemeinen stellt dieses nur eine untere Schranke für das Distanzmaß dar, im Gegenzug erhält man aber ein einfacheres Optimierungsproblem. Aus-

⁸Konkret lässt sich das System $(\mathbf{W}, \mathbf{E} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T)$ durch eine unitäre Zustandstransformation auf das in [20] betrachtete System in Diagonalf orm mit dem konjugiert komplexen Eigenwertpaar $\pm j\omega$ und dem Parameter $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ überführen.

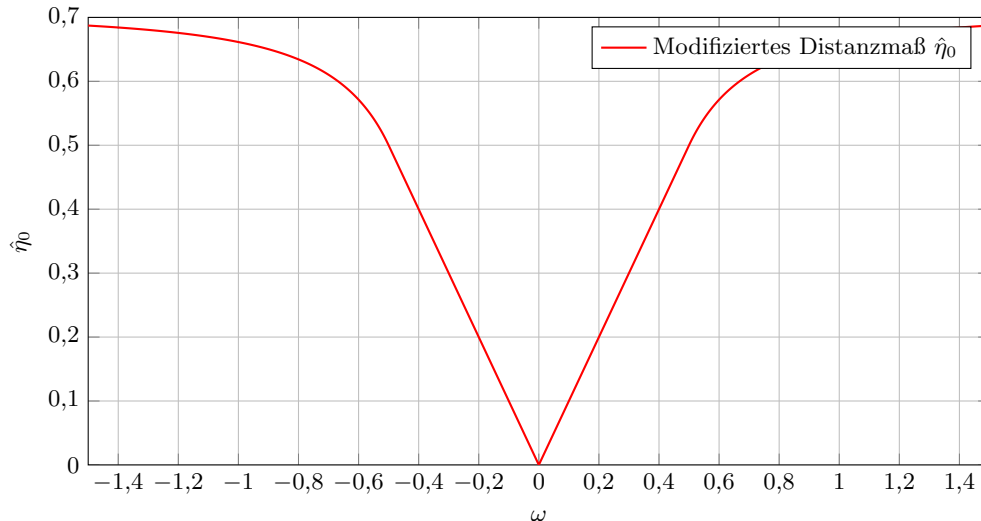


Abbildung 6.1.: Distanzmaß $\hat{\eta}_0$ bei Beschränkung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte durch $R = 0$

gangspunkt ist die Lockerung (*Relaxation*) der Nebenbedingungen des zuvor in Satz 27 erhaltenen Optimierungsproblems für das Distanzmaß. Es wird damit zunächst eine untere Schranke für das innere Optimierungsproblem (bei gegebener Matrix \mathbf{S}) bestimmt; bei Minimierung bezüglich \mathbf{S} ergibt sich daraus eine untere Schranke für das Distanzmaß. In diesem Abschnitt werden deren Eigenschaften untersucht. Insbesondere wird gezeigt, dass die Schranke nur dann verschwindet, wenn das betrachtete System nicht perspektivisch beobachtbar ist, was die Bezeichnung *relaxiertes Distanzmaß* rechtfertigt.

6.3.1. Nichtkonvexes quadratisches Programm

Es wird das innere Teilproblem des Optimierungsproblems aus Satz 27, d.h. die (quadratische) Distanz

$$\mu_{d,\mathbf{S}}^2 = \min_{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)}} \|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2 \quad (6.106a)$$

$$\text{unter} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E} \quad (6.106b)$$

aus Proposition 28 betrachtet. Man erkennt, dass sowohl Zielfunktion als auch Nebenbedingung dieser Optimierung quadratische Funktionen in den Einträgen der Matrix \mathbf{V} sind. Es ist daher naheliegend, das Optimierungsproblem als quadratisches Programm mit (nichtkonvexen) quadratischen Gleichungsnebenbedingungen zu formulieren.

Lemma 39. *Es sei $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}$ eine beliebige Matrix und $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1}$ ein Vektor, welcher $\mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1$ erfüllt. Das Optimierungsproblem für das Quadrat der Distanz $\mu_{d,\mathbf{S}}$*

aus Proposition 28 lässt sich als quadratisches Programm mit quadratischen Gleichungsnebenbedingungen in der Form

$$\mu_{d,\mathbf{S}}^2 = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n(d+1)}} \|\mathbf{M}(\mathbf{S})\mathbf{v}\|_2^2 \quad (6.107a)$$

unter

$$\mathbf{v}^H \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{v} = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq d+1 \quad (6.107b)$$

anschreiben, wobei die Matrizen $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ und \mathbf{Q}_{ij} durch⁹

$$\mathbf{M}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{d+1} \otimes \mathbf{A} - \mathbf{S}^T \otimes \mathbf{E}_n \\ \mathbf{u}^T \otimes \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (6.108a)$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \otimes \mathbf{E}_n \quad (6.108b)$$

gegeben sind¹⁰. Zwischen der Matrix \mathbf{V} des ursprünglichen Problems und dem Vektor \mathbf{v} dieses Optimierungsproblems besteht der Zusammenhang¹¹

$$\mathbf{v} = \text{vec}(\mathbf{V}). \quad (6.109)$$

Beweis. Mithilfe einiger Rechenregeln für das Kronecker-Produkt¹² (siehe z.B. [13]) erhält man zunächst

$$\text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}) = (\mathbf{E}_{d+1} \otimes \mathbf{A} - \mathbf{S}^T \otimes \mathbf{E}_n) \mathbf{v} \quad (6.110a)$$

$$\text{vec}(\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}) = (\mathbf{u}^T \otimes \mathbf{C}) \mathbf{v}, \quad (6.110b)$$

wobei der Übersichtlichkeit halber wie bereits angemerkt die Größen der jeweiligen Einheitsmatrizen als Indizes angegeben sind, d.h. es bezeichnen \mathbf{E}_{d+1} bzw. \mathbf{E}_n Einheitsmatrizen der Größen $d+1$ bzw. n . Die Zielfunktion J_{psu} aus Relation (5.52) ist somit als

⁹Für zwei Matrizen \mathbf{H} und \mathbf{L} stellt der Ausdruck $\mathbf{H} \otimes \mathbf{L}$ das sogenannte Kronecker-Produkt dar. Dieses ist für

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{durch} \quad \mathbf{H} \otimes \mathbf{L} := \begin{bmatrix} h_{11}\mathbf{L} & \dots & h_{1n}\mathbf{L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}\mathbf{L} & \dots & h_{mn}\mathbf{L} \end{bmatrix}$$

definiert.

¹⁰In diesen Ausdrücken bezeichnen \mathbf{E}_{d+1} und \mathbf{E}_n jeweils Einheitsmatrizen der Größe $d+1$ bzw. n .

¹¹Für eine Matrix $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \ \dots \ \mathbf{h}_l]$ wird der Vektor $\text{vec}(\mathbf{H})$ durch Untereinanderstellen der Spalten gebildet:

$$\text{vec}(\mathbf{H}) := \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_l \end{bmatrix}.$$

¹²Für Matrizen \mathbf{H} , \mathbf{V} und \mathbf{L} geeigneter Dimension gilt allgemein $\text{vec}(\mathbf{H}\mathbf{V}\mathbf{L}) = (\mathbf{L}^T \otimes \mathbf{H}) \text{vec}(\mathbf{V})$.

die quadratische Form

$$\begin{aligned} J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) &= \|\mathbf{AV} - \mathbf{VS}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{CVu}\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{AV} - \mathbf{VS}) \\ \text{vec}(\mathbf{CVu}) \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{M}(\mathbf{S}) \mathbf{v}\|_2^2 = \mathbf{v}^H \mathbf{M}(\mathbf{S})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.111)$$

mit $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ aus Relation (6.108a) darstellbar.

Schreibt man weiterhin die Nebenbedingung (6.106b) in der Form

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{V}^H \mathbf{V} \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq d+1, \quad (6.112)$$

so kann man diese in Nebenbedingungen für den Vektor \mathbf{v} umformen. Es gilt allgemein

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{V}^H \mathbf{V} \mathbf{e}_j = \text{vec}(\mathbf{V} \mathbf{e}_i)^H \text{vec}(\mathbf{V} \mathbf{e}_j) = \mathbf{v}^H (\mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{E}_n)^H (\mathbf{e}_j^T \otimes \mathbf{E}_n) \mathbf{v} \quad (6.113)$$

sowie¹³

$$(\mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{E}_n)^H (\mathbf{e}_j^T \otimes \mathbf{E}_n) = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_n) (\mathbf{e}_j^T \otimes \mathbf{E}_n) = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \otimes \mathbf{E}_n = \mathbf{Q}_{ij}. \quad (6.114)$$

Man erhält somit die Relation

$$\mathbf{v}^H \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{v} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{V}^H \mathbf{V} \mathbf{e}_j, \quad (6.115)$$

mit deren Hilfe man die Nebenbedingungen (6.112) in Form der quadratischen Gleichungsnebenbedingungen (6.107b) darstellen kann. \square

Zur Veranschaulichung der konkreten Struktur der Matrizen $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ und \mathbf{Q}_{ij} wird der Dimensionsverlust $d = 1$ betrachtet. Aus den Komponenten von \mathbf{S} und \mathbf{u}

$$\mathbf{S} =: \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} =: \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (6.116)$$

ergibt sich die Matrix $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ gemäß Relation (6.108a) zu

$$\mathbf{M}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s_{11} \mathbf{E}_n & -s_{21} \mathbf{E}_n \\ -s_{12} \mathbf{E}_n & \mathbf{A} - s_{22} \mathbf{E}_n \\ u_1 \mathbf{C} & u_2 \mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (6.117)$$

Für die Matrizen \mathbf{Q}_{ij} erhält man gemäß (6.108b)

$$\mathbf{Q}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \end{bmatrix}, \quad (6.118)$$

¹³Für Matrizen geeigneter Dimensionen gilt $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{H} \otimes \mathbf{L}) = \mathbf{UH} \otimes \mathbf{VL}$, sowie $(\mathbf{H} \otimes \mathbf{L})^H = (\mathbf{H}^H \otimes \mathbf{L}^H)$.

und das Optimierungsproblem (6.107) lautet

$$\mu_{d,S}^2 = \min_{\mathbf{v}} \|\mathbf{M}(\mathbf{S})\mathbf{v}\|_2^2 \quad (6.119a)$$

unter

$$\mathbf{v}^H \mathbf{Q}_{11} \mathbf{v} = 1 \quad (6.119b)$$

$$\mathbf{v}^H \mathbf{Q}_{12} \mathbf{v} = 0 \quad (6.119c)$$

$$\mathbf{v}^H \mathbf{Q}_{22} \mathbf{v} = 1. \quad (6.119d)$$

Es ist bemerkenswert, dass auch die Einträge der Störmatrizen $\delta\mathbf{A}$ und $\delta\mathbf{C}$ sowie des die Zielfunktion J_{psu} minimierenden Ausdrucks für die Matrix \mathbf{S} gemäß den Relationen (5.54) und (5.53) quadratische Funktionen in den Komponenten der Matrix \mathbf{V} sind. Diese, konkret die Einträge von deren i -ten Zeile und j -ten Spalte, sind durch¹⁴

$$\mathbf{e}_i^T \delta\mathbf{A}\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^H \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i^T \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{V}^H \mathbf{e}_j, \quad (6.120a)$$

$$\mathbf{e}_i^T \delta\mathbf{C}\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_i^T \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\mathbf{u}^H \mathbf{V}^H \mathbf{e}_j, \quad (6.120b)$$

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{S}\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_i^T \mathbf{V}^H \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{e}_j \quad (6.120c)$$

gegeben. In zu den Umformungen im vorangegangenen Beweis ähnlicher Weise kann man diese Ausdrücke zu

$$\mathbf{e}_i^T \delta\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{v}^H \mathbf{P}_{A,ij} \mathbf{v} \quad \text{mit } \mathbf{P}_{A,ij} := -\mathbf{E}_{d+1} \otimes \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{A} + \mathbf{S}^T \otimes \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T, \quad (6.121a)$$

$$\mathbf{e}_i^T \delta\mathbf{C}\mathbf{e}_j = \mathbf{v}^H \mathbf{P}_{C,ij} \mathbf{v} \quad \text{mit } \mathbf{P}_{C,ij} := -(\mathbf{u}\mathbf{u}^H)^T \otimes \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{C}, \quad (6.121b)$$

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{S}\mathbf{e}_j = \mathbf{v}^H \mathbf{P}_{S,ij} \mathbf{v} \quad \text{mit } \mathbf{P}_{S,ij} := \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \otimes \mathbf{A} \quad (6.121c)$$

umformen.

Weiterhin lässt sich das quadratische Programm auch um die Ungleichungsnebenbedingung (6.87) für das Distanzmaß bei Beschränkung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte aus Abschnitt 6.2 erweitern. Durch analoge Anwendung der vorangegangenen Umformungsschritte erkennt man, dass Relation (6.87) zur nichtkonvexen Ungleichungsnebenbedingung

$$\mathbf{v}^H (\mathbf{E}_{d+1} \otimes \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T) \mathbf{v} \geq \frac{1}{1 + R^2} \quad (6.122)$$

äquivalent ist.

6.3.2. Semidefinite Relaxation

In diesem Abschnitt wird die Ermittlung einer unteren Schranke für das quadratische Programm (6.107) mittels einer Relaxation der Gleichungsnebenbedingungen untersucht. Eine naheliegende Möglichkeit dazu stellt die Berechnung des kleinsten Singulärwertes der Matrix $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ dar. Wie in Anhang A gezeigt wird, führt diese Vorgangsweise jedoch

¹⁴Dabei bezeichnen \mathbf{e}_i und \mathbf{e}_k jeweils Standardbasisvektoren geeigneter Dimension.

zu keinem verwertbaren Ergebnis.

Eine wesentlich vielversprechendere Methode stellt die sogenannte *semidefinite Relaxation* dar, welche prinzipiell auf quadratische Programme mit quadratischen Gleichungsnebenbedingungen anwendbar ist [18]. Mit dieser Methode erhält man unter Relaxation der nichtkonvexen Nebenbedingung ein *semidefinites Programm*. Dies ist ein konvexes Optimierungsproblem, zu dessen Lösung effiziente Algorithmen zur Verfügung stehen [28].

Man schreibt dazu die Zielfunktion und die linken Seiten der Nebenbedingungen des Optimierungsproblems (6.107) in folgender Form an:

$$\mathbf{v}^H \mathbf{M}(\mathbf{S})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}) \mathbf{v} = \text{spur } \mathbf{M}(\mathbf{S})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}) \mathbf{v} \mathbf{v}^H, \quad (6.123)$$

$$\mathbf{v}^H \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{v} = \text{spur } \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{v} \mathbf{v}^H. \quad (6.124)$$

Diese Ausdrücke sind linear in der Matrix $\mathbf{v} \mathbf{v}^H$. Ersetzt man daher $\mathbf{v} \mathbf{v}^H$ durch eine Matrix \mathbf{X} geeigneter Dimension, so sind Zielfunktion und Nebenbedingungen linear in \mathbf{X} und damit konvex. Ferner lässt sich die Matrix \mathbf{X} genau dann in der Form

$$\mathbf{X} = \mathbf{v} \mathbf{v}^H \quad (6.125)$$

darstellen, wenn sie positiv semidefinit ist und ihr Rang gleich eins ist, d.h. wenn

$$\mathbf{X} \geq 0 \quad (6.126a)$$

$$\text{rang } \mathbf{X} = 1 \quad (6.126b)$$

gilt. Lediglich die zweite dieser Nebenbedingungen ist nichtkonvex. Lässt man sie weg, so erhält man folgende semidefinite Relaxation des ursprünglichen Problems:

Proposition 40 (Semidefinite Relaxation der Distanz $\mu_{d,\mathbf{S}}$). *Es sei eine beliebige Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}$ sowie ein Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{d+1}$ gegeben, welcher $\mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1$ erfüllt. Dann stellt die nichtnegative Wurzel $\nu_{d,\mathbf{S}}$ der Lösung des semidefiniten Programms*

$$\nu_{d,\mathbf{S}}^2(\mathbf{A}, \mathbf{C}) := \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n(d+1) \times n(d+1)}} \text{spur } \mathbf{M}(\mathbf{S})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}) \mathbf{X} \quad (6.127a)$$

unter

$$\mathbf{X} \geq 0 \quad (6.127b)$$

$$\text{spur } \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{X} = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq d+1, \quad (6.127c)$$

mit den Matrizen $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ und \mathbf{Q}_{ij} aus Relation (6.108), eine untere Schranke für die Distanz $\mu_{d,\mathbf{S}}$ dar, d.h. es gilt

$$\nu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \leq \mu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}). \quad (6.128)$$

Beweis. Folgt aus den vorangegangenen Überlegungen dieses Abschnitts. \square

Erfüllt die optimale Lösung die Bedingung (6.126b), so ist die Relaxation exakt, d.h. in der Ungleichung (6.128) gilt Gleichheit. Man erhält unmittelbar

Korollar 41. *Es gibt genau dann eine optimale Lösungsmatrix \mathbf{X} des semidefiniten Programms (6.127), welche mit einem Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n(d+1)}$ in der Form*

$$\mathbf{X} = \mathbf{v}\mathbf{v}^H \quad (6.129)$$

darstellbar ist, d.h. deren Rang gleich eins ist, wenn \mathbf{v} eine optimale Lösung des quadratischen Programms (6.107) ist und

$$\nu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \quad (6.130)$$

gilt. Die Komponenten der zugehörigen Störung sind in diesem Fall durch

$$\mathbf{e}_i^T \delta \mathbf{A} \mathbf{e}_j = -\text{spur} \left[\mathbf{E}_{d+1} \otimes \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{A} + \mathbf{S}^T \otimes \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T \right] \mathbf{X} \quad (6.131)$$

$$\mathbf{e}_i^T \delta \mathbf{C} \mathbf{e}_j = -\text{spur} \left[(\mathbf{u}\mathbf{u}^H)^T \otimes \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{C} \right] \mathbf{X} \quad (6.132)$$

gegeben.

Von Interesse ist mitunter auch das zu (6.127) duale semidefinite Programm. Dieses ist durch

$$\nu_{d,\mathbf{S}}^2 = \max_{y_{ij}} \sum_{k=1}^{d+1} y_{kk} \quad (6.133a)$$

unter

$$\mathbf{Y}(y_{ij}) = \mathbf{M}(\mathbf{S})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}) - \sum_{j=1}^{d+1} \sum_{i=1}^{d+1} y_{ij} \mathbf{Q}_{ij} \geq 0 \quad (6.133b)$$

gegeben. Man erhält mit beiden semidefiniten Programmen denselben optimalen Ziel-funktionswert, da die sogenannte Slater-Bedingung, eine hinreichende Bedingung für starke Dualität, erfüllt ist [28]: Für die zulässige Variablenbelegung $y_{ij} = -\delta_{ij}$ ist die in der Nebenbedingung (6.133b) auftretende Matrix gleich $\mathbf{M}(\mathbf{S})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}) + \mathbf{E}$ und damit positiv definit.

Für den Dimensionsverlust $d = 1$ lautet dieses Optimierungsproblem beispielsweise

$$\nu_{1,\mathbf{S}}^2 = \max_{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}} y_{11} + y_{22} \quad (6.134a)$$

unter

$$\mathbf{M}(\mathbf{S})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}) - y_{11} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - y_{12} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - y_{21} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} - y_{22} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.134b)$$

mit der Matrix $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ aus Relation (6.117).

Wird eine optimale Lösung des dualen semidefiniten Programms für y_{ij} angenommen, so lässt sich aufgrund der starken Dualität daraus eine optimale Lösung \mathbf{X} des ursprünglichen Optimierungsproblems ermitteln. Für die zugehörige symmetrische, positiv semidefinite Matrix \mathbf{Y} gemäß Relation (6.133b) gilt nämlich die komplementäre

Schlupfbedingung

$$\mathbf{Y}\mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (6.135)$$

Ist \mathbf{U} eine orthonormale Basis des Nullraums von \mathbf{Y} , welche man z.B. auf dem Wege einer Singulärwertzerlegung erhält, so muss \mathbf{X} damit in der Form

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{U}^H \quad (6.136)$$

mit einer hermiteschen Matrix \mathbf{B} darstellbar sein. Die Matrix \mathbf{B} erhält man als Lösung des durch die Nebenbedingungen

$$\delta_{ij} = \text{spur } \mathbf{Q}_{ij}\mathbf{X} = \text{spur } \mathbf{U}^H \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{U} \mathbf{B} = \text{vec} \left((\mathbf{U}^H \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{U})^T \right)^T \text{vec}(\mathbf{B}) \quad (6.137)$$

gegebenen linearen Gleichungssystems.

Im Weiteren wird das Minimum der Lösungen $\nu_{d,\mathbf{S}}$ des relaxierten Optimierungsproblems bezüglich der Matrix \mathbf{S}

$$\nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) := \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \nu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \quad (6.138)$$

betrachtet. Diese Zahl ν_d wird als *relaxiertes Distanzmaß* der perspektivischen Beobachtbarkeit für den Dimensionsverlust d bezeichnet¹⁵. Man erhält für dieses anhand der bisherigen Ergebnisse vorerst

Proposition 42. *Die Größe ν_d stellt eine nichtnegative untere Schranke für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit dar, d.h.*

$$0 \leq \nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \leq \mu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}). \quad (6.139)$$

Dabei gilt genau dann

$$\nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}), \quad (6.140)$$

wenn es eine optimale Lösungsmatrix \mathbf{X} des aus den Relationen (6.138) und (6.127) zusammengesetzten Optimierungsproblems mit

$$\text{rang } \mathbf{X} = 1 \quad (6.141)$$

gibt.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Definition (6.138)

$$0 \leq \nu_d = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \nu_{d,\mathbf{S}} \leq \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \mu_d \quad (6.142)$$

und Korollar 41. □

¹⁵In den folgenden Abschnitten wird argumentiert, dass diese Bezeichnung sinnvoll ist.

6.3.3. Rang der Lösungsmatrix

Wie zuvor gezeigt, entspricht die Distanz $\mu_{d,\mathbf{S}}$ (bzw. für eine geeignete Matrix \mathbf{S} auch das Distanzmaß μ_d) genau dann der Lösung des semidefiniten Programms, wenn es eine Lösungsmatrix \mathbf{X} mit Rang eins gibt. Bezeichnet man mit \tilde{r} den kleinsten Rang aller optimalen Lösungen des semidefiniten Programms, so ist dies genau dann der Fall, wenn $\tilde{r} = 1$ gilt. Dieser Umstand wirft zunächst die Frage auf, wie groß \tilde{r} höchstens sein kann¹⁶. Dieses Problem sowie insbesondere die Frage nach der Exaktheit der Relaxation, d.h. die Frage, wann $\tilde{r} = 1$ gilt, wurde bereits vielfach untersucht, unter anderem etwa in [24, 15, 32, 14].

Eine Aussage über die, im Weiteren als *Minimalrang* bezeichnete Zahl \tilde{r} lässt sich anhand der Anzahl der Nebenbedingungen machen. Ausgangspunkt ist dabei der folgende Zusammenhang, welcher in [27] für reellwertige Matrizen formuliert und in [14] auf den komplexwertigen Fall erweitert wird:

Lemma 43 ([14]). *Es seien $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^H \in \mathbb{C}^{p \times p}$ und $\mathbf{R} = \mathbf{R}^H \in \mathbb{C}^{p \times p}$ hermitesche Matrizen. Dann lässt sich jede positive semidefinite $p \times p$ Matrix $\mathbf{X} \geq 0$ mit $\text{rang } \mathbf{X} = r$ in eine Summe von Matrizen mit Rang eins zerlegen, d.h.*

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^r \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^H, \quad (6.143)$$

mit $\mathbf{x}_j \in \mathbb{C}^p$, sodass für $j = 1, \dots, r$

$$\mathbf{x}_j^H \mathbf{Q} \mathbf{x}_j = \frac{1}{r} \text{spur } \mathbf{Q} \mathbf{X} \quad \mathbf{x}_j^H \mathbf{R} \mathbf{x}_j = \frac{1}{r} \text{spur } \mathbf{R} \mathbf{X} \quad (6.144)$$

gilt.

Damit wird in [32] bzw. für den komplexwertigen Fall in [14] der folgende Zusammenhang gezeigt:

Satz 44 ([14]). *Es seien $\mathbf{M} = \mathbf{M}^H$ und $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^H$ (für $i = 1, \dots, m$) gegebene hermitesche Matrizen. Besitzt das semidefinite Programm*

$$\min_{\mathbf{X}} \text{spur } \mathbf{M} \mathbf{X} \quad (6.145a)$$

unter

$$\mathbf{X} \geq 0 \quad (6.145b)$$

$$\text{spur } \mathbf{Q}_i \mathbf{X} = q_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad (6.145c)$$

eine optimale Lösung, so existiert auch eine (möglicherweise komplexwertige) optimale Lösung \mathbf{X}^* mit

$$\text{rang } \mathbf{X}^* \leq \min(1, m - 2). \quad (6.146)$$

¹⁶Aufgrund der Größe der Matrix $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n(d+1) \times n(d+1)}$ ist klar, dass jedenfalls $\tilde{r} \leq n(d+1)$ gilt

Beweis. Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge wird ein von [14] abweichender Beweis für den Fall $m > 2$ angegeben. Dabei sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass

$$q_{m-1} = q_m = 0 \quad (6.147)$$

gilt. Es sei $\tilde{\mathbf{X}}$ eine optimale Lösung des Optimierungsproblems mit der Zerlegung

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{j=1}^r \tilde{\mathbf{x}}_j \tilde{\mathbf{x}}_j^H. \quad (6.148)$$

Letztere wird gemäß Lemma 43 so gewählt, dass

$$\tilde{\mathbf{x}}_j^H \mathbf{Q}_m \tilde{\mathbf{x}}_j = 0, \quad \tilde{\mathbf{x}}_j^H \mathbf{Q}_{m-1} \tilde{\mathbf{x}}_j = 0 \quad (6.149)$$

gilt.

Es wird nun die Linearkombination

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^r \beta_j \tilde{\mathbf{x}}_j \tilde{\mathbf{x}}_j^H \quad (6.150)$$

mit zunächst unbestimmten Koeffizienten β_j gebildet. Damit diese Matrix eine zulässige Lösung des Optimierungsproblems ist, muss sie positiv semidefinit sein und die Nebenbedingungen erfüllen:

$$\beta_j \geq 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, r \quad (6.151a)$$

$$\text{spur } \mathbf{Q}_i \mathbf{X} = \sum_{j=1}^r \tilde{\mathbf{x}}_j^H \mathbf{Q}_i \tilde{\mathbf{x}}_j \beta_j = q_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m. \quad (6.151b)$$

Fasst man im Vektor

$$\boldsymbol{\beta} := [\beta_1 \quad \dots \quad \beta_r]^T \quad (6.152)$$

die Koeffizienten β_j zusammen, so kann man diese Bedingungen in der Form

$$\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0} \quad (6.153a)$$

$$\mathbf{Q} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{q} \quad (6.153b)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathbf{Q} := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{Q}_1 \tilde{\mathbf{x}}_1 & \tilde{\mathbf{x}}_2^H \mathbf{Q}_1 \tilde{\mathbf{x}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_r^H \mathbf{Q}_1 \tilde{\mathbf{x}}_r \\ \tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{Q}_2 \tilde{\mathbf{x}}_1 & \tilde{\mathbf{x}}_2^H \mathbf{Q}_2 \tilde{\mathbf{x}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_r^H \mathbf{Q}_2 \tilde{\mathbf{x}}_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{Q}_{m-2} \tilde{\mathbf{x}}_1 & \tilde{\mathbf{x}}_2^H \mathbf{Q}_{m-2} \tilde{\mathbf{x}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_r^H \mathbf{Q}_{m-2} \tilde{\mathbf{x}}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} := \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{m-2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.154)$$

anschreiben. Die Lösungen des Gleichungssystems (6.153b) haben allgemein die Form

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{1} + \mathbf{H}\mathbf{z}, \quad (6.155)$$

wobei \mathbf{z} ein Vektor freier Parameter ist, die Spalten der Matrix \mathbf{H} den Nullraum von \mathbf{Q} aufspannen und die Abkürzung

$$\mathbf{1} := [1 \ \dots \ 1]^T \quad (6.156)$$

eine spezielle Lösung des Gleichungssystems darstellt (für diese liefert Relation (6.150) die optimale Lösungsmatrix $\tilde{\mathbf{X}}$). Dabei beträgt die Anzahl der Freiheitsgrade, d.h. der Rang von \mathbf{H} mindestens

$$\text{rang } \mathbf{H} \geq r - m + 2. \quad (6.157)$$

Unter Verwendung der Abkürzung

$$\mathbf{c}^T = [\tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_1 \quad \tilde{\mathbf{x}}_2^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_2 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{x}}_r^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_r] \quad (6.158)$$

erhält man damit für den zur Matrix $\tilde{\mathbf{X}}$ gehörigen Zielfunktionswert

$$\begin{aligned} \text{spur } \mathbf{M}\mathbf{X} &= \mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta} \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{1} + \mathbf{c}^T \mathbf{H}\mathbf{z} \\ &= \text{spur } \mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{c}^T \mathbf{H}\mathbf{z}. \end{aligned} \quad (6.159)$$

Ist der Vektor $\mathbf{c}^T \mathbf{H}$ ungleich null, so kann man den Vektor \mathbf{z} hinreichend klein (z.B. $\|\mathbf{H}\mathbf{z}\|_2 < 1$) so wählen, dass

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{1} + \mathbf{H}\mathbf{z} > \mathbf{0} \quad (6.160a)$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{H}\mathbf{z} < 0 \quad (6.160b)$$

und damit

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \quad (6.161)$$

$$\text{spur } \mathbf{M}\mathbf{X} < \text{spur } \mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}} \quad (6.162)$$

gilt, was einen Widerspruch zur angenommenen Optimalität der Matrix $\tilde{\mathbf{X}}$ darstellt. Es muss also

$$\mathbf{c}^T \mathbf{H} = \mathbf{0}^T \quad (6.163)$$

gelten, d.h. die Matrix \mathbf{X} stellt für beliebige Werte des Vektors \mathbf{z} , welche die Ungleichung (6.160a) erfüllen, eine optimale Lösung des semidefiniten Programms dar.

Letztere Ungleichung beschreibt ein Polytop mit r Seitenflächen in einem zumindest $(r-m+2)$ -dimensionalen Raum. In jeder von dessen Ecken sind somit zumindest $r-m+2$ der Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt. D.h. es sind mindestens $r-m+2$ Komponenten des Vektors $\boldsymbol{\beta}$ gleich null bzw. höchstens $m-2$ Komponenten ungleich null. Da letztere

Zahl dem Rang von \mathbf{X} entspricht, ist die Behauptung (für $m > 2$) bewiesen. \square

Anhand der Anzahl der Nebenbedingungen des semidefiniten Programms (6.127) kann also eine obere Schranke für den Minimalrang \tilde{r} angegeben werden. Dazu werden die Nebenbedingungen (6.127c) näher betrachtet. Diese sind durch die Gleichungen

$$\text{spur } \mathbf{Q}_{ij}\mathbf{X} = 1 \quad \text{für } 1 \leq i = j \leq d + 1, \quad (6.164a)$$

$$\text{spur } \mathbf{Q}_{ij}\mathbf{X} = 0 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq d + 1 \quad (6.164b)$$

mit den Matrizen \mathbf{Q}_{ij} gemäß (6.108b) gegeben. Allerdings sind diese in Relation (6.164b) nicht hermitesch, d.h. für $i \neq j$ gilt $\mathbf{Q}_{ij} \neq \mathbf{Q}_{ij}^H$. Somit ist Satz 44 nicht unmittelbar anwendbar. Man kann aber die Nebenbedingungen (6.164b) jeweils durch zwei Nebenbedingungen

$$\text{spur}(\mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}_{ij}^T)\mathbf{X} = 0 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq d + 1, \quad (6.165a)$$

$$\text{spur}(j\mathbf{Q}_{ij} - j\mathbf{Q}_{ij}^T)\mathbf{X} = 0 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq d + 1 \quad (6.165b)$$

ersetzen. Mit der Abkürzung

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{ij} := \begin{cases} \mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}_{ij}^T & i < j \\ \mathbf{Q}_{ii} & i = j \\ j\mathbf{Q}_{ji} - j\mathbf{Q}_{ji}^T & i > j \end{cases} \quad (6.166)$$

erhält man so insgesamt $(d + 1)^2$ Nebenbedingungen

$$\text{spur } \tilde{\mathbf{Q}}_{ij}\mathbf{X} = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq d + 1 \quad (6.167)$$

mit hermiteschen Matrizen $\tilde{\mathbf{Q}}_{ij} = \tilde{\mathbf{Q}}_{ij}^H$, welche zu den Nebenbedingungen (6.164) äquivalent sind. Für den Dimensionsverlust $d = 1$ lauten diese Matrizen beispielsweise

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{21} = j \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (6.168)$$

Damit erhält man

Lemma 45. *Es seien der Dimensionsverlust d , die Matrix \mathbf{S} und der Vektor \mathbf{u} wie in Proposition 40 gegeben. Dann erfüllt der Minimalrang \tilde{r} der Lösungsmatrix \mathbf{X} des semidefiniten Programms (6.127) die Ungleichung*

$$1 \leq \tilde{r} \leq \begin{cases} 1 & d = 0 \\ (d + 1)^2 - 2 & d \geq 1, \end{cases} \quad (6.169)$$

d.h. das Optimierungsproblem besitzt eine optimale Lösung \mathbf{X} mit dem Rang

$$\text{rang } \mathbf{X} = \tilde{r}. \quad (6.170)$$

Beweis. Da die Nullmatrix die Nebenbedingungen des semidefiniten Programms nicht erfüllt, gilt jedenfalls $\text{rang } \mathbf{X} \geq 1$ und damit $\tilde{r} \geq 1$. Die obere Schranke für \tilde{r} ist eine direkte Folge von Satz 44 und den vorangegangenen Überlegungen zur Anzahl der Nebenbedingungen des semidefiniten Programms. \square

Unter der Voraussetzung $n > 1$ und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass für den Dimensionsverlust $d \leq n - 1$ vorausgesetzt wird, ist \tilde{r} immer kleiner als die triviale Schranke

$$\bar{r} := n(d + 1) \geq \text{rang } \mathbf{X}, \quad (6.171)$$

welche sich aus der Größe der Matrix \mathbf{X} ergibt. Es gilt nämlich für $d \geq 1$

$$\tilde{r} \leq (d + 1)^2 - 2 \leq n(d + 1) - 2 < \bar{r}. \quad (6.172a)$$

und für $d = 0$

$$\tilde{r} = 1 < n = \bar{r}. \quad (6.172b)$$

Für den Dimensionsverlust $d = 1$ folgt aus Lemma 45 die Existenz einer optimalen Lösung mit dem Rang $\tilde{r} \leq 2$. Nur für den Dimensionsverlust $d = 0$ erlaubt es das Lemma auf $\tilde{r} = 1$ und damit auf die Exaktheit der semidefiniten Relaxation zu schließen:

Satz 46. *Es gilt allgemein*

$$\nu_0(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mu_0(\mathbf{A}, \mathbf{C}), \quad (6.173)$$

d.h. für den Dimensionsverlust $d = 0$ stimmen relaxiertes und nichtrelaxiertes Distanzmaß überein.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Lemma 45 und Korollar 41. \square

Es stellt sich natürlich die Frage, ob bzw. unter welchen Bedingungen $\mu_d = \nu_d$ auch für $d \geq 1$ gilt. Diese muss hier leider unbeantwortet bleiben; die Ergebnisse des folgenden Kapitels weisen jedoch darauf hin, dass in vielen Fällen Gleichheit gilt.

6.3.4. Konsistenz und Deutung des relaxierten Distanzmaßes

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob ν_d eine sinnvolle untere Schranke des Distanzmaßes μ_d darstellt, d.h. ob nur dann $\nu_d = 0$ gilt, wenn das betrachtete System nicht perspektivisch beobachtbar ist. Zu diesem Zweck wird zunächst eine anschauliche Interpretation der semidefiniten Relaxation im Kontext des ursprünglichen Optimierungsproblems gezeigt.

Lemma 47. *Es seien der Dimensionsverlust d , die Matrix \mathbf{S} und der Vektor \mathbf{u} wie in Proposition 40 gegeben. Weiterhin sei r eine ganze Zahl, welche die Ungleichung*

$$r \geq \begin{cases} 1 & d = 0 \\ (d+1)^2 - 2 & d \geq 1 \end{cases} \quad (6.174)$$

erfüllt. Dann gilt für die Distanz $\nu_{d,\mathbf{S}}$

$$\nu_{d,\mathbf{S}} = \min_{\mathbf{V}_i \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)}} \sqrt{J_{\text{psu},r}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}, \mathbf{u})} \quad (6.175a)$$

unter

$$\sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{V}_i = \mathbf{E}. \quad (6.175b)$$

Dabei ist die Funktion $J_{\text{psu},r}$ durch

$$J_{\text{psu},r}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^r (\|\mathbf{A}\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}_i\mathbf{u}\|_2^2) \quad (6.176)$$

gegeben.

Die Matrizen \mathbf{V}_i sind ferner genau dann eine optimale Lösung dieses Optimierungsproblems, wenn die positiv semidefinite Matrix

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^r \text{vec}(\mathbf{V}_i) \text{vec}(\mathbf{V}_i)^H \quad (6.177)$$

optimale Lösung des semidefiniten Programms (6.127) ist.

Beweis. Es wird die Optimierungsvariable des semidefiniten Programms (6.127), die semidefinite Matrix \mathbf{X} , betrachtet. Besitzt diese den Rang

$$r := \text{rang } \mathbf{X}, \quad (6.178)$$

so kann sie allgemein folgendermaßen zerlegt werden:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^r \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H. \quad (6.179)$$

Ordnet man jedem dieser Vektoren $\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^{n(d+1)}$ in Analogie zur Beziehung (6.109) eine Matrix $\mathbf{V}_i \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)}$ gemäß der Vorschrift

$$\mathbf{x}_i =: \text{vec}(\mathbf{V}_i) \quad (6.180)$$

zu, so kann man mittels Relation (6.111) die Zielfunktion (6.127a) folgendermaßen an-

schreiben:

$$\begin{aligned}
 \text{spur } \mathbf{M}(\mathbf{S})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}) \mathbf{X} &= \sum_{i=1}^r \text{spur } \mathbf{M}(\mathbf{S})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{M}(\mathbf{S}) \mathbf{x}_i\|_2^2 \\
 &= \sum_{i=1}^r J_{\text{psu}}(\mathbf{V}_i, \mathbf{S}, \mathbf{u}) \\
 &= J_{\text{psu},r}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}, \mathbf{u}).
 \end{aligned} \tag{6.181}$$

In analoger Weise erkennt man, dass die Nebenbedingungen (6.127c) gemäß Relation (6.115) äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \delta_{ij} = \text{spur } \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{X} &= \sum_{k=1}^r \mathbf{x}_k^H \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{x}_k \\
 &= \sum_{k=1}^r \mathbf{e}_i^T \mathbf{V}_k^H \mathbf{V}_k \mathbf{e}_j \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq d+1
 \end{aligned} \tag{6.182}$$

und damit zur Bedingung

$$\sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{V}_i = \mathbf{E} \tag{6.183}$$

sind. Da das semidefinite Programm gemäß Lemma 45 jedenfalls eine optimale Lösungsmatrix \mathbf{X} mit dem Rang

$$\text{rang } \mathbf{X} \leq \tilde{r} \leq r \tag{6.184}$$

besitzt, weisen die beiden Optimierungsprobleme (6.127) und (6.175) denselben optimalen Zielfunktionswert auf. \square

Unter Verwendung dieser Darstellung des Optimierungsproblem lässt sich zeigen, dass die relaxierte Distanz $\nu_{d,\mathbf{S}}$ und damit in Folge auch das relaxierte Distanzmaß ν_d nur bei Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit verschwindet!

Lemma 48. *Wenn für die relaxierte Distanz $\nu_{d,\mathbf{S}}$*

$$\nu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = 0 \tag{6.185}$$

gilt, dann ist das System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) für den Dimensionsverlust d über \mathbb{C} nicht perspektivisch beobachtbar.

Beweis. Bei verschwindendem $\nu_{d,\mathbf{S}}$ gibt es gemäß Lemma 47 Matrizen \mathbf{V}_i , sodass für die Zielfunktion des Optimierungsproblems (6.175)

$$J_{\text{psu},r}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^r (\|\mathbf{A}\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i\mathbf{S}\|_F^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}_i\mathbf{u}\|_2^2) = 0 \tag{6.186}$$

gilt, woraus

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i\mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \text{für } 1 \leq i \leq r \quad (6.187a)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{V}_i\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{für } 1 \leq i \leq r \quad (6.187b)$$

folgt. Aufgrund der Nebenbedingung (6.175b) gilt außerdem

$$\sum_{i=1}^r \mathbf{u}^H \mathbf{V}_i^H \mathbf{V}_i \mathbf{u} = \mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1, \quad (6.188)$$

und es ist somit möglich, Koeffizienten γ_i einer Linearkombination

$$\bar{\mathbf{V}} := \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{V}_i \quad (6.189)$$

so zu wählen, dass

$$\bar{\mathbf{V}}\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad (6.190)$$

ist. Gemäß (6.187a) gilt dann

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}\mathbf{S}, \quad (6.191a)$$

d.h. die Spalten von $\bar{\mathbf{V}}$ spannen einen \mathbf{A} -invarianten Unterraum mit Dimension kleiner oder gleich $d + 1$ auf¹⁷. In diesem Unterraum liegt der von null verschiedene Vektor $\mathbf{w} := \bar{\mathbf{V}}\mathbf{u}$, für den gemäß (6.187b)

$$\mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (6.191b)$$

gilt. Aus Satz 8 folgt damit, dass das System nicht perspektivisch beobachtbar (bzw. für $\text{rang } \bar{\mathbf{V}} = 1$ nicht beobachtbar) ist. \square

Damit erhält man die folgende zentrale Aussage: die nichtnegative Zahl ν_d stellt ein konsistentes Maß für die perspektivische Beobachtbarkeit dar, was deren Bezeichnung als *relaxiertes Distanzmaß* rechtfertigt!

¹⁷Die Matrix $\bar{\mathbf{V}}$ ist jedenfalls ungleich null, aber nicht notwendigerweise spaltenregulär. So erfüllen z.B. die Matrizen

$$\mathbf{V}_1 = [\mathbf{v} \quad \mathbf{v}] \quad \mathbf{V}_2 = [\mathbf{v} \quad -\mathbf{v}] \quad \text{mit } \mathbf{v}^H \mathbf{v} = \frac{1}{2}$$

zwar die Nebenbedingung (6.175b), aber für beliebige Koeffizienten γ_1, γ_2 hat

$$\bar{\mathbf{V}} = [(\gamma_1 + \gamma_2)\mathbf{v} \quad (\gamma_1 - \gamma_2)\mathbf{v}]$$

höchstens Rang eins.

Satz 49 (Relaxiertes Distanzmaß). *Für gegebenen Dimensionsverlust d erfülle die ganze Zahl r die Ungleichung (6.174). Für das relaxierte Distanzmaß ν_d gilt dann*

$$\nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\mathbf{V}_i \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)}} \sqrt{J_{\text{psu},r}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}, \mathbf{u})} \quad (6.192a)$$

unter

$$\sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{V}_i = \mathbf{E} \quad (6.192b)$$

mit der Funktion $J_{\text{psu},r}$ aus Relation (6.176), und es stellt ν_d ferner eine konsistente untere Schranke für das Distanzmaß μ_d dar. D.h. es ist die Ungleichung

$$0 \leq \nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \leq \mu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \quad (6.193)$$

erfüllt, wobei genau dann

$$0 = \nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \quad (6.194)$$

gilt, wenn das System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) für den Dimensionsverlust d über \mathbb{C} nicht perspektivisch beobachtbar ist.

Beweis. Das Optimierungsproblem ergibt sich durch Kombination der Relationen (6.138) und (6.127); die erste Ungleichung wird bereits in Proposition 42 gezeigt. Ist das System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) nicht perspektivisch beobachtbar für den Dimensionsverlust d , so verschwindet μ_d und es folgt unmittelbar

$$\nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = 0. \quad (6.195)$$

Umgekehrt folgt aus

$$\nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \nu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = 0 \quad (6.196)$$

die Existenz einer Matrix \mathbf{S} , sodass

$$\nu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = 0 \quad (6.197)$$

gilt. Dann aber ist das System gemäß Lemma 48 nicht perspektivisch beobachtbar. \square

Man kann außerdem einen weiteren interessanten Zusammenhang zwischen relaxiertem und nichtrelaxiertem Distanzmaß angeben:

Satz 50 (Zusammenhang von relaxiertem und nichtrelaxiertem Distanzmaß). *Es sei r eine ganze Zahl, welche die Ungleichung (6.174), d.h.*

$$r \geq \begin{cases} 1 & d = 0 \\ (d+1)^2 - 2 & d \geq 1 \end{cases} \quad (6.198)$$

erfüllt. Das relaxierte Distanzmaß ν_d des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{C}) hängt mit dem nichtrelaxierten Distanzmaß über die Beziehung

$$\nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mu_d(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{C}}), \quad (6.199)$$

zusammen, wobei die Matrizen $\overline{\mathbf{A}}$ bzw. $\overline{\mathbf{C}}$ durch $rn \times rn$ bzw. $rm \times rn$ Blockdiagonalmatrizen der Form

$$\overline{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A} \end{bmatrix}}_{r \text{ Blöcke}}, \quad \overline{\mathbf{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{C} \end{bmatrix}}_{r \text{ Blöcke}} \quad (6.200a)$$

gegeben sind, d.h. auf der Diagonale dieser Matrizen stehen jeweils r Kopien der Matrizen \mathbf{A} bzw. \mathbf{C} .

Beweis. Es wird das Optimierungsproblem (6.175) aus Lemma 47 für einen beliebigen Einheitsvektor \mathbf{u} betrachtet. Die dort als Optimierungsvariablen auftretenden Matrizen $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r$ werden in einer Matrix

$$\overline{\mathbf{V}} := \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_r \end{bmatrix} \quad (6.201)$$

zusammengefasst. Die Orthonormalität der Matrix $\overline{\mathbf{V}}$ ist dann äquivalent zur Nebenbedingung (6.175b)

$$\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{V}_i = \mathbf{E}. \quad (6.202)$$

Ferner kann man die Zielfunktion des Optimierungsproblems (6.175) in der Form

$$\begin{aligned} J_{\text{psu},r}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}, \mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^r (\|\mathbf{A}\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}_i\mathbf{u}\|_2^2) \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1\mathbf{S} \\ \vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{V}_r - \mathbf{V}_r\mathbf{S} \end{bmatrix} \right\|_{\text{F}}^2 + \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{V}_1\mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{V}_r\mathbf{u} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \|\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{V}}\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{u}\|_2^2 \end{aligned} \quad (6.203)$$

mit den Matrizen $\overline{\mathbf{A}}$ und $\overline{\mathbf{C}}$ aus Relation (6.200) darstellen. Unter Berücksichtigung der

Definition (6.138) von ν_d gilt somit

$$\nu_d^2(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\bar{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{rn \times (d+1)} \\ \bar{\mathbf{V}}^H \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{E}}} \left(\|\bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}} \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{V}} \mathbf{u}\|_2^2 \right), \quad (6.204)$$

woraus mit Satz 27 unmittelbar die behauptete Relation (6.199) folgt. \square

Dieser Satz erlaubt eine anschauliche Deutung. Dazu ist in Abbildung 6.2 ein Strukturbild des Systems $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}})$ dargestellt; daran erkennt man, dass das relaxierte Distanzmaß des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{C}) dem nichtrelaxierten Distanzmaß der Nebeneinanderschaltung von r Kopien des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{C}) entspricht! Für diese Nebeneinanderschaltung hat die Störung die Struktur

$$\bar{\delta \mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{A}_{11} & \dots & \delta \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta \mathbf{A}_{r1} & \dots & \delta \mathbf{A}_{rr} \end{bmatrix}, \quad \bar{\delta \mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{C}_{11} & \dots & \delta \mathbf{C}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta \mathbf{C}_{r1} & \dots & \delta \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix}. \quad (6.205)$$

Der Unterschied zum klassischen Distanzmaß ergibt sich aus der Tatsache, dass damit nicht nur eine Störung sondern auch eine Verkopplung der einzelnen Teilsysteme möglich ist. Dies ist in Abbildung 6.3 beispielhaft für den Dimensionsverlust $d = 1$ (für diesen kann $r = 2$ gewählt werden) dargestellt.

Mitunter ist das Minimum der Funktion $J_{\text{psu},r}$ bezüglich der Matrix \mathbf{S} bei gegebenen Matrizen $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r$ interessant. Für dieses lässt sich anhand der gezeigten Deutung des relaxierten Distanzmaßes unmittelbar eine analytische Beziehung angeben.

Korollar 51. *Es seien $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r$ Matrizen, welche die Nebenbedingung (6.175b), d.h.*

$$\sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{V}_i = \mathbf{E}, \quad (6.206)$$

erfüllen. Dann nimmt die Funktion $J_{\text{psu},r}$ aus (6.176) das Minimum bezüglich \mathbf{S} für

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{A} \mathbf{V}_i \quad (6.207)$$

an.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Darstellung der Funktion $J_{\text{psu},r}$ in der Form

$$J_{\text{psu},r} = \|\bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}} \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{V}} \mathbf{u}\|_2^2 \quad (6.208)$$

mit $\bar{\mathbf{V}}$ aus Relation (6.201). Gemäß Satz 27 nimmt diese Funktion unter der Vorausset-

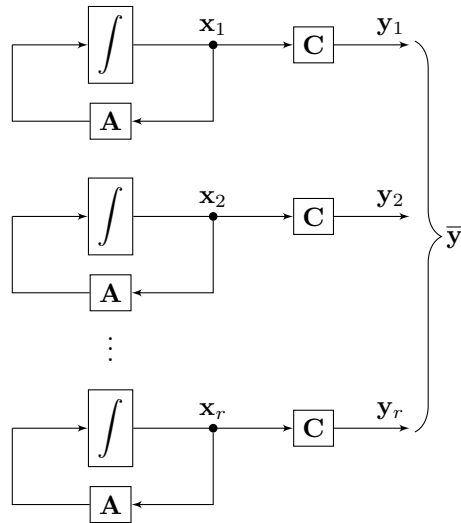


Abbildung 6.2.: Nebeneinanderschaltung von r Kopien des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{C}) , mit dem Zustand $\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}_1^T \ \dots \ \mathbf{x}_r^T]^T$ und dem Ausgang $\bar{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}_1^T \ \dots \ \mathbf{y}_r^T]^T$

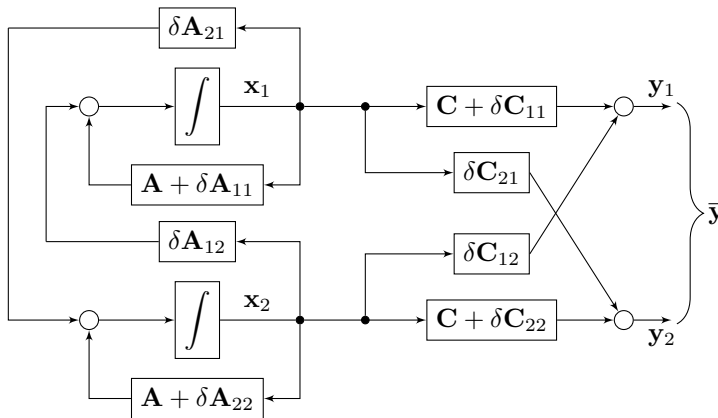


Abbildung 6.3.: Durch relaxierte Störung $(\delta \bar{\mathbf{A}}, \delta \bar{\mathbf{C}})$ mögliche Störungen und Verkopplungen zweier Kopien des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{C})

zung

$$\bar{\mathbf{V}}^H \bar{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{V}_i = \mathbf{E} \quad (6.209)$$

das Minimum bezüglich \mathbf{S} für

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{V}}^H \mathbf{A} \bar{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{A} \mathbf{V}_i \quad (6.210)$$

an. □

Analog zu den Betrachtungen in Proposition 29 kann man die Zielfunktion außerdem so anschreiben, dass das Minimum bezüglich \mathbf{S} , d.h. Relation (6.207), direkt ersichtlich ist.

Proposition 52. Für beliebige Matrizen $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}$ und Vektor \mathbf{u} geeigneter Größe lässt sich die Zielfunktion (6.176) in der Form

$$\begin{aligned} J_{\text{psu},r}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}, \mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^r (\|\mathbf{A} \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C} \mathbf{V}_i \mathbf{u}\|_2^2) \\ &= \sum_{i=1}^r (\|\mathbf{A} \mathbf{V}_i\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C} \mathbf{V}_i \mathbf{u}\|_2^2) - \left\| \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{A} \mathbf{V}_i \right\|_{\text{F}}^2 \\ &\quad + \left\| \mathbf{S} - \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{A} \mathbf{V}_i \right\|_{\text{F}}^2 - \|\mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \sum_{i=1}^r \|\mathbf{V}_i \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 \end{aligned} \quad (6.211)$$

darstellen. Erfüllen die Matrizen $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r$ die Nebenbedingung (6.175b)

$$\sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{V}_i = \mathbf{E}, \quad (6.212)$$

so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\begin{aligned} J_{\text{psu},r}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}, \mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^r (\|\mathbf{A} \mathbf{V}_i\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C} \mathbf{V}_i \mathbf{u}\|_2^2) - \left\| \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{A} \mathbf{V}_i \right\|_{\text{F}}^2 \\ &\quad + \left\| \mathbf{S} - \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{A} \mathbf{V}_i \right\|_{\text{F}}^2. \end{aligned} \quad (6.213)$$

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar durch Umformen von Relation (6.203) unter Verwendung von Proposition 29. □

6.3.5. Beispiele

Die Zusammenhänge werden nun anhand zweier Beispiele demonstriert.

Beispiel 23. Es wird für den Dimensionsverlust $d = 1$ das System mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\alpha & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.214)$$

und dem reellen Parameter α betrachtet. Für $\alpha = 0$ ist dieses System nicht perspektivisch beobachtbar (siehe Beispiel 4). Anhand von Korollar 23 ist außerdem ersichtlich, dass sich bei Kompensation des oberen rechten Eintrags der Matrix \mathbf{A} , d.h. für die Störung

$$\delta\mathbf{A} = -\alpha\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^T, \quad \delta\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (6.215)$$

ebenso ein nicht perspektivisch beobachtbares System ergibt. Distanzmaß μ_1 und relaxiertes Distanzmaß ν_1 erfüllen somit die Ungleichung

$$\nu_1 \leq \mu_1 \leq |\alpha|. \quad (6.216)$$

Im Weiteren wird obiges System zunächst für $\alpha = -2$ betrachtet, der Vektor \mathbf{u} wird mit $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = [0 \ 1]^T$ festgelegt. Wählt man für die Matrix \mathbf{S} den Wert

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (6.217)$$

so erhält man durch Lösung des semidefiniten Programms (6.127) für die relaxierte Distanz $\nu_{1,\mathbf{S}}$ den Wert

$$\nu_{1,\mathbf{S}} = 1. \quad (6.218)$$

Die zugehörige Lösungsmatrix ist durch

$$\mathbf{X} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (6.219)$$

gegeben und hat den Rang zwei. Daraus erhält man anhand der (nicht eindeutigen) Zerlegung (6.179) mit

$$\mathbf{x}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (6.220a)$$

$$\mathbf{x}_2 = \left[0 \ 0 \ 0 \ \frac{4}{\sqrt{21}} \ \frac{1}{\sqrt{21}} \ \frac{2}{\sqrt{21}} \right]^T \quad (6.220b)$$

eine Lösung des Optimierungsproblems (6.175) aus Lemma 47:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.221)$$

Diese ist kein lokales Minimum des Optimierungsproblems für das relaxierte Distanzmaß, insbesondere ist für die erhaltenen Matrizen \mathbf{V}_1 und \mathbf{V}_2 die Zielfunktion $J_{\text{psu},r}$ bezüglich \mathbf{S} nicht minimal. Gemäß Korollar 51 müsste dazu nämlich

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_1^H \mathbf{A} \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2^H \mathbf{A} \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{40}{21} \end{bmatrix} \quad (6.222)$$

gelten.

Tatsächlich kann man zeigen, dass bei bei Vorgabe der Matrix \mathbf{S} in Form einer Diagonalmatrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad (6.223)$$

mit den (ggf. auch komplexen) Zahlen s_1 und s_2 die Lösung des Optimierungsproblems (6.175) für $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$ durch¹⁸

$$\nu_{1,\mathbf{S}} = \sqrt{\sigma_{\min}^2(\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) + \sigma_{\min}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s_2 \mathbf{E} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}} \quad (6.224)$$

gegeben ist. In diesem Fall kann man nämlich die Summanden der Zielfunktion (6.176) bei Partitionierung der Matrizen $\mathbf{V}_i = [\mathbf{v}_{i,1} \quad \mathbf{v}_{i,2}]$ für $i = 1, 2$ in der Form

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i \mathbf{S}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C} \mathbf{V}_i \mathbf{e}_2\|_2^2 &= \|(\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) \mathbf{v}_{i,1}\|_2^2 + \|(\mathbf{A} - s_2 \mathbf{E}) \mathbf{v}_{i,2}\|_2^2 + \|\mathbf{C} \mathbf{v}_{i,2}\|_{\text{F}}^2 \\ &\geq \|\mathbf{v}_{i,1}\|_2^2 \sigma_{\min}^2(\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) + \|\mathbf{v}_{i,2}\|_2^2 \sigma_{\min}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s_2 \mathbf{E} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.225)$$

anschreiben. Weiterhin gilt gemäß der Nebenbedingung (6.175b)

$$\sum_{i=1}^r \|\mathbf{v}_{i,j}\|_2 = \sum_{i=1}^r \mathbf{v}_{i,j}^H \mathbf{v}_{i,j} = 1 \quad \text{für } j = 1, 2, \quad (6.226)$$

woraus folgt, dass die rechte Seite von Relation (6.224) eine untere Schranke für das Quadrat der relaxierten Distanz $\nu_{1,\mathbf{S}}$ darstellt. Bezeichnen die Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 die jeweiligen Singulärvektoren zu den beiden Singulärwerten aus (6.224), so wird diese

¹⁸Allgemein ergeben sich dieselben Zusammenhänge, wenn \mathbf{S} hermitesch, \mathbf{u} ein Eigenvektor und s_1, s_2 die Eigenwerte von \mathbf{S} sind.

untere Schranke für die Matrizen

$$\mathbf{V}_1 = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{0}], \quad \mathbf{V}_2 = [\mathbf{0} \quad \mathbf{v}_2] \quad (6.227)$$

angenommen. Die zugehörige Lösungsmatrix \mathbf{X} des semidefiniten Programms hat somit in diesem Fall im Allgemeinen den Rang zwei¹⁹. \triangle

Beispiel 24. Es wird das System (6.214) aus dem vorigen Beispiel für den Parameterwert

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (6.228)$$

untersucht. Für \mathbf{S} wird eine Matrix betrachtet, welche sich aus der orthonormalen Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.229)$$

gemäß

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-9}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \quad (6.230)$$

ergibt²⁰. Die Lösung des Optimierungsproblems (6.175) hat den Rang zwei und ist durch die Matrizen^{21,22}

$$\mathbf{V}_1 \approx \begin{bmatrix} -0,0197 & 0,4660 \\ -0,5185 & 0,6174 \\ -0,2295 & 0,3764 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 \approx \begin{bmatrix} 0,3544 & 0,1782 \\ 0,6784 & 0,4096 \\ 0,3038 & 0,2457 \end{bmatrix} \quad (6.231)$$

gegeben. Der zugehörige Zielfunktionswert liefert eine untere Schranke²³ für die Distanz $\mu_{1,\mathbf{S}}$:

$$\nu_{1,\mathbf{S}} \approx 1,0817 \leq \mu_{1,\mathbf{S}}. \quad (6.232)$$

Dass dagegen $\nu_{1,\mathbf{S}}$ keine untere Schranke für das Distanzmaß μ_1 darstellt, erkennt man

¹⁹Nur wenn (zufälligerweise) $\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_2 = 0$ gilt, wird das Minimum auch für eine Matrix \mathbf{X} mit Rang eins bzw. für $\mathbf{V}_1 = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$ angenommen.

²⁰Die Umkehrung dieser Rechenvorschrift, d.h. die Ermittlung einer Matrix \mathbf{V} , welche bei gegebener Matrix \mathbf{S} die Gleichungen $\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{S}$ und $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}$ erfüllt, stellt im Allgemeinen ein sehr schwieriges Problem dar. Eine Lösung dieses Problems ist nur für $d = 0$, d.h. für das Problem der Bestimmung eines Einheitsvektors \mathbf{v} , sodass $\mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v}$ einen gegebenen Wert s aus dem Wertebereich von \mathbf{A} annimmt, bekannt [2, 3].

²¹Zur Lösung des semidefiniten Programms wurden die Programmpakete YALMIP [16] (Version 02-Oct-2013) und SEDUMI [26] (Version 1.3) sowie MATLAB (Version 8.2.0.701 R2013b) eingesetzt.

²²Die numerische Bestimmung des Ranges sowie die Ermittlung der Zerlegung erfolgten auf dem Wege einer Singulärwertzerlegung der Lösungsmatrix \mathbf{X} des semidefiniten Programms.

²³Mit dem im folgenden Kapitel 7 beschriebenen numerischen Gradientenverfahren wurde als bestes lokales Minimum des Optimierungsproblems für die Distanz $\mu_{1,\mathbf{S}}$ der Wert 1,16 erhalten.

anhand der Ungleichung (6.216)

$$\mu_1 \leq |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} < \nu_{1,\mathbf{S}}. \quad (6.233)$$

Mitunter ist die semidefinite Relaxation exakt, d.h. der Rang der Lösungsmatrix ist eins und es gilt $\nu_{d,\mathbf{S}} = \mu_{d,\mathbf{S}}$. Wählt man z.B. für die Matrix \mathbf{S} unter Verwendung der orthonormalen Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.234)$$

den Wert

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad (6.235)$$

so erhält man eine Lösungsmatrix \mathbf{X} mit dem Rang eins und die Lösung des relaxierten Optimierungsproblems lautet

$$\mathbf{V}_1 \approx \begin{bmatrix} 0,9058 & 0,0163 \\ -0,4010 & -0,2893 \\ -0,1367 & 0,9571 \end{bmatrix}. \quad (6.236)$$

Aus dem zugehörigen Zielfunktionswert erhält man die relaxierte Distanz $\nu_{1,\mathbf{S}}$, welche gemäß Korollar 41 mit der *nichtrelaxierten* Distanz $\mu_{1,\mathbf{S}}$ übereinstimmt:

$$\mu_{1,\mathbf{S}} = \nu_{1,\mathbf{S}} \approx 0,6338. \quad (6.237)$$

Dieser Wert ist eine *obere* Schranke für das Distanzmaß μ_1 . △

6.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden einige Modifikationen des Distanzmaßes diskutiert: zwei mögliche Normierungen des Distanzmaßes und das relaxierte Distanzmaß. Erstere tragen dem Umstand Rechnung, dass bei Modellierung der Projektion eines Punktes die Skalierung der Ausgangsmatrix beliebig gewählt werden kann. Letzteres dagegen ist durch eine Vereinfachung der Lösbarkeit des Optimierungsproblems motiviert.

Es wurde zunächst das normierte Distanzmaß

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) &= \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{G}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{G} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{F}} \mid (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C}[\mathbf{E} + \delta\mathbf{G}]) \in \overline{\mathcal{P}}_d \right\} \\ &= \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{\|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\mathbb{F}}^2 + \|\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_{\mathbb{F}}^2} \end{aligned} \quad (6.238)$$

eingeführt, welches nur Werte zwischen null und eins annimmt. Dieses ist jedoch auch

invariant gegenüber der Skalierung einzelner Zeilen von \mathbf{C} . Als Abhilfe wurde alternativ dazu das bezüglich der letzten Zeile der Ausgangsmatrix normierte Distanzmaß

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) &= \min_{\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{C}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \delta\mathbf{A} \\ \delta\mathbf{C} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{F}} \mid (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C} + \|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2 \delta\mathbf{C}) \in \overline{\mathcal{P}}_d \right\} \\ &= \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}}} \sqrt{\|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_{\mathbb{F}}^2}{\|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2^2}} \end{aligned} \quad (6.239)$$

vorgeschlagen. Dieses besitzt zwar keine von der Ausgangsmatrix unabhängigen Schranken, ist aber ebenso wie $\tilde{\mu}_d$ invariant gegenüber der Multiplikation von \mathbf{C} mit einer skalaren (von null verschiedenen) Konstanten.

Weiterhin wurde für eine spezielle Klasse von Systemen, welche die Bewegung eines Punktes in homogenen Koordinaten beschreiben, der Zusammenhang zwischen dem Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit und dem Auftreten von nicht rekonstruierbaren Punkten untersucht. Es wurde gezeigt, dass solche Punkte bei Vorliegen eines nicht perspektivisch beobachtbaren Systems erst ab einem bestimmten, mitunter auch unendlich großen Mindestabstand vom Ursprung auftreten, d.h. dass ihre Norm nach unten beschränkt ist oder mitunter auch überhaupt keine derartigen Punkte existieren. Eine obere Schranke für diese Mindestnorm erhält man aus einer orthonormalen Matrix \mathbf{V} , welche die Voraussetzungen von Satz 8 erfüllt, zu

$$\bar{\rho}(\mathbf{V}) = \frac{\sqrt{1 - \|\mathbf{e}_n^T \mathbf{V}\|_2^2}}{\|\mathbf{e}_n^T \mathbf{V}\|_2}. \quad (6.240)$$

Das Optimierungsproblem für das bezüglich der letzten Zeile normierte Distanzmaß wurde um eine Nebenbedingung für diese Schranke ergänzt. Das so erhaltene Maß $\hat{\eta}_R$ bei Beschränkung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte erhält man durch Lösung des Optimierungsproblems

$$\hat{\eta}_R(\mathbf{A}, \mathbf{C}) := \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}} \min_{\substack{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times 2} \\ \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E} \\ \mathbf{e}_n^T \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{e}_n \geq \frac{1}{1+R^2}}} \sqrt{\|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{S}\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_{\mathbb{F}}^2}{\|\mathbf{e}_m^T \mathbf{C}\|_2^2}}. \quad (6.241)$$

Zur Vereinfachung der Lösung des Optimierungsproblems wurde eine Relaxation der Gleichungsnebenbedingungen des Optimierungsproblems für das Distanzmaß diskutiert. Das so erhaltene *relaxierte Distanzmaß* ν_d stellt eine konsistente untere Schranke für das Distanzmaß μ_d dar. Insbesondere ist es für ein gegebenes System gleich dem Distanzmaß einer Nebeneinanderschaltung hinreichend vieler Kopien des Systems. Ein wesentlicher Vorteil des Optimierungsproblems für ν_d ist, dass ein Teil davon ein konvexes semidefinites Programm darstellt, welches effizient gelöst werden kann.

Kapitel 7.

Lösung des Optimierungsproblems für das Distanzmaß

In diesem Kapitel werden Ansätze zur Lösung der Optimierungsprobleme für das Distanzmaß bzw. das relaxierte Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit über \mathbb{C} diskutiert¹. Dazu werden zunächst Möglichkeiten zur sinnvollen Wahl der bei allen vorgestellten Verfahren notwendigen Startwerte gezeigt. Es wird dann die Anwendung eines Gradientenverfahrens auf das Optimierungsproblem des Distanzmaßes aus Satz 24

$$\mu_d^2(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)}} \|(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{A}\mathbf{V}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2 \quad (7.1a)$$

$$\begin{aligned} &\text{unter} \\ &\mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{E} \end{aligned} \quad (7.1b)$$

demonstriert. Anschließend wird das relaxierte Distanzmaß ν_d betrachtet, welches durch die Lösung des Optimierungsproblems

$$\nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{(d+1) \times (d+1)}} \nu_{d,\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \quad (7.2)$$

gegeben ist. Es wird ein numerisches Verfahren zu dessen Ermittlung vorgeschlagen. Dabei wird die Tatsache ausgenutzt, dass sich das Quadrat der relaxierten Distanz $\nu_{d,\mathbf{S}}$ als Lösung des semidefiniten Programms (6.127)

$$\nu_{d,\mathbf{S}}^2(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n(d+1) \times n(d+1)}} \text{spur } \mathbf{M}(\mathbf{S})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}) \mathbf{X} \quad (7.3a)$$

unter

$$\mathbf{X} \geq 0 \quad (7.3b)$$

$$\text{spur } \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{X} = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq d+1 \quad (7.3c)$$

ergibt.

Die Verfahren liefern abhängig vom Startwert im Allgemeinen nur lokale Minima der jeweiligen Optimierungsprobleme, eine (gesicherte) Bestimmung des globalen Minimums

¹Es wird ausschließlich die perspektivische Beobachtbarkeit über \mathbb{C} bei komplexwertigen Störungen betrachtet. Auf die Berücksichtigung von Beschränkungen der Störung oder der Eigenwerte – wie in Abschnitt 5.7 untersucht – wird nicht eingegangen.

ist damit in der Regel nicht möglich. Es zeigt sich aber, dass man mit beiden Verfahren in vielen Fällen *dasselbe* Ergebnis erhält. Dies legt nahe, dass die Werte von Distanzmaß und relaxiertem Distanzmaß oft übereinstimmen.

7.1. Wahl sinnvoller Startwerte

Da die Optimierungsprobleme (7.1) bzw. (7.2) nicht konvex sind und somit in der Regel mehrere lokale Minima aufweisen, ist bei deren numerischer Lösung die Wahl der Startwerte $\mathbf{V}^{(0)}$, für die Matrix \mathbf{V} , bzw. $\mathbf{S}^{(0)}$, für die Matrix \mathbf{S} , von entscheidender Bedeutung. In diesem Abschnitt werden zwei Möglichkeiten zur Wahl solcher Startwerte vorgestellt. Dabei wird nur die Ermittlung eines Startwertes für die Matrix \mathbf{V} diskutiert. Einem solchen kann mittels Relation (5.53) immer ein entsprechender Startwert

$$\mathbf{S}^{(0)} = \mathbf{V}^{(0)H} \mathbf{A} \mathbf{V}^{(0)} \quad (7.4)$$

für die Matrix \mathbf{S} zugeordnet werden.

7.1.1. Startwerte anhand invarianter Unterräume der Systemmatrix

Eine *mögliche* Wahl ergibt sich aus den folgenden Überlegungen. Es wird zunächst ein nicht perspektivisch beobachtbares System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) betrachtet. In diesem Fall kann die Lösung des Optimierungsproblems (7.1) anhand von Satz 8 sofort angegeben werden: Der minimale Zielfunktionswert ist null und wird für eine orthonormale Matrix \mathbf{V} angenommen, deren Spalten einen \mathbf{A} -invarianten Unterraum aufspannen. Sind λ_i diejenigen Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} , für welche die PBH-Rangbedingung (3.1) verletzt ist, so erfüllt dieser Unterraum

$$\langle \mathbf{V} \rangle \subseteq \ker \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}), \quad (7.5)$$

d.h. er ist in dem Nullraum des in der PBH-Matrix auftretenden Matrizenprodukts enthalten.

Dies motiviert dazu, Startwerte $\mathbf{V}^{(0)}$ so zu wählen, dass die Spalten jeweils einen \mathbf{A} -invarianten Unterraum aufspannen und zugleich die Zielfunktion möglichst klein wird. Für eine Auswahl $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$ aus den Eigenwerten der Matrix \mathbf{A} wird dazu zunächst ein Vektor

$$\mathbf{w} \in \ker \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \quad (7.6)$$

ausgewählt, d.h. eine Linearkombination der Eigen- und Hauptvektoren zu den Eigen-

werten λ_i , sodass die Matrix

$$\bar{\mathbf{V}} = [\mathbf{w} \quad \mathbf{A}\mathbf{w} \quad \dots \quad \mathbf{A}^d\mathbf{w}] \quad (7.7)$$

spaltenregulär ist². Bildet man daraus die Matrix

$$\tilde{\mathbf{V}} := \bar{\mathbf{V}}(\bar{\mathbf{V}}^H\bar{\mathbf{V}})^{-\frac{1}{2}}, \quad (7.8)$$

so gilt zusätzlich $\tilde{\mathbf{V}}^H\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{E}$. Damit spannen die orthonormalen Spalten von $\tilde{\mathbf{V}}$ einen \mathbf{A} -invarianten Unterraum auf, welcher

$$\langle \tilde{\mathbf{V}} \rangle \subseteq \ker \prod_{i=1}^{d+1} (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \quad (7.9)$$

erfüllt³.

Der Kandidat $\tilde{\mathbf{V}}$ ist jedoch nur bis auf Multiplikation mit einer unitären Matrix von rechts eindeutig, d.h. für jede beliebige unitäre Matrix \mathbf{Q} erfüllt auch die Matrix $\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{Q}$ diese Bedingungen. Sinnvollerweise wird die Matrix \mathbf{Q} so gewählt, dass der zugehörige Zielfunktionswert $J_{\text{pu}}(\tilde{\mathbf{V}}^{(0)}\mathbf{Q})$ möglichst klein, gemäß Relation (5.35) aus Proposition 25 also gleich $J_{\text{p}\sigma}(\tilde{\mathbf{V}}^{(0)})$ wird. Dementsprechend bestimmt man die unitäre Matrix \mathbf{Q} so, dass

$$\left\| \mathbf{C}\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{Q}\mathbf{u} \right\|_{\mathbb{F}}^2 = \sigma_{\min}^2(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{V}}) \quad (7.10)$$

gilt (dazu kann z.B. eine Singulärwertzerlegung der Matrix $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{V}}$ eingesetzt werden) und wählt somit als Startwert⁴

$$\mathbf{V}^{(0)} = \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{Q}. \quad (7.11)$$

Ist das System nicht perspektivisch beobachtbar, so erhält man für einen der so gewählten Startwerte bereits den Zielfunktionswert null. Andernfalls besteht (insbesondere für "nahezu" nicht perspektivisch beobachtbare Systeme) die Hoffnung, dass das globale Minimum des Optimierungsproblems "in der Nähe" eines dieser Startwerte liegt.

²Das ist genau dann der Fall, wenn $p(s) = \prod_{i=1}^{d+1} (s - \lambda_i)$ Minimalpolynom des Vektors \mathbf{w} ist.

³Man erkennt, dass sich auf diese Weise – vor allem für große Werte des Dimensionsverlustes d – eine nicht unbeträchtliche Anzahl möglicher Startwerte ergibt. Für eine Matrix \mathbf{A} mit paarweise verschiedenen Eigenwerten beträgt die Anzahl der Möglichkeiten zur Auswahl von $d+1$ der insgesamt n Eigenwerte nämlich

$$\binom{n}{d+1} = \frac{n!}{(d+1)!(n-d-1)!}.$$

Besitzt die Matrix \mathbf{A} mehrfache Eigenwerte, so kann außerdem der Fall eintreten, dass die Dimension der rechten Seite von Relation (7.9) größer als $d+1$ ist. In diesem Fall kommen sogar eine unendliche Anzahl \mathbf{A} -invarianter Unterräume als Kandidaten infrage.

⁴Im Allgemeinen ergibt sich auch der so bestimmte Startwert $\mathbf{V}^{(0)}$ nicht eindeutig aus der Matrix $\tilde{\mathbf{V}}$, da durch die Forderung (7.10) im Wesentlichen nur eine „Spalte“ der unitären $(d+1) \times (d+1)$ Matrix \mathbf{Q} festgelegt wird.

7.1.2. Erweiterung von Startwerten auf höhere Dimensionsverluste

Der Ansatz aus dem vorangegangenen Abschnitt lässt sich auch dazu verwenden, einen existierenden Startwert (oder auch eine Lösung) des Optimierungsproblems für den Dimensionsverlust p zu einem Startwert für den Dimensionsverlust $d > p$ zu erweitern. Besonders nützlich ist dies, wenn von dem Dimensionsverlust $p = 0$ ausgegangen wird: In diesem Fall entspricht die Lösung des Optimierungsproblems dem Distanzmaß der Beobachtbarkeit, zu dessen Ermittlung eine Reihe von numerischen Verfahren zur Verfügung steht. Davon erlaubt insbesondere z.B. der sogenannte *Trisection-Algorithmus* die Bestimmung des *globalen* Optimums [1, 20].

Die Vorgangsweise basiert auf Proposition 33, d.h. ein vorliegender Startwert oder eine vorliegende Lösung des Optimierungsproblems für den Dimensionsverlust p in Form der orthonormalen $(p + 1)$ -spaltigen Matrix \mathbf{V} wird so zu einem Startwert für den Dimensionsverlust d in Form einer $(d + 1)$ -spaltigen Matrix $\mathbf{V}^{(0)}$ erweitert, dass der Zielfunktionswert gleichbleibt. Dazu wird gemäß den Relationen (5.111) und (5.53) zunächst die Matrix

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - (\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^H \quad (7.12)$$

gebildet. Anschließend wird eine Matrix \mathbf{W} so bestimmt, dass für eine Auswahl von $d - p$ Eigenwerten $\gamma_1, \dots, \gamma_{d-p}$ der Matrix $\hat{\mathbf{A}}$ gilt, dass die Spalten von \mathbf{W} einen $\hat{\mathbf{A}}$ -invarianten Unterraum aufspannen und die Relationen

$$\langle \mathbf{W} \rangle \subseteq \ker \prod_{i=1}^{d+1} (\gamma_i \mathbf{E} - \mathbf{A}), \quad (7.13a)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{W}^H(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{W} \quad (7.13b)$$

erfüllt sind⁵. Dabei ist die Wahl der Eigenwerte γ_i in der Regel jedoch nicht mehr völlig frei, da sich die von den Spalten von \mathbf{W} und \mathbf{V} aufgespannten Unterräume entsprechend der Dimensionsgleichung (5.113) nicht überschneiden dürfen⁶. Aus den Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} wird dann gemäß Relation (5.114a) die Matrix

$$\tilde{\mathbf{V}} = [(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{W} \quad \mathbf{V}] \quad (7.14)$$

bestimmt. Aus dieser ergibt sich der Startwert $\mathbf{V}^{(0)}$ für den Dimensionsverlust d analog zum vorigen Abschnitt, d.h. mittels Relation (7.11) nach Bestimmung einer unitären Matrix \mathbf{Q} gemäß Relation (7.10).

⁵Die Vorgangsweise zur Ermittlung einer solchen Matrix ist dabei analog zu der aus dem vorangegangenen Abschnitt.

⁶Geht man davon aus, dass die Matrix $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ insgesamt n paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt, so stehen aus diesem Grund davon nur $n - p - 1$ zur Auswahl, sodass sich hier folgende Zahl möglicher Kombinationen ergibt:

$$\binom{n - p - 1}{d - p} = \frac{(n - p - 1)!}{(d - p)!(n - d - 1)!}$$

7.2. Numerische Ermittlung des Distanzmaßes

Es wird das Optimierungsproblem (7.1) für das Distanzmaß betrachtet. Eine wesentliche Schwierigkeit bei dessen Lösung stellt, neben der nichtlinearen Zielfunktion, die nicht-konvexe Gleichungsnebenbedingung (7.1b) dar. Durch diese wird die Matrix \mathbf{V} auf den Raum der orthonormalen $n \times (d+1)$ -Matrizen, die sogenannte *Stiefel-Mannigfaltigkeit*

$$\mathbb{S}_{d+1}(\mathbb{C}^n) := \{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)} \mid \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}\} \quad (7.15)$$

eingeschränkt⁷.

Die numerische Lösung von Optimierungsproblemen auf der Stiefel-Mannigfaltigkeit wurde bereits vielfach untersucht [6, 29, 31, 19]. Es existieren daher eine Vielzahl von iterativen numerischen Verfahren, die sich grundsätzlich für das vorliegende Problem eignen. Ein Hauptproblem ist dabei die Einhaltung der Nebenbedingung in jedem Iterationsschritt. Einige Algorithmen wenden gängige numerische Optimierungsverfahren ohne Berücksichtigung der Nebenbedingung an und führen in jedem Iterationsschritt eine Projektion der Optimierungsvariablen auf die Stiefel-Mannigfaltigkeit durch. Andere Verfahren lösen das Problem durch die (numerisch aufwendige) Berechnung von sogenannten *Geodäten* der Mannigfaltigkeit [6].

In [29] wird zur Einhaltung der Nebenbedingung die *Cayley-Transformation* genutzt⁸ und damit ein Gradientenverfahren realisiert. Dieses wird im Weiteren kurz erläutert. Anschließend wird seine Anwendung auf das Optimierungsproblem für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit (7.1) diskutiert.

7.2.1. Gradientenverfahren unter Verwendung der Cayley-Transformation

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Minimierung einer allgemeinen Zielfunktion $J(\mathbf{V})$ unter der Nebenbedingung

$$\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E}. \quad (7.16)$$

⁷Man kann auf $\mathbb{S}_{d+1}(\mathbb{C}^n)$ die Äquivalenzrelation

$$\mathbf{M} \sim \mathbf{N} \Leftrightarrow \langle \mathbf{M} \rangle = \langle \mathbf{N} \rangle \text{ für } \mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{S}_{d+1}(\mathbb{C}^n)$$

definieren. D.h. man identifiziert alle Matrizen miteinander, deren Spalten denselben Unterraum aufspannen. Die Menge der Äquivalenzklassen ist dann die *Grassmann-Mannigfaltigkeit* $\mathbb{G}_{d+1}(\mathbb{C}^n)$, die Menge aller $d+1$ -dimensionalen Untervektorräume des \mathbb{C}^n .

Alternativ zur hier betrachteten Minimierung der Zielfunktion $J_{\text{pu}}(\mathbf{V})$ über $\mathbb{S}_{d+1}(\mathbb{C}^n)$ kann das Optimierungsproblem (7.1) auch äquivalent als Minimierung der Zielfunktion $J_{\text{p}\sigma}(\mathbf{V})$ aus Relation (5.35) über $\mathbb{G}_{d+1}(\mathbb{C}^n)$ aufgefasst werden.

⁸Die *Cayley-Transformation* bildet eine schieferhermitesche Matrix $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gemäß

$$\mathbf{Q} := (\mathbf{E} + \mathbf{W})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{W}) = (\mathbf{E} - \mathbf{W})(\mathbf{E} + \mathbf{W})^{-1}$$

auf eine unitäre Matrix \mathbf{Q} ab, d.h. es gilt $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{E}$.

Zunächst bildet man eine schiefsymmetrische Matrix \mathbf{W} gemäß der Vorschrift

$$\mathbf{W} := \mathbf{G}\mathbf{V}^H - \mathbf{V}\mathbf{G}^H \quad (7.17)$$

aus dem Gradienten

$$\mathbf{G} = \nabla_{\mathbf{V}} J := \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Re}\{\mathbf{V}\}} + j \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Im}\{\mathbf{V}\}} \quad (7.18)$$

der Zielfunktion $J(\mathbf{V})$. Unter Verwendung der Cayley-Transformation definiert man damit die Matrix

$$\tilde{\mathbf{V}}(\tau) := (\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\mathbf{W})\mathbf{V}, \quad (7.19)$$

wobei τ ein positiver reeller Parameter ist. Diese Matrix $\tilde{\mathbf{V}}(\tau)$ erfüllt für jeden Wert des Parameters τ die Nebenbedingung (7.16). Ferner gilt⁹

$$\tilde{\mathbf{V}} \Big|_{\tau=0} = \mathbf{V}, \quad (7.20a)$$

und die Ableitung von $\tilde{\mathbf{V}}$ an der Stelle $\tau = 0$ lautet

$$\frac{d\tilde{\mathbf{V}}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = -\mathbf{W}\mathbf{V} = -\mathbf{G}\mathbf{V}^H\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{G}^H\mathbf{V}. \quad (7.20b)$$

Dies entspricht einer Projektion des negativen Gradienten $-\mathbf{G}$ in den Tangentialraum der Stiefel-Mannigfaltigkeit¹⁰.

Bei erfüllter Nebenbedingung (7.16) folgt damit für die Ableitung der Zielfunktion an der Stelle $\tau = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\tau} J(\tilde{\mathbf{V}}(\tau)) \right) \Big|_{\tau=0} &= \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{spur} (\nabla_{\mathbf{V}} J)^H \left(\frac{d\tilde{\mathbf{V}}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \right) \right\} \\ &= -\operatorname{Re} \left\{ \operatorname{spur} (\mathbf{G}^H \mathbf{G} - \mathbf{G}^H \mathbf{V} \mathbf{G}^H \mathbf{V}) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{spur} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \\ &= -\frac{1}{2} \|\mathbf{W}\|_{\mathbb{F}}^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Sofern \mathbf{W} nicht verschwindet (andernfalls ist \mathbf{V} ein stationärer Punkt des Optimierungs-

⁹Eine Funktion mit denselben Eigenschaften erhält man bei Verwendung der Matrix-Exponentialfunktion $\mathbf{e}^{-\mathbf{W}\tau}$ anstelle der Cayley-Transformation $(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\mathbf{W})$. Letztere lässt sich jedoch numerisch mit geringerem Aufwand auswerten.

¹⁰Besonders einsichtige Zusammenhänge ergeben sich, wenn $\mathbf{G}^H\mathbf{V}$ symmetrisch ist; in diesem Fall ist (für $\mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{E}$) die Ableitung eine Projektion von $-\mathbf{G}$ auf den Raum der zu \mathbf{V} orthogonalen Matrizen: $\frac{d\tilde{\mathbf{V}}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = -(\mathbf{E} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H)\mathbf{G}$.

problems) ist es naheliegend die *Schrittweite* τ so zu wählen, dass der Zielfunktionswert abnimmt. Eine Möglichkeit dies sicherzustellen besteht darin, ein (ggf. lokales) Minimum der Funktion $J(\tilde{\mathbf{V}}(\tau))$ zu bestimmen. D.h. man wählt

$$\tilde{\tau} := \arg \min_{\tau} J(\tilde{\mathbf{V}}(\tau)), \quad (7.22)$$

wobei man sich auch mit einem (im Zuge einer numerischen Optimierung bestimmbar) lokalen Minimum begnügt.

Diese Überlegungen legen folgende Vorgehensweise zur Minimierung der Zielfunktion ausgehend von einem Startwert $\mathbf{V}^{(0)}$ nahe: Im k -ten Iterationsschritt wird zunächst an der Stelle $\mathbf{V}^{(k)}$ der Gradient $\mathbf{G}^{(k)} = \nabla_{\mathbf{V}} J|_{\mathbf{V}=\mathbf{V}^{(k)}}$ ermittelt. Damit wird die Funktion $\tilde{\mathbf{V}}^{(k)}(\tau)$ gemäß Relation (7.19) gebildet und in Anlehnung an (7.22) die Schrittweite $\tilde{\tau}^{(k)}$ mittels eines numerischen Optimierungsverfahrens bestimmt. Schließlich wird für den folgenden Iterationsschritt $\mathbf{V}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{V}}^{(k)}(\tilde{\tau}^{(k)})$ berechnet. Diese Schritte wiederholt man, bis das Abbruchkriterium

$$J(\mathbf{V}^{(N-1)}) - J(\mathbf{V}^{(N)}) < \varepsilon_J \quad (7.23)$$

mit einer positiven Schranke ε_J erfüllt ist. Der Zielfunktionswert $J(\mathbf{V}^{(N)})$ dieses letzten N -ten Iterationsschrittes ist damit näherungsweise ein lokales Minimum des Optimierungsproblems.

7.2.2. Gradienten relevanter Zielfunktionen

Es wird nun der Gradient der Zielfunktion des Optimierungsproblems (7.1) ermittelt. Die Zielfunktion lässt sich gemäß Proposition 29 und Relation (5.53) bei erfüllter Nebenbedingung (7.1b) äquivalent in der Form

$$\begin{aligned} J_{\text{pu}}(\mathbf{V}, \mathbf{u}) &= \|\mathbf{A}\mathbf{V}\|_{\text{F}}^2 - \|\mathbf{V}^H \mathbf{A}\mathbf{V}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \text{spur}(\mathbf{V}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}^H \mathbf{A}^H \mathbf{V}\mathbf{V}^H \mathbf{A}\mathbf{V}) + \mathbf{u}^H \mathbf{V}^H \mathbf{C}^H \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (7.24)$$

darstellen. Man erhält damit den Gradienten¹¹

$$\nabla_{\mathbf{V}} J_{\text{pu}} = 2(\mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{A}^H \mathbf{V}\mathbf{V}^H \mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^H \mathbf{A}^H \mathbf{V} + \mathbf{C}^H \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{u}\mathbf{u}^H). \quad (7.25)$$

Das Gradientenverfahren ist prinzipiell auch auf das Optimierungsproblem (5.51) für die Distanz $\mu_{d,\mathbf{S}}$ anwendbar. Das kann z.B. dann sinnvoll sein, wenn, wie in Abschnitt 5.7.1 diskutiert, Beschränkungen für die Eigenwerte der Matrix \mathbf{S} vorliegen. In diesem Zusammenhang ist mitunter auch das Optimierungsproblem aus Proposition 30 relevant, bei welchem auch der Vektor \mathbf{u} eine Optimierungsvariable darstellt. Die Berücksichtigung der Nebenbedingung für \mathbf{u} kann dabei analog zu der Vorgehensweise für

¹¹Für Details zu den Rechenregeln für die Differentiation der Spur von Matrizen sei auf [23] verwiesen.

\mathbf{V} erfolgen; es werden dementsprechend die Gradienten der Zielfunktion

$$\begin{aligned} J_{\text{psu}}(\mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{u}) &= \|\mathbf{AV} - \mathbf{VS}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{CVu}\|_2^2 \\ &= \text{spur}(\mathbf{V}^H \mathbf{A}^H \mathbf{AV} - \mathbf{V}^H \mathbf{A}^H \mathbf{VS} - \mathbf{S}^H \mathbf{V}^H \mathbf{AV} + \mathbf{S}^H \mathbf{V}^H \mathbf{VS}) \\ &\quad + \mathbf{u}^H \mathbf{V}^H \mathbf{C}^H \mathbf{CVu} \end{aligned} \quad (7.26)$$

bezüglich \mathbf{V} und \mathbf{u} benötigt, für welche man

$$\nabla_{\mathbf{V}} J_{\text{psu}} = 2(\mathbf{A}^H \mathbf{AV} - \mathbf{A}^H \mathbf{VS} - \mathbf{AVS}^H + \mathbf{VSS}^H + \mathbf{C}^H \mathbf{CVu}\mathbf{u}^H), \quad (7.27a)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} J_{\text{psu}} = 2\mathbf{V}^H \mathbf{C}^H \mathbf{CVu}. \quad (7.27b)$$

erhält.

7.2.3. Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird das vorgestellte Gradientenverfahren in einem Beispiel auf das Optimierungsproblem (7.1) angewandt.

Beispiel 25. Es wird für den Dimensionsverlust $d = 1$ die perspektivische Beobachtbarkeit des Systems aus Beispiel 23 mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\alpha & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

und dem reellen Parameter α untersucht.

Das im vorigen Abschnitt gezeigte Verfahren wird verwendet, um (lokale) Minima des Problems (7.1) mit $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = [0 \ 1]^T$ zu ermitteln¹². Es wird das System zunächst für den Parameterwert $\alpha = -2$ betrachtet. Die Matrix \mathbf{A} besitzt in diesem Fall die Eigenwerte

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -1, \quad s_3 = -4. \quad (7.29)$$

Als Startwerte werden, wie in Abschnitt 7.1.1 diskutiert, Orthonormalbasen zweidimensionaler \mathbf{A} -invarianter Unterräume gewählt:

$$\mathbf{V}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{zu } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1; \quad (7.30a)$$

¹²Die Berechnungen wurden mit dem Programm MATLAB (Version 8.2.0.701 R2013b) durchgeführt.

$$\mathbf{V}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{zu } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4. \quad (7.30b)$$

Abbildung 7.1 stellt den Wert der Zielfunktion $J_{\text{pu}}(\mathbf{V}^{(k)})$ bei Anwendung des beschriebenen Gradientenverfahrens dar. Man erkennt, dass das Verfahren für beide Startwerte gegen ein lokales Minimum der Zielfunktion konvergiert, wobei sich für den zweiten Startwert ein kleinerer Zielfunktionswert ergibt. Die Wurzel aus diesem kleinsten gefundenen lokalen Minimum stellt somit eine obere Schranke für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit dar, d.h. für $\alpha = -2$ gilt

$$\mu_1 \leq \sqrt{6,74 \cdot 10^{-2}} \approx 0,26. \quad (7.31)$$

Abbildung 7.2 stellt den auf diese Weise jeweils erhaltenen besten Zielfunktionswert in Abhängigkeit von α dar. Ebenso dargestellt ist die direkt ablesbare Schranke für das Distanzmaß gemäß Relation (6.216). Man erkennt, dass der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit für $\alpha = 0$ korrekt angezeigt wird. \triangle

7.3. Numerische Ermittlung des relaxierten Distanzmaßes

In diesem Abschnitt wird ein iterativer Algorithmus zur numerischen Bestimmung des relaxierten Distanzmaßes ν_d vorgestellt. Dieses stellt im Allgemeinen nur eine untere Schranke für das Distanzmaß μ_d dar; dafür ist das zugehörige Optimierungsproblem (7.2) einfacher: Lediglich die Minimierung bezüglich der Matrix \mathbf{S} ist ein nichtkonvexes, nichtlineares Optimierungsproblem, während $\nu_{d,\mathbf{S}}$ bei gegebener Matrix \mathbf{S} durch Lösung eines konvexen semidefiniten Programms ermittelt werden kann.

Damit reduziert sich die Anzahl der Optimierungsvariablen, für die ein Startwert vorzugeben ist, von $n \cdot (d + 1)$ Einträgen der Matrix \mathbf{V} des Optimierungsproblems (7.1) auf $(d + 1)^2$ Einträge der Matrix \mathbf{S} . Die Anzahl hängt damit insbesondere nicht mehr von der Systemordnung n ab. Es hat sich weiterhin gezeigt, dass auf diese Weise in sehr vielen Fällen auch die Bestimmung von (lokalen) Minima des Optimierungsproblems für das nichtrelaxierte Distanzmaß (7.1) gelingt!

7.3.1. Iterativer Algorithmus

In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus zur Ermittlung des relaxierten Distanzmaßes ν_d diskutiert. Er basiert im Wesentlichen auf einer Übertragung einer Vorgehensweise zur Ermittlung des Distanzmaßes der Steuer- bzw. Beobachtbarkeit aus [30] auf das hier betrachtete Optimierungsproblem.

Dem Algorithmus liegt folgende Idee zugrunde: die Zielfunktion (6.176) wird, ausgehend von einem Startwert $\mathbf{S}^{(0)}$ für die Matrix \mathbf{S} , abwechselnd bezüglich der Matrizen \mathbf{V}_i und \mathbf{S} minimiert. Die Minimierung bezüglich \mathbf{V}_i geschieht dabei auf dem Wege der

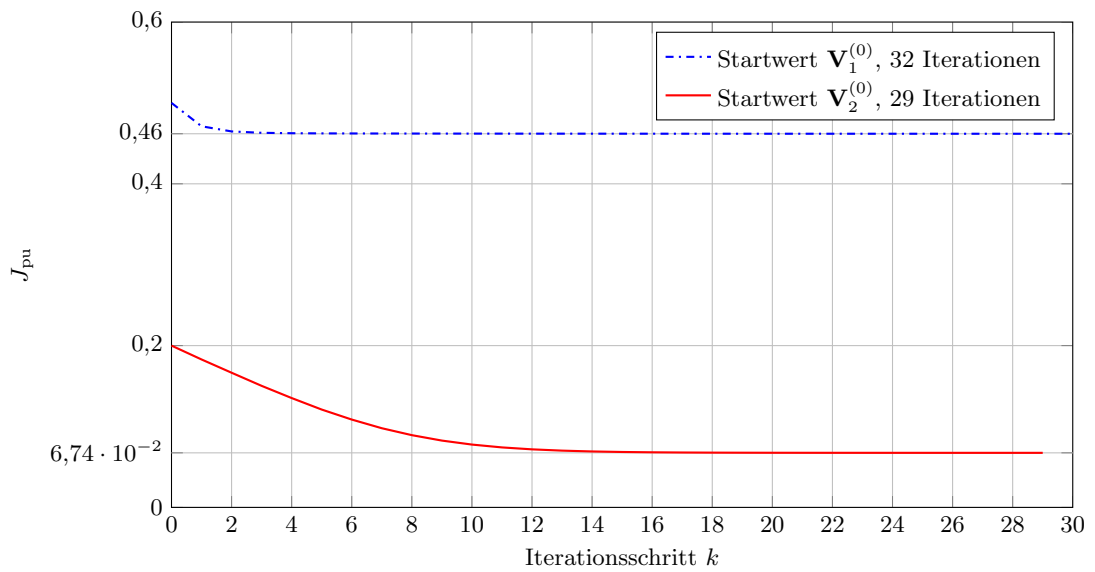


Abbildung 7.1.: Verlauf der Zielfunktionswerte $J_{\text{pu}}(\mathbf{V}^{(k)})$ bei dem vorgestellten Gradientenverfahren mit Startwerten aus Relation (7.30)

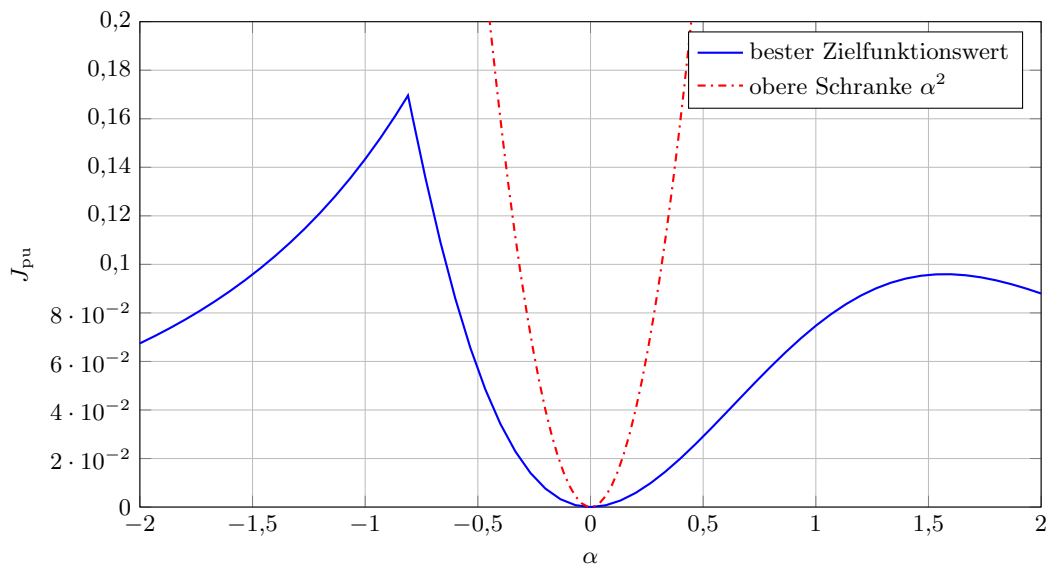


Abbildung 7.2.: Bestes mit dem vorgestellten Gradientenverfahren ermitteltes lokales Minimum der Zielfunktion J_{pu} des Optimierungsproblems (7.1) in Abhängigkeit des Parameters α

semidefiniten Programmierung. Bezeichnet man mit $\mathbf{S}^{(k)}$ die Matrix \mathbf{S} im k -ten Iterationsschritt, so wird zunächst die Lösungsmatrix

$$\mathbf{X}^{(k+1)} := \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n(d+1) \times n(d+1)}} \text{spur } \mathbf{M}(\mathbf{S}^{(k)})^H \mathbf{M}(\mathbf{S}^{(k)}) \mathbf{X} \quad (7.32a)$$

unter

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\geq 0 \\ \text{spur } \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{X} &= \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq d+1 \end{aligned} \quad (7.32b)$$

des semidefiniten Programms (6.127) ermittelt. Deren Rang wird mit

$$r^{(k+1)} := \text{rang } \mathbf{X}^{(k+1)} \quad (7.33)$$

bezeichnet. Mittels der Zerlegung (6.177) der Matrix $\mathbf{X}^{(k+1)}$ werden daraufhin Matrizen $\mathbf{V}_i^{(k+1)}$ bestimmt, welche

$$\mathbf{V}_i^{(k+1)} := \arg \min_{\mathbf{V}_i \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)}} \sum_{i=1}^{r^{(k+1)}} \left(\|\mathbf{A}\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i \mathbf{S}^{(k)}\|_F^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}_i \mathbf{u}\|_2^2 \right) \quad (7.34a)$$

unter

$$\sum_{i=1}^{r^{(k+1)}} \mathbf{V}_i^H \mathbf{V}_i = \mathbf{E} \quad (7.34b)$$

erfüllen. Anschließend ermittelt man die Matrix \mathbf{S} für den $(k+1)$ -ten Iterationsschritt unter Verwendung von Relation¹³ (6.207):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(k+1)} &:= \arg \min_{\mathbf{S}} \sum_{i=1}^{r^{(k+1)}} \left(\|\mathbf{A}\mathbf{V}_i^{(k+1)} - \mathbf{V}_i^{(k+1)} \mathbf{S}\|_F^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}_i^{(k+1)} \mathbf{u}\|_2^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r^{(k+1)}} \mathbf{V}_i^{(k+1)H} \mathbf{A}\mathbf{V}_i^{(k+1)}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Der Zielfunktionswert fällt somit monoton mit zunehmendem k , d.h.

$$\nu_{d,\mathbf{S}^{(k+1)}} \leq \nu_{d,\mathbf{S}^{(k)}}. \quad (7.36)$$

Diese Schritte werden wiederholt, bis die Zielfunktion einen nahezu stationären Wert annimmt, d.h. bis in einem letzten Iterationsschritt N das Abbruchkriterium

$$\nu_{d,\mathbf{S}^{(N-1)}} - \nu_{d,\mathbf{S}^{(N)}} < \varepsilon_J \quad (7.37)$$

¹³Die Matrix $\mathbf{S}^{(k+1)}$ kann auch direkt aus der Lösungsmatrix $\mathbf{X}^{(k+1)}$, ohne den Umweg über deren Zerlegung, ermittelt werden. Konkret erkennt man anhand von Relation (6.121c), dass $\mathbf{e}_i^T \mathbf{S}^{(k+1)} \mathbf{e}_j = \text{spur}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \otimes \mathbf{A}) \mathbf{X}$ gilt.

mit einer positiven Schranke ε_j erfüllt ist. Der (finale) Zielfunktionswert $\nu_{d,\mathbf{S}^{(N)}}$ ist dann näherungsweise ein (lokales) Minimum des Optimierungsproblems (7.2) für das relaxierte Distanzmaß. Gilt für den Rang der Lösungsmatrix \mathbf{X} des semidefiniten Programms im letzten Schritt

$$r^{(N)} = 1, \quad (7.38)$$

so ist dieser Wert zugleich ein (lokales) Minimum des Optimierungsproblems für das Distanzmaß (7.1).

7.3.2. Modifizierter iterativer Algorithmus

Es wird nun eine Modifikation des Algorithmus gezeigt, die mitunter zu einer schnelleren Konvergenz führt. Man betrachtet dazu die bezüglich \mathbf{S} minimale Zielfunktion gemäß den Relationen (6.207) und (6.213)

$$\min_{\mathbf{S}} J_{\text{psu},r}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^r (\|\mathbf{A}\mathbf{V}_i\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}_i\mathbf{u}\|_2^2) - \left\| \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{A}\mathbf{V}_i \right\|_{\text{F}}^2. \quad (7.39)$$

Bei Multiplikation der Matrizen \mathbf{V}_i mit einer unitären Matrix \mathbf{Q} von rechts erhält man daraus

$$\min_{\mathbf{S}} J_{\text{psu},r}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{S}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^r (\|\mathbf{A}\mathbf{V}_i\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{V}_i\mathbf{Q}\mathbf{u}\|_2^2) - \left\| \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{A}\mathbf{V}_i \right\|_{\text{F}}^2, \quad (7.40)$$

wobei sich aufgrund der Invarianz der Frobeniusnorm bei Multiplikation mit unitären Matrizen nur die von \mathbf{C} abhängigen Summanden verändern. Bezüglich \mathbf{Q} nimmt diese Funktion genau dann einen minimalen Wert an, wenn

$$\sum_{i=1}^r \|\mathbf{C}\mathbf{V}_i\mathbf{Q}\mathbf{u}\|_2^2 = \|\mathbf{W}\mathbf{Q}\mathbf{u}\|_2^2 = \sigma_{\min}^2(\mathbf{W}) \quad (7.41)$$

mit der Abkürzung

$$\mathbf{W} := \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{V}_r \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

gilt. Somit kann man dieses Minimum und die zugehörige Matrix \mathbf{Q} leicht durch eine Singulärwertzerlegung von \mathbf{W} bzw. durch eine Eigenwert- und Eigenvektorberechnung der Matrix

$$\mathbf{R} := \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \sum_{i=1}^r \mathbf{V}_i^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{V}_i \quad (7.43)$$

ermitteln.

Davon motiviert wird der Algorithmus folgendermaßen modifiziert: Im Schritt k wird nach Berechnung der Matrizen $\mathbf{V}_i^{(k+1)}$ gemäß (7.34a) zunächst die gezeigte Minimierung bezüglich \mathbf{Q} durchgeführt, d.h. es wird eine unitäre Matrix $\mathbf{Q}^{(k+1)}$ so ermittelt, dass mit der Matrix¹⁴

$$\mathbf{R}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{r^{(k+1)}} \mathbf{V}_i^{(k+1)H} \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{V}_i^{(k+1)} \quad (7.44)$$

in Analogie zu Relation (7.41) die Bedingung

$$\mathbf{u}^H \mathbf{Q}^{(k+1)H} \mathbf{R}^{(k+1)} \mathbf{Q}^{(k+1)} = \sigma_{\min}(\mathbf{R}^{(k+1)}) \quad (7.45)$$

erfüllt ist¹⁵. Die Matrix \mathbf{S} für den folgenden Schritt wird dann gemäß

$$\mathbf{S}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{r^{(k+1)}} \mathbf{Q}^{(k+1)H} \mathbf{V}_i^{(k+1)H} \mathbf{A} \mathbf{V}_i^{(k+1)} \mathbf{Q}^{(k+1)} \quad (7.46)$$

berechnet. So erhält man im Vergleich zum ursprünglichen Algorithmus einen kleineren bzw. schlechtestenfalls einen gleich großen Zielfunktionswert $\nu_{d,\mathbf{S}^{(k+1)}}$.

7.3.3. Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird die Anwendung des vorgestellten iterativen Verfahrens zur Ermittlung von ν_d demonstriert.

Beispiel 26. Wieder wird das System aus Beispiel 25 mit den Daten (6.214) und dem reellen Parameter α betrachtet. Zunächst wird dieses für den Parameterwert $\alpha = -2$ untersucht. Als Startwert für die Matrix \mathbf{S} wird zunächst die bereits in Beispiel 23 diskutierte Diagonalmatrix

$$\mathbf{S}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

gewählt, für welche in Beispiel 23 die relaxierte Distanz $\nu_{1,\mathbf{S}}$ ermittelt wird. Beide Varianten des vorgestellten Verfahrens liefern in diesem Fall das lokale Minimum

$$\mathbf{S}^{(N)} \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1,5974 \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

mit dem Zielfunktionswert

$$\nu_{1,\mathbf{S}^{(N)}} \approx 0,9779. \quad (7.49)$$

¹⁴So wie die Matrix $\mathbf{S}^{(k+1)}$, kann auch die Matrix $\mathbf{R}^{(k+1)}$ direkt aus der Lösungsmatrix $\mathbf{X}^{(k+1)}$ des semidefiniten Programms ermittelt werden: Es gilt $\mathbf{e}_i^T \mathbf{R}^{(k+1)} \mathbf{e}_j = \text{spur}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \otimes \mathbf{C}^H \mathbf{C}) \mathbf{X}$.

¹⁵Im Allgemeinen ist die so ermittelte Matrix $\mathbf{Q}^{(k+1)}$ nicht eindeutig.

Den Grund erkennt man anhand der Überlegungen in Beispiel 23. Aufgrund der besonderen Struktur der Lösung des semidefiniten Programms in Form der Matrizen \mathbf{V}_1 und \mathbf{V}_2 aus Relation (6.227) gilt

$$\mathbf{V}_1^H \mathbf{A} \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2^H \mathbf{A} \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^H \mathbf{A} \mathbf{v}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_2^H \mathbf{A} \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}. \quad (7.50)$$

Bei Minimierung der Zielfunktion $J_{\text{psu},r}$ bezüglich \mathbf{S} gemäß Relation (6.207) bleibt daher die Diagonalstruktur der Matrix \mathbf{S} erhalten¹⁶. Bei Anwendung des beschriebenen Verfahrens erhält man somit gemäß Relation (6.224) bestenfalls ein lokales Minimum mit dem Zielfunktionswert

$$\min_{\substack{s_1, s_2 \\ \mathbf{S} = \text{diag}(s_1, s_2)}} \nu_{1, \mathbf{S}} = \min_{s_2} \sigma_{\min} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s_2 \mathbf{E} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \mu_1, \quad (7.51)$$

was dem Distanzmaß der Beobachtbarkeit μ_1 entspricht. Dieses stellt immer eine obere Schranke für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit dar, sodass eine Vorgabe des Startwertes $\mathbf{S}^{(0)}$ in Diagonalform für $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$ in der Regel nicht sinnvoll ist.

Es werden die Startwerte $\mathbf{S}^{(0)}$ nun gemäß der Vorschrift (7.4) gewählt, unter Verwendung der in Beispiel 25 ermittelten Startwerte für die Matrix \mathbf{V} aus Relation (7.30):

$$\mathbf{S}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{zu } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1; \quad (7.52a)$$

$$\mathbf{S}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{zu } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4. \quad (7.52b)$$

Abbildung 7.3 zeigt den so erhaltenen Wert der Zielfunktion $\nu_{1, \mathbf{S}^{(k)}}$ in Abhängigkeit vom Iterationsschritt k . Für den Rang r der Lösungsmatrix \mathbf{X} des semidefiniten Programms ergibt sich dabei *in jedem Iterationsschritt* (!) $r = 1$, d.h. man erhält hier nicht nur untere Schranken sondern die eigentlichen Werte der Distanzen $\mu_{1, \mathbf{S}^{(k)}}$.

Vergleicht man die beiden Varianten des Algorithmus, so erkennt man, dass das modifizierte Verfahren wesentlich schneller gegen ein lokales Minimum strebt bzw. der entsprechende Rechenaufwand (bei gleichem Abbruchkriterium) deutlich geringer ist. Im Vergleich zu den Ergebnissen des Gradientenverfahrens aus Beispiel 25 erkennt man

¹⁶Dies gilt auch für die modifizierte Variante des Algorithmus. Bei diesem hat die Matrix $\mathbf{W}^H \mathbf{W}$ in der Regel die Form

$$\mathbf{W}^H \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{v}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_2^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{v}_2 \end{bmatrix},$$

sodass für die Matrix \mathbf{Q} jeweils

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

gilt.

außerdem, dass man hier mit beiden Verfahren dieselben lokalen Minima erhält. Die Anzahl der von den jeweiligen Verfahren benötigten Iterationsschritte ist dabei nicht direkt vergleichbar, da die Schritte jeweils mit unterschiedlich großem Rechenaufwand verbunden sind.

In weiterer Folge wird der vorgestellte modifizierte Algorithmus für unterschiedliche Werte von α angewandt. Abbildung 7.4 zeigt den jeweils besten so erhaltenen Zielfunktionswert in Abhängigkeit von α . Ebenso dargestellt ist das mit dem Gradientenverfahren erhaltene Ergebnis aus Abbildung 7.2. Man erkennt, dass die Kurven deckungsgleich sind, d.h. man erhält hier für alle betrachteten Werte von α nicht nur untere Schranken sondern (lokale) Minima des Optimierungsproblems für das Distanzmaß (7.1)!

Dieser Umstand legt die Vermutung nahe, dass zumindest für den Dimensionsverlust $d = 1$ für das *globale* Minimum der relaxierten Distanz $\nu_{d,\mathbf{S}}$ immer eine Lösung mit dem Rang $r = 1$ existiert¹⁷ und damit ν_d gleich dem Distanzmaß μ_d ist. Leider konnte diese Vermutung bisher nicht bewiesen werden. Es konnte bisher aber auch kein System gefunden werden, bei welchem nicht zumindest für das *beste ermittelte lokale* Minimum $r = 1$ gilt! Somit stellt der in diesem Abschnitt vorgestellte Algorithmus eine sinnvolle Alternative zum Gradientenverfahren dar. \triangle

7.4. Abschließendes Beispiel

In diesem Abschnitt wird, unter Verwendung der gewonnenen Erkenntnisse, das Distanzmaß für ein praxisnahes Beispiel ermittelt.

Beispiel 27. In Beispiel 3 wird das Modell der perspektivischen Projektion eines rotierenden Punktes \mathbf{p} diskutiert, welcher zusätzlich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt wird.

Dieses System wird hier konkret für die Parameterwerte

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = -2, \quad \omega_3 = 0 \quad (7.53)$$

betrachtet. Die Systemmatrix lautet

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

mit der schiefsymmetrischen Matrix $\boldsymbol{\Omega}$ aus Relation (2.6). Letztere ist hier durch

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

¹⁷Anhand der vorangegangenen Überlegungen zur Vorgabe des Startwerts $\mathbf{S}^{(0)}$ in Diagonalf orm ist klar, dass dies für beliebige *lokale* Minima nicht notwendigerweise der Fall ist.

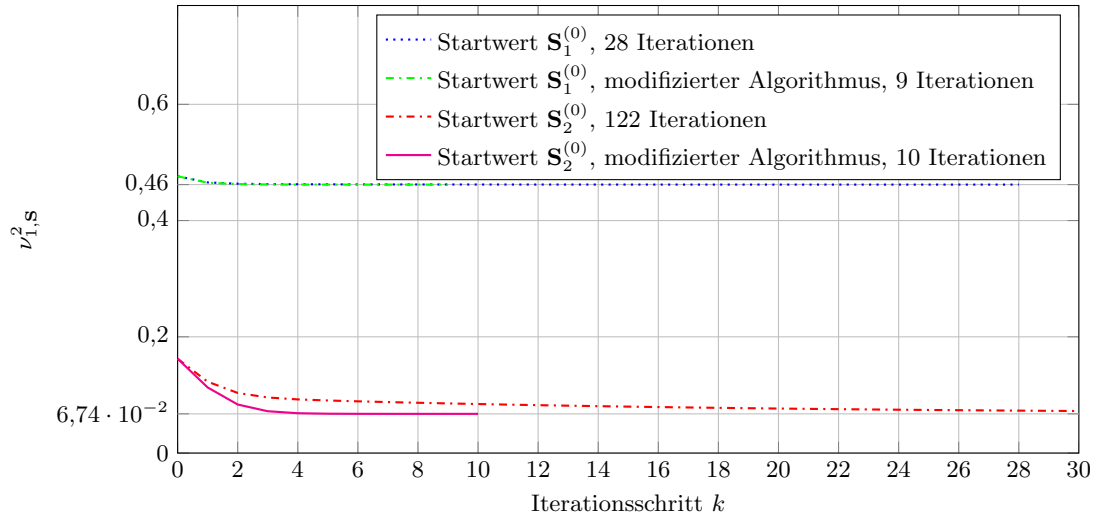


Abbildung 7.3.: Verlauf der quadrierten, relaxierten Distanz $\nu_{1,S}^2$ bei Anwendung des ursprünglichen und des modifizierten iterativen Algorithmus und Wahl der Startwerte gemäß Relation (7.52)

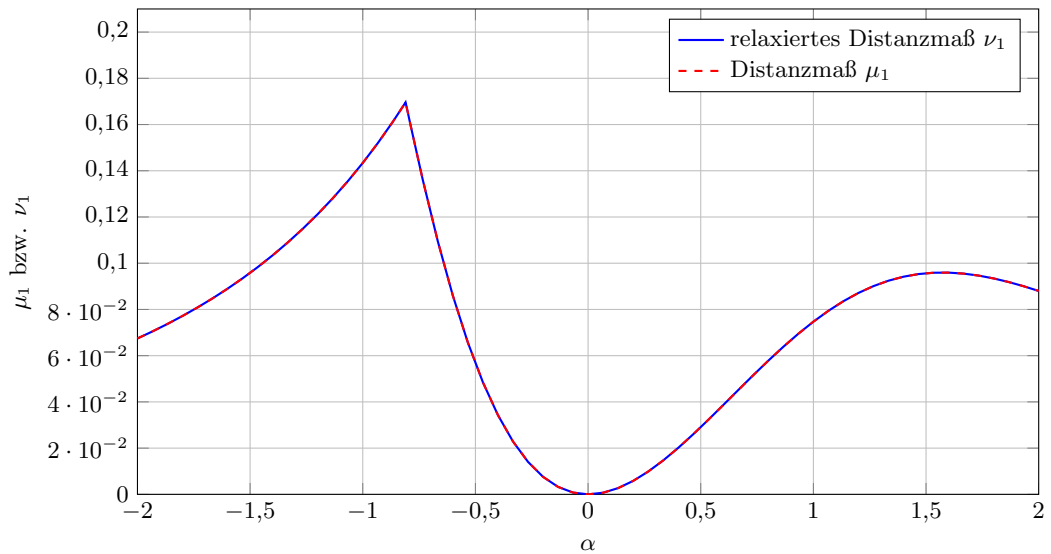


Abbildung 7.4.: Beste mit dem Gradientenverfahren bzw. dem vorgestellten modifizierten iterativen Algorithmus ermittelte lokale Minima der Optimierungsprobleme für das Distanzmaß μ_1 bzw. das relaxierte Distanzmaß ν_1 in Abhängigkeit des Parameters α

gegeben. Die Rotationsachse \mathbf{q} erhält man aus Relation (2.8):

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T. \quad (7.56)$$

Der Normalvektor \mathbf{h} der Bildebene wird folgendermaßen gewählt: Er wird aus der Rotationsachse \mathbf{q} durch Drehung um den Winkel φ gemäß

$$\mathbf{h}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi - \sin \varphi \\ \cos \varphi + \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) \\ \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

gebildet. Dabei stellt φ einen freien Parameter dar. Für den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} wird einer der zwei Vektoren

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T \quad (7.58)$$

$$\text{und } \mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{h}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (7.59)$$

vorgegeben. Abbildung 7.5 veranschaulicht die Lage der Rotationsachse \mathbf{q} , des Normalvektors der Bildebene \mathbf{h} und der Geschwindigkeit \mathbf{v} in der y - z -Ebene.

In diesem Beispiel wird die perspektivische Beobachtbarkeit dieses Systems für den Dimensionsverlust $d = 1$ mit Hilfe verschiedener Varianten des Distanzmaßes beurteilt; für jeden der zwei Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ werden dazu verschiedene Werte der Brennweite f und des Winkels φ betrachtet.

Da die Skalierung der Ausgangsmatrix nicht eindeutig ist, bietet sich – wie in Abschnitt 6.1 erläutert – zur quantitativen Bewertung der perspektivischen Beobachtbarkeit das bezüglich der letzten Zeile normierte Distanzmaß $\hat{\mu}_1$ an. Die zu diesem Zweck im Rahmen von Beispiel 21 ermittelte Ausgangsmatrix lautet gemäß Relation¹⁸ (6.55)

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}(\mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T) & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\mathbf{h}^T & \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \end{bmatrix}. \quad (7.60)$$

Es werden zunächst einige Kenngrößen der schiefsymmetrischen Matrix $\mathbf{\Omega}$ wiederholt. Der Vektor \mathbf{q} ist Eigenvektor der Matrix $\mathbf{\Omega}$ zum Eigenwert null. Daneben weist die Matrix außerdem das konjugiert komplexe Eigenwertpaar $\pm j\omega$ auf, wobei sich die Winkelgeschwindigkeit ω aus Relation (2.7) zu

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = 2\sqrt{2} \quad (7.61)$$

ergibt. Die zu diesem Eigenwertpaar gehörigen Eigenvektoren sind mit der Matrix \mathbf{R} aus

¹⁸Für die in Beispiel 21 berücksichtigten Skalierungsfaktoren gilt hier $\beta = \gamma = 1$.

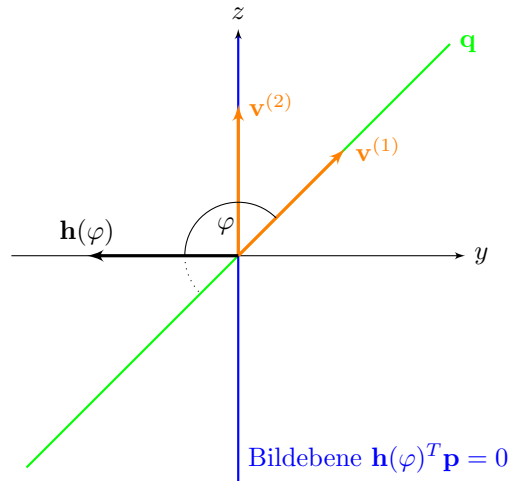


Abbildung 7.5.: Lage von Rotationsachse \mathbf{q} , Normalvektor $\mathbf{h}(\varphi)$ der Bildebene und Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ in der y - z -Ebene

Relation (3.52)

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\omega \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \begin{bmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 & 0 \\ \omega_2 \omega_3 & \omega_1 \omega \\ -\omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

und dem Vektor¹⁹

$$\mathbf{w} := \begin{bmatrix} \frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T \quad (7.63)$$

durch $\mathbf{R}\mathbf{w}$ und $\mathbf{R}\mathbf{w}^*$ gegeben. Die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} lauten somit

$$s_1 = j\omega \quad s_2 = -j\omega \quad s_{3,4} = 0. \quad (7.64)$$

Das System wird zunächst für den Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{q}, \quad (7.65)$$

d.h. bei einer Translation des Punktes in Richtung der Rotationsachse \mathbf{q} betrachtet. Gemäß den Überlegungen in Abschnitt 7.1.1 werden als Startwerte für die numerische

¹⁹Der Vektor \mathbf{w} ist Eigenvektor der Matrix \mathbf{W} aus Relation (3.53) zum Eigenwert $j\omega$.

Lösung des Optimierungsproblems in diesem Fall die Matrizen

$$\mathbf{V}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{S}_1^{(0)} = \mathbf{Q}_1^H \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \quad \text{zu } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \quad (7.66)$$

$$\mathbf{V}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{R}\mathbf{w} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{S}_2^{(0)} = \mathbf{Q}_2^H \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j\omega \end{bmatrix} \mathbf{Q}_2 \quad \text{zu } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = j\omega \quad (7.67)$$

$$\mathbf{V}_3^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}_3, \quad \mathbf{S}_3^{(0)} = \mathbf{Q}_3^H \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_3 \quad \text{zu } \lambda_1 = j\omega, \lambda_2 = -j\omega \quad (7.68)$$

bzw., in Zahlenwerten angegeben,

$$\mathbf{V}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{S}_1^{(0)} = \mathbf{Q}_1^H \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \quad (7.69)$$

$$\mathbf{V}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{S}_2^{(0)} = \mathbf{Q}_2^H \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j2\sqrt{2} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_2 \quad (7.70)$$

$$\mathbf{V}_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_3, \quad \mathbf{S}_3^{(0)} = \mathbf{Q}_3^H \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_3 \quad (7.71)$$

mit geeigneten unitären Matrizen \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 , \mathbf{Q}_3 verwendet. Letztere werden gemäß den Relationen (7.10) und (7.11) bestimmt und hängen damit von der jeweils vorliegenden Ausgangsmatrix, insbesondere also vom Winkel φ ab.

Zur Ermittlung des (relaxierten) Distanzmaßes wurde der in Abschnitt 7.3 vorgestellte modifizierte iterative Algorithmus eingesetzt. Dabei wurde für verschiedene Brennweiten der Winkel φ im Bereich $0 \leq \varphi \leq \pi$ variiert. Als Startwerte wurden dabei neben den oben angegebenen Matrizen $\mathbf{S}_1^{(0)}$, $\mathbf{S}_2^{(0)}$ und $\mathbf{S}_3^{(0)}$ auch alle für den jeweils nächstkleineren Winkel²⁰ φ gefundenen Minima herangezogen. Zusätzlich wurde die Symmetrie der Konstellation bezüglich des Winkels $\varphi = \frac{\pi}{2}$ genutzt (siehe Abbildung 7.5 für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}$): Von je zwei zueinander symmetrischen Winkeln wurde jeweils der bessere Wert gewählt.

Abbildung 7.6 zeigt die so erhaltenen Werte (bzw. die besten erhaltenen lokalen Minima) des bezüglich der letzten Zeile normierten relaxierten Distanzmaßes $\hat{\nu}_1$. Der Rang der jeweils optimalen Lösungsmatrix ist dabei in allen Fällen gleich eins, d.h. die Ergebnisse stimmen mit dem entsprechend normierten *nichtrelaxierten* Distanzmaß $\hat{\mu}_1$ überein. Man erkennt, dass der Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit für den Fall $\varphi = 0$ (siehe auch Beispiel 3) und für $f = 0$ (siehe auch Beispiel 21) korrekt angezeigt wird.

Weiterhin sieht man, dass beide Maße für Brennweiten $f \leq 1$ jeweils bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ein Maximum aufweisen. Für Brennweiten $f > 1$ nimmt das Maß an dieser Stelle allerdings wieder ab und es kommt zu lokalen Minima der Verläufe. Der Grund dafür ist

²⁰Die Berechnungen wurden für 101 äquidistant verteilte Werte des Winkels φ aus dem angegebenen Bereich durchgeführt.

in Abbildung 7.7 ersichtlich: In dieser ist der Verlauf einer oberen Schranke $\bar{\rho}$ für die Mindestnorm ρ nicht rekonstruierbarer Punkte des gestörten Systems dargestellt. Diese Schranke wurde mittels Satz 38 aus der jeweiligen Lösungsmatrix \mathbf{V} des Optimierungsproblems ermittelt. Man erkennt, dass $\bar{\rho}$ im Bereich um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ für Brennweiten $f > 1$ sehr groß ist und mit zunehmender Brennweite größer wird. Dieses Ergebnis stimmt mit dem in Beispiel 22 erhaltenen überein: Für den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist der Vektor \mathbf{h} orthogonal zur Rotationsachse \mathbf{q} ; es streben dementsprechend für $f \rightarrow \infty$ das Distanzmaß gegen null und der Mindestabstand ρ (und damit auch die obere Schranke $\bar{\rho}$) gegen Unendlich.

Um ein praxisrelevanteres Ergebnis zu erhalten, wird das in Abschnitt 6.2.2 vorgeschlagene modifizierte Distanzmaß $\hat{\eta}_R$ betrachtet. Als Schranke für die Norm nicht rekonstruierbarer Punkte wird dabei $R = 2$ vorgegeben. Zur Ermittlung dieses Maßes mit Hilfe des Gradientenverfahrens müsste dieses um die nichtkonvexe Ungleichungsnebenbedingung (6.87) erweitert werden. Da dies durchaus eine Herausforderung darstellt, wird ein anderer Weg verfolgt: die Modifikation des iterativen Algorithmus zur Bestimmung des relaxierten Distanzmaßes. Zur Berücksichtigung der Beschränkung muss dabei lediglich das semidefinite Programm (6.127) um die aus Relation (6.122) erhaltene *konvexe* Ungleichungsnebenbedingung

$$\text{spur}(\mathbf{E}_{d+1} \otimes \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T) \mathbf{X} \geq \frac{1}{1 + R^2} \quad (7.72)$$

erweitert werden.

Abbildung 7.8 zeigt das auf diese Weise ermittelte Maß $\hat{\eta}_1$. Die Relaxation ist dabei auch hier in nahezu allen Fällen, d.h. mit Ausnahme einiger vereinzelter Punkte²¹, exakt. Klarerweise vergrößert sich der Wert des Maßes durch Hinzunahme der Nebenbedingung; dies ist durch Vergleich mit Abbildung 7.8 auch erkennbar. Man sieht, dass das Maximum für alle betrachteten Werte der Brennweite bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ liegt. In Abbildung 7.9 ist außerdem die zugehörige obere Schranke $\bar{\rho}$ der Mindestnorm nicht rekonstruierbarer Punkte dargestellt. Diese ist entsprechend der Vorgabe nach oben durch den Wert $R = 2$ begrenzt.

Es wird nun das System für den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(2)}$ betrachtet. Für diesen wird das normierte Distanzmaß $\tilde{\mu}_1$ und das bereits für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}$ ermittelte bezüglich der letzten Zeile normierte Distanzmaß $\hat{\mu}_1$ verglichen. Für ersteres ist dabei gemäß Relation (6.37b) eine mögliche Normierung der Ausgangsmatrix durch

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\mathbf{h}^T & \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

gegeben.

Die Abbildungen 7.10 und 7.11 zeigen die wie zuvor ermittelten relaxierten Varianten $\tilde{\nu}_1$ bzw. $\hat{\mu}_1$ der beiden Distanzmaße. Auch hier stimmen diese mit den entsprechenden

²¹Insgesamt ergab sich nur bei 7 von insgesamt $9 \cdot 101 = 909$ Kombinationen von Parameterwerten für f und φ eine Lösungsmatrix mit dem Rang zwei.

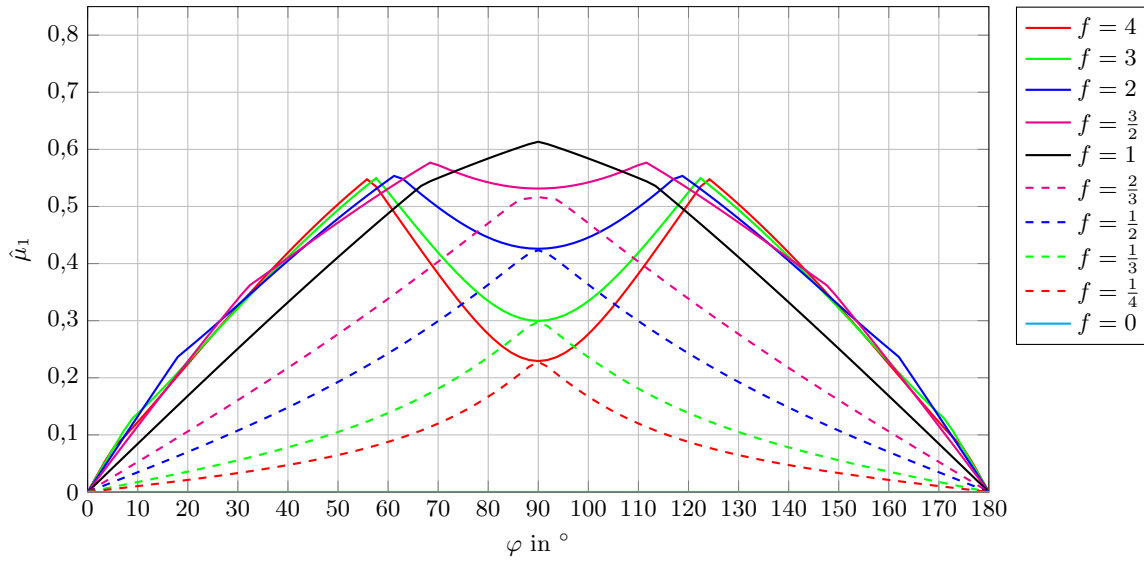


Abbildung 7.6.: Beste für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}$ erhaltene lokale Minima des bezüglich der letzten Zeile normierten Distanzmaßes $\hat{\mu}_1$ in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f

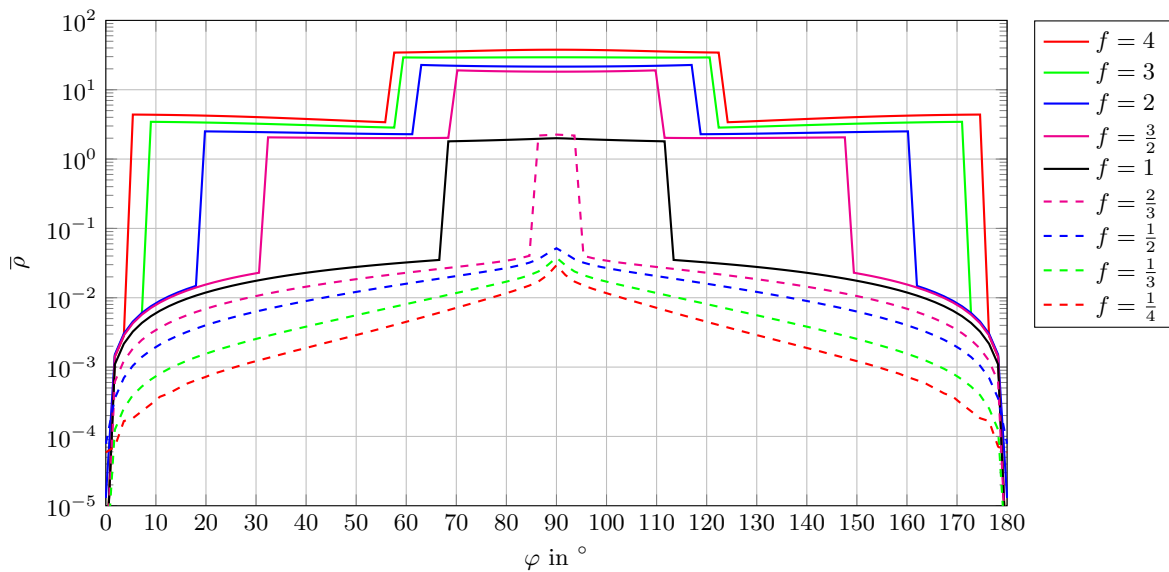


Abbildung 7.7.: Für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}$ erhaltene obere Schranke $\bar{\rho}$ für die Mindestnorm ρ nicht rekonstruierbarer Punkte des jeweils ermittelten gestörten Systems (für $f = 0$ ergibt sich unabhängig von φ die obere Schranke $\bar{\rho} = 0$)

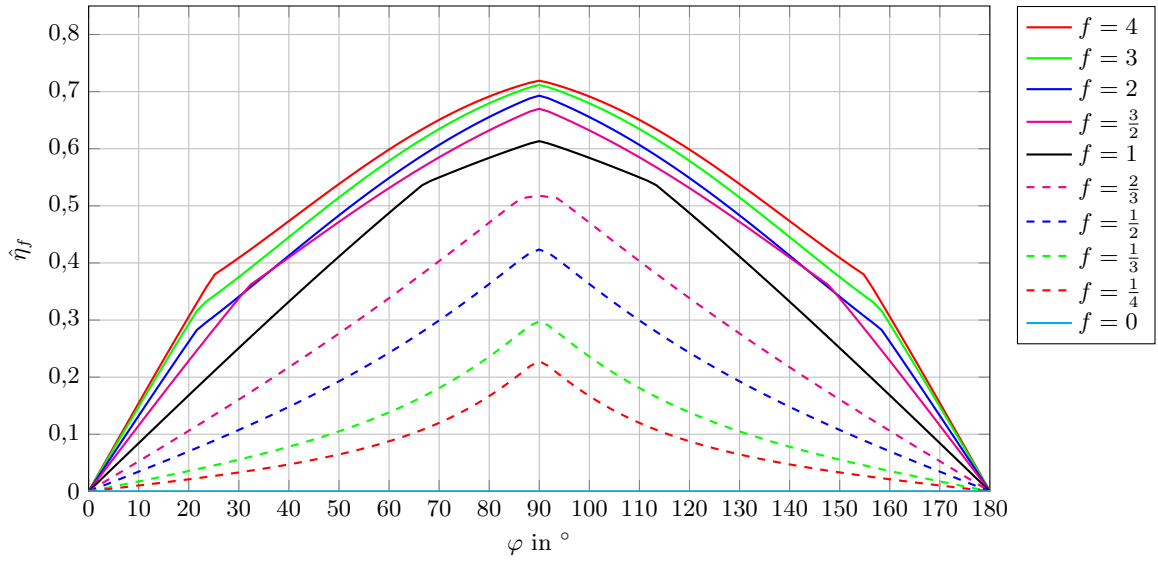


Abbildung 7.8.: Beste für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(2)}$ erhaltene lokale Minima des Distanzmaßes $\hat{\eta}_1$ bei zusätzlicher Begrenzung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte; dargestellt ist es in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f

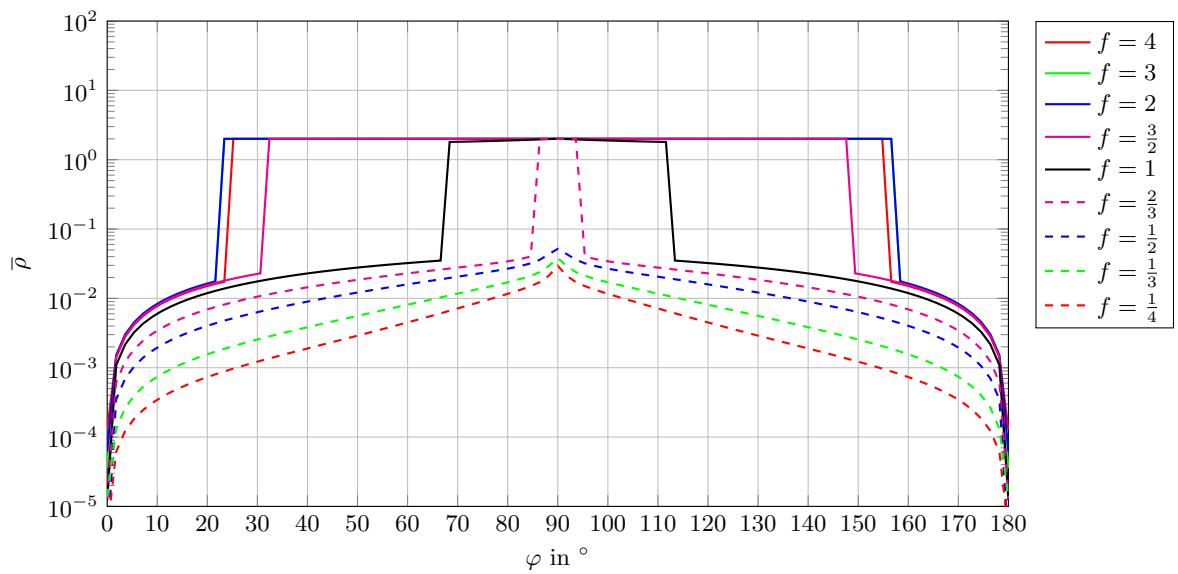


Abbildung 7.9.: Für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}$ erhaltene obere Schranke $\bar{\rho}$ für den Mindestabstand ρ nicht rekonstruierbarer Punkte des jeweils ermittelten gestörten Systems bei Berücksichtigung der Beschränkung $\bar{\rho} \leq 2$

nichtrelaxierten Maßen überein.

Es ist auffällig, dass es bei Brennweiten $f > 1$ in der ersten Hälfte des Winkelbereichs zu sprunghaftigen Änderungen der Maße nach unten kommt. Dies ist eine Folge der numerischen Ermittlung der Maße, mit welcher in der Regel nur lokale Minima bestimmbar sind und der Art der Startwertvorgabe: An der Sprungstelle wird, ausgehend von der Lösung des vorangegangenen (d.h. nächstniedrigeren) Wertes für den Winkel, plötzlich ein besseres lokales Minimum gefunden²².

Vergleicht man die beiden Maße miteinander, so erkennt man, dass diese prinzipiell einen ähnlichen Verlauf aufweisen. Der für $f = 0$ erwartete Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit wird jedoch, aus den im Rahmen von Beispiel 21 erörterten Gründen, nur von dem bezüglich der letzten Zeile normierten Distanzmaß $\hat{\mu}_1$ korrekt angezeigt.

△

7.5. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden einige Ansätze zur Lösung des Optimierungsproblems für das Distanzmaß und das relaxierte Distanzmaß vorgestellt. Zunächst wurde eine Möglichkeit zur Wahl von Startwerten basierend auf der Berechnung von \mathbf{A} -invarianten Unterräumen gezeigt. Die Möglichkeit der Erweiterung eines existierenden Startwerts für einen niedrigeren Dimensionsverlust zu einem größeren Dimensionsverlust wurde diskutiert.

Zur Ermittlung des Distanzmaßes wurde ein Gradientenverfahren vorgeschlagen. Die Einhaltung der nichtkonvexen Orthonormalitätsbedingung wird dabei durch Verwendung der Cayley-Transformation sichergestellt.

Für das relaxierte Distanzmaß wurde ein einfacher iterativer Algorithmus vorgestellt. Dieser basiert auf der abwechselnden Lösung zweier zuverlässig lösbarer (konvexer) Optimierungsprobleme.

Die Ergebnisse beider Verfahren wurden anhand von Beispielen demonstriert. Bemerkenswert ist dabei, dass in allen Fällen die ermittelten Werte von Distanzmaß und relaxiertem Distanzmaß übereinstimmen! Eine offene Frage ist, ob bzw. unter welchen Bedingungen diese Gleichheit

$$\mu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \nu_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \quad (7.74)$$

allgemein gilt. Die erhaltenen Ergebnisse legen die Vermutung nahe, dass dies für den Dimensionsverlust $d = 1$ der Fall ist. Ein Beweis oder eine Widerlegung dieser Vermutung ist bislang nicht gelungen.

²²Ein ähnlicher Effekt tritt auch bei Ermittlung der Maße für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}$ auf. Dort lassen sich diese unplausiblen Sprünge jedoch durch Ausnutzung der (für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(2)}$ nicht mehr gegebenen) Symmetrie bereinigen.

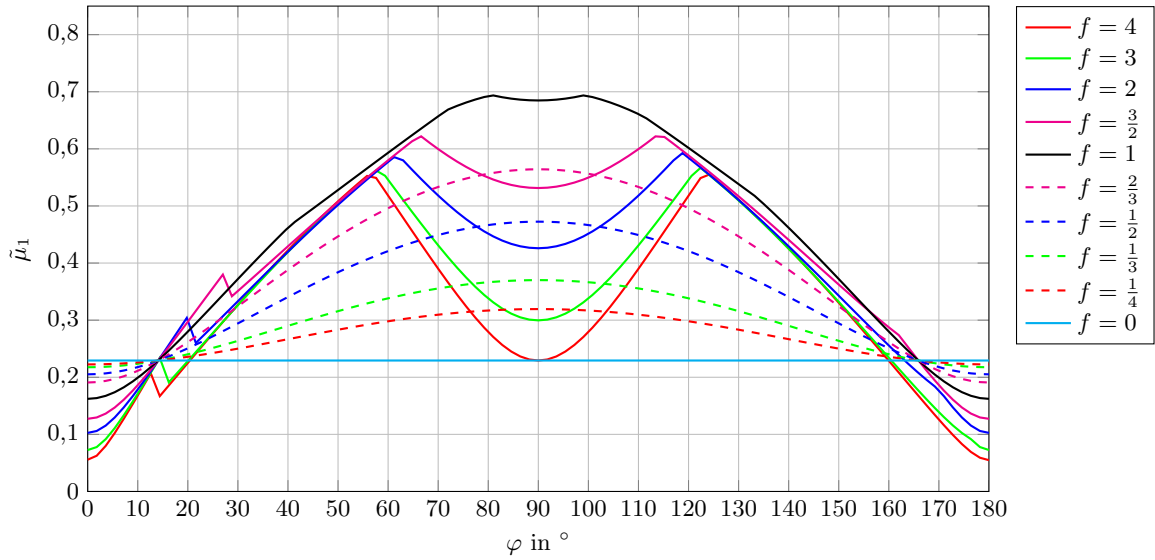


Abbildung 7.10.: Beste für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(2)}$ erhaltene lokale Minima des normierten Distanzmaßes $\tilde{\mu}_1$ in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f

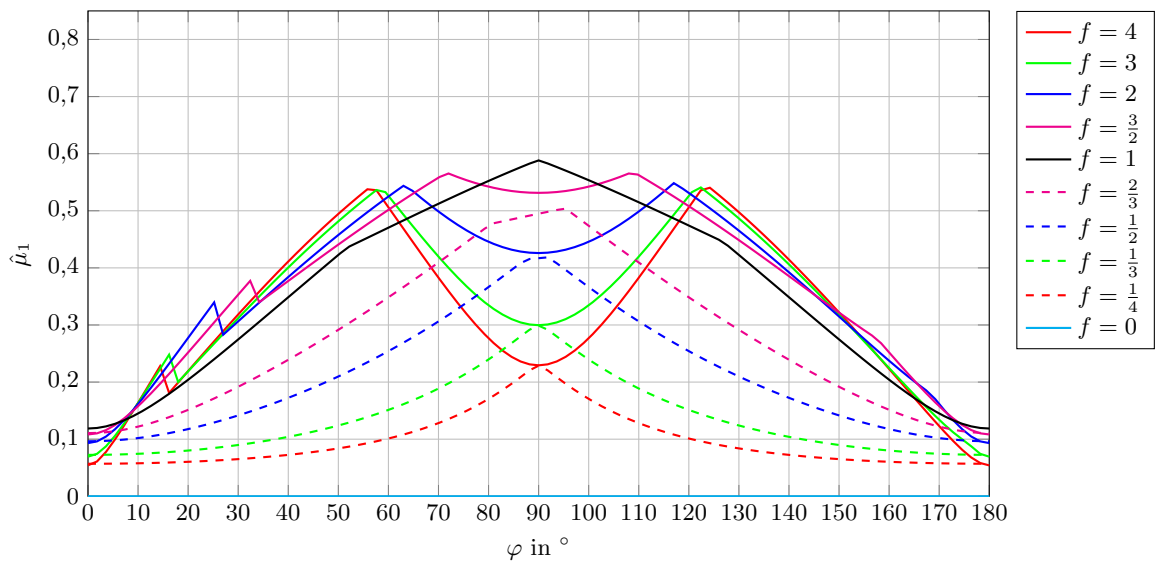


Abbildung 7.11.: Beste für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(2)}$ erhaltene lokale Minima des bezüglich der letzten Zeile normierten Distanzmaßes $\hat{\mu}_1$ in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f

Kapitel 8.

Alternative Bewertung der perspektivischen Beobachtbarkeit

Die Ermittlung des Distanzmaßes für die perspektivische Beobachtbarkeit ist mit beträchtlichem Aufwand verbunden. Daher wird in diesem Abschnitt ein alternativer Ansatz zur Bewertung der perspektivischen Beobachtbarkeit eines linearen, zeitinvarianten Systems gezeigt. Dazu wird ein in [17] eingeführtes Maß für die Steuer- bzw. Beobachtbarkeit erweitert.

8.1. Modifikation eines Beobachtbarkeitsmaßes

Betrachtet wird das lineare zeitinvariante System (2.1). Dieses System ist genau dann beobachtbar, wenn es keinen Rechts-Eigenvektor \mathbf{p} der Matrix \mathbf{A} gibt, sodass

$$\mathbf{C}\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

gilt. In [17] wurde (ursprünglich ausgehend von einer Transformation des Systems auf Modalform) das folgende Beobachtbarkeitsmaß eingeführt. Ist \mathbf{p}_i ein Rechts-Eigenvektor zum Eigenwert s_i so kann die Beobachtbarkeit von s_i intuitiv durch

$$\tilde{\kappa}_i := \frac{\mathbf{p}_i^H \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_i^H \mathbf{p}_i} \quad (8.2)$$

bewertet werden. Im Gegensatz zum Distanzmaß wird hier die Beobachtbarkeit der einzelnen Eigenwerte (bzw. der zugehörigen Eigenbewegungen) des Systems getrennt beurteilt.

Ein Problem des obigen Maßes ist, dass bei einem mehrfachen Eigenwert s_i mit geometrischer Vielfachheit größer als eins ein Beobachtbarkeitsverlust nicht notwendigerweise $\tilde{\kappa}_i = 0$ zur Folge hat¹ [20]. Das Maß ist nicht konsistent mit der Eigenschaft der Beobachtbarkeit!

Es wird zunächst eine Modifikation des Maßes vorgeschlagen, welche dieses Problem

¹Dies ist z.B. der Fall, wenn zwei oder mehr Eigenvektoren einen Eigenraum aufspannen und für die Ausgangsmatrix $\text{rang } \mathbf{C} = 1$ gilt. In diesem Fall hängt der Wert von $\tilde{\kappa}_i$ von der (nicht eindeutigen) Wahl des Eigenvektors \mathbf{p}_i ab.

behebt. Dabei müssen grundsätzlich höherdimensionale Eigenräume berücksichtigt werden. Man betrachte die Singulärwertzerlegung

$$s_i \mathbf{E} - \mathbf{A} = \mathbf{U} \operatorname{diag}(\sigma_j) \mathbf{V}^H, \quad (8.3)$$

wobei die $n - k + 1$ letzten Spalten der Matrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \quad (8.4)$$

mit

$$\mathbf{P}_k := [\mathbf{v}_k \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \quad (8.5)$$

abgekürzt werden. Der Rechts-Eigenraum zum Eigenwert s_i wird von denjenigen Spalten von \mathbf{V} aufgespannt, die zum Singulärwert null gehören.

Sind insgesamt $n - l + 1$ Singulärwerte gleich null, so bilden die Spalten von \mathbf{P}_l eine orthonormale Basis des zu s_i gehörigen Eigenraums, d.h. es gilt

$$(s_i \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{P}_l = \mathbf{0} \quad (8.6a)$$

$$\mathbf{P}_l^H \mathbf{P}_l = \mathbf{E}. \quad (8.6b)$$

Für die Beobachtbarkeit des Eigenwertes s_i ist in diesem Fall die Spaltenregularität der Matrix $\mathbf{C}\mathbf{P}_l$ ausschlaggebend, zu deren Bewertung in Anlehnung an (8.2)

$$\bar{\sigma}_l := \sqrt{\sigma_{\min}(\mathbf{P}_l^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{P}_l)} \quad (8.7)$$

herangezogen werden kann^{2,3}.

Es liegen somit zwei Maßzahlen vor: die Singulärwerte σ_j aus (8.3) geben an, wie "nahe" jeweils die Spalten der Matrix \mathbf{P}_{n-j+1} dem Eigenraum zum Eigenwert s_i sind, und $\bar{\sigma}_{n-j+1}$ ist ein Maß für die Beobachtbarkeit, falls die Spalten von \mathbf{P}_{n-j+1} tatsächlich den Eigenraum aufspannen. Erstere werden mit zunehmendem l kleiner, während letztere größer werden, d.h.

$$\|s_i \mathbf{E} - \mathbf{A}\|_2 = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n = 0, \quad (8.8a)$$

$$\sqrt{\sigma_{\min}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})} = \bar{\sigma}_1 \leq \bar{\sigma}_2 \leq \dots \leq \bar{\sigma}_n = \|\mathbf{C}\|_2. \quad (8.8b)$$

Damit kann folgendes Kriterium für die Beobachtbarkeit des Eigenwertes s_i angegeben werden:

$$\text{Eigenwert } s_i \text{ ist nicht beobachtbar} \iff \exists j : \sigma_j = 0 \text{ und } \bar{\sigma}_j = 0 \quad (8.9)$$

²Dabei bezeichnet $\sigma_{\min}(\mathbf{M})$ den kleinsten Singulärwert der Matrix \mathbf{M} .

³Klarerweise gilt $\bar{\sigma}_l = 0$ für $l > \operatorname{rang} \mathbf{C}$.

bzw.

$$\text{Eigenwert } s_i \text{ ist nicht beobachtbar} \iff \exists j : \sqrt{\sigma_j^2 + \bar{\sigma}_j^2} = 0. \quad (8.10)$$

Zur Bewertung der Beobachtbarkeit des Eigenwertes s_i kann man also beispielsweise die Größe⁴

$$\kappa_0^{(i)} := \min_j \sqrt{\sigma_j^2 + \bar{\sigma}_j^2} \quad (8.11)$$

heranziehen. Man überprüft leicht, dass $\kappa_0^{(i)}$ stetig in den Systemparametern, invariant gegenüber orthogonalen Zustandsvariablentransformationen und konsistent⁵ ist. Es handelt sich dabei jedoch streng genommen nicht um ein Maß, sondern lediglich um einen Indikator für die Beobachtbarkeit.

Die Größe weist aber einen einfachen Zusammenhang zum Distanzmaß der Beobachtbarkeit auf: sie stellt für dieses eine obere Schranke dar! Um dies zu zeigen sei für eine beliebige natürliche Zahl $l \leq n$ ein Vektor \mathbf{w} mit der Länge $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$ so gewählt, dass die Norm $\|\mathbf{C}\mathbf{P}_l\mathbf{w}\|_2$ möglichst klein wird, d.h. dass

$$\bar{\sigma}_l = \|\mathbf{C}\mathbf{P}_l\mathbf{w}\|_2 \quad (8.12)$$

gilt. Aufgrund der Konstruktion von \mathbf{P}_l gilt außerdem

$$\sigma_l = \sigma_{\max} \{(s_i \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{P}_l\}, \quad (8.13)$$

wobei σ_{\max} den größten Singulärwert der Matrix bezeichnet; daraus folgt insbesondere

$$\sigma_l \geq \|(\mathbf{A} - s_i \mathbf{E})\mathbf{P}_l\mathbf{w}\|_2. \quad (8.14)$$

Mit der Zielfunktion (5.45) des Distanzmaßes μ_0 erhält man so

$$\mu_0^2 \leq \|(\mathbf{A} - s_i \mathbf{E})\mathbf{P}_l\mathbf{w}\|_2^2 + \|\mathbf{C}\mathbf{P}_l\mathbf{w}\|_2^2 \leq \sigma_l^2 + \bar{\sigma}_l^2. \quad (8.15)$$

und daraus die behauptete Beziehung

$$\mu_0 \leq \kappa_0^{(i)}. \quad (8.16)$$

Beispiel 28. Man betrachte das System

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \alpha & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

⁴Zur Konsistenz mit der beim Distanzmaß μ_d benutzten Notation wird auch bei dieser Größe $\kappa_0^{(i)}$ der Dimensionsverlust d , hier also $d = 0$, als Index angegeben.

⁵D.h. $\kappa_0^{(i)} = 0$ gilt für zumindest einen Eigenwert s_i genau dann, wenn das System nicht beobachtbar ist

mit dem reellen Parameter α . Die Systemmatrix besitzt einen doppelten Eigenwert bei

$$s_1 = s_2 = -2.$$

Für diesen Eigenwert erhält man die Singulärwertzerlegung⁶

$$s_1 \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} |\alpha| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\text{sign}(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Singulärwerte sind somit

$$\sigma_1 = |\alpha|, \quad \sigma_2 = 0$$

und man ermittelt weiterhin gemäß Relation (8.7)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \sqrt{\sigma_{\min} \left(\begin{bmatrix} -\text{sign}(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{sign}(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{\sigma_{\min} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)} = 0, \\ \bar{\sigma}_2 &= \sqrt{\sigma_{\min} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{\sigma_{\min}(1)} = 1. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Indikator

$$\begin{aligned} \kappa_0 = \kappa_0^{(1)} = \kappa_0^{(2)} &= \min(\sqrt{\sigma_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}, \sqrt{\sigma_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}) \\ &= \min(|\alpha|, 1). \end{aligned}$$

Man erkennt, dass der für $\alpha = 0$ auftretende Beobachtbarkeitsverlust korrekt angezeigt wird. \triangle

8.2. Erweiterung auf die perspektivische Beobachtbarkeit

Der im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Indikator für die Beobachtbarkeit lässt sich auf intuitive Weise auf die perspektivische Beobachtbarkeit (hier für den Dimensionsverlust $d = 1$) übertragen: Dazu muss lediglich anstelle von (8.3) die Singulärwertzerlegung

$$(s_{i_1} \mathbf{E} - \mathbf{A})(s_{i_2} \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{U} \text{diag}(\sigma_j) \mathbf{V}^H \quad (8.17)$$

zu einem Eigenwertepaar s_{i_1}, s_{i_2} ermittelt werden⁷. Damit stellen die zum Singulärwert null gehörigen Spalten der Matrix \mathbf{V} Rechtseigenvektoren (bzw. bei mehrfachen Eigenwerten gegebenenfalls Eigen- und Hauptvektoren) zu s_{i_1}, s_{i_2} dar.

⁶Hierbei wird (willkürlich) $\text{sign}(0) = 1$ festgesetzt.

⁷Analog zur Bewertung der Beobachtbarkeit einzelner Eigenwerte wird auf diese Weise natürlich die perspektivische Beobachtbarkeit von Eigenwertpaaren bewertet.

Für die perspektivische Beobachtbarkeit ist deren lineare Unabhängigkeit nach Multiplikation mit \mathbf{C} ausschlaggebend. Im Falle des Verschwindens von l Singulärwerten ist diese äquivalent zur Spaltenregularität der Matrix $\mathbf{C}\mathbf{P}_l$ mit \mathbf{P}_l aus (8.5). Diese kann durch Berechnung von $\bar{\sigma}_l$ gemäß Relation (8.7) beurteilt werden.

Damit bietet sich

$$\kappa_1^{(i_1, i_2)} := \min_j \sqrt{\sigma_j^2 + \bar{\sigma}_j^2} \quad (8.18)$$

als Indikator für die perspektivische Beobachtbarkeit des Eigenwertpaars s_{i_1}, s_{i_2} an. Man kann leicht nachprüfen, dass

$$\kappa_1^{(i_1, i_2)} = 0 \iff \text{rang} \begin{bmatrix} (s_{i_1} \mathbf{E} - \mathbf{A}) & (s_{i_2} \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix} < n \quad (8.19)$$

und $\kappa_1^{(i_1, i_2)}$ ferner stetig und invariant unter orthogonalen Zustandsraumtransformationen ist.

Auch hier gilt sinngemäß die Anmerkung zu $\kappa_0^{(i)}$ aus dem vorangegangenen Abschnitt: Es handelt sich bei $\kappa_1^{(i_1, i_2)}$ streng genommen nicht um ein Maß für die perspektivische Beobachtbarkeit sondern lediglich um einen einfachen Indikator, der einen Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit anzeigt.

Weiterhin sei angemerkt, dass die Frage offen bleibt, ob κ_1 , so wie κ_0 , eine obere Schranke für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit darstellt. Der diesbezügliche Beweis aus Abschnitt 8.1 ist nämlich nicht auf den Dimensionsverlust $d = 1$ übertragbar. Es kann lediglich Folgendes ausgesagt werden: Der Indikator $\kappa_1^{(i_1, i_2)}$ für das Eigenwertpaar s_{i_1}, s_{i_2} ist jedenfalls dann eine obere Schranke für das Distanzmaß μ_1 , wenn das Minimum in Relation (8.18) für $j = n - 1$ angenommen wird. Dann erhält man nämlich die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mu_1 &\leq \sqrt{\|(\mathbf{E} - \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1}^H) \mathbf{A} \mathbf{P}_{n-1}\|_{\mathbb{F}}^2 + \|\mathbf{C} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{u}\|_2^2} = \|\mathbf{C} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{u}\|_2 \\ &\leq \sqrt{\sigma_{\min}(\mathbf{P}_{n-1}^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{P}_{n-1})} = \kappa_1^{(i_1, i_2)}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

da unter allen Umständen⁸ folgende Beziehung erfüllt ist:

$$(s_{i_1} \mathbf{E} - \mathbf{A})(s_{i_2} \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{0}. \quad (8.21)$$

Es gilt dementsprechend $\sigma_{n-1} = 0$ und die Spalten der orthonormalen Matrix \mathbf{P}_{n-1} spannen einen \mathbf{A} -invarianten Unterraum auf.

Folgende Beispiele zeigen, dass dieser Indikator manchmal durchaus mit den in Kapitel 7 erhaltenen Ergebnissen für das Optimierungsproblem des Distanzmaßes der perspektivischen Beobachtbarkeit vergleichbar ist:

⁸Für den Fall $s_{i_1} = s_{i_2}$ wird vorausgesetzt, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes s_{i_1} zumindest zwei beträgt.

Beispiel 29. Betrachtet wird das System aus Beispiel 25 bzw. 26 mit den Daten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\alpha & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

und dem reellen Parameter α . Wie in den anderen Beispielen wird dessen perspektivische Beobachtbarkeit für den Dimensionsverlust $d = 1$ untersucht.

Abbildung 8.1 zeigt das Minimum der gemäß Relation (8.19) ermittelten Zahlen $\kappa_1^{(i_1, i_2)}$

$$\kappa_1 := \min_{i_1, i_2} \kappa_1^{(i_1, i_2)} \quad (8.23)$$

in Abhängigkeit vom Parameter α . Zum Vergleich ist außerdem die in Beispiel 26 ermittelte beste obere Schranke für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit dargestellt. Man erkennt, dass beide Verläufe sich hinsichtlich der Skalierung zwar teilweise beträchtlich unterscheiden, jedoch grundsätzlich eine ähnliche Form aufweisen. Die Position des Maximums der beiden Kurven unterscheidet sich nur geringfügig. \triangle

Beispiel 30. Es wird das System aus Beispiel 27 für den Fall $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{q}$ und mit der bezüglich der letzten Zeile normierten Ausgangsmatrix betrachtet. D.h. die Systemdaten lauten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{q} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}(\mathbf{E} - \mathbf{h}\mathbf{h}^T) & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\mathbf{h}^T & \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \end{bmatrix}, \quad (8.24)$$

und für den Normalvektor \mathbf{h} wird die in einer *beliebigen*⁹ Ebene um den Winkel φ gedrehte Rotationsachse \mathbf{q} gewählt. Die Eigenwerte der Systemmatrix lauten, wie in Relation (7.64) angegeben,

$$s_1 = j\omega, \quad s_2 = -j\omega, \quad s_{3,4} = 0. \quad (8.25)$$

Der vorgestellte Indikator $\kappa_1^{(i_1, i_2)}$ für die perspektivische Beobachtbarkeit des Eigenwertpaares s_{i_1}, s_{i_2} wird nun für verschiedene Kombinationen von Eigenwerten untersucht. Zunächst wird das konjugiert komplexe Eigenwertpaar s_1, s_2 betrachtet. Unter Berücksichtigung der spektralen Zerlegung¹⁰

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}\mathbf{W}\mathbf{R}^T \quad (8.26)$$

der Matrix $\boldsymbol{\Omega}$, der Tatsache, dass aufgrund der Eigenwerte der Matrix \mathbf{W}

$$\mathbf{W}^2 + \omega^2\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (8.27)$$

⁹Im Gegensatz zu Beispiel 27 wird *nicht* vorausgesetzt, dass die Rotation gemäß Relation (7.57), d.h. in der y - z -Ebene, stattfindet.

¹⁰Diese spektrale Zerlegung von $\boldsymbol{\Omega}$ ergibt sich anhand der Beziehung $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{q} = \mathbf{0}$ und Relation (3.53).

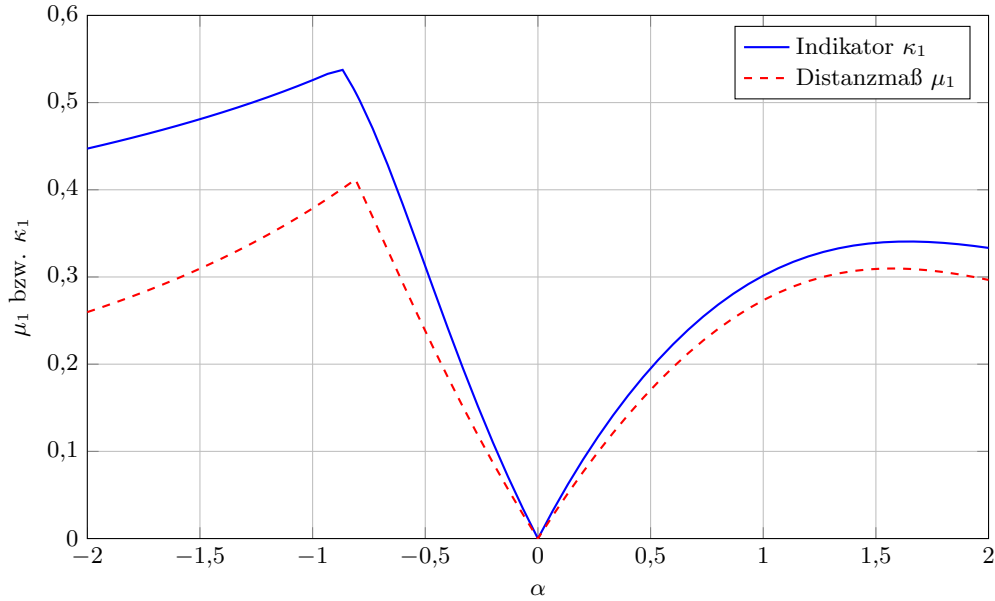


Abbildung 8.1.: Verlauf des einfachen Indikators κ_1 und der besten ermittelten oberen Schranke des Distanzmaßes μ_1 für die perspektivische Beobachtbarkeit in Abhängigkeit des Parameters α

gilt und der Orthogonalitätsbeziehung

$$\mathbf{E} = [\mathbf{R} \quad \mathbf{q}] \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \\ \mathbf{q}^T \end{bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T + \mathbf{q}\mathbf{q}^T, \quad (8.28)$$

erhält man für die Matrix aus Relation (8.17) die Singulärwertzerlegung

$$(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})(-j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \Omega^2 + \omega^2\mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{q} & \mathbf{R} \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^2 & & \\ & \omega^2 & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & 1 \\ \mathbf{q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (8.29)$$

Die Singulärwerte lauten demnach

$$\sigma_1 = \omega^2, \quad \sigma_2 = \omega^2, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = 0. \quad (8.30)$$

Hinsichtlich der zugehörigen Zahlen $\bar{\sigma}_l$ kann man anhand von Relation (8.18) unmittelbar erkennen, dass zur Ermittlung von $\kappa_1^{(1,2)}$ aufgrund der Gleichheit von σ_1 und σ_2 bzw. σ_3 und σ_4 nur die Werte $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_3$ benötigt werden. Für den ersten erhält man unmittelbar aus Relation (8.8b)

$$\bar{\sigma}_1 = \sqrt{\sigma_{\min}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})} = 0, \quad (8.31)$$

da der Rang von \mathbf{C} kleiner als n ist. Für den zweiten Wert betrachtet man die unter Verwendung der Matrizen

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

und

$$\mathbf{C}^H \mathbf{C} = \frac{f^2}{1+f^2} \mathbf{E} + \frac{1}{1+f^2} \begin{bmatrix} (1-f^2)\mathbf{h}\mathbf{h}^T & -f\mathbf{h} \\ -f\mathbf{h}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

gebildete, in Relation (8.7) auftretende Matrix

$$\mathbf{P}_3^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{P}_3 = \frac{f^2}{1+f^2} \mathbf{E} + \frac{1-f^2}{1+f^2} \mathbf{R}^T \mathbf{h}\mathbf{h}^T \mathbf{R}. \quad (8.34)$$

Deren beide Singulär- und zugleich auch Eigenwerte λ_1, λ_2 lauten¹¹

$$\lambda_1 = \frac{f^2}{1+f^2}, \quad \lambda_2 = \frac{f^2 + (1-f^2)\mathbf{h}^T \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{h}}{1+f^2}. \quad (8.35)$$

Die Einheitsvektoren \mathbf{h} und \mathbf{q} schließen durch die spezielle Wahl von \mathbf{h} den Winkel φ ein, sodass

$$\mathbf{h}^T \mathbf{q} = \cos \varphi \quad (8.36)$$

gilt. Mit dem daraus abgeleiteten Zusammenhang

$$\mathbf{h}^T \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{h} = \mathbf{h}^T (\mathbf{E} - \mathbf{q}\mathbf{q}^T) \mathbf{h} = 1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi \quad (8.37)$$

lässt sich der Ausdruck für λ_2 vereinfachen. Damit erhält man

$$\bar{\sigma}_3 = \min \left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2} \right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{f^2}{1+f^2}} & f \leq 1 \\ \sqrt{\frac{f^2 + (1-f^2)\sin^2 \varphi}{1+f^2}} & f > 1. \end{cases} \quad (8.38)$$

Insgesamt ergibt sich so der Indikator $\kappa_1^{(1,2)}$ zum Eigenwertpaar s_1, s_2 gemäß Relation (8.18) zu

$$\kappa_1^{(1,2)} = \min \left(\sqrt{\sigma_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}, \sqrt{\sigma_3^2 + \bar{\sigma}_3^2} \right) = \begin{cases} \min \left(\omega^2, \sqrt{\frac{f^2}{1+f^2}} \right) & f \leq 1 \\ \min \left(\omega^2, \sqrt{\frac{f^2 + (1-f^2)\sin^2 \varphi}{1+f^2}} \right) & f > 1. \end{cases} \quad (8.39)$$

Es wird nun der zweifache Eigenwert $s_{3,4} = 0$ betrachtet. Man erhält die Singulär-

¹¹Für einen beliebigen nichttrivialen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ besitzt die Matrix $\mathbf{v}\mathbf{v}^H$ genau einen von null verschiedenen Eigenwert mit dem Wert $\mathbf{v}^H \mathbf{v}$.

wertzerlegung

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} & \mathbf{q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^2 \mathbf{E} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{q}^T & 0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.40)$$

d.h. auch in diesem Fall lauten die Singulärwerte

$$\sigma_1 = \omega^2, \quad \sigma_2 = \omega^2, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = 0. \quad (8.41)$$

Analog zu vorhin gilt $\bar{\sigma}_1 = 0$, sodass lediglich die Zahl $\bar{\sigma}_3$ bestimmt werden muss. Zu diesem Zweck fasst man die zu σ_3 und σ_4 gehörigen Singulärvektoren in der Matrix

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.42)$$

zusammen und bildet damit die Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_3^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{P}_3 &= \frac{f^2}{1+f^2} \mathbf{E} + \frac{1}{1+f^2} \begin{bmatrix} (1-f^2) \mathbf{q}^T \mathbf{h} \mathbf{h}^T \mathbf{q} & -f \mathbf{q}^T \mathbf{h} \\ -f \mathbf{h}^T \mathbf{q} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{f^2}{1+f^2} \mathbf{E} + \frac{1}{1+f^2} \begin{bmatrix} (1-f^2) \cos^2 \varphi & -f \cos \varphi \\ -f \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Das Quadrat von $\bar{\sigma}_3$ ist deren kleinster Eigenwert, welcher sich zu

$$\bar{\sigma}_3^2 = \frac{2f^2 + (1-f^2) \cos^2 \varphi - \sqrt{(1-f^2)^2 \cos^4 \varphi + 4f^2 \cos^2 \varphi}}{2(1+f^2)} \quad (8.44)$$

ergibt. Der Indikator $\kappa_1^{(3,4)}$ ist somit durch

$$\kappa_1^{(3,4)} = \min \left(\omega^2, \sqrt{\frac{2f^2 + (1-f^2) \cos^2 \varphi - \sqrt{(1-f^2)^2 \cos^4 \varphi + 4f^2 \cos^2 \varphi}}{2(1+f^2)}} \right) \quad (8.45)$$

gegeben.

Es wird nun das Eigenwertpaar s_1, s_3 betrachtet. Der zugehörige Indikator $\kappa_1^{(1,3)}$ stimmt mit den Indikatoren für die verbleibenden Eigenwertkombinationen überein¹²:

$$\kappa_1^{(1,3)} = \kappa_1^{(2,3)} = \kappa_1^{(1,4)} = \kappa_1^{(2,4)}. \quad (8.46)$$

Zur Ermittlung dieser Indikatoren schreibt man die Matrix aus Relation (8.17) in der

¹²Dies ist eine Konsequenz der Tatsache, dass $s_1 = s_2^*$ und $s_3 = s_4$ gilt.

Form¹³

$$\begin{aligned}
 (-\mathbf{A})(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} \Omega^2 - j\omega\Omega & -j\omega\mathbf{q} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\mathbf{R}\mathbf{w}^* & -j\mathbf{q} & \mathbf{R}\mathbf{w} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\omega^2 & & & \\ & \omega & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T\mathbf{R}^T & 0 \\ 0 & 1 \\ \mathbf{w}^H\mathbf{R}^T & 0 \\ \mathbf{q}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (8.47)
 \end{aligned}$$

mit dem komplexwertigen Vektor \mathbf{w} aus Relation (7.63) an. Man erkennt, dass sich gegenüber $\kappa_1^{(1,2)}$ und $\kappa_1^{(3,4)}$ etwas kompliziertere Zusammenhänge ergeben: Die Reihenfolge der Singulärwerte und Singulärvektoren hängt von ω ab. Konkret gilt

$$\sigma_1 = \omega, \quad \sigma_2 = 2\omega^2, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = 0 \quad \text{für } \omega \leq \frac{1}{2}, \quad (8.48a)$$

$$\sigma_1 = 2\omega^2, \quad \sigma_2 = \omega, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = 0 \quad \text{für } \omega > \frac{1}{2}. \quad (8.48b)$$

In der Regel gilt außerdem $\sigma_1 \neq \sigma_2$, sodass sowohl $\bar{\sigma}_2$ als auch $\bar{\sigma}_3$ ermittelt werden müssen.

Es wird zunächst $\bar{\sigma}_3$ ermittelt. Zur Untersuchung der mithilfe von

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{w} & \mathbf{q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.49)$$

gebildeten Matrix $\mathbf{P}_3^H\mathbf{C}^H\mathbf{C}\mathbf{P}_3$ wird sich dabei die komplexwertige Abkürzung

$$\delta(\varphi) := \mathbf{w}^H\mathbf{R}^T\mathbf{h} \quad (8.50)$$

als nützlich erweisen; insbesondere ist bemerkenswert, dass deren Betrag explizit in Abhängigkeit von φ angegeben werden kann: Es gilt nämlich¹⁴

$$\begin{aligned}
 |\delta(\varphi)|^2 &= \mathbf{h}^T\mathbf{R}\mathbf{w}\mathbf{w}^H\mathbf{R}^T\mathbf{h} = \mathbf{h}^T(\mathbf{E} - \mathbf{q}\mathbf{q}^T - \mathbf{R}\mathbf{w}^*\mathbf{w}^T\mathbf{R}^T)\mathbf{h} \\
 &= 1 - \cos^2\varphi - |\delta(\varphi)|^2, \quad (8.51)
 \end{aligned}$$

woraus

$$|\delta(\varphi)|^2 = \frac{\sin^2\varphi}{2} \quad (8.52)$$

¹³Man benutzt dazu die spektralen Zerlegungen $\mathbf{W} = j\omega\mathbf{w}\mathbf{w}^H - j\omega\mathbf{w}^*\mathbf{w}^T$ und $\mathbf{E} = \mathbf{w}\mathbf{w}^H + \mathbf{w}^*\mathbf{w}^T$ sowie Relation (8.26).

¹⁴Es wird die Tatsache verwendet, dass die Matrix $[\mathbf{R}\mathbf{w} \quad \mathbf{R}\mathbf{w}^* \quad \mathbf{q}]$ unitär ist.

folgt. Mit der eingeführten Abkürzung erhält man die Matrix

$$\mathbf{P}_3^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{P}_3 = \frac{f^2}{1+f^2} \mathbf{E} + \frac{1-f^2}{1+f^2} \begin{bmatrix} \delta(\varphi) \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta^*(\varphi) & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (8.53)$$

Deren Eigenwerte λ_1, λ_2 sind durch

$$\lambda_1 = \frac{f^2}{1+f^2}, \quad \lambda_2 = \frac{f^2 + (1-f^2)\alpha^2(\varphi)}{1+f^2} \quad (8.54)$$

gegeben, wobei zur kompakteren Schreibweise die Abkürzung

$$\alpha(\varphi) := \sqrt{|\delta(\varphi)|^2 + \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \varphi}{2}} \quad (8.55)$$

verwendet wird. Es gilt somit

$$\bar{\sigma}_3 = \min(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{f^2}{1+f^2}} & f \leq 1 \\ \sqrt{\frac{f^2 + (1-f^2)\alpha^2(\varphi)}{1+f^2}} & f > 1. \end{cases} \quad (8.56)$$

Bei der Ermittlung von $\bar{\sigma}_2$ muss eine Fallunterscheidung hinsichtlich der Reihenfolge der Singulärwerte durchgeführt werden. Es wird zunächst der Fall $\omega \leq \frac{1}{2}$ betrachtet. In diesem Fall wird die mithilfe von¹⁵

$$\tilde{\mathbf{P}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{q} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (8.57)$$

gebildete Matrix

$$\tilde{\mathbf{P}}_2^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \tilde{\mathbf{P}}_2 = \frac{f^2}{1+f^2} \mathbf{E} + \frac{1-f^2}{1+f^2} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{h} \\ \mathbf{q}^T \mathbf{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T \mathbf{R} & \mathbf{h}^T \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

betrachtet. Da gemäß Relation (8.28) für den Einheitsvektor \mathbf{h}

$$\mathbf{h}^T \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{h} = \mathbf{h}^T \mathbf{h} = 1 \quad (8.59)$$

gilt, lauten deren Eigenwerte λ_1, λ_2

$$\lambda_1 = \frac{f^2}{1+f^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{1+f^2}, \quad (8.60)$$

¹⁵Zur Vereinfachung der Betrachtungen wird die Matrix \mathbf{P}_2 durch eine Matrix $\tilde{\mathbf{P}}_2$ ersetzt, welche aus \mathbf{P}_2 durch Multiplikation mit einer unitären Matrix von rechts gebildet wird. Die Matrizen $\mathbf{P}_2^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{P}_2$ und $\tilde{\mathbf{P}}_2^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \tilde{\mathbf{P}}_2$ weisen dieselben Eigen- bzw. Singulärwerte auf.

d.h. für $\omega \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$\bar{\sigma}_2 = \begin{cases} \sqrt{\frac{f^2}{1+f^2}} & f \leq 1 \\ \sqrt{\frac{1}{1+f^2}} & f > 1. \end{cases} \quad (8.61)$$

Für den Fall $\omega > \frac{1}{2}$ lautet die Matrix \mathbf{P}_2

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R}\mathbf{w} & \mathbf{q} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.62)$$

Benutzt man die zuvor in Relation (8.50) eingeführte Abkürzung δ , so ergibt sich die Matrix

$$\mathbf{P}_2^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{P}_2 = \frac{f^2}{1+f^2} \mathbf{E} + \frac{1}{1+f^2} \begin{bmatrix} 0 & -f\delta^*(\varphi) & -f \cos \varphi \\ -f\delta(\varphi) & (1-f^2)|\delta(\varphi)|^2 & (1-f^2)\delta(\varphi) \cos \varphi \\ -f \cos \varphi & (1-f^2)\delta^*(\varphi) \cos \varphi & (1-f^2) \cos^2 \varphi \end{bmatrix}. \quad (8.63)$$

Um deren Eigenwerte zu ermitteln, führt man eine Ähnlichkeitstransformation mit der unitären Matrix

$$\mathbf{Q} := \frac{1}{\sqrt{|\delta(\varphi)|^2 + \cos^2 \varphi}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{|\delta(\varphi)|^2 + \cos^2 \varphi} & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \delta(\varphi) \\ -\delta^*(\varphi) & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (8.64)$$

durch. Man erhält, unter Verwendung der in Relation (8.55) eingeführten Abkürzung α , die Matrix

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{P}_2^H \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{P}_2 \mathbf{Q} = \frac{f^2}{1+f^2} \mathbf{E} + \frac{1}{1+f^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f\alpha(\varphi) \\ 0 & -f\alpha(\varphi) & (1-f^2)\alpha^2(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (8.65)$$

Die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dieser Matrix lauten¹⁶

$$\lambda_1 = \frac{f^2}{1+f^2}, \quad (8.66a)$$

$$\lambda_2 = \frac{2f^2 + (1-f^2)\alpha^2(\varphi) + \sqrt{(1-f^2)^2\alpha^4(\varphi) + 4f^2\alpha^2(\varphi)}}{2(1+f^2)}, \quad (8.66b)$$

$$\lambda_3 = \frac{2f^2 + (1-f^2)\alpha^2(\varphi) - \sqrt{(1-f^2)^2\alpha^4(\varphi) + 4f^2\alpha^2(\varphi)}}{2(1+f^2)}. \quad (8.66c)$$

¹⁶Die Eigenwerte können aufgrund der Blockdiagonalstruktur des zweiten Summanden unmittelbar abgelesen bzw. durch Lösen einer quadratischen Gleichung berechnet werden.

Man erkennt, dass $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq \lambda_3$ gilt¹⁷, womit man für $\omega > \frac{1}{2}$

$$\bar{\sigma}_2 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{\frac{2f^2 + (1-f^2)\alpha^2(\varphi) - \sqrt{(1-f^2)^2\alpha^4(\varphi) + 4f^2\alpha^2(\varphi)}}{2(1+f^2)}} \quad (8.67)$$

erhält.

Zusammengefasst ergibt sich unter Verwendung der Abkürzungen

$$\alpha(\varphi) = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \varphi}{2}} \quad (8.68a)$$

$$\beta(\varphi, f) := \frac{2f^2 + (1-f^2)\alpha^2(\varphi) - \sqrt{(1-f^2)^2\alpha^4(\varphi) + 4f^2\alpha^2(\varphi)}}{2(1+f^2)} \quad (8.68b)$$

der Indikator $\kappa_1^{(1,3)}$ gemäß Relation (8.18) zu

$$\kappa_1^{(1,3)} = \begin{cases} \min\left(\omega, \sqrt{\frac{f^2}{1+f^2}}\right) & \omega \leq \frac{1}{2}, f \leq 1 \\ \min\left(\omega, \sqrt{4\omega^4 + \frac{1}{1+f^2}}, \sqrt{\frac{f^2+(1-f^2)\alpha^2(\varphi)}{1+f^2}}\right) & \omega \leq \frac{1}{2}, f > 1 \\ \min\left(2\omega^2, \sqrt{\omega^2 + \beta(\varphi, f)}, \sqrt{\frac{f^2}{1+f^2}}\right) & \omega > \frac{1}{2}, f \leq 1 \\ \min\left(2\omega^2, \sqrt{\omega^2 + \beta(\varphi, f)}, \sqrt{\frac{f^2+(1-f^2)\alpha^2(\varphi)}{1+f^2}}\right) & \omega > \frac{1}{2}, f > 1. \end{cases} \quad (8.69)$$

Der Indikator der perspektivischen Beobachtbarkeit κ_1 ist durch das Minimum der drei berechneten Indikatoren für die einzelnen Eigenwertpaare gegeben:

$$\kappa_1 = \min(\kappa_1^{(1,2)}, \kappa_1^{(3,4)}, \kappa_1^{(1,3)}). \quad (8.70)$$

In Abbildung 8.2 ist sein Verlauf in Abhängigkeit vom Winkel φ für die in Beispiel 27 verwendeten Parameterwerte dargestellt. In Abbildung 8.3 wird κ_1 für einige ausgewählte Werte der Brennweite f dem in Abbildung 7.6 gezeigten Verlauf des bezüglich der letzten Zeile normierten Distanzmaßes $\hat{\mu}_1$ gegenübergestellt. Man erkennt, dass auch hier der Indikator und das Distanzmaß durchaus vergleichbare Ergebnisse liefern. Von Nachteil ist dabei, dass dies auch für die aus praktischer Sicht unplausiblen Werte des Distanzmaßes für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $f > 1$ gilt. Die beim Distanzmaß zur Behebung dieses Problems durchgeführte Berücksichtigung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte ist beim Indikator jedoch nicht möglich. \triangle

¹⁷Dies folgt aus der Ungleichung $|1-f^2|\alpha^2(\varphi) \leq \sqrt{(1-f^2)^2\alpha^4(\varphi) + 4f^2\alpha^2(\varphi)}$.

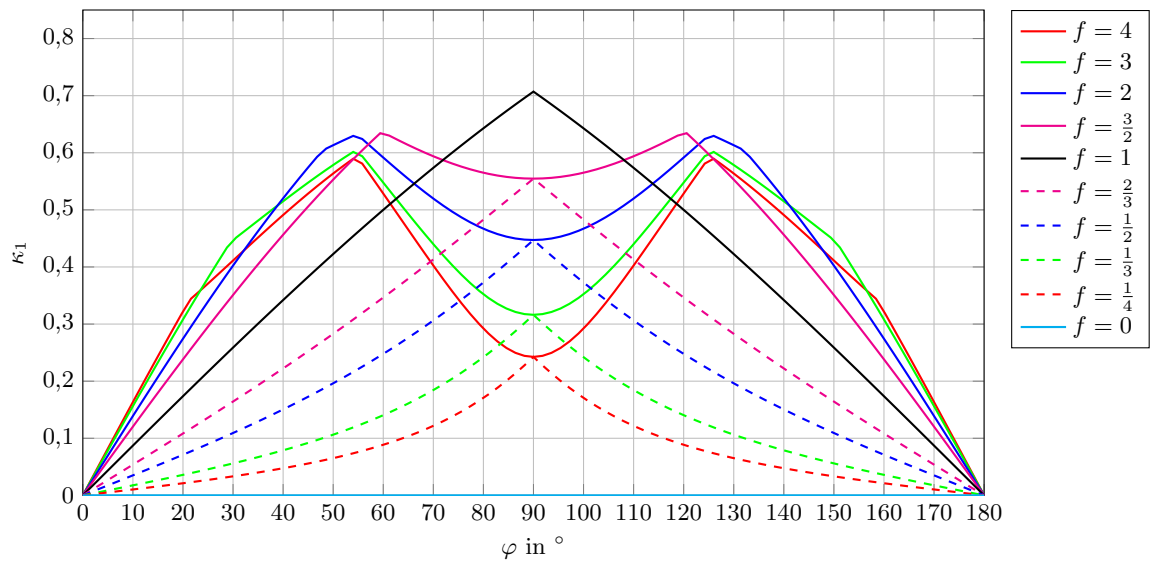


Abbildung 8.2.: Indikator κ_1 für die perspektivische Beobachtbarkeit in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f

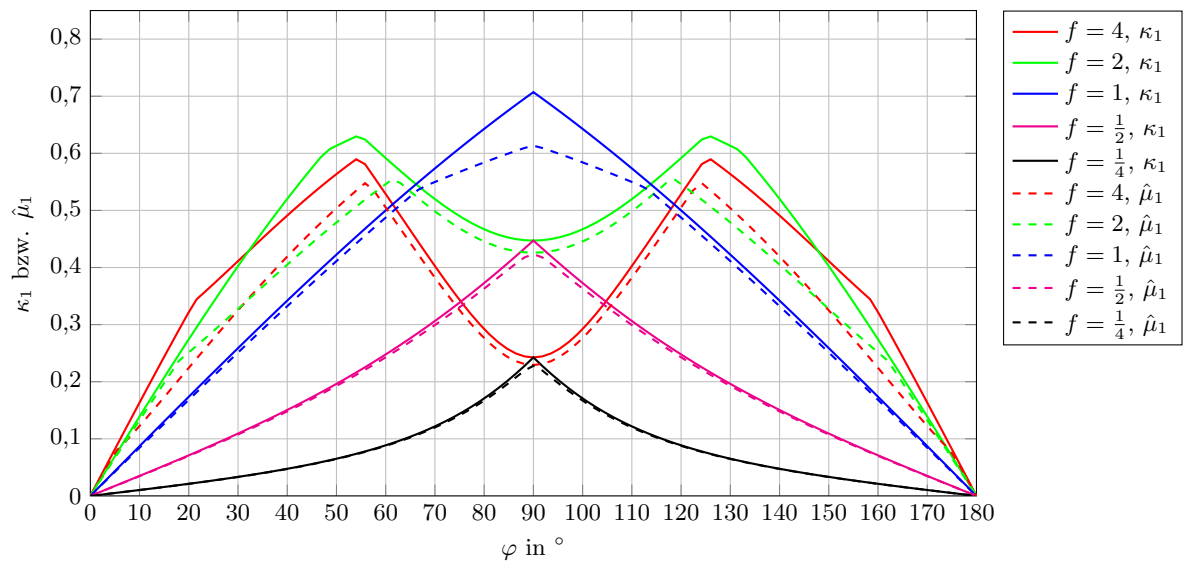


Abbildung 8.3.: Gegenüberstellung des Indikators κ_1 und des in Beispiel 27 ermittelten bezüglich der letzten Zeile normierten Distanzmaßes $\hat{\mu}_1$ in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f

8.3. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein einfacher Indikator κ_d für die perspektivische Beobachtbarkeit vorgeschlagen, dessen Ermittlung auf einfache Weise aus den Singulärwerten bestimmter Matrizen erfolgt. Die Überlegungen wurden dabei der Einfachheit halber auf die Dimensionsverluste $d = 0$ und $d = 1$ beschränkt; die Erweiterung auf höhere Dimensionenverluste ist aber geradlinig möglich.

Für den Dimensionsverlust $d = 0$ konnte gezeigt werden, dass dieser Indikator immer eine obere Schranke für das Distanzmaß der Beobachtbarkeit darstellt. Für den Fall $d = 1$ wurden im Rahmen von Beispielen mit dem Distanzmaß vergleichbare Ergebnisse erhalten. Als Nachteil gegenüber dem Distanzmaß erwies sich jedoch das Fehlen einer Möglichkeit zur Berücksichtigung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte.

Kapitel 9.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Methoden zur Bewertung der perspektivischen Beobachtbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme diskutiert.

Nach Einführung der formalen Definition dieser Eigenschaft wurde diese zunächst anhand einiger Beispiele veranschaulicht. Dabei wurde auf die Relevanz der Problemstellung im Kontext der optischen Positionserfassung sowie auf Unterschiede zur klassischen Beobachtbarkeit eingegangen. Es wurde gezeigt, dass sich die perspektivische Beobachtbarkeit von der klassischen Beobachtbarkeit in einem wesentlichen Punkt unterscheidet: Ihr Verlust bedeutet nicht, dass die zugrunde liegende Rekonstruktionsaufgabe prinzipiell scheitern muss; er impliziert lediglich die *Existenz* von Anfangszuständen, bei welchen dies der Fall ist. Daher muss auch unterschieden werden, ob komplexe Anfangszustände auftreten können oder ob diese auf reelle Werte beschränkt sind. Unter Einführung des Dimensionsverlustes d ist eine Verallgemeinerung der Eigenschaft möglich; die weiteren Betrachtungen wurden daher, soweit möglich, für allgemeinen Dimensionsverlust durchgeführt.

Zunächst wurde auf die (strukturelle) Überprüfung der Eigenschaft anhand algebraischer Kriterien eingegangen. Ein existierendes Kriterium für die perspektivische Beobachtbarkeit über den komplexen Zahlen wurde angegeben, welches eine Verallgemeinerung des Popov-Belevich-Hautus Kriteriums für die Beobachtbarkeit darstellt. Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge wurden einige alternative Varianten des Kriteriums diskutiert. Insbesondere wurde ein Analogon zur Beobachtbarkeitsmatrix gezeigt; dessen Verwendung ist jedoch leider nicht praktikabel. Da über den reellen Zahlen kein notwendiges und hinreichendes Kriterium existiert, wurde dieser Fall für den Dimensionsverlust $d = 1$ näher untersucht. Dabei konnte ein existierendes Kriterium erweitert werden, indem eine einschränkende Voraussetzung gelockert wurde. Weiterhin wurde ein notwendiges Kriterium gezeigt und anhand von Beispielen veranschaulicht. Die Formulierung eines allgemein gültigen, notwendigen und hinreichenden Kriteriums ist allerdings nicht gelungen; dies stellt eine interessante Fragestellung für zukünftige Arbeiten dar.

Für nicht perspektivisch beobachtbare Systeme wurde eine kanonische Form vorgestellt, welche ein Analogon zur Kalman-Zerlegung nicht beobachtbarer Systeme darstellt. Im Gegensatz zur Kalman-Zerlegung ist bei nicht perspektivisch beobachtbaren Systemen im Allgemeinen jedoch keine eindeutige Zerlegung des Zustandsraums in einen perspektivisch beobachtbaren und nicht beobachtbaren Teil möglich; die kanonische Form ist daher, wie anhand eines Beispiels gezeigt wurde, nicht eindeutig.

Anschließend wurde die quantitative Beurteilung der perspektivischen Beobachtbarkeit mit Hilfe des Distanzmaßes diskutiert; dieses stellt die kleinste Norm einer additiven Störung der Systemparameter dar, die zu einem Verlust der perspektivischen Beobachtbarkeit führt. Durch Übertragung eines Zusammenhangs zwischen Kalman-Zerlegung und Distanzmaß der Beobachtbarkeit konnte mit Hilfe der zuvor entwickelten kanonischen Form ein Optimierungsproblem für das Distanzmaß hergeleitet werden. Anhand einer Strukturierung dieses Optimierungsproblems wurden ferner Analogien zum Distanzmaß der Beobachtbarkeit aufgezeigt und eine Deutung der Optimierungsvariablen angegeben. Weiterhin wurde kurz die Berücksichtigung zusätzlicher Beschränkungen diskutiert. Auch bei diesen Betrachtungen erwies sich die Strukturierung des Problems als nützlich. Etwas ausführlicher wurde auf die Beschränkung der Störung auf reelle Werte eingegangen; dabei ergab sich eine strukturell zum unbeschränkten Optimierungsproblem ähnliche Zielfunktion, jedoch mit komplizierteren Nebenbedingungen. Die Verwendung dieses Optimierungsproblems zur hier nicht diskutierten Ermittlung des Distanzmaßes für reellwertige Störung kann für nachfolgende Arbeiten interessant sein.

Motiviert durch die Anwendbarkeit auf Probleme aus dem Bereich der Bildverarbeitung wurden einige Modifikationen des Distanzmaßes vorgeschlagen. Zunächst wurde anstelle einer additiven eine multiplikative Störung der Ausgangsmatrix betrachtet. Es wurde gezeigt, dass sich dieser Fall durch eine geeignete Normierung der Ausgangsmatrix auf das klassische Distanzmaß zurückführen lässt. Anhand eines praxisrelevanten Beispiels wurde demonstriert, dass dieses normierte Distanzmaß jedoch mitunter unplausible Ergebnisse liefert. Durch eine alternative Normierung der Ausgangsmatrix konnten diese Probleme behoben werden. Es wurde gezeigt, dass auch diese Normierungsvorschrift ein Distanzmaß liefert, bei welchem die Störung mit der Norm der letzten Zeile der Ausgangsmatrix skaliert wird.

Für Systeme, deren Zustands- und Ausgangsvektoren homogene Koordinaten von Punkten bzw. von deren Projektionen darstellen, wurde die Lage nicht rekonstruierbarer Punkte untersucht. Es wurde gezeigt, dass deren Norm, d.h. deren Abstand vom Ursprung, auch bei nicht perspektivisch beobachtbaren Systemen nach unten durch eine Mindestnorm beschränkt sein kann. Basierend auf der Ermittlung einer oberen Schranke für diese Mindestnorm wurde eine Modifikation des Distanzmaßes vorgeschlagen, bei welcher diese Schranke einen vorgegebenen Wert nicht übersteigt. Dies ist besonders für die quantitative Beurteilung der perspektivischen Beobachtbarkeit von Systemen relevant, bei welchen die Norm der auftretenden Punkte nach oben beschränkt ist.

Eine weitere Modifikation war durch eine Vereinfachung des Optimierungsproblems motiviert. Durch eine semidefinite Relaxation der nichtkonvexen Nebenbedingung des Optimierungsproblems ergab sich ein konsistentes Maß für die perspektivische Beobachtbarkeit, welches eine untere Schranke für das Distanzmaß darstellt. Es wurde gezeigt, dass diese als relaxiertes Distanzmaß bezeichnete Größe dem Distanzmaß einer Nebeneinanderschaltung mehrerer Kopien des betrachteten Systems entspricht. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass ein Teil des so erhaltenen Optimierungsproblems effizient mit Hilfe der semidefiniten Programmierung gelöst werden kann. Es verbleibt dadurch ein unbeschränktes (nichtlineares) Optimierungsproblem mit einer von der Systemordnung unabhängigen Anzahl an Optimierungsvariablen.

Im Hinblick auf die numerische Lösung der erhaltenen Optimierungsprobleme wurde zunächst die Wahl sinnvoller Startwerte diskutiert. Mit diesen Betrachtungen gewappnet wurden zwei Lösungsansätze vorgestellt: ein Gradientenverfahren zur Ermittlung des Distanzmaßes und ein iterativer Algorithmus zur Bestimmung des relaxierten Distanzmaßes. Ersteres ist ein existierendes Verfahren, das für die vorliegende nichtkonvexe Nebenbedingung geeignet ist und diese mit Hilfe der Cayley-Transformation berücksichtigt. Zweiterer wurde durch Übertragung eines Verfahrens für das Distanzmaß der Beobachtbarkeit erhalten und basiert auf der abwechselnden Lösung zweier Teilprobleme. Obgleich die beiden Verfahren nicht direkt miteinander verglichen wurden, sei an dieser Stelle erwähnt, dass beide Stärken und Schwächen aufweisen: Während bei dem Gradientenverfahren keine Relaxation des Distanzmaßes vorausgesetzt wird, besitzt der iterative Algorithmus eine deutlich geringere Zahl an Optimierungsvariablen. Es sind jedoch beide Algorithmen noch ausbaufähig; insbesondere die Untersuchung und, wenn möglich, auch die Verbesserung ihrer Konvergenzeigenschaften kann für zukünftige Arbeiten interessant sein. Ebenso ist natürlich auch die Anwendung anderer, für nichtkonvexe Optimierungsprobleme geeigneter Verfahren denkbar.

Im Rahmen eines abschließenden Beispiels wurde die perspektivische Beobachtbarkeit eines praxisrelevanten Systems mit Hilfe des Distanzmaßes in Abhängigkeit von Ausrichtung und Brennweite der eingesetzten Kamera beurteilt. Dabei wurde auch der Vorteil einer Begrenzung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte demonstriert. Durch eine Erweiterung des semidefiniten Programms konnte diese Begrenzung in einfacher Weise beim iterativen Algorithmus berücksichtigt werden.

In allen vorgestellten Beispielen zeigte sich, dass die für Distanzmaß und relaxiertes Distanzmaß erhaltenen Ergebnisse übereinstimmen. Bisher konnte kein System gefunden werden, bei dem dies nicht der Fall ist. In zukünftigen Arbeiten wird daher die hier leider unbeantwortet gebliebene Frage zu untersuchen sein, ob Distanzmaß und relaxiertes Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit generell übereinstimmen. Unabhängig davon stellt für praktische Anwendungen jedenfalls aber auch das einfachere relaxierte Distanzmaß eine sinnvolle Möglichkeit zur quantitativen Bewertung der perspektivischen Beobachtbarkeit dar.

Abseits der komplizierten Optimierungsprobleme des Distanzmaßes wurde schließlich noch eine alternative Methode zur quantitativen Bewertung der perspektivischen Beobachtbarkeit gezeigt. Dazu konnte zunächst ein existierendes, jedoch nicht konsistentes Beobachtbarkeitsmaß zu einem konsistenten Indikator erweitert werden. Insbesondere wurde gezeigt, dass der angegebene Indikator immer eine obere Schranke für das Distanzmaß der Beobachtbarkeit darstellt. Der Indikator wurde anschließend auf die perspektivische Beobachtbarkeit übertragen, wobei der Vorteil gegenüber dem Distanzmaß in der wesentlich einfacheren Berechenbarkeit liegt. Offen blieb dabei die Frage, ob der Indikator eine obere Schranke für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit darstellt. Anhand eines Beispiels wurde jedoch demonstriert, dass die damit erhaltenen Ergebnisse mitunter durchaus mit dem Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit vergleichbar sind. Das Fehlen einer Möglichkeit zur Berücksichtigung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte erwies sich allerdings als nachteilig.

Literaturverzeichnis

- [1] BURKE, J. V., A. S. LEWIS und M. L. OVERTON: *Pseudospectral Components and the Distance to Uncontrollability*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 26(2):350–361, 2004.
- [2] CARDEN, R.: *A Simple Algorithm for the Inverse Field of Values Problem*. Inverse Problems, 25(11):115019, 2009.
- [3] CHORIANOPOULOS, C., P. PSARRAKOS und F. UHLIG: *A Method for the Inverse Numerical Range Problem*. Electronic Journal of Linear Algebra, 20:198–206, 2010.
- [4] DAYAWANSA, W. P., B. K. GHOSH, C. MARTIN und X. WANG: *A Necessary and Sufficient Condition for the Perspective Observability Problem*. System & Control Letters, 25:159–166, 1995.
- [5] DIRR, G., U. HELMKE und J. JORDAN: *Control and Observation of the Matrix Riccati Differential Equation*. In: GHOSH, B., C. MARTIN und Y. ZHOU (Hrsg.): *Emergent Problems in Nonlinear Systems and Control*, Bd. 393 d. Reihe *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, S. 169–184. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [6] EDELMAN, A., T. A. ARIAS und S. T. SMITH: *The Geometry of Algorithms with Orthogonality Constraints*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 20(2):303–353, 1998.
- [7] EISING, R.: *Between Controllable and Uncontrollable*. Systems & Control letters, 4(5):263–264, 1984.
- [8] EISING, R.: *The Distance Between a System and the Set of Uncontrollable Systems*. In: *Mathematical Theory of Networks and Systems*, S. 303–314. Springer, 1984.
- [9] GANTMACHER, F.: *Matrizentheorie*. Springer, 1986.
- [10] GHOSH, B. K. und E. P. LOUCKS: *An Introduction to Perspective Observability and Recursive Identification Problems in Machine Vision*. In: *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Bd. 4, S. 3229–3234, 1994.
- [11] GHOSH, B. K. und C. F. MARTIN: *Homogeneous Dynamical Systems Theory*. IEEE Transactions on Automatic Control, 47:462–472, 2002.
- [12] GHOSH, B. K. und J. ROSENTHAL: *A Generalized Popov-Belevitch-Hautus Test of Observability*. IEEE Transactions on Automatic Control, 40:176–180, 1995.

- [13] HORN, R. A. und C. R. JOHNSON: *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [14] HUANG, Y. und S. ZHANG: *Complex Matrix Decomposition and Quadratic Programming*. Mathematics of Operations Research, 32(3):758–768, 2007.
- [15] JEYAKUMAR, V. und G. LI: *Exact SDP Relaxations for Classes of Nonlinear Semidefinite Programming Problems*. Operations Research Letters, 40(6):529–536, 2012.
- [16] LÖFBERG, J.: *YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*. In: *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
- [17] LITZ, L.: *Modale Maße für Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Regelbarkeit und Dominanz – Zusammenhänge, Schwachstellen, neue Wege*. Regelungstechnik, 31(5):148–158, 1983.
- [18] LUO, Z.-Q., W.-K. MA, A.-C. SO, Y. YE und S. ZHANG: *Semidefinite Relaxation of Quadratic Optimization Problems*. IEEE Signal Processing Magazine, 27(3):20–34, 2010.
- [19] MANTON, J. H.: *Optimization Algorithms Exploiting Unitary Constraints*. IEEE Transactions on Signal Processing, 50(3):635–650, 2002.
- [20] MOSCHIK, S.: *Steuerbarkeitsmaße für lineare zeitinvariante Systeme*. Doktorarbeit, TU Graz, 2011.
- [21] MOSCHIK, S., M. STADLER und N. DOURDOUMAS: *Zur Überprüfung der perspektivischen Beobachtbarkeit zeitkontinuierlicher linearer zeitinvarianter Systeme*. at – Automatisierungstechnik, 60(12):735–742, 2012.
- [22] SCHALKOFF, R. J.: *Digital image processing and computer vision*. Wiley, New York, 1989.
- [23] SCHÖNEMANN, P. H.: *On the Formal Differentiation of Traces and Determinants*. Multivariate Behavioral Research, 20(2):113–139, 1985.
- [24] SOJOUDI, S. und J. LAVAEI: *On the Exactness of Semidefinite Relaxation for Nonlinear Optimization over Graphs*. In: *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control*, S. 1043–1057, 2013.
- [25] STADLER, M.: *Überprüfung perspektivischer Beobachtbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme*. Diplomarbeit, TU Graz, 2010.
- [26] STURM, J. F.: *Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones*. Optimization Methods and Software, 11(1-4):625–653, 1999.
- [27] STURM, J. F. und S. ZHANG: *On Cones of Nonnegative Quadratic Functions*. Mathematics of Operations Research, 28(2):246–267, 2003.

- [28] VANDENBERGHE, L. und S. BOYD: *Semidefinite Programming*. SIAM Review, 38(1):49–95, 1996.
- [29] WEN, Z. und W. YIN: *A Feasible Method for Optimization with Orthogonality Constraints*. Mathematical Programming, 142(1-2):397–434, 2013.
- [30] WICKS, M. und R. A. DECARLO: *Computing the Distance to an Uncontrollable System*. IEEE Transactions on Automatic Control, 36:39–49, 1991.
- [31] YAMADA, I. und T. EZAKI: *An Orthogonal Matrix Optimization by Dual Cayley Parametrization Technique*. In: *4th International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*, S. 35–40. Springer, 2003.
- [32] YE, Y. und S. ZHANG: *New Results on Quadratic Minimization*. SIAM Journal on Optimization, 14(1):245–267, 2003.

Abbildungsverzeichnis

2.1.	Trajektorie des Punktes $\mathbf{p}(t)$ aus Beispiel 1 sowie deren perspektivische Projektion $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ in die Ebene $y = 1$	9
2.2.	Zwei Trajektorien $\mathbf{p}^{(1)}(t)$ und $\mathbf{p}^{(2)}(t)$ des bewegten Drehkörpers aus Beispiel 2 sowie deren perspektivische Projektionen in die Ebene $y = 1$	10
2.3.	Trajektorie des Punktes $\mathbf{p}(t)$ aus Beispiel 3 sowie deren perspektivische Projektion $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ in die Ebene $y = 0$	13
2.4.	Trajektorien eines nicht perspektivisch beobachtbaren Systems	14
3.1.	Eigenvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ und ausgewählte Trajektorien eines nicht perspektivisch beobachtbaren Systems	25
3.2.	Zwei Ausgangsgrößenverläufe des Systems aus Beispiel 10	39
3.3.	Zwei Ausgangsgrößenverläufe des Systems aus Beispiel 11	42
3.4.	Anforderungen von Satz 20 an die Lage des Eigenwertpaares bzw. -tripels, welches die PBH-Rangbedingung(en) verletzt	43
4.1.	Strukturbild eines gemäß der Kalman-Zerlegung transformierten, nicht beobachtbaren Systems	50
4.2.	Strukturbild eines gemäß Satz 21 transformierten, für den Dimensionsverlust $d = 1$ nicht perspektivisch beobachtbaren Systems	53
4.3.	Durchschnitt $V_1 \cap V_2$ zweier Mengen V_1 und V_2	61
6.1.	Distanzmaß $\hat{\eta}_0$ bei Beschränkung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte durch $R = 0$	113
6.2.	Nebeneinanderschaltung von r Kopien des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{C})	131
6.3.	Durch relaxierte Störung $(\overline{\delta\mathbf{A}}, \overline{\delta\mathbf{C}})$ mögliche Störungen und Verkopplungen zweier Kopien des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{C})	131
7.1.	Verlauf der Zielfunktionswerte $J_{\text{pu}}(\mathbf{V}^{(k)})$ bei dem vorgestellten Gradientenverfahren mit Startwerten aus Relation (7.30)	148
7.2.	Bestes mit dem vorgestellten Gradientenverfahren ermitteltes lokales Minimum der Zielfunktion J_{pu} des Optimierungsproblems (7.1) in Abhängigkeit des Parameters α	148
7.3.	Verlauf der quadrierten, relaxierten Distanz $\nu_{1,\mathbf{S}^{(k)}}^2$ bei Anwendung des ursprünglichen und des modifizierten iterativen Algorithmus und Wahl der Startwerte gemäß Relation (7.52)	154

7.4.	Beste mit dem Gradientenverfahren bzw. dem vorgestellten modifizierten iterativen Algorithmus ermittelte lokale Minima der Optimierungsprobleme für das Distanzmaß μ_1 bzw. das relaxierte Distanzmaß ν_1 in Abhängigkeit des Parameters α	154
7.5.	Lage von Rotationsachse \mathbf{q} , Normalvektor $\mathbf{h}(\varphi)$ der Bildebene und Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ in der y - z -Ebene	156
7.6.	Beste für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}$ erhaltene lokale Minima des bezüglich der letzten Zeile normierten Distanzmaßes $\hat{\mu}_1$ in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f	159
7.7.	Für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}$ erhaltene obere Schranke $\bar{\rho}$ für die Mindestnorm ρ nicht rekonstruierbarer Punkte des jeweils ermittelten gestörten Systems (für $f = 0$ ergibt sich unabhängig von φ die obere Schranke $\bar{\rho} = 0$)	159
7.8.	Beste für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(2)}$ erhaltene lokale Minima des Distanzmaßes $\hat{\eta}_1$ bei zusätzlicher Begrenzung der Norm nicht rekonstruierbarer Punkte; dargestellt ist es in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f	160
7.9.	Für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}$ erhaltene obere Schranke $\bar{\rho}$ für den Mindestabstand ρ nicht rekonstruierbarer Punkte des jeweils ermittelten gestörten Systems bei Berücksichtigung der Beschränkung $\bar{\rho} \leq 2$	160
7.10.	Beste für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(2)}$ erhaltene lokale Minima des normierten Distanzmaßes $\tilde{\mu}_1$ in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite	162
7.11.	Beste für $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(2)}$ erhaltene lokale Minima des bezüglich der letzten Zeile normierten Distanzmaßes $\hat{\mu}_1$ in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f	162
8.1.	Verlauf des einfachen Indikators κ_1 und der besten ermittelten oberen Schranke des Distanzmaßes μ_1 für die perspektivische Beobachtbarkeit in Abhängigkeit des Parameters α	169
8.2.	Indikator κ_1 für die perspektivische Beobachtbarkeit in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f	176
8.3.	Gegenüberstellung des Indikators κ_1 und des in Beispiel 27 ermittelten bezüglich der letzten Zeile normierten Distanzmaßes $\hat{\mu}_1$ in Abhängigkeit des Winkels φ für verschiedene Werte der Brennweite f	176

Anhang A.

Abschätzung des Distanzmaßes anhand von Singulärwerten

In diesem Abschnitt wird die Ermittlung einer unteren Schranke für die Lösung des Optimierungsproblems (6.107)

$$\nu_{d,\mathbf{S}} = \min_{\mathbf{v}} \|\mathbf{M}(\mathbf{S})\mathbf{v}\|_2 \quad (\text{A.1a})$$

unter

$$\mathbf{v}^H \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{v} = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq d+1 \quad (\text{A.1b})$$

mittels des kleinsten Singulärwertes der Matrix $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ untersucht. Für die Zielfunktion (6.107a) gilt

$$\|\mathbf{M}(\mathbf{S})\mathbf{v}\|_2 \geq \sigma_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{S})\} \cdot \|\mathbf{v}\|_2. \quad (\text{A.2})$$

Eine zulässige Lösung des Optimierungsproblems erfüllt gemäß den Nebenbedingungen (6.107b) unter anderem

$$\mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_i = 1 \quad \text{für } 1 \leq i \leq d+1 \quad (\text{A.3})$$

und somit

$$\|\mathbf{v}\|_2^2 = \mathbf{v}^H \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_i = d+1. \quad (\text{A.4})$$

Mit der Abkürzung

$$\gamma_{d,\mathbf{S}} := \sqrt{d+1} \cdot \sigma_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{S})\} \quad (\text{A.5})$$

gilt daher gemäß Relation (A.2) für zulässige Werte des Vektors \mathbf{v}

$$\|\mathbf{M}(\mathbf{S})\mathbf{v}\|_2 \geq \gamma_{d,\mathbf{S}}, \quad (\text{A.6})$$

d.h. der Zielfunktionswert und demnach auch die Distanz $\mu_{d,\mathbf{S}}$ sind nach unten durch $\gamma_{d,\mathbf{S}}$ beschränkt:

$$\mu_{d,\mathbf{S}} \geq \gamma_{d,\mathbf{S}}. \quad (\text{A.7})$$

Diese Vorgangsweise entspricht einer Relaxation der Nebenbedingung

$$\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{E} \quad (\text{A.8})$$

des ursprünglichen Optimierungsproblems (6.106) zu

$$\text{spur } \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \text{spur } \mathbf{E} = d + 1. \quad (\text{A.9})$$

Es ist zu beachten, dass $\gamma_{d,\mathbf{S}}$ lediglich für die Distanz $\mu_{d,\mathbf{S}}$ *nicht aber* für das Distanzmaß μ_d eine untere Schranke darstellt. Eine solche liefert erst die Minimierung von $\gamma_{d,\mathbf{S}}$ bezüglich der Matrix \mathbf{S} :

$$\gamma_d := \min_{\mathbf{S}} \gamma_{d,\mathbf{S}} \leq \mu_d. \quad (\text{A.10})$$

Leider kann man (für $d > 0$) immer, auch für ein perspektivisch beobachtbares System, eine Matrix \mathbf{S} finden, sodass

$$\gamma_{d,\mathbf{S}} = 0 \quad (\text{A.11})$$

gilt. Man betrachte beispielsweise den Dimensionsverlust $d = 1$. In diesem Fall ist die Matrix $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ durch Relation (6.117) gegeben. Es sei nun λ ein Eigenwert der Systemmatrix \mathbf{A} mit zugehörigem Rechts-Eigenvektor \mathbf{p} . Mit der speziellen Wahl

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

ergibt sich

$$\mathbf{M}(\mathbf{S}) \begin{bmatrix} -u_2 \mathbf{p} \\ u_1 \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} \\ u_1 \mathbf{C} & u_2 \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_2 \mathbf{p} \\ u_1 \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.13})$$

Somit gilt offensichtlich

$$\sigma_{\min}\{\mathbf{M}(\mathbf{S})\} = 0 = \gamma_d. \quad (\text{A.14})$$

Man erhält auf diese Weise daher keine sinnvolle untere Schranke für das Distanzmaß der perspektivischen Beobachtbarkeit.