

Markus Fleischhacker, BSc

Ein adaptives Raum-Zeit-Finite-Elemente-Verfahren für die Wärmeleitgleichung im \mathbb{R}^1

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Mathematics

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Prof. Dr. O. Steinbach

Institut für Numerische Mathematik

Graz, Dezember 2017

Kurzfassung

Wir beschreiben und analysieren in dieser Arbeit zunächst einen a posteriori Fehlerschätzer für die Lösung einer Finite-Elemente-Formulierung der Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2 . Insbesondere beschäftigen wir uns mit der Zuverlässigkeit und Effizienz dieses Fehlerschätzers aus der theoretischen sowie der praktischen Sichtweise in Bezug auf die Verwendung des Fehlerschätzers zur Steuerung eines adaptiven Finite-Elemente-Verfahrens.

Motiviert durch den so etablierten Fehlerschätzer für das elliptische Problem schlagen wir einen analogen Fehlerschätzer für die Lösung einer Raum-Zeit-Finite-Elemente-Formulierung des parabolischen Modellproblems der Wärmeleitgleichung im \mathbb{R}^1 vor. Wir zeigen die Effizienz dieses Fehlerschätzers bezüglich des tatsächlichen Fehlers in der Energienorm und beschäftigen uns mit der Frage nach der Gültigkeit der Zuverlässigkeitseigenschaft, welche in dieser Arbeit allerdings nicht theoretisch bewiesen werden kann. Schließlich untersuchen wir anhand einiger Testprobleme praktisch ein adaptives Raum-Zeit-Finite-Elemente-Verfahren, welches von dem behandelten a posteriori Fehlerschätzer gesteuert wird. Im Speziellen beschäftigen wir uns mit dem Vergleich zum Raum-Zeit-Finite-Elemente-Verfahren mit uniformer Netzverfeinerung. Anhand der erhaltenen Ergebnisse können wir schließlich die bewiesenen theoretischen Aussagen für die betrachteten Modellprobleme bestätigen.

Abstract

At the beginning of this thesis we describe and analyze an a posteriori error estimator for the solution of a finite element formulation for the Poisson-equation in \mathbb{R}^2 . In particular we are interested in the reliability and efficiency of this error estimator from a theoretical as well as a practical point of view regarding the use of the error estimator to drive an adaptive finite element method.

Based on the established error estimator for the elliptic problem, we propose an analogue estimator for the solution of a space-time finite element formulation for the parabolic model problem of the heat equation in \mathbb{R}^1 . We show the efficiency of this error estimator with respect to the real error in the energy-norm and address the question concerning the validity of the reliability-property, which we, however, cannot prove theoretically in this thesis. Finally, we examine an adaptive space-time finite element method driven by the proposed error estimator applied to several test examples. In particular we are interested in the comparison to the space-time finite element method with uniform mesh-refinement. Based on the obtained results we can eventually confirm the proven theoretical claims for the model problems.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Das elliptische Modellproblem	5
1.2	Finite-Elemente-Diskretisierung und Notation	6
1.3	Das Referenzelement und lokale inverse Ungleichungen	9
1.4	Quasi-Interpolationsabschätzungen	13
2	Ein a posteriori Fehlerschätzer für die Poisson-Gleichung	18
2.1	Das Residuum	20
2.2	Der Fehlerschätzer	22
2.3	Äquivalenz des Fehlerschätzers und des Fehlers	25
2.3.1	Zuverlässigkeit	25
2.3.2	Effizienz	30
2.4	Numerische Ergebnisse	33
2.4.1	Zusammenfassung und Ausblick	39
3	Ein a posteriori Fehlerschätzer für die Wärmeleitgleichung	41
3.1	Räume Banachraum-wertiger Funktionen und das Bochner-Integral	42
3.2	Das parabolische Modellproblem	48
3.2.1	Variationsformulierung	49
3.2.2	Raum-Zeit-Finite-Elemente Diskretisierung	54
3.3	Das Residuum	56
3.4	Der Fehlerschätzer	58
3.4.1	Effizienz	60
3.4.2	Zur Zuverlässigkeit	65
3.5	Numerische Ergebnisse	70
3.5.1	Zusammenfassung und Ausblick	82
	Literaturverzeichnis	84

1 Einleitung

Adaptive Verfahren, insbesondere Finite-Elemente-Methoden [19] mit adaptiver Netzverfeinerung (h-FEM) und/oder variablen Polynomgraden bezüglich der Ansatzfunktionen (p- beziehungsweise hp-FEM), haben heute eine große Bedeutung für die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen, welche sich aus physikalischen und technischen Modellen und Anwendungen ergeben. Das Ziel solcher Verfahren ist es, mit möglichst geringem Rechenaufwand eine numerische Lösung zu einer vorgegebenen Fehlertoleranz zu berechnen [23]. Ermöglicht wird dies durch die Verwendung von a posteriori Fehlerschätzern, bei denen der tatsächliche Fehler durch den Einsatz einer bereits berechneten Finite-Elemente-Lösung, ohne die Kenntnis der tatsächlichen Lösung, geschätzt wird [2].

A posteriori Fehlerschätzer für elliptische partielle Differentialgleichungen finden sich vielzählig in der Literatur [23, 22, 6, 2]. Auch für parabolische Probleme, wie die Wärmeleitgleichung, stehen a posteriori Fehlerschätzer zur Verfügung [23, 10], allerdings wird die Adaptivität hierbei oft entweder nur im Raum oder nur in der Zeit betrachtet [20].

In dieser Arbeit wollen wir einen Fehlerschätzer für eine kombinierte Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode [20] zur Lösung der Wärmeleitgleichung im \mathbb{R}^1 untersuchen. Die Basis für diesen Schätzer ist ein Fehlerschätzer für die Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2 [23, 22], welcher über die Lösung lokaler Hilfsprobleme auf den Elementen eines gegebenen Finite-Elemente-Netzes konstruiert wird.

Um die Betrachtung eines modifizierten Fehlerschätzers für die Wärmeleitgleichung zu motivieren, wollen wir die Vorstellung und Untersuchung des a posteriori Fehlerschätzers für die Poisson-Gleichung voranstellen. Wir starten in diesem einleitenden Kapitel mit der Behandlung einiger Grundlagen und Aussagen, welche für die spätere Analyse der Fehlerschätzer benötigt werden. Da wir mit dem elliptischen Problem beginnen, werden wir für diese elementaren Resultate exemplarisch Triangulierungen für ein zweidimensionales Raumgebiet betrachten, die Aussagen gelten aber analog für Triangulierungen des Raum-Zeit-Gebiets in Kapitel 3.

Kapitel 2 handelt von der Definition und den Beweisen der Zuverlässigkeit und Effizienz des Fehlerschätzers für die Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2 . Schließlich wollen wir am Ende von Kapitel 2 den Fehlerschätzer auch praktisch in einer adaptiven Finite-Elemente-Methode anhand einiger Beispiele testen und die Resultate mit jenen der Standard-Finite-Elemente-Methode mit uniformer Verfeinerung vergleichen.

In Kapitel 3 kommen wir nach einer kurzen Einführung in die Theorie Banachraumwertiger Funktionen zur Beschreibung der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Formulierung

[20] für das Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitgleichung mit Raumdimension 1. Das Ziel von Kapitel 3 und zugleich der Hauptfokus dieser Arbeit ist die Beschreibung und Untersuchung des vorgeschlagenen a posteriori Fehlerschätzers für das parabolische Modellproblem. Im letzten Abschnitt von Kapitel 3 testen wir schließlich ein adaptives Raum-Zeit-Finite-Elemente-Verfahren anhand einiger Beispiele und geben eine Zusammenfassung der erhaltenen Ergebnisse der Arbeit an.

1.1 Das elliptische Modellproblem

Wir betrachten als Modellproblem zunächst das homogene Dirichlet-Randwertproblem der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma := \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

in einem offenen, beschränkten und zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit polygonalem Rand Γ . Die Ergebnisse in Kapitel 2 für den a posteriori Fehlerschätzer für dieses homogene Randwertproblem können durch Einbindung zusätzlicher Datenoszillationen auf den Fall mit inhomogener Dirichlet-Randbedingung erweitert werden [22, 13]. Um die späteren Beweise der essentiellen Eigenschaften des Fehlerschätzers durchführen zu können, müssen wir $f \in L_2(\Omega)$ voraussetzen. Die schwache Formulierung für das Randwertproblem (1.1) lautet dann:

Gesucht ist eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$, sodass die Gleichung

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \tag{1.2}$$

für alle Testfunktionen $v \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt ist.

Für jede offene Teilmenge $\omega \subseteq \Omega$ seien mit $L_2(\omega), H^k(\omega)$ für $k \geq 1$ die Standard-Lebesgue- beziehungsweise Sobolev-Räume bezeichnet [22]. Der Raum $H_0^1(\Omega)$ wird definiert als die Menge jener Funktionen $v \in H^1(\Omega)$ welche $v = 0$ auf Γ im Sinne der Spur erfüllen. Die eindeutige Lösbarkeit für das Variationsproblem 1.2 folgt sofort aus dem Lemma von Lax-Milgram [19, Thm. 3.4].

1.2 Finite-Elemente-Diskretisierung und Notation

Zur Finite-Elemente-Diskretisierung von (1.2) sei eine gleichmäßig-formreguläre Folge $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}\}$ zulässiger Triangulierungen

$$\bar{\mathcal{T}} = \bigcup_{l=1}^N \bar{\tau}_l$$

von Ω gegeben. Mit der Zulässigkeit einer Zerlegung \mathcal{T} meinen wir, dass die Schnittmenge je zweier verschiedener Elemente von \mathcal{T} nur entweder leer, genau ein Knoten oder genau eine Kante sein kann. Insbesondere sind Netze, welche hängende Knoten enthalten (Abbildung 1.1), nicht zulässig. Die gleichmäßige Formregularität der Fa-

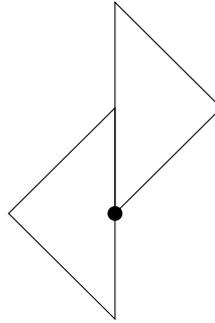


Abbildung 1.1: „Hängender“ Knoten

milie \mathcal{F} bedeutet, dass für jede Zerlegung $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$ und jedes Element τ_l von \mathcal{T} die Ungleichung

$$h_l \leq c_{\mathcal{F}} r_l$$

mit einer von \mathcal{T} unabhängigen Konstanten $c_{\mathcal{F}} > 0$ erfüllt ist. Dabei bezeichne h_l und r_l den Durchmesser beziehungsweise den größten Inkreisradius des Dreiecks τ_l . Diese Forderung stellt effektiv eine Beschränkung des Minimalwinkels der Dreiecke aller Zerlegungen der Familie \mathcal{F} von Null weg dar. Damit ist auch die Anzahl der Dreiecke, die einen bestimmten Knoten enthalten, unabhängig von der konkreten Zerlegung nach oben beschränkt. Diese Tatsache werden wir bei der Folgerung globaler Eigenschaften aus lokalen elementweisen Beziehungen immer wieder stillschweigend anwenden. Für eine feste Zerlegung $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$ bezeichnen wir mit \mathcal{N} die Menge der Knoten x_k (für $k = 1, \dots, M$) und mit \mathcal{E} die Menge der Kanten. Mit \mathcal{N}_{Ω} und \mathcal{N}_{Γ} bezeichnen wir die Menge der inneren Knoten beziehungsweise der Knoten am Rand, dabei sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\mathcal{N}_{\Omega} = \{x_1, \dots, x_{M_{\Omega}}\}, \quad \mathcal{N}_{\Gamma} = \{x_{M_{\Omega}+1}, \dots, x_M\}.$$

Mit \mathcal{E}_Ω und \mathcal{E}_Γ seien die Mengen der inneren Kanten beziehungsweise der Randkanten definiert. Mit den Bezeichnungen \mathcal{N}_l und \mathcal{E}_l sei die Menge der Knoten beziehungsweise der Kanten des Elements τ_l gegeben. Analog meinen wir mit \mathcal{N}_e die Menge der Knoten der Kante e . Wir definieren mit

$$\Sigma := \bigcup_{e \in \mathcal{E}} e$$

das „Skeleton“ der Zerlegung. Unter h_e wollen wir die Länge einer Kante $e \in \mathcal{E}$ verstehen. Aufgrund der gleichmäßigen Formregularität der Netzfamilie \mathcal{F} sind für Elemente τ_l, τ_j und Kanten e, e' , welche zumindest einen Knoten gemeinsam haben, die Verhältnisse

$$\frac{h_l}{h_j}, \frac{h_e}{h_{e'}} \quad \text{und} \quad \frac{h_l}{h_e}$$

von oben und unten durch eine nur von $c_{\mathcal{F}}$ abhängige Konstante beschränkt [23, Sec. 3.2]. Zur kürzeren Schreibweise definieren wir außerdem die Fläche des Dreiecks τ_l mit

$$\Delta_l = \int_{\tau_l} dx.$$

In den später behandelten Interpolationsabschätzungen wird sich die Definition einiger Element-Vereinigungsmengen als nützlich erweisen. Für einen Knoten $x_k \in \mathcal{N}$ und ein Element $\tau_l \subset \mathcal{T}$ setzen wir

$$\omega_{x_k} := \bigcup_{l: x_k \in \mathcal{N}_l} \tau_l, \quad \omega_l := \bigcup_{j: \mathcal{E}_j \cap \mathcal{E}_l \neq \emptyset} \tau_j, \quad \tilde{\omega}_l := \bigcup_{j: \mathcal{N}_j \cap \mathcal{N}_l \neq \emptyset} \tau_j,$$

also die Vereinigung der Elemente, die x_k als Knoten besitzen beziehungsweise die Vereinigungen jener Elemente, welche mit dem Dreieck τ_l zumindest eine Kante respektive einen Knoten gemeinsam haben (siehe Abbildung 1.2) [23]. Außerdem definieren wir

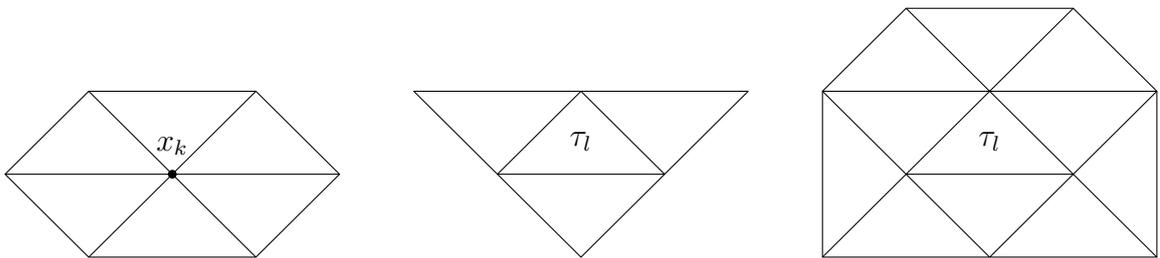


Abbildung 1.2: Die Mengen ω_{x_k} , ω_l und $\tilde{\omega}_l$

die Vereinigungsmenge all jener Elemente, die e als Kante haben beziehungsweise die

Vereinigungsmenge der Elemente die zumindest einen Knoten mit der Knotenmenge der Kante e gemeinsam haben [23] (siehe Abbildung 1.3) mit

$$\omega_e := \bigcup_{l:e \in \mathcal{E}_l} \tau_l, \quad \tilde{\omega}_e := \bigcup_{l:\mathcal{N}_l \cap \mathcal{N}_e \neq \emptyset} \tau_l.$$

Als endlich-dimensionalen Ansatzraum für die Finite-Elemente-Formulierung verwenden wir den Raum

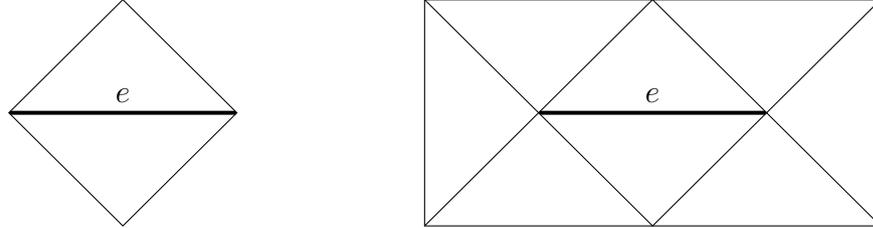


Abbildung 1.3: Die Mengen ω_e und $\tilde{\omega}_e$

den wir den Raum

$$V_{\mathcal{T}} := S_{\Gamma}^1(\mathcal{T})$$

der, bezüglich der Zerlegung \mathcal{T} , stückweise-linearen, global stetigen Funktionen, die am Rand Γ verschwinden. Dieser Raum wird von den Basisfunktionen φ_k , $k = 1, \dots, M_{\Omega}$ aufgespannt, welche definiert sind mit

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_k, \\ 0 & \text{für } x = x_j \neq x_k, \\ \text{linear} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den so gewählten Ansatzraum ergibt sich schließlich die diskrete Variationsformulierung mit:

Gesucht ist $u_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ sodass die Gleichung

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla v_{\mathcal{T}} \, dx = \int_{\Omega} f v_{\mathcal{T}} \, dx \quad (1.3)$$

für alle Funktionen $v_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ erfüllt ist.

Für alles Weitere seien mit u und $u_{\mathcal{T}}$ die eindeutigen Lösungen der Probleme (1.2) beziehungsweise (1.3) bezeichnet. Wir geben an dieser Stelle noch eine wichtige a priori Aussage zur Beziehung des Fehlerverhaltens und der Regularität der schwachen Lösung u an.

Satz 1.1 (A priori Fehlerabschätzung, [19, Thm. 11.2]). *Falls für die Lösung des kontinuierlichen Variationsproblems (1.2) die Bedingung $u \in H^s(\Omega)$ für ein $s \in [1, 2]$ erfüllt ist, so gilt für die diskrete Lösung $u_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ zu (1.3) die a priori Fehlerabschätzung*

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq ch^{s-1} \|u\|_{H^s(\Omega)},$$

wobei $h = \max_{1 \leq l \leq N} h_l$.

1.3 Das Referenzelement und lokale inverse Ungleichungen

Wir definieren zunächst das Referenzdreieck im \mathbb{R}^2 mit

$$\tau := \left\{ \xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < 1 - \xi_1 \right\}.$$

Ist τ_l ein Element der Zerlegung, so lässt sich ein Punkt $x \in \bar{\tau}_l$ eindeutig mithilfe der invertierbaren Transformationsfunktion $F_l : \bar{\tau} \rightarrow \bar{\tau}_l$ darstellen,

$$x = F_l(\xi) := x_l^1 + J_l \xi.$$

Dabei seien mit

$$\xi^i = \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \end{pmatrix}, \quad x_l^i = \begin{pmatrix} x_{l1}^i \\ x_{l2}^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

die Knoten des Referenzelements τ beziehungsweise des Dreiecks τ_l (Abbildung 1.4) bezeichnet. Mit J_l definieren wir die reguläre Transformationsmatrix

$$J_l := \begin{pmatrix} x_{l1}^2 - x_{l1}^1 & x_{l1}^3 - x_{l1}^1 \\ x_{l2}^2 - x_{l2}^1 & x_{l2}^3 - x_{l2}^1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt die Beziehung $|\det J_l| = 2\Delta_l$. Die linearen Formfunktionen auf dem Referenzelement bezeichnen wir mit $\tilde{\varphi}_i : \tau \rightarrow \mathbb{R}$, für $i = 1, 2, 3$. Sie sind gegeben durch die Darstellungen

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(\xi) &= 1 - \xi_1 - \xi_2, \\ \tilde{\varphi}_2(\xi) &= \xi_1, \\ \tilde{\varphi}_3(\xi) &= \xi_2. \end{aligned}$$

Wir definieren nun mit $\tilde{V} \subset H^1(\tau)$ einen endlich-dimensionalen Ansatzraum von Funktionen mit Definitionsbereich τ . Für ein fest gewähltes Element τ_l der Zerlegung sei die Menge

$$V := \left\{ \tilde{v} \circ F_l^{-1} : \tilde{v} \in \tilde{V} \right\}$$

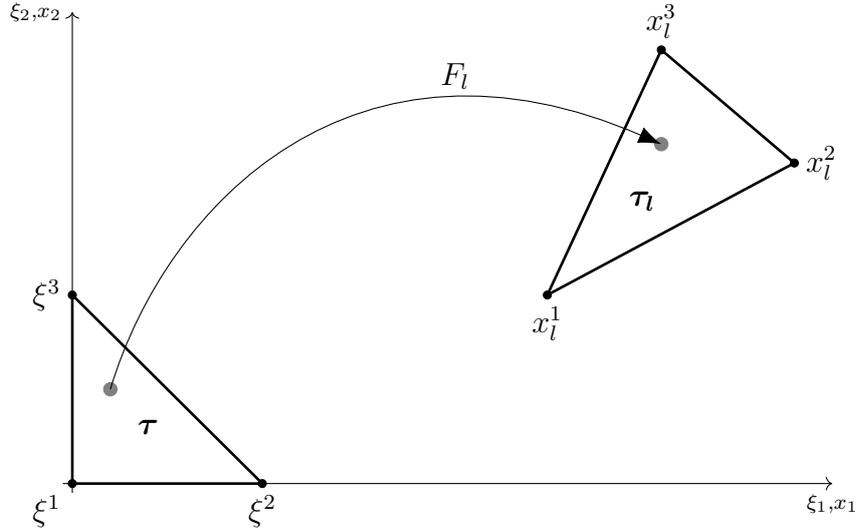


Abbildung 1.4: Die Transformationsfunktion F_l

definiert. Für eine gegeben Funktion $v \in V$ sei wiederum mit $\tilde{v}_l = v \circ F_l \in \tilde{V}$ die Rücktransformation auf das Referenzdreieck bezeichnet. Durch einfache Rechnung ergibt sich die Beziehung

$$\|v\|_{L_2(\tau_l)}^2 = 2\Delta_l \|\tilde{v}_l\|_{L_2(\tau)}^2.$$

Für die Gradienten ergibt sich nach Anwendung der Kettenregel die Beziehung

$$\nabla_{\xi} \tilde{v}_l = J_l^T \nabla_x v, \quad \text{bzw.} \quad \nabla_x v = J_l^{-T} \nabla_{\xi} \tilde{v}_l,$$

wobei wir ausnahmsweise die entsprechenden Koordinaten für die Ableitungen gekennzeichnet haben. Für die L_2 -Norm des Gradienten von v gilt die folgende Normäquivalenzaussage.

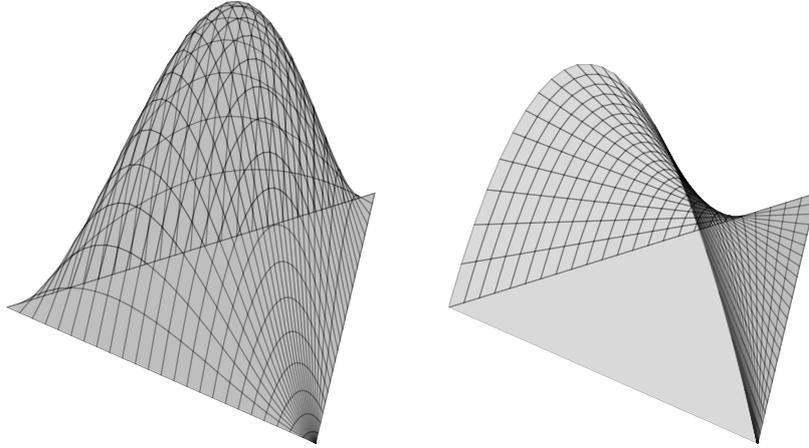
Lemma 1.2 ([19, Lem. 9.1]). *Es gibt eine nur von der Formregularitätskonstante $c_{\mathcal{F}}$ abhängige Konstante $c > 0$, sodass*

$$c^{-1} \|\nabla \tilde{v}_l\|_{L_2(\tau)} \leq \|\nabla v\|_{L_2(\tau_l)} \leq c \|\nabla \tilde{v}_l\|_{L_2(\tau)},$$

für jedes beliebige Element τ_l und alle $v \in H^1(\tau_l)$ gilt.

Wichtige Werkzeuge für die Durchführung der Beweise in Kapitel 2 und 3 bei denen wir der Beweistechnik von Verfürht [23] folgen, sind lokale inverse Ungleichungen für so genannte Bubble-Funktionen (Abbildung 1.5). Wir bezeichnen die zu einem Element τ_l gehörende Element-Bubble-Funktion mit

$$\psi_l = 27 \prod_{x_k \in \mathcal{N}_l} \varphi_k. \tag{1.4}$$

Abbildung 1.5: Element- und Kanten-Bubble-Funktionen auf τ

Für eine beliebige Kante e der Zerlegung ist die zugehörige Kanten-Bubble-Funktion definiert durch

$$\psi_e = 4 \prod_{x_k \in \mathcal{N}_e} \varphi_k. \quad (1.5)$$

Unmittelbar aus der Definition der Ansatzfunktionen φ_k folgen die Eigenschaften [23]

$$\begin{aligned} \text{supp } \psi_l &= \bar{\tau}_l, & 0 \leq \psi_l \leq 1, & & \max_{x \in \tau_l} \psi_l(x) = 1, \\ \text{supp } \psi_e &= \bar{\omega}_e, & 0 \leq \psi_e \leq 1, & & \max_{x \in e} \psi_e(x) = 1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Für diese Funktionen zeigen wir nun einige wichtige lokale Abschätzungen, die auf der Äquivalenz aller Normen auf endlich-dimensionalen Räumen und geeigneter Skalierung basieren.

Satz 1.3 ([2, Lem. 3.2, 3.3]). *Für alle $v \in V$ gelten die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} c^{-1} \|v\|_{L_2(\tau_l)}^2 &\leq \int_{\tau_l} \psi_l v^2 \, dx \leq c \|v\|_{L_2(\tau_l)}^2, \\ \|\psi_l v\|_{L_2(\tau_l)} &\leq \|v\|_{L_2(\tau_l)}, \\ c^{-1} h_l^{-1} \|v\|_{L_2(\tau_l)} &\leq \|\nabla(\psi_l v)\|_{L_2(\tau_l)} \leq c h_l^{-1} \|v\|_{L_2(\tau_l)}. \end{aligned}$$

Dabei sind die auftretenden Konstanten unabhängig von v und h_l .

Beweis. Wir betrachten ein festes Element τ_l und definieren

$$\tilde{\psi}_l = \psi_l \circ F_l.$$

Durch Nachprüfen der definierenden Eigenschaften lässt sich zeigen, dass die Abbildungen

$$\tilde{v} \mapsto \left(\int_{\tau} \tilde{\psi}_l \tilde{v}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \tilde{v} \mapsto \left\| \nabla(\tilde{\psi}_l \tilde{v}) \right\|_{L_2(\tau)}$$

Normen auf dem Raum \tilde{V} definieren, wobei hierzu bei der zweiten Abbildung ausgenutzt wird, dass $\tilde{\psi}_l$ auf allen Knoten von τ verschwindet [25]. Da \tilde{V} per Voraussetzung endlich-dimensional ist, sind alle Normen auf diesem Raum äquivalent. Insbesondere existiert ein $\tilde{c} > 0$, sodass

$$\tilde{c}^{-1} \|\tilde{v}\|_{L_2(\tau)}^2 \leq \int_{\tau} \tilde{\psi}_l \tilde{v}^2 d\xi \leq \tilde{c} \|\tilde{v}\|_{L_2(\tau)}^2, \quad (1.7)$$

$$\tilde{c}^{-1} \|\tilde{v}\|_{L_2(\tau)}^2 \leq \left\| \nabla(\tilde{\psi}_l \tilde{v}) \right\|_{L_2(\tau)}^2 \leq \tilde{c} \|\tilde{v}\|_{L_2(\tau)}^2, \quad (1.8)$$

für alle $\tilde{v} \in \tilde{V}$.

Wir betrachten jetzt eine beliebige Funktion $v \in V$ und führen eine Transformation auf das Referenzelement durch, um dann die eben gezeigten Aussagen anwenden zu können. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\tau_l} \psi_l v^2 dx &= \int_{\tau} \tilde{\psi}_l \tilde{v}_l^2 |\det J_l| d\xi \\ &= 2\Delta_l \int_{\tau} \tilde{\psi}_l \tilde{v}_l^2 d\xi. \end{aligned}$$

Beachten wir noch, dass $\|v\|_{L_2(\tau_l)}^2 = 2\Delta_l \|\tilde{v}_l\|_{L_2(\tau)}^2$, so folgt daraus mit (1.7) die erste Aussage des Satzes. Die zweite Ungleichung folgt sofort aus der Eigenschaft $\psi_l \leq 1$ auf τ_l . Die dritte Ungleichung lässt sich durch Anwendung der in Lemma 1.2 dargestellten Abschätzungen beweisen. Wir erwähnen dazu zunächst die aufgrund der gleichmäßigen Formregularität und einfacher geometrischer Überlegungen geltende Äquivalenz [19]

$$\frac{\pi}{c_{\mathcal{F}}^2} h_l^2 \leq \Delta_l \leq h_l^2. \quad (1.9)$$

Hiermit gilt mit Satz 1.2 und der Normäquivalenz aus (1.8) schließlich beispielweise für die Abschätzung nach oben

$$\begin{aligned} \|\nabla(\psi_l v)\|_{L_2(\tau_l)}^2 &\leq c h_l^{-2} (2\Delta_l) \left\| \nabla(\tilde{\psi}_l \tilde{v}_l) \right\|_{L_2(\tau)}^2 \\ &\leq c h_l^{-2} (2\Delta_l) \|\tilde{v}_l\|_{L_2(\tau)}^2 \\ &= c h_l^{-2} \|v\|_{L_2(\tau_l)}^2. \end{aligned}$$

Die Abschätzung nach unten verläuft völlig analog. Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. \square

Zusätzlich zu dieser Aussage über Element-Bubble-Funktionen benötigen wir folgende Version des Satzes für Kanten der Zerlegung, welcher auf ähnliche Weise durch Transformation auf die entsprechende Kante des Referenzelements und erneuter Ausnutzung der Normäquivalenz auf endlich-dimensionalen Räumen und Skalierungsargumenten bewiesen werden kann.

Satz 1.4 ([2, Lem. 3.4, 3.5]). *Es sei τ_l ein Element der Zerlegung und $e \in \mathcal{E}_l$. Analog zu Satz 1.3 sei mit $\tilde{P} \subset H^1(\bar{\tau})$ ein endlich-dimensionaler Raum von Funktionen auf der entsprechenden Referenzelement-Kante \tilde{e} gegeben. Wir setzen*

$$P = \left\{ \tilde{v} \circ F_l^{-1} : \tilde{v} \in \tilde{P} \right\}.$$

Dann existiert eine Konstante $c > 0$, sodass

$$c^{-1} \|v\|_{L_2(e)}^2 \leq \int_e \psi_e v^2 ds_x \leq c \|v\|_{L_2(e)}^2$$

für alle $v \in P$ gilt. Außerdem gibt es eine Fortsetzung von v auf das ganze Element τ_l , welche wir wieder mit v bezeichnen, sodass

$$\begin{aligned} \|\psi_e v\|_{L_2(\tau_l)} &\leq c h_l^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L_2(e)}, \\ \|\nabla(\psi_e v)\|_{L_2(\tau_l)} &\leq c h_l^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L_2(e)}. \end{aligned}$$

Die auftretenden Konstanten hängen nicht von v und h_l ab.

1.4 Quasi-Interpolationsabschätzungen

Die Untersuchung und der Beweis der Eigenschaften der Fehlerschätzer in Kapitel 2 erfordert den Einsatz eines Interpolationsoperators, welcher auf Funktionen aus dem Raum $H^1(\Omega)$ anwendbar ist und dessen zugehöriger Interpolationsfehler sich geeignet lokal abschätzen lässt. Erstere Bedingung schließt die Verwendung des stückweise linearen nodalen Interpolationsoperators

$$I_{\mathcal{T}} : \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \rightarrow S^1(\mathcal{T}), \quad I_{\mathcal{T}} v(x_k) := v(x_k), \quad \forall x_k \in \mathcal{N}$$

aus, da die Punktauswertung für eine Funktion $v \in H^1(\Omega)$ im Allgemeinen nicht definiert ist. Die L_2 -Projektion $Q_{\mathcal{T}} v$ welche für eine Funktion $v \in H^1(\Omega)$ definiert ist als die eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$\int_{\Omega} (Q_{\mathcal{T}} v) w_{\mathcal{T}} dx = \int_{\Omega} v w_{\mathcal{T}} dx, \quad \forall w_{\mathcal{T}} \in S^1(\mathcal{T})$$

ergibt zwar einen beschränkten Operator

$$Q_{\mathcal{T}} : H^1(\Omega) \rightarrow S^1(\mathcal{T}),$$

sie lässt sich aber nicht lokalisieren [19]. Zur Erfüllung der geforderten Eigenschaften müssen wir einen so genannten quasi-interpolierenden Operator verwenden.

Definition 1.5 (Clément-Operator, [23]). Der Operator $P_{\mathcal{T}} : L_1(\Omega) \rightarrow V_{\mathcal{T}}$ ist definiert durch die Darstellung

$$P_{\mathcal{T}}v := \sum_{k=1}^M \bar{v}_k \varphi_k.$$

Dabei sei \bar{v}_k definiert mit

$$\bar{v}_k := \begin{cases} \frac{1}{|\omega_{x_k}|} \int_{\omega_{x_k}} v \, dx & \text{für } x_k \in \mathcal{N}_{\Omega}, \\ 0 & \text{für } x_k \in \mathcal{N}_{\Gamma}. \end{cases}$$

Bevor wir nun geeignete lokale Abschätzungen des Interpolationsfehlers von $P_{\mathcal{T}}$ beweisen können, benötigen wir zunächst noch eine weitere wichtige Ungleichung.

Lemma 1.6 (Spurungleichung [23]). *Es sei τ_l ein Element der Zerlegung \mathcal{T} und e eine Kante von τ_l . Dann erfüllt jede Funktion $v \in H^1(\tau_l)$ die Spurungleichung*

$$\|v\|_{L_2(e)} \leq c \left\{ h_e^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L_2(\tau_l)} + h_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L_2(\tau_l)} \right\}.$$

Die Konstante $c > 0$ hängt nur von der Formregularitätskonstante ab.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die lokale Nummerierung der Knoten von τ_l so gewählt, dass $\mathcal{N}_e = \{x_l^1, x_l^2\}$ (siehe Abbildung 1.4). Dann gilt

$$F_l^{-1}(e) = (0, 1) =: \tilde{e}$$

und wir setzen $\tilde{v}_l = v \circ F_l$. Mit der Transformationsregel für Integrale erhalten wir

$$\int_e |v(x)|^2 \, ds_x = \int_0^1 |v(x_l^1 + \xi_1(x_l^2 - x_l^1))|^2 |x_l^2 - x_l^1| \, d\xi_1 = h_e \int_{\tilde{e}} |\tilde{v}_l(\xi)|^2 \, ds_{\xi}.$$

Damit gilt also die Beziehung

$$\|v\|_{L_2(e)} = h_e^{\frac{1}{2}} \|\tilde{v}_l\|_{L_2(\tilde{e})}.$$

Nun wenden wir die Standard-Spurungleichung [11] am Referenzelement an und folgern

$$\|\tilde{v}_l\|_{L_2(\tilde{e})} \leq c \|\tilde{v}_l\|_{H^1(\tau)} = c \left\{ \|\tilde{v}_l\|_{L_2(\tau)}^2 + \|\nabla \tilde{v}_l\|_{L_2(\tau)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Mit der Beziehung $\|\tilde{v}_l\|_{L_2(\tau)}^2 = (2\Delta_l)^{-1} \|v\|_{L_2(\tau_l)}^2$ und der Aussage von Satz 1.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_2(e)} &\leq ch_e^{\frac{1}{2}} \left\{ (2\Delta_l)^{-1} \|v\|_{L_2(\tau_l)}^2 + \|\nabla v\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ch_e^{\frac{1}{2}} \left\{ (2\Delta_l)^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L_2(\tau_l)} + \|\nabla v\|_{L_2(\tau_l)} \right\}. \end{aligned}$$

Da $e \in \mathcal{E}_l$, gilt $h_e \leq h_l$ und aus den Überlegungen im Beweis von Satz 1.3 ergibt sich $h_l \simeq \sqrt{\Delta_l}$, sodass wir schließlich die Gültigkeit der zu beweisenden Ungleichung folgern können. \square

Nun sind wir in der Lage, die Interpolationsfehler-Abschätzungen für den Operator $P_{\mathcal{T}}$ zu beweisen.

Satz 1.7 ([22, Prop. 1.3]). *Es sei mit τ_l ein beliebiges Element der Zerlegung gegeben. Weiters sei mit e eine Kante der Zerlegung gegeben. Dann gelten für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} \|v - P_{\mathcal{T}}v\|_{L_2(\tau_l)} &\leq ch_l \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_l)}, \\ \|v - P_{\mathcal{T}}v\|_{L_2(e)} &\leq ch_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_e)}. \end{aligned}$$

Dabei hängen die Konstanten nur von der Formregularitätskonstante $c_{\mathcal{F}}$ ab.

Beweis. Da die Ansatzfunktionen φ_k für $x_k \in \mathcal{N}_l$ eine Zerlegung der Eins darstellen, erhalten wir zunächst für jede Funktion $w \in L_2(\Omega)$ die Gleichung

$$\int_{\tau_l} (v - P_{\mathcal{T}}v)w \, dx = \sum_{x_k \in \mathcal{N}_l} \int_{\tau_l} \varphi_k(v - \bar{v}_k)w \, dx.$$

Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung für Integrale und Summen ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{x_k \in \mathcal{N}_l} \int_{\tau_l} \varphi_k(v - \bar{v}_k)w \, dx &\leq \left\{ \sum_{x_k \in \mathcal{N}_l} \left\| \varphi_k^{\frac{1}{2}}(v - \bar{v}_k) \right\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{x_k \in \mathcal{N}_l} \left\| \varphi_k^{\frac{1}{2}}w \right\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\{ \sum_{x_k \in \mathcal{N}_l} \|v - \bar{v}_k\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L_2(\tau_l)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also für den Interpolationsfehler

$$\begin{aligned} \|v - P_{\mathcal{T}}v\|_{L_2(\tau_l)} &= \sup_{0 \neq w \in L_2(\tau_l)} \frac{\int_{\tau_l} (v - P_{\mathcal{T}}v)w \, dx}{\|w\|_{L_2(\tau_l)}} \\ &\leq \left\{ \sum_{x_k \in \mathcal{N}_l} \|v - \bar{v}_k\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Wir führen für die Knoten von τ_l eine Fallunterscheidung durch. Falls x_k am Rand Γ liegt, so gilt zum Einen nach Definition $\bar{v}_k = 0$, zum Anderen muss es eine Kante $e \in \mathcal{E}_{\Gamma}$ und ein Element $\tau_j \subset \omega_{x_k}$ geben, sodass x_k ein Knoten von e ist und e wiederum eine Kante des Elements τ_j ist. Da $v \in H_0^1(\Omega)$ und e positives 1-dimensionales Lebesguemaß hat, können wir die Friedrich'sche Ungleichung [1] anwenden und erhalten in diesem Fall

$$\|v - \bar{v}_k\|_{L_2(\tau_l)} \leq \|v\|_{L_2(\omega_{x_k})} \leq c \operatorname{diam}(\omega_{x_k}) \|\nabla v\|_{L_2(\omega_{x_k})} \leq ch_l \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_l)}.$$

Wir haben hierbei die Beziehung

$$\text{diam}(\omega_{x_k}) \simeq h_l$$

verwendet, eine Folgerung aus der gleichmäßigen Formregularität der Netzfolge. Ist x_k hingegen ein innerer Knoten, so liefert die Poincaré'sche Ungleichung die Beziehung

$$\|v - \bar{v}_k\|_{L_2(\tau_l)} \leq \|v - \bar{v}_k\|_{L_2(\omega_{x_k})} \leq c \text{diam}(\omega_{x_k}) \|\nabla v\|_{L_2(\omega_{x_k})} \leq ch_l \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_l)}.$$

Damit haben wir die erste behauptete Abschätzung verifiziert. Zum Beweis der zweiten Ungleichung betrachten wir zunächst eine analoge Vorgehensweise wie bei der Herleitung der ersten. Wir beachten, dass die Funktionen φ_k für $x_k \in \mathcal{N}_e$ wiederum eine Zerlegung der Eins bilden und erhalten

$$\|v - P_{\mathcal{T}}v\|_{L_2(e)} \leq \left\{ \sum_{x_k \in \mathcal{N}_e} \|v - \bar{v}_k\|_{L_2(e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Aus Lemma 1.6 erhalten wir die Gültigkeit der Spurgleichung

$$\|w\|_{L_2(e)} \leq ch_e^{-\frac{1}{2}} \|w\|_{L_2(\tau_j)} + ch_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_{L_2(\tau_j)} \quad (1.10)$$

für jedes Element τ_j mit $e \in \mathcal{E}_j$ und jede Funktion $w \in H^1(\tau_j)$. Ist x_k ein Randknoten, so folgt hiermit und mit den Resultaten aus dem ersten Fall in obigem Beweis für die Abschätzung des Interpolationsfehlers am Element τ_j ,

$$\begin{aligned} \|v - \bar{v}_k\|_{L_2(e)} &= \|v\|_{L_2(e)} \\ &\leq ch_e^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L_2(\tau_j)} + ch_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L_2(\tau_j)} \\ &\leq ch_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_e)}. \end{aligned}$$

Für den Fall, dass $x_k \in \mathcal{N}_\Omega$ ist, erhalten wir das gewünschte Ergebnis durch Anwendung von (1.10) und der Poincaré'schen Ungleichung,

$$\begin{aligned} \|v - \bar{v}_k\|_{L_2(e)} &\leq ch_e^{-\frac{1}{2}} \|v - \bar{v}_k\|_{L_2(\tau_j)} + ch_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L_2(\tau_j)} \\ &\leq ch_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_e)}. \end{aligned}$$

Die vorkommenden Konstanten hängen jeweils nur von der Formregularitätskonstante $c_{\mathcal{F}}$ ab. Hiermit sind die behaupteten Aussagen bewiesen. \square

Bemerkung 1.8. Die in diesem einführenden Kapitel gezeigten Ungleichungen sind Basis für die Herleitung einer Vielzahl an Fehlerschätzern für die Poisson-Gleichung

und weitere elliptische partielle Differentialgleichungen. Eine möglichst genaue Kenntnis der Gestalt der auftretenden Konstanten in den vorangehenden Abschätzungen liefert wichtige Informationen über die Genauigkeit dieser Fehlerschätzer. Detaillierte Informationen zu den Konstanten in der Spurungleichung, der Poincaré'schen und der Friedrich'schen Ungleichung sowie den lokalen inversen Ungleichungen und Interpolationsabschätzungen finden sich in [23, Chap. 3].

2 Ein a posteriori Fehlerschätzer für die Poisson-Gleichung

Nachdem wir im einleitenden Kapitel das elliptische Modellproblem und die zugehörige Finite-Elemente-Formulierung beschrieben haben, wollen wir in diesem Kapitel einen a posteriori Fehlerschätzer für dieses Problem konstruieren. Das heißt, wir suchen nun eine, aus elementweisen Anteilen, den so genannten lokalen Fehlerindikatoren η_l (für $l = 1, \dots, N$) gebildete, Größe

$$\eta = \left\{ \sum_{l=1}^N \eta_l^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

welche den tatsächlichen Fehler bezüglich einer bereits berechneten diskreten Finite-Elemente-Lösung $u_{\mathcal{T}}$ in einer geeigneten Norm nach oben und unten (bis auf multiplikative Konstanten) beschränkt und sich allein mittels der bekannten Funktion $u_{\mathcal{T}}$, den Daten der Differentialgleichung wie etwa der Funktion f sowie der Triangulierung \mathcal{T} selbst bestimmen lässt. Wenn wir eine solche Größe η zur Verfügung haben, so können wir diese dazu verwenden ein rekursives Verfahren zu steuern, bei dem ausgehend von einem Startnetz, eine Folge adaptiv verfeinerter Netze konstruiert wird, deren lokale Feinheit dem geschätzten Fehler angepasst wird. Wie wir zum Ende des Kapitels sehen werden, liegt der Vorteil eines solchen adaptiven Finite-Elemente-Verfahrens in der teilweise erheblichen Einsparung an benötigten Freiheitsgraden im Vergleich zum Verfahren mit uniformer Verfeinerung bei gleich großem Fehler. Wir wollen nun zunächst die grundlegende Struktur eines solchen adaptiven Verfahrens angeben.

Algorithmus 2.1 (Adaptives Finite-Elemente-Verfahren, [23]).

- (0) Gegeben seien die Daten des Modellproblems sowie eine Toleranz $\varepsilon > 0$. Gesucht ist eine numerische Lösung, deren Fehler kleiner ist als ε .
- (1) Konstruiere ein Ausgangsnetz \mathcal{T}_0 , welches die Geometrie des betrachteten Gebiets hinreichend genau wiedergibt und setze für das Netzlevel $L = 0$.
- (2) Löse die diskrete Variationsformulierung des Modellproblems auf \mathcal{T}_L .
- (3) Berechne für jedes Element τ_l von \mathcal{T}_L den zugehörigen lokalen Fehlerindikator η_l .
- (4) Falls der geschätzte globale Fehler kleiner ist als ε , so ist das Verfahren beendet. Andernfalls wähle die zu verfeinernden Elemente aus und konstruiere das nächste Netz \mathcal{T}_{L+1} . Setze $L = L + 1$ und gehe zu Schritt (2).

Diese allgemeine Formulierung lässt offen, wie die zu verfeinernden Elemente anhand der lokalen Anteile gewählt werden sollen. Hierzu gibt es eine Vielzahl an verschiedenen Markierungsstrategien [23]. Eine sehr einfache und rechnerisch wenig aufwendige Strategie stellt die Maximierungsstrategie dar.

Algorithmus 2.2 (Maximierungsstrategie [24, Algo. III.1.1]).

- (0) Gegeben: Partition \mathcal{T} des betrachteten Gebiets in Dreiecke, lokale Fehlerindikatoren η_l für jedes Element τ_l von \mathcal{T} , Adaptivitätsparameter $\theta \in [0, 1]$.
Gesucht: Menge \mathcal{Q} von zu verfeinernden Elementen.

- (1) Berechne

$$\eta_{\max} = \max_{\tau_l \in \mathcal{T}} \eta_l.$$

- (2) Iteriere über alle Elemente. Falls für ein Element τ_l die Ungleichung

$$\eta_l \geq \theta \eta_{\max}$$

erfüllt ist, füge das Element τ_l zur Menge \mathcal{Q} hinzu.

Mit der Wahl des Adaptivitätsparameters θ kann gesteuert werden, wie „tolerant“ die konstruierten Netze an die lokale Fehlerschätzung angepasst werden sollen. Ein großer Wert von θ führt zu stark angepassten Netzen, während $\theta = 0$ einer uniformen Verfeinerung entspricht. Alternativ zu Algorithmus 2.2 kommen in der Praxis oft rechnerisch aufwendigere Markierungsstrategien, wie etwa die Dörfler-Methode [23] (siehe Algorithmus 3.1 in Kapitel 3), zum Einsatz.

Wenn nun eine Menge von zu verfeinernden Elementen mithilfe einer geeigneten Markierungsstrategie gewählt wurde, so wird jedes Dreieck in dieser Menge verfeinert, indem dessen Kantenmittelpunkte miteinander verbunden werden (siehe „ROT“-Verfeinerung in Abbildung 2.1). Anschließend müssen meist mithilfe geeigneter Methoden zusätzliche Elemente verfeinert werden, um ein zulässiges Netz zu erzeugen. Eine solche Verfeinerungsstrategie muss, neben der Zulässigkeit der entstehenden Netze auch den Erhalt der gleichmäßigen Formregularität der Netzfolge sicherstellen. Ein Beispiel einer Methode, die diese Voraussetzungen erfüllt ist die so genannte ROT-GRÜN-BLAU-Verfeinerungsstrategie („RGB-Methode“) [23, 22].

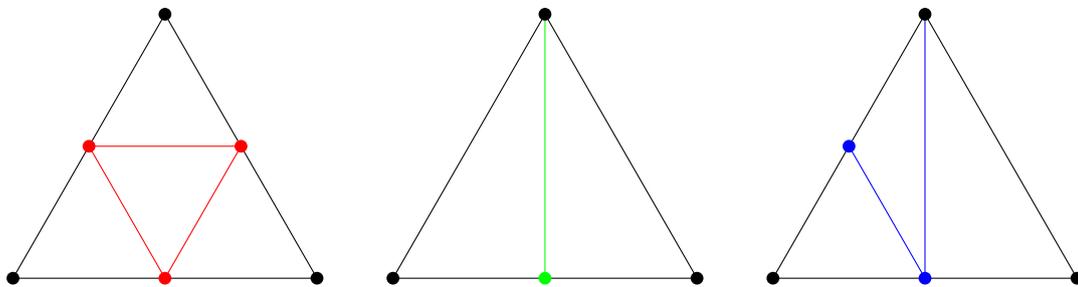


Abbildung 2.1: „ROT“--, „GRÜN“- und „BLAU“-Verfeinerungen eines Dreiecks

2.1 Das Residuum

Ausgangspunkt für die Herleitung des Fehlerschätzers für das Modellproblem ist das Residuum R einer diskreten Finite-Elemente-Lösung $u_{\mathcal{T}}$ der Poisson-Gleichung, welches als ein Element des Raums $H^{-1}(\Omega)$ durch die Darstellung

$$\langle R, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla v \, dx$$

für $v \in H_0^1(\Omega)$ definiert ist [23]. Aufgrund der Konformität des diskreten Ansatzraums $V_{\mathcal{T}}$ ist die Galerkin-Orthogonalität

$$\langle R, v_{\mathcal{T}} \rangle = 0 \tag{2.1}$$

für alle $v_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ erfüllt. Das Residuum R steht in engem Zusammenhang zum tatsächlichen Fehler.

Lemma 2.1. *Für das Residuum R gilt*

$$\|R\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\Omega)}.$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass nach dem Sobolev'schen Normäquivalenzsatz [19, Thm. 2.6] mit der Abbildung $v \mapsto \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$ eine äquivalente Norm in $H_0^1(\Omega)$ gegeben ist. Betrachten wir die kontinuierliche Variationsformulierung (1.2) und die Definition des Residuums, so erkennen wir den Zusammenhang

$$\langle R, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla(u - u_{\mathcal{T}}) \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung erhalten wir

$$|\langle R, v \rangle| \leq \|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}.$$

Es folgt somit

$$\|R\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{0 \neq v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|\langle R, v \rangle|}{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}} = \|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\Omega)}.$$

□

Während die Berechnung von $\|R\|_{H^{-1}(\Omega)}$ die Lösung eines unendlich-dimensionalen Variationsproblems erfordert und damit so aufwendig ist wie die Lösung der Variationsformulierung (1.2), so benötigen wir für die Berechnung der Auswertung $\langle R, v \rangle$ für ein gegebenes $v \in H_0^1(\Omega)$ nur die bereits bestimmte Lösung des endlich-dimensionalen Problems (1.3) [25]. Die meisten a posteriori Fehlerschätzer basieren auf einer direkten Abschätzung des Residuums in der $H^{-1}(\Omega)$ -Norm mithilfe von Größen, die möglichst

einfach aus den gegebenen Daten f und $u_{\mathcal{T}}$ berechnet werden können. Der Fehlerschätzer, den wir in dieser Arbeit behandeln wollen, basiert auf der Lösung lokaler diskreter Hilfsprobleme auf den Elementen des Netzes, welche ähnlich zum globalen Problem sind, deren Lösung aber weniger aufwendig ist. Wir folgen dabei, bis auf geringfügige Modifikationen, den Ausführungen in [23].

Um für die nächsten Formulierungen eine kompaktere Schreibweise zu ermöglichen, führen wir zunächst die Sprungfunktion auf Kanten ein. Jeder Kante e des Netzes \mathcal{T} ordnen wir einen Normalenvektor n_e zu. Dabei sei die Orientierung so gewählt, dass n_e für Kanten e die am Rand Γ liegen, nach außen zeigt. Die Orientierung des Normalenvektors für Kanten im Inneren des Gebiets Ω kann beliebig gewählt werden (Abbildung 2.2). Wir definieren dann die Sprungfunktion [23] über eine innere Kante

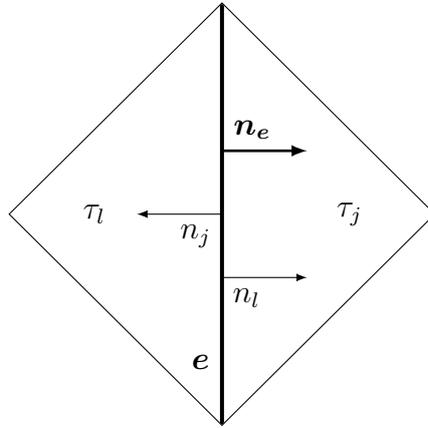


Abbildung 2.2: Normalenvektoren für die innere Kante e

e in der Richtung von n_e für eine stückweise stetige Funktion v punktweise mit

$$(\gamma_e(v))(x) := \lim_{s \rightarrow 0^+} v(x - sn_e) - \lim_{s \rightarrow 0^+} v(x + sn_e) \quad \text{für } x \in e.$$

Wir bemerken, dass Ausdrücke der Form $\gamma_e \left(\frac{\partial}{\partial n_e} v \right)$ für hinreichend differenzierbare Funktionen v , nicht von der gewählten Orientierung der Kantennormale n_e abhängen. Mithilfe dieser Definition können wir nun das Residuum in einer lokalisierten Form darstellen. Durch partielle Integration erhalten wir für alle $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle R, v \rangle &= \int_{\Omega} f v \, dx - \sum_{l=1}^N \int_{\tau_l} \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} f v \, dx + \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{\tau_l} \Delta u_{\mathcal{T}} v \, dx - \int_{\partial \tau_l} \frac{\partial}{\partial n_l} u_{\mathcal{T}} v \, ds_x \right\} \\ &= \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{\tau_l} (f + \Delta u_{\mathcal{T}}) v \, dx - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_{\Omega}} \int_e \gamma_e \left(\frac{\partial}{\partial n_e} u_{\mathcal{T}} \right) v \, ds_x \right\}. \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt ausgenutzt, dass $v = 0$ auf allen Kanten $e \in \mathcal{E}_\Gamma$ gilt. Mit $\frac{\partial}{\partial n_l} u_{\mathcal{T}} = n_l \cdot \nabla u_{\mathcal{T}}$ wird die Normalenableitung von $u_{\mathcal{T}}$ bezüglich der äußeren Normale n_l auf $\partial\tau_l$ bezeichnet (Abbildung 2.2). Der Faktor $\frac{1}{2}$ vor der Summe über die Kanten in der letzten Zeile dient dazu, die Doppelzählung bei den inneren Kanten auszugleichen. Obwohl $\Delta u_{\mathcal{T}} = 0$ auf jedem Element des Netzes gilt, werden wir diese Terme im Sinne einer möglichen Verallgemeinerung auf Ansatzräume von Funktionen höheren Polynomgrades, weiter mitführen.

Wir definieren nun zur Ermöglichung einer kompakteren Schreibweise, die Element- und Kantenresiduen $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beziehungsweise $j : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Darstellungen

$$\begin{aligned} r|_{\tau_l} &= f + \Delta u_{\mathcal{T}} \text{ auf } \tau_l, \\ j|_e &= \begin{cases} -\gamma_e \left(\frac{\partial}{\partial n_e} u_{\mathcal{T}} \right) & \text{für } e \in \mathcal{E}_\Omega, \\ 0 & \text{für } e \in \mathcal{E}_\Gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die „ L_2 -Darstellung“ des Residuums mit

$$\langle R, v \rangle = \int_{\Omega} r v \, dx + \int_{\Sigma} j v \, ds_x$$

beziehungsweise in der lokalisierten Variante mit

$$\langle R, v \rangle = \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{\tau_l} r v \, dx + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l} \int_e j v \, ds_x \right\}. \quad (2.2)$$

2.2 Der Fehlerschätzer

Wir haben im letzten Abschnitt die Auswertung des Funktionals R in $v \in H_0^1(\Omega)$ in die Auswertung lokaler Anteile auf den Elementen und den jeweiligen Kanten zurückgeführt. Wir wollen diese lokalen Anteile nun jeweils als rechte Seite lokaler Variationsformulierungen auf den Elementen $\tau_l \subset \mathcal{T}$ verwenden und die Lösungen einer diskretisierten Version dieser lokalen Probleme in geeigneten Normen jeweils als lokale Fehlerindikatoren verwenden. Dazu betrachten wir zunächst folgende kontinuierliche Variationsformulierung auf einem beliebigen Element τ_l :

Gesucht ist eine Funktion

$$w \in H_{\Gamma}^1(\tau_l) := \{ \phi \in H^1(\tau_l) : \phi = 0 \text{ auf } \partial\tau_l \cap \Gamma \},$$

sodass

$$\int_{\tau_l} (\nabla w \cdot \nabla v + wv) \, dx = \int_{\tau_l} rv \, dx + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_{\Omega}} \int_e jv \, ds_x \quad (2.3)$$

für alle $v \in H_{\Gamma}^1(\tau_l)$ erfüllt ist.

Die Bilinearform auf der linken Seite ist stetig und $H_{\Gamma}^1(\tau_l)$ -elliptisch und die Linearform auf der rechten Seite ist beschränkt. Somit hat das lokale Problem eine eindeutige Lösung in $H_{\Gamma}^1(\tau_l)$. Das Variationsproblem (2.3) stellt eine schwache Form des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta w + w &= r && \text{in } \tau_l, \\ \frac{\partial w}{\partial n_l} &= \frac{1}{2}j && \text{auf } e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_{\Omega}, \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\tau_l \cap \Gamma, \end{aligned}$$

dar.

Bemerkung 2.2. Im Vergleich zu [23], wo für die lokalen Probleme die Poisson-Gleichung verwendet wird, stellt obige Formulierung ein lokales Randwertproblem der inhomogenen Jukawa-Gleichung dar. Der Vorteil dieser Formulierung ist, dass im kontinuierlichen Fall für die Lösbarkeit keine zusätzliche Kompatibilitätsbedingung für die lokalen Probleme auf Elementen, die keine Randkanten besitzen, gefordert werden muss. Zu beachten ist allerdings, dass für die Konstruktion und den Beweis der wesentlichen Eigenschaften des Fehlerschätzers in [23] die Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems nicht benötigt wird. Die Lösbarkeit der diskretisierten Poisson-Probleme mit reiner Neumann-Randbedingung wird in [23] durch die Wahl des Ansatzraums garantiert.

Zur Diskretisierung der lokalen Probleme müssen wir nun geeignete endlich-dimensionale Ansatzräume wählen. Wegen der Galerkin-Orthogonalität (2.1) und dem Wunsch, möglichst akkurate Informationen über den Fehler zu erhalten, ist es zum Einen erforderlich, dass diese Ansatzräume eine genauere Approximation der Lösungen der lokalen Hilfsprobleme (2.3) ermöglichen als jene der diskreten Variationsformulierung (1.3) des Modellproblems, zum Anderen soll die Anzahl der Freiheitsgrade möglichst gering gehalten werden, um den Rechenaufwand zur Berechnung des Fehlerschätzers zu minimieren. Insbesondere soll die Lösung aller lokaler diskreter Probleme zusammen

rechnerisch nicht aufwendiger sein als die Assemblierung der globalen Steifigkeitsmatrix des ursprünglichen globalen Variationsproblems (1.3) [23]. Als Kompromiss zwischen diesen Anforderungen wählen wir, basierend auf den Ausführungen von Verfürth [23], als diskreten Ansatzraum für das Variationsproblem (2.3) auf einem Element τ_l den von den Bubble-Funktionen aus (1.4) und (1.5) aufgespannten Raum

$$W_l = \text{span} \{ \psi_e, \psi_l : e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_\Omega \} \subset H_0^1(\Omega),$$

dessen Elemente Polynomfunktionen vom Grad höchstens 3 sind. Für jedes Element $v_l \in W_l$ gilt

$$v_l|_{\tau_l} \in H_\Gamma^1(\tau_l)$$

und die Funktion v_l ist eindeutig durch ihre Werte in den Kantenmittelpunkten und dem geometrischen Schwerpunkt von τ_l bestimmt (Abbildung 2.3). Die diskretisierte

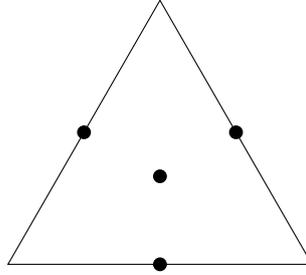


Abbildung 2.3: Freiheitsgrade einer Funktion im Raum W_l

Variationsformulierung des lokalen Problems lautet hiermit dann:

Wir suchen $w_l \in W_l$, sodass

$$\int_{\tau_l} (\nabla w_l \cdot \nabla v_l + w_l v_l) \, dx = \int_{\tau_l} r v_l \, dx + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_\Omega} \int_e j v_l \, ds_x \quad (2.4)$$

für alle Funktionen $v_l \in W_l$ erfüllt ist.

Wir bezeichnen fortan für jedes Element $\tau_l \subset \mathcal{T}$ mit w_l die eindeutige Lösung des diskreten Variationsproblems (2.4). Als Kandidat für einen lokalen Fehlerindikator auf dem Element τ_l wollen wir die Größe

$$\eta_l := \|w_l\|_{H^1(\tau_l)}$$

betrachten. Die zugehörige globale Größe ist dann wie zu Beginn des Kapitels definiert mit

$$\eta := \sqrt{\sum_{l=1}^N \eta_l^2}. \quad (2.5)$$

Zu bemerken ist, dass für die Berechnung von η ausschließlich die bekannten Funktionen $u_{\mathcal{T}}$, f sowie das Finite-Elemente Netz benötigt werden. A posteriori Fehlerschätzer wie η , welche durch die Lösung zusätzlicher Hilfsprobleme konstruiert werden, werden oft als implizite Schätzer bezeichnet [2]. Explizite a posteriori Fehlerschätzer hingegen lassen sich direkt aus den Element- und Kantenresiduen sowie den Daten des Netzes berechnen. Bezüglich des Rechenaufwandes bemerken wir, dass zur Bestimmung von η genau N lineare Gleichungssysteme der Dimension 4×4 zu lösen sind, da pro Element jeweils ein Freiheitsgrad dem geometrischen Schwerpunkt zugeordnet ist sowie je nach gegebener Randbedingung maximal insgesamt 3 den Kantenmittelpunkten. Da die Sprünge der Normalenableitung von $u_{\mathcal{T}}$ über die inneren Kanten bekannt sind, lassen sich die lokalen Systeme völlig unabhängig voneinander lösen, was darüber hinaus eine einfache Parallelisierung des Algorithmus zur Berechnung von η ermöglicht.

2.3 Äquivalenz des Fehlerschätzers und des Fehlers

Um zu beweisen, dass mit der Größe η in (2.5) tatsächlich ein Fehlerschätzer gegeben ist, müssen wir zeigen, dass η zum Einen eine Zuverlässigkeitseigenschaft der Form

$$\|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\Omega)} \lesssim \eta$$

besitzt und zum anderen den tatsächlichen Fehler auch effizient abschätzt, das heißt, dass zusätzlich eine Ungleichung der Form

$$\eta \lesssim \|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\Omega)}$$

erfüllt ist. Schon vorweg nehmen wollen wir jedoch die Tatsache, dass im Allgemeinen eine Äquivalenz des Fehlerschätzers zum tatsächlichen Fehler nicht gezeigt werden kann. Wie wir sehen werden, müssen wir bei den obigen Zuverlässigkeits- und Effizienzabschätzungen ein Auftreten von zusätzlichen Termen, von jedoch meist höherer Ordnung, in Kauf nehmen.

2.3.1 Zuverlässigkeit

Zum Beweis der Beschränkung des Fehlers durch η von oben bedienen wir uns des quasi-interpolierenden Operators $P_{\mathcal{T}}$ aus Definition 1.5. Für $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $P_{\mathcal{T}}v \in$

$V_{\mathcal{T}}$ und wir erhalten aufgrund der Galerkin-Orthogonalität (2.1) und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} \langle R, v \rangle &= \langle R, v - P_{\mathcal{T}}v \rangle \\ &= \sum_{l=1}^N \int_{\tau_l} r(v - P_{\mathcal{T}}v) \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Omega}} \int_e j(v - P_{\mathcal{T}}v) \, ds_x \\ &\leq \sum_{l=1}^N \|r\|_{L_2(\tau_l)} \|v - P_{\mathcal{T}}v\|_{L_2(\tau_l)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Omega}} \|j\|_{L_2(e)} \|v - P_{\mathcal{T}}v\|_{L_2(e)}. \end{aligned}$$

Für die L_2 -Normen der Interpolationsfehler können wir nun die Abschätzungen aus Satz 1.7 anwenden und erhalten für das Residuum

$$\langle R, v \rangle \leq \sum_{l=1}^N ch_l \|r\|_{L_2(\tau_l)} \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_l)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Omega}} ch_e^{\frac{1}{2}} \|j\|_{L_2(e)} \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_e)}.$$

Mit der Hölder'schen Ungleichung für Summen ergibt sich anschließend

$$\begin{aligned} \langle R, v \rangle &\leq c \left\{ \sum_{l=1}^N h_l^2 \|r\|_{L_2(\tau_l)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Omega}} h_e \|j\|_{L_2(e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{l=1}^N \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_l)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Omega}} \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Formregularität der Netzfolge können wir die Abschätzung

$$\left\{ \sum_{l=1}^N \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_l)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Omega}} \|\nabla v\|_{L_2(\tilde{\omega}_e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq c \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$$

durchführen. Dabei fließt in die Konstante c aufgrund der Überlappung der Mengen $\tilde{\omega}_l$ und $\tilde{\omega}_e$ die Mehrfachzählung der L_2 Normen von ∇v über den einzelnen Elementen ein. Führen wir nun noch die Kantenzählung wie in (2.2) ausgehend von den Elementen durch, so erhalten wir aus der Abschätzung (2.6) insgesamt die für jede Funktion $v \in H_0^1(\Omega)$ geltende Ungleichung

$$\langle R, v \rangle \leq c \left\{ \sum_{l=1}^N \left(h_l^2 \|r\|_{L_2(\tau_l)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_{\Omega}} h_e \|j\|_{L_2(e)}^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}.$$

Nach einer Division durch $\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$ und Supremumbildung über alle $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$ sind wir nun am Ausgangspunkt für den Zuverlässigkeitsbeweis in Form der Ungleichung

$$\|R\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c \left\{ \sum_{l=1}^N \left(h_l^2 \|r\|_{L_2(\tau_l)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_\Omega} h_e \|j\|_{L_2(e)}^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

angelangt. Nun müssen wir die L_2 -Normen der Element- und Kantenresiduen geeignet durch die lokalen Fehlerindikatoren abschätzen. Dies wird durch Einsetzen spezieller Ansatzfunktionen in die lokalen diskreten Variationsformulierungen (2.4) bewerkstelligt. Dazu betrachten wir nun ein beliebiges, aber fest gewähltes Element τ_l des Netzes. Wir setzen

$$v_l = (\bar{f}_l + \Delta u_{\mathcal{T}}) \psi_l. \quad (2.8)$$

Dabei ist

$$\bar{f}_l = \frac{1}{\Delta_l} \int_{\tau_l} f \, dx,$$

und wir erinnern daran, dass mit ψ_l die Element-Bubble-Funktion bezüglich des Elements τ_l , welche wir in (1.4) definiert haben, gegeben ist. Es gilt $v_l \in W_l$ und wir können die Funktion als Testfunktion in das lokale Variationsproblem (2.4) bezüglich des Elements τ_l einsetzen. Außerdem gelten für die Funktion v_l die lokalen Ungleichungen aus Satz 1.3. Wir erhalten

$$\begin{aligned} c \|\bar{f}_l + \Delta u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\tau_l)}^2 &\leq \int_{\tau_l} (\bar{f}_l + \Delta u_{\mathcal{T}})^2 \psi_l \, dx \\ &= \int_{\tau_l} (\bar{f}_l + \Delta u_{\mathcal{T}}) v_l \, dx \\ &= \int_{\tau_l} (w_l v_l + \nabla w_l \cdot \nabla v_l) \, dx + \int_{\tau_l} (\bar{f}_l - f) v_l \, dx, \end{aligned} \quad (2.9)$$

dabei fallen wegen $\psi_l|_{\partial\tau_l} = 0$ alle Integrale über Kanten von τ_l weg. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung, und der lokalen inversen Ungleichung aus Satz 1.3 können wir nun weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} c \|\bar{f}_l + \Delta u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\tau_l)}^2 &\leq \eta_l \left(\|v_l\|_{L_2(\tau_l)} + \|\nabla v_l\|_{L_2(\tau_l)} \right) + \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)} \|v_l\|_{L_2(\tau_l)} \\ &\leq c \|\bar{f}_l + \Delta u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\tau_l)} \left[(1 + h_l^{-1}) \eta_l + \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)} \right]. \end{aligned}$$

Damit gilt schließlich für jedes Element $\tau_l \in \mathcal{T}$,

$$\|\bar{f}_l + \Delta u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\tau_l)} \leq c \left[(1 + h_l^{-1}) \eta_l + \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)} \right]. \quad (2.10)$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt für die L_2 -Norm des Elementresiduums

$$\|r\|_{L_2(\tau_l)} \leq \|\bar{f}_l + \Delta u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\tau_l)} + \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)}.$$

Dann folgt aus Abschätzung (2.10) die Beschränktheit der L_2 -Norm des Elementresiduums auf τ_l nach oben mit

$$\|r\|_{L_2(\tau_l)} \leq c \left[(1 + h_l^{-1}) \eta_l + \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)} \right]. \quad (2.11)$$

Auf ähnliche Weise schätzen wir nun das Kantenresiduum für eine Kante $e \in \mathcal{E}_\Omega$ ab. Es sei τ_i ein Element mit $e \in \mathcal{E}_i$. Da $j|_e = -\gamma_e(\frac{\partial}{\partial n_e} u_{\mathcal{T}})$ konstant ist, liegt die Funktion

$$v_e := j|_e \psi_e$$

somit im Raum W_i . Hierbei bezeichnet ψ_e die zu e gehörige Kanten-Bubble-Funktion (1.5). Wir erhalten durch Anwendung der lokalen Ungleichung aus Satz 1.4 zunächst

$$c \frac{1}{2} \|j\|_{L_2(e)}^2 \leq \frac{1}{2} \int_e j^2 \psi_e \, ds_x = \frac{1}{2} \int_e j v_e \, ds_x.$$

Nach Definition der Kanten-Bubble-Funktion verschwindet v_e auf allen Kanten außer der (inneren) Kante e . Da w_i die Lösung des diskreten Variationsproblems (2.4) auf dem Element τ_i ist, gilt somit die Identität

$$\frac{1}{2} \int_e j v_e \, ds_x = \int_{\tau_i} (w_i v_e + \nabla w_i \cdot \nabla v_e) \, dx - \int_{\tau_i} r v_e \, dx.$$

Erneut wenden wir die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung an, um anschließend die Ungleichungen aus Satz 1.4 einzusetzen und erhalten

$$\begin{aligned} c \frac{1}{2} \|j\|_{L_2(e)}^2 &\leq \eta_i \left(\|v_e\|_{L_2(\tau_i)} + \|\nabla v_e\|_{L_2(\tau_i)} \right) + \|v_e\|_{L_2(\tau_i)} \|r\|_{L_2(\tau_i)} \\ &\leq c \|j\|_{L_2(e)} \left[\left(h_i^{\frac{1}{2}} + h_i^{-\frac{1}{2}} \right) \eta_i + h_i^{\frac{1}{2}} \|r\|_{L_2(\tau_i)} \right]. \end{aligned}$$

Damit ist nun folgende vorläufige Abschätzung für das Kantenresiduum gezeigt,

$$\|j\|_{L_2(e)} \leq c \left[\left(h_i^{\frac{1}{2}} + h_i^{-\frac{1}{2}} \right) \eta_i + h_i^{\frac{1}{2}} \|r\|_{L_2(\tau_i)} \right]. \quad (2.12)$$

Wir können nun die bereits gezeigte Abschätzung (2.11) der L_2 -Norm des Elementresiduums auf dem Element τ_i anwenden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|j\|_{L_2(e)} &\leq c \left\{ \left(h_i^{\frac{1}{2}} + h_i^{-\frac{1}{2}} \right) \eta_i + h_i^{\frac{1}{2}} \left[(1 + h_i^{-1}) \eta_i + \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)} \right] \right\} \\ &= c \left\{ \left(h_i^{\frac{1}{2}} + h_i^{-\frac{1}{2}} \right) \eta_i + h_i^{\frac{1}{2}} \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)} \right\}. \end{aligned}$$

Aus den gezeigten Abschätzungen für das Element- beziehungsweise Kantenresiduum folgen nun die für jedes Element $\tau_l \in \mathcal{T}$, jede Kante $e \in \mathcal{E}_\Omega$ und jedes Element τ_i mit $e \in \mathcal{E}_i$ geltenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} h_l^2 \|r\|_{L_2(\tau_l)}^2 &\leq c \left[(h_l^2 + 1) \eta_l^2 + h_l^2 \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right] \\ &\leq c \left[\eta_l^2 + h_l^2 \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h_e \|j\|_{L_2(e)}^2 &\leq c \left[(h_i^2 + 1) \eta_i^2 + h_i^2 \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)}^2 \right] \\ &\leq c \left[\eta_i^2 + h_i^2 \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Größen h_l und h_i in den Klammern jeweils durch die Konstante $\text{diam}(\Omega)$ abgeschätzt und die Tatsache $h_e \leq h_i$ ausgenutzt. Für den Summanden bezüglich eines Elements τ_l auf der rechten Seite von (2.7) ergibt sich somit

$$h_l^2 \|r\|_{L_2(\tau_l)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_\Omega} h_e \|j\|_{L_2(e)}^2 \leq c \sum_{\tau_i \subset \omega_l} \left[\eta_i^2 + h_i^2 \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)}^2 \right].$$

Durch Bildung der Summe über alle Elemente und Beachtung der Äquivalenz der Dualnorm des Residuums und des tatsächlichen Fehlers aus Lemma 2.1 haben wir hiermit den folgende Satz bewiesen.

Satz 2.3 (Zuverlässigkeit von η). *Für die Größe*

$$\eta = \sqrt{\sum_{l=1}^N \eta_l^2}$$

mit den lokalen Fehlerindikatoren $\eta_l = \|w_l\|_{H^1(\tau_l)}$, wobei w_l die eindeutige Lösung des lokalen diskreten Hilfsproblems (2.4) auf dem Element τ_l ist, gilt

$$\|\nabla(u - u_\mathcal{T})\|_{L_2(\Omega)} \leq c \left\{ \eta^2 + \sum_{l=1}^N h_l^2 \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.13)$$

Die Konstante $c > 0$ hängt dabei nur von Ω und der Formregularitätskonstante der Netzfamilie ab.

Damit haben wir also gezeigt, dass mit der Größe η ein zuverlässiger Fehlerschätzer für das Modellproblem gegeben ist. Die zusätzlichen Datenoszillationsterme der rechten Seite von (2.13) sind in den meisten Fällen Terme höhere Ordnung die vernachlässigt werden können. Dass diese Terme aber in speziellen Fällen dominant sein können zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 2.1 ([23, Rem. 1.8]). Es sei $\tau_1 \subset \mathcal{T}$ und wir wählen $0 \neq u \in C^\infty(\Omega)$ mit kompaktem Träger $\text{supp } u$ der Teilmenge des offenen Dreiecks τ_1 sei. Wir setzen $f = -\Delta u$, woraus wir zum Einen folgern, dass

$$\int_{\tau_1} f \, dx = - \int_{\tau_1} \Delta u \, dx = 0$$

und zum Anderen, dass $f = 0$ außerhalb von τ_1 gilt. Somit ist $\bar{f}_l = 0$ für alle Element τ_l des Netzes. Wenn wir nun, wie in der Praxis meist notwendig, die Funktion f in den lokalen Hilfsproblemen durch eine Approximation wie etwa gegeben durch $f|_{\tau_l} = \bar{f}_l$ (für $l = 1, \dots, N$) ersetzen, so verschwinden alle Elementresiduen, das heißt $r = 0$. Bezüglich der diskreten Variationsformulierung des homogenen Dirichlet-Randwertproblems zu $-\Delta u = f$ für den Ansatzraum $V_{\mathcal{T}}$ erhalten wir mit partieller Integration

$$\int_{\Omega} f v_{\mathcal{T}} \, dx = - \int_{\tau_1} \Delta u v_{\mathcal{T}} \, dx = - \int_{\tau_1} u \Delta v_{\mathcal{T}} \, dx = 0 \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}},$$

sodass die eindeutige Lösung mit $u_{\mathcal{T}} = 0$ gegeben ist. Daraus folgt, dass schließlich auch alle Kantenresiduen verschwinden und die eindeutige Lösung des diskreten Hilfsproblems (2.4) auf jedem Element $\tau_l \subset \mathcal{T}$ mit $w_l = 0$ gegeben ist. Somit gilt für den Fehlerschätzer $\eta = 0$, hingegen aber

$$\|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \neq 0.$$

Dieses Problem ist nicht auf die spezielle Wahl der Approximation in diesem Beispiel beschränkt und wegen der Beliebigkeit der Funktion u können solche Fälle immer auftreten, wenn die Integrale der Funktion f nicht exakt ausgewertet werden, was in der Praxis jedoch meist nicht möglich ist. Allerdings verschwindet dieses Problem, sobald das Netz weiter verfeinert wird.

Zu zeigen, dass eine Größe eine obere Schranke für den Fehler darstellt ist nicht ausreichend, um selbige Größe auch praktisch zur Steuerung eines adaptiven Verfahrens (Algorithmus 2.1) zu verwenden. Es wäre möglich, dass η den Fehler stark überschätzt oder das Verhalten des tatsächlichen Fehlers nicht korrekt wiedergibt. Wir müssen deshalb, wie am Beginn dieses Abschnitts erwähnt, zusätzlich zeigen, dass η den tatsächlichen Fehler auch effizient abschätzt.

2.3.2 Effizienz

Direkt aus der Definition des lokalen Fehlerindikators und der diskreten Variationsformulierung (2.4) des lokalen Hilfsproblems auf dem Element τ_l ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta_l^2 &= \int_{\tau_l} [(\nabla w_l)^2 + w_l^2] \, dx \\ &= \int_{\tau_l} r w_l \, dx + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_{\Omega}} \int_e j w_l \, ds_x. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung erhalten wir hiermit

$$\eta_l^2 \leq \|r\|_{L_2(\tau_l)} \|w_l\|_{L_2(\tau_l)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_\Omega} \|j\|_{L_2(e)} \|w_l\|_{L_2(e)}. \quad (2.14)$$

Wir bemerken, dass per Definition des diskreten Ansatzraums W_l jede Funktion $v_l \in W_l$ auf den Knoten des Elements τ_l den Wert Null annimmt. Für τ_l , jede Kante $e \in \mathcal{E}_l$ und jede Funktion $v_l \in W_l$ können damit durch ähnliche Argumente wie in Satz 1.3 die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|v_l\|_{L_2(\tau_l)} &\leq ch_l \|\nabla v_l\|_{L_2(\tau_l)}, \\ \|v_l\|_{L_2(e)} &\leq ch_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_l\|_{L_2(\tau_l)} \end{aligned}$$

gezeigt werden [23]. Mit diesen Abschätzungen und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung für Summen erhalten wir für den lokalen Fehlerindikator

$$\begin{aligned} \eta_l^2 &\leq c \left\{ h_l \|r\|_{L_2(\tau_l)} \|\nabla w_l\|_{L_2(\tau_l)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_\Omega} h_e^{\frac{1}{2}} \|j\|_{L_2(e)} \|\nabla w_l\|_{L_2(\tau_l)} \right\} \\ &\leq c \left\{ h_l^2 \|r\|_{L_2(\tau_l)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_\Omega} h_e \|j\|_{L_2(e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \eta_l. \end{aligned}$$

Wir haben damit η_l durch die Normen des Elementresiduums und der Kantenresiduen abgeschätzt,

$$\eta_l \leq c \left\{ h_l^2 \|r\|_{L_2(\tau_l)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_\Omega} h_e \|j\|_{L_2(e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Im nächsten Schritt müssen wir die Element- und Kantenresiduen geeignet durch den tatsächlichen Fehler abschätzen. Für ein Element $\tau_i \in \mathcal{T}$ sei dazu wieder die Funktion $v_i := (\bar{f}_i + \Delta u_{\mathcal{T}})\psi_i$ definiert. Wir bemerken, dass aufgrund der Eigenschaften der Element-Bubble-Funktionen $\text{supp } v_i \subseteq \bar{\tau}_i$ und $v_i \in H_0^1(\Omega)$ gilt. Insbesondere können wir v_i als Testfunktion in die kontinuierliche Variationsformulierung (1.2) der Poisson-Gleichung einsetzen und erhalten

$$\int_{\tau_i} \nabla u \cdot \nabla v_i \, dx = \int_{\tau_i} f v_i \, dx.$$

Nun ergibt sich durch eine Anwendung der ersten Ungleichung in Satz 1.3, sowie partieller Integration für die Lösung $u_{\mathcal{T}}$ der diskreten Variationsformulierung des ursprünglichen globalen Problems,

$$\begin{aligned} c \|\bar{f}_i + \Delta u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\tau_i)}^2 &\leq \int_{\tau_i} (\bar{f}_i + \Delta u_{\mathcal{T}}) v_i \, dx \\ &= \int_{\tau_i} \nabla (u - u_{\mathcal{T}}) \cdot \nabla v_i \, dx + \int_{\tau_i} (\bar{f}_i - f) v_i \, dx \end{aligned}$$

und mit erneuter Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung,

$$c \|\bar{f}_i + \Delta u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\tau_i)}^2 \leq \|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\tau_i)} \|\nabla v_i\|_{L_2(\tau_i)} + \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)} \|v_i\|_{L_2(\tau_i)}.$$

Mit der Dreiecksungleichung und den Ungleichungen für Element-Bubble-Funktionen aus Satz 1.3 ergibt sich schließlich für das Elementresiduum

$$\|r\|_{L_2(\tau_i)} \leq c \left(h_i^{-1} \|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\tau_i)} + \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)} \right). \quad (2.16)$$

Analog wählen wir zur Abschätzung des Kantenresiduums die zu einer Kante $e \in \mathcal{E}_{\Omega}$ gehörige Funktion $v_e = j|_e \psi_e$ als Testfunktion. Nach Definition der Kanten-Bubble-Funktionen in (1.5) gilt $\text{supp } v_e \subseteq \bar{\omega}_e$. Auch diese Funktion liegt somit im Ansatzraum $H_0^1(\Omega)$ der kontinuierlichen Variationsformulierung des ursprünglichen globalen Problems und wir können sie als Testfunktion in die schwache Formulierung (1.2) einsetzen:

$$\int_{\omega_e} \nabla u \cdot \nabla v_e \, dx = \int_{\omega_e} f v_e \, dx.$$

Da v_e per Definition auf allen Kanten $e' \neq e$ des Netzes verschwindet, zeigt sich durch partielle Integration bezüglich der Finite-Elemente-Lösung $u_{\mathcal{T}}$ im Residuumsterm r auf den Elementen $\tau_i \subset \omega_e$,

$$\begin{aligned} \int_{\omega_e} r v_e \, dx &= \sum_{\tau_i \subset \omega_e} \left\{ \int_{\tau_i} f v_e \, dx - \int_{\tau_i} \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla v_e \, dx + \int_e \frac{\partial}{\partial n_i} u_{\mathcal{T}} v_e \, ds_x \right\} \\ &= \int_{\omega_e} f v_e \, dx - \int_{\omega_e} \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla v_e \, dx - \int_e j v_e \, ds_x. \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir nach einer Anwendung der ersten lokalen Ungleichung für Kanten-Bubble-Funktionen aus Satz 1.4 die Abschätzung

$$\begin{aligned} c \|j\|_{L_2(e)}^2 &\leq \int_e j v_e \, ds_x \\ &= \sum_{\tau_i \subset \omega_e} \left\{ \int_{\tau_i} f v_e \, dx - \int_{\tau_i} \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla v_e \, dx + \int_e \frac{\partial}{\partial n_i} u_{\mathcal{T}} v_e \, ds_x \right\} \\ &\quad + \int_e j v_e \, ds_x - \int_{\omega_e} r v_e \, dx \\ &= \int_{\omega_e} \nabla(u - u_{\mathcal{T}}) \cdot \nabla v_e \, dx - \int_{\omega_e} r v_e \, dx. \end{aligned}$$

Schließlich führt die Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung, sowie der lokalen Ungleichungen aus Satz 1.4 und der bereits gezeigten Abschätzung (2.16) für

Elementresiduen zur Gültigkeit der Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|j\|_{L_2(e)}^2 &\leq c \sum_{\tau_i \subset \omega_e} \left(\|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\tau_i)} \|\nabla v_e\|_{L_2(\tau_i)} + \|r\|_{L_2(\tau_i)} \|v_e\|_{L_2(\tau_i)} \right) \\ &\leq c \|j\|_{L_2(e)} \sum_{\tau_i \subset \omega_e} \left(h_i^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\tau_i)} + h_i^{\frac{1}{2}} \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)} \right). \end{aligned}$$

Nach einer Division haben wir damit auch das Kantenresiduum durch den tatsächlichen Fehler beschränkt:

$$\|j\|_{L_2(e)} \leq c \sum_{\tau_i \subset \omega_e} \left(h_i^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\tau_i)} + h_i^{\frac{1}{2}} \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)} \right). \quad (2.17)$$

Übrig bleibt nur noch der Einsatz der Abschätzungen (2.16) und (2.17) der Element- beziehungsweise Kantenresiduen zur Abschätzung der rechten Seite von (2.15) und wir erhalten zunächst die lokale obere Beschränkung des Fehlerindicators η_l auf τ_l mit

$$\eta_l \leq c \left\{ \|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\omega_l)}^2 + \sum_{\tau_i \subset \omega_l} h_i^2 \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Durch Summierung über alle Elemente τ_l der Zerlegung \mathcal{T} und Berücksichtigung von Mehrfachzählungen bei der Zusammenfassung der Konstanten ist auch die globale obere Schranke für den Fehlerschätzer η bewiesen.

Satz 2.4 (Effizienz von η). *Für η und η_l definiert wie in Satz 2.3 zur Zuverlässigkeit, gilt die Effizienzabschätzung*

$$\eta \leq c \left\{ \|\nabla(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{l=1}^N h_l^2 \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

Wieder hängt die Konstante $c > 0$ dabei nur von Ω und der Formregularitätskonstante der Netzfamilie ab.

2.4 Numerische Ergebnisse

Wir wollen nun zum Abschluss dieses Kapitels das adaptive Finite-Elemente Verfahren aus Algorithmus (2.1), gesteuert von dem betrachteten zuverlässigen und effizienten Fehlerschätzer η , auf zwei Beispiele anwenden und jeweils mit dem Verfahren mit uniformer Verfeinerung vergleichen. Die verwendete C++-Implementierung entstand dabei in Teilen bereits im Rahmen der Bachelor-Arbeit [14] und des Master-Projekts [15].

Wichtig für die folgenden Vergleiche der Resultate des uniformen und des adaptiven

Verfahrens ist die a priori Abschätzung aus Satz 1.1. Zu bemerken ist hierbei, dass die Größe $h = \max_{1 \leq l \leq N} h_l$ bei adaptiv-generierten Netzen aufgrund der großen Unterschiede der Elementdurchmesser kein gutes Maß für die Feinheit ist. Im Gegensatz dazu gilt für ein uniformes Netz für die Anzahl der Knoten M der Zusammenhang $M = \mathcal{O}(h^{-2})$, sodass wir die Konvergenzraten des adaptiven Verfahrens über die Anzahl der Freiheitsgrade mit der uniformen Methode und der a priori Abschätzung aus Satz 1.1 vergleichen können.

Bevor wir nun das erste Beispiel betrachten, geben wir noch einige verwendete charakteristische Größen des Verhaltens von Fehler und Fehlerschätzer an. Dazu definieren wir für ein festes Netz \mathcal{T} das Verhältnis zwischen dem Fehlerschätzer und dem tatsächlichen Fehler in der H^1 -Norm mit

$$\Theta_{\mathcal{T}} := \frac{\eta}{\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Diese Größe wird oft als „Effizienzindex“ oder „Effektivitätsindex“ des Fehlerschätzers bezeichnet [5, 4, 6]. Ein Wert von $\Theta_{\mathcal{T}} = 1$ entspricht dabei einer exakten Schätzung des Fehlers. Für die Beispiele werden wir, wie in Algorithmus 2.1, die konstruierten Netze und Lösungen mit dem Netzlevel L als Index versehen. Das Startnetz sei mit \mathcal{T}_0 bezeichnet. Wir definieren dann zu einem Level $L \geq 1$ die geschätzte Konvergenzordnung („estimated order of convergence“), im Vergleich zu [19] leicht modifiziert, mit

$$\text{eoc}_L := \frac{\log \|u - u_{\mathcal{T}_L}\|_{H^1(\Omega)} - \log \|u - u_{\mathcal{T}_{L-1}}\|_{H^1(\Omega)}}{\log M_L - \log M_{L-1}}.$$

Dabei sei mit M_L die Anzahl der Knoten des Netzes \mathcal{T}_L bezeichnet.

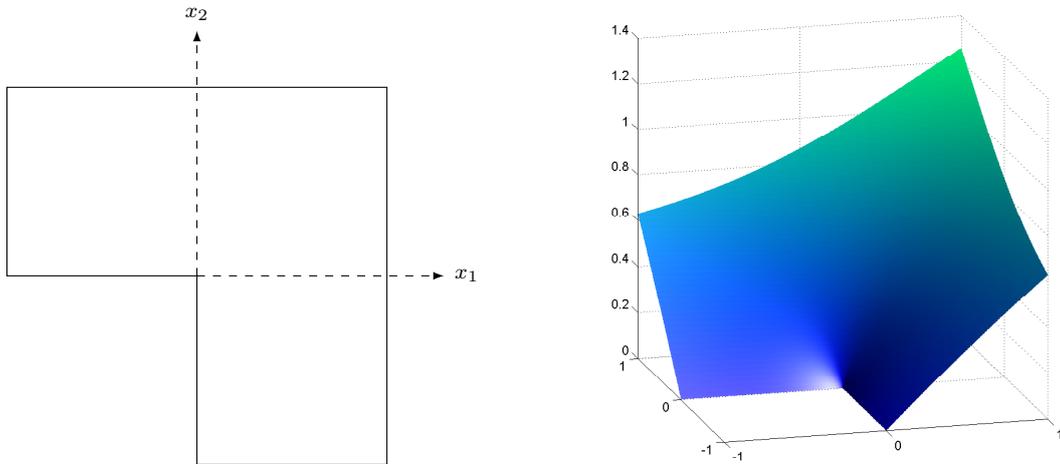
Beispiel 2.2. Im ersten Beispiel betrachten wir das Modellproblem (1.1) der Poisson-Gleichung auf einem Gebiet mit einspringender Ecke (siehe Abbildung 2.4),

$$\Omega = (-1, 1)^2 \setminus (-1, 0]^2,$$

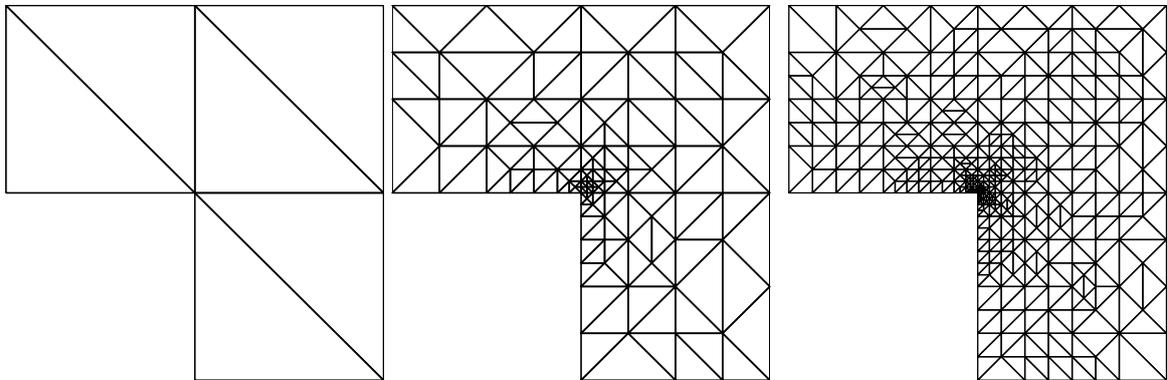
mit rechter Seite $f = 0$ und einer Dirichlet-Randbedingung die so vorgegeben sei, dass die exakte Lösung in Polarkoordinaten (r, φ) mit der Darstellung

$$u(r, \varphi) = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\varphi + \pi}{3}\right)$$

gegeben ist. Die partielle Ableitung der Funktion u nach r ist für $r \rightarrow 0$ unbeschränkt. Es kann gezeigt werden, dass die Lösung die Regularitätseigenschaft $u \in H^s(\Omega)$ für ein $s < \frac{5}{3}$ hat. Wir erwarten damit aufgrund von Satz 1.1 für den Fehler des uniformen Verfahrens eine Konvergenzordnung von $h^{\frac{2}{3}-\varepsilon}$, für ein $\varepsilon > 0$. Wir wählen nun als Startnetz die in Abbildung 2.5 dargestellte Zerlegung von Ω in 6 Dreiecke und wenden

Abbildung 2.4: Das Gebiet Ω (links) und die Lösung u zu Beispiel 2.2

Algorithmus 2.1 mit uniformer Verfeinerung und mit adaptiver Verfeinerung auf dieses Testbeispiel an. Die Ergebnisse sind als Log-Log-Plot in Abbildung 2.6 visuell dargestellt. Die erhaltenen Werte für die Anzahl der Elemente N , die Anzahl der Knoten M , der Fehler in der $H^1(\Omega)$ -Norm und dessen geschätzte Konvergenzordnung „eoc“, sowie der Fehlerschätzer η und der Effizienzindex Θ finden sich für einige Levels in Tabelle 2.1.

Abbildung 2.5: Das Startnetz \mathcal{T}_0 und die adaptiven Netze \mathcal{T}_4 und \mathcal{T}_7 zu Beispiel 2.2 [15]

Wir erkennen, dass das uniforme Verfahren eine Konvergenzordnung von etwa $M^{-\frac{1}{3}} = \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$ erreicht was sich mit der Aussage von Satz 1.1 deckt. Im Gegensatz dazu erreicht das adaptive Verfahren eine Ordnung von $M^{-\frac{1}{2}}$ was der optimalen Ordnung von $\mathcal{O}(h)$ für das uniforme Verfahren entspricht. Wir sehen also, dass die adaptive Methode die, aufgrund der fehlenden Regularität der Lösung, verminderte Konvergenzordnung ausgleichen kann.

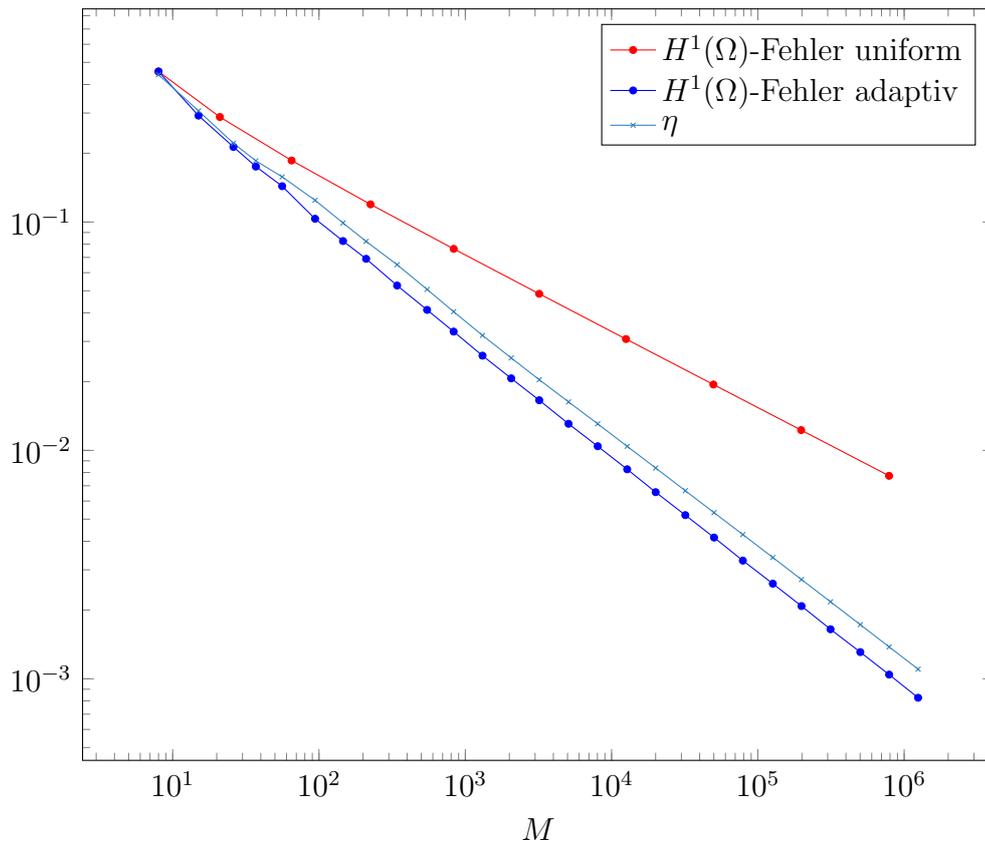


Abbildung 2.6: Log-Log-Plot der Fehler und des Fehlerschätzers zu Beispiel 2.2

In diesem Beispiel wurde für das adaptive Verfahren die Maximierungsstrategie, wie am Beginn dieses Kapitels beschrieben, mit dem Adaptivitätsparameter $\theta = 0.5$ zur Markierung der zu verfeinernden Elemente verwendet. Zur Aufrechterhaltung der Zulässigkeit und gleichmäßigen Formregularität kommt in diesem und allen weiteren Beispielen als Verfeinerungsstrategie die bereits am Anfang des Kapitels erwähnte ROT-GRÜN-BLAU-Verfeinerung zum Einsatz. In Abbildung 2.5 erkennen wir wie das adaptive Verfahren die Feinheit des Netzes lokal an den durch η geschätzten Fehler anpasst. Wir sehen, dass das Netz um den Nullpunkt, in dem die Singularität der partiellen Ableitung nach r von u liegt, wesentlich feiner aufgelöst ist als im Rest des Gebiets Ω .

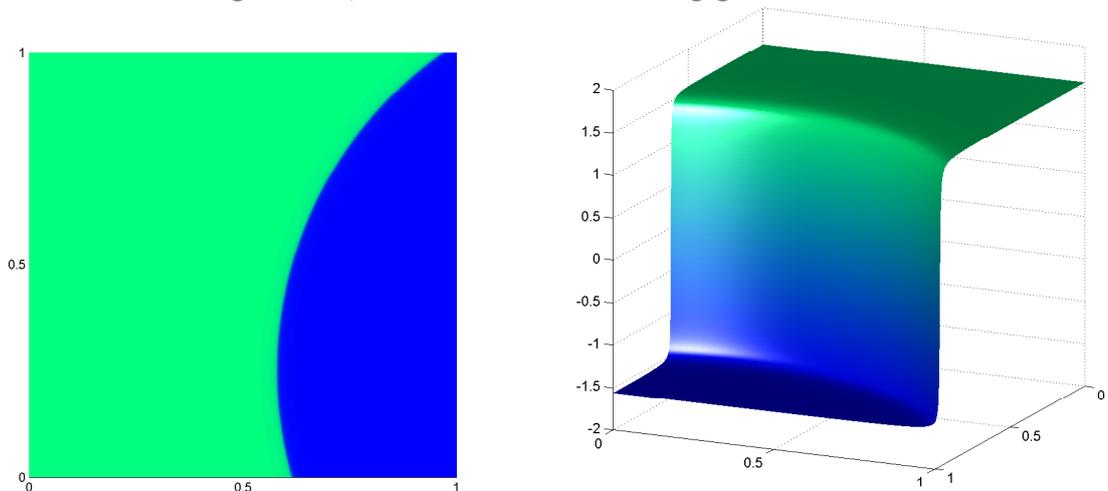
L	N	M	$\ u - u_{\mathcal{T}}\ _{H^1(\Omega)}$	eoc	η	Θ
Uniforme Verfeinerung						
6	24576	12545	$3.073 \cdot 10^{-2}$	-0.33		
7	98304	49665	$1.943 \cdot 10^{-2}$	-0.33		
8	393216	197633	$1.227 \cdot 10^{-2}$	-0.33		
Adaptive Verfeinerung						
16	25232	12781	$8.266 \cdot 10^{-3}$	-0.50	$1.042 \cdot 10^{-2}$	1.26
19	99718	50177	$4.154 \cdot 10^{-3}$	-0.50	$5.339 \cdot 10^{-3}$	1.28
22	396150	198706	$2.081 \cdot 10^{-3}$	-0.50	$2.720 \cdot 10^{-3}$	1.30

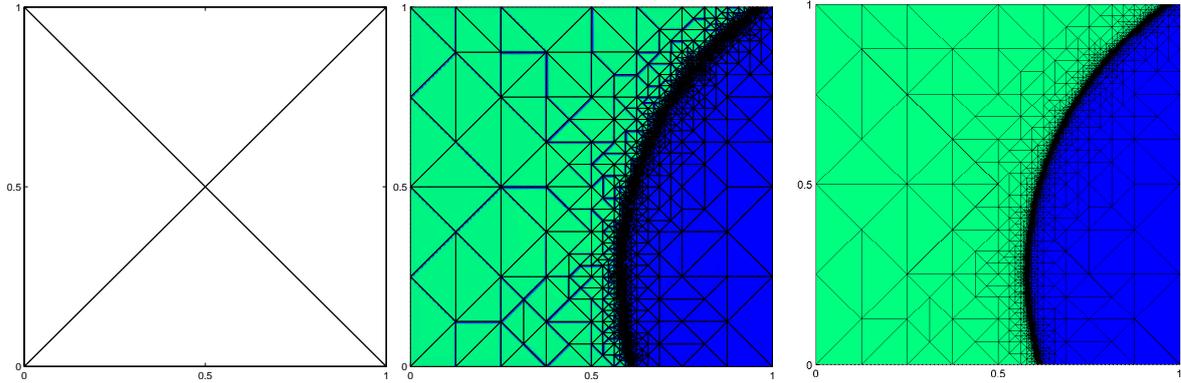
Tabelle 2.1: Vergleich der uniformen und adaptiven Verfeinerungsmethoden (Bsp. 2.2)

Beispiel 2.3 ([12, Sec. 2.9]). Wir wollen nun einen Fall der Poisson-Gleichung betrachten bei der das adaptive Verfahren eine steile Wellenfront der Lösung in Form eines Kreisliniensegments im Inneren eines Gebiets aufzulösen hat. Dazu betrachten wir das Dirichlet-Randwertproblem der Poisson-Gleichung auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$, wobei die rechte Seite f und die Randbedingung so gewählt seien, dass die exakte Lösung mit

$$u = \tan^{-1}(\alpha(r - r_0)) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \quad (2.19)$$

gegeben ist. Dabei wird durch den Parameter α die Steilheit der Wellenfront vorgegeben. Der Punkt (x_c, y_c) gibt den Mittelpunkt des Kreises vor, der auch außerhalb von Ω liegen kann und r_0 ist der Abstand der Wellenfront zum Kreismittelpunkt. Falls der Kreismittelpunkt (x_c, y_c) im Inneren des Gebiets Ω liegt, so hat die Lösung u in diesem Punkt eine Singularität, ansonsten ist die Lösung glatt.

Abbildung 2.7: Verlauf der Wellenfront (links) und Lösung u zu Beispiel 2.3

Abbildung 2.8: Das Startnetz \mathcal{T}_0 und die adaptiven Netze \mathcal{T}_{14} und \mathcal{T}_{19} zu Beispiel 2.3

L	N	M	$\ u - u_{\mathcal{T}}\ _{H^1(\Omega)}$	eoc	η	Θ
Uniforme Verfeinerung						
8	262144	131585	$8.839 \cdot 10^0$	-0.34		
9	1048576	525313	$4.838 \cdot 10^0$	-0.44		
10	4194304	2099201	$2.495 \cdot 10^0$	-0.48		
Adaptive Verfeinerung						
23	288937	144542	$1.008 \cdot 10^0$	-0.48	$1.137 \cdot 10^0$	1.13
26	1388536	694417	$4.620 \cdot 10^{-1}$	-0.50	$5.214 \cdot 10^{-1}$	1.13
27	2164582	1082477	$3.682 \cdot 10^{-1}$	-0.51	$4.186 \cdot 10^{-1}$	1.14

Tabelle 2.2: Vergleich der uniformen und adaptiven Verfeinerungsmethoden (Bsp. 2.3)

Für das Testproblem wählen wir die Parameter $\alpha = 500$, $(x_c, y_c) = (1.5, 0.25)$, $r_0 = 0.92$. Die Lösung ist in Abbildung 2.7 dargestellt. Wir bemerken, dass der gewählte Kreismittelpunkt außerhalb von Ω liegt, das heißt wir wollen für dieses Beispiel, anders als in Beispiel 2.2 nicht die Leistung des adaptiven Verfahrens zur Erkennung einer Singularität untersuchen, sondern ausschließlich testen, wie gut das Verfahren die Wellenfront auflösen kann. Das Startnetz sowie zwei weitere Netze, die bei der Ausführung des adaptiven Verfahrens entstanden sind, sind in Abbildung 2.8 dargestellt. Zu erkennen ist, dass die Wellenfront korrekt erkannt wird und das Netz im Bereich des starken Gefälles der Lösung wesentlich feiner aufgelöst ist.

Im Plot des Fehlers (Abbildung 2.9) und in Tabelle 2.2 erkennen wir, dass das adaptive Verfahren im Vergleich zum uniformen für einen etwa gleich großen Fehler nach einigen Iterationen wesentlich weniger Knoten benötigt. Die Schwankungen und Anstiege in den anfänglichen Iterationen sind den Datenoszillationen und der verwendeten Gauß'schen Quadraturformeln für die numerische Berechnung der vorkommenden Integrale geschuldet. Sobald die Auflösung der kritischen Bereiche allerdings hoch genug

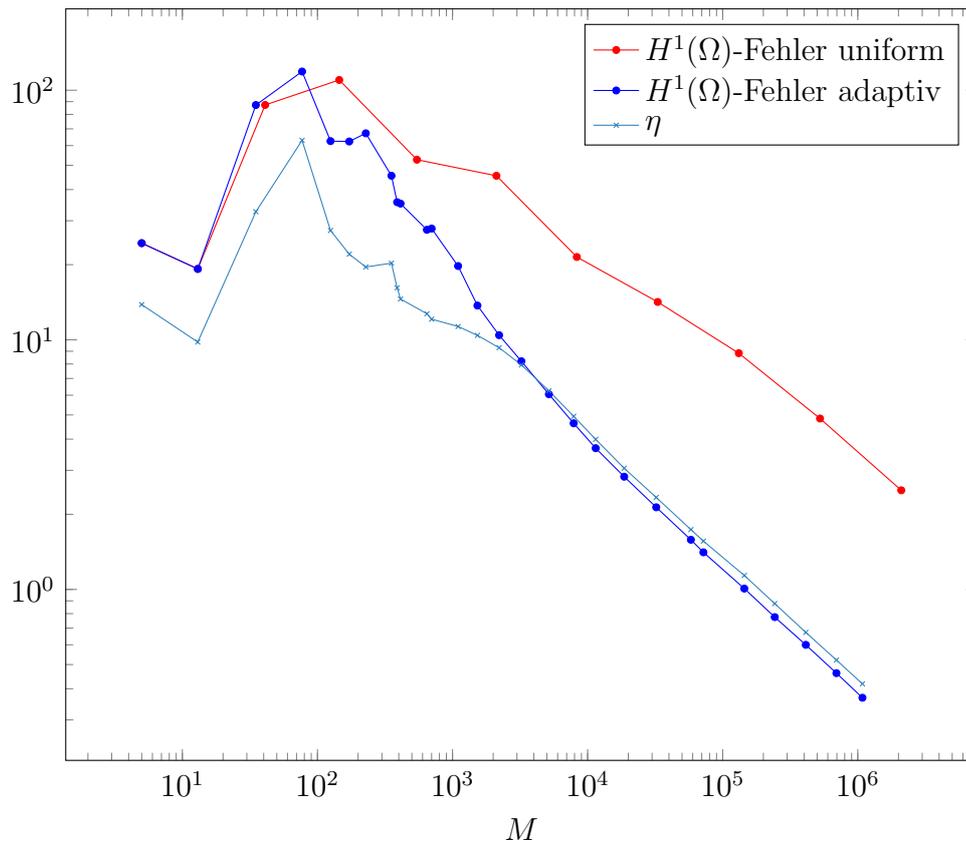


Abbildung 2.9: Log-Log-Plot der Fehler und des Fehlerschätzers zu Beispiel 2.3

ist, erreichen beide Verfahren eine geschätzte Konvergenzordnung von ungefähr $M^{-\frac{1}{2}}$ (siehe Tabelle 2.2) was wieder der, aufgrund der Glattheit der Lösung erwarteten, optimalen Ordnung $\mathcal{O}(h)$ in Satz 1.1 entspricht.

2.4.1 Zusammenfassung und Ausblick

Die beiden Beispiele haben gezeigt, dass der Einsatz des Fehlerschätzers η zur Steuerung eines adaptiven Finite-Elemente Verfahrens basierend auf Algorithmus 2.1 im Vergleich zum Verfahren mit uniformer Verfeinerung in gewissen Fällen Vorteile in Bezug auf die erreichbare Konvergenzordnung des Fehlers, sowie die Anzahl an benötigten Freiheitsgraden bringt. Allerdings bringt die adaptive Verfeinerung auch Probleme mit sich. Bei der Lösung der linearen Gleichungssysteme für die globalen Probleme der Beispiele wurde das CG-Verfahren („conjugate gradient method“) mit SSOR-Vorkonditionierung („symmetric successive overrelaxation“) und einer Toleranz für die Norm des Residuums von $1.0 \cdot 10^{-8}$ verwendet. Eine Gegenüberstellung der jeweiligen CG-Iterationszahlen und Knotenanzahlen des uniformen und adaptiven Verfahrens zu Beispiel 2.3 sind exemplarisch in Abbildung 2.10 dargestellt.

L	M	CG-Iterationen
Uniforme Verfeinerung		
8	131585	478
9	525313	778
10	2099201	1124
Adaptive Verfeinerung		
23	144542	699
26	694417	1280
27	1082477	1648

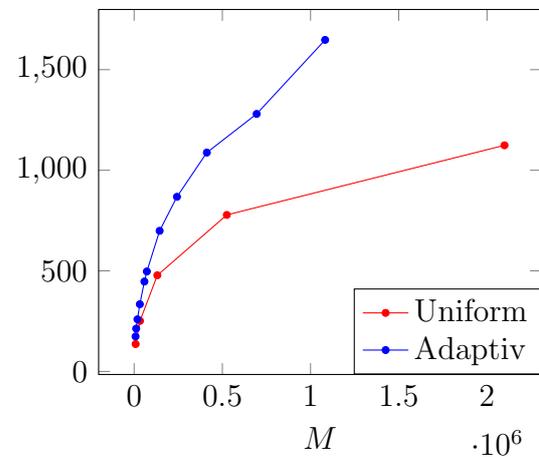


Abbildung 2.10: Vergleich der CG-Iterationen (Bsp. 2.3)

Wie zu erkennen ist, benötigt das CG-Verfahren bei der adaptiven Methode mit steigender Anzahl an Knoten eine signifikant größere Anzahl an Iterationen, um die gewünschte Toleranz zu erreichen. Dies lässt den Rückschluss zu, dass die Systemmatrizen der globalen Probleme, welche beim adaptiven Verfahren assembliert werden, schlechter konditioniert sind als jene des uniformen Verfahrens. Um diesem Nachteil entgegenzuwirken, müssen aufwendigere Vorkonditionierungstechniken, wie etwa Multilevel-Vorkonditionierer eingesetzt werden [20, 24].

Motiviert durch die Ergebnisse dieses Kapitels wollen wir uns nun in Kapitel 3 mit der Frage beschäftigen, ob wir η in einer modifizierten Version auch als Fehlerschätzer für die Lösung einer Raum-Zeit-Finite-Elemente-Formulierung einer parabolischen partiellen Differentialgleichung, der Wärmeleitgleichung, einsetzen können.

3 Ein a posteriori Fehlerschätzer für die Wärmeleitgleichung

Wir haben in Kapitel 2 einen Fehlerschätzer für die Poisson-Gleichung auf einem zweidimensionalen (Raum)-Gebiet untersucht und dessen Zuverlässigkeit und Effizienz bewiesen. Bei zeitabhängigen Problemen werden im Allgemeinen Gebiete der Form $Q := \Omega \times (T_0, T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet. Hierbei bezeichnet die offene Menge Ω das Raumgebiet, das unter Umständen selbst von der Zeit abhängt und (T_0, T) ein endliches Zeitintervall. Wir werden in dieser Arbeit nur den Fall $n = 1$ mit einem zeitunabhängigen und zusammenhängenden Raumgebiet und der Startzeit $T_0 = 0$ betrachten, das heißt, das betrachtete Raum-Zeit-Gebiet ist ein offenes Rechteck $Q \subset \mathbb{R}^2$.

Übliche Methoden zur numerischen Lösung parabolischer Anfangsrandwertprobleme basieren auf einer separaten Diskretisierung in Raum und/oder Zeit (Abbildung 3.1) [21, 7]. A posteriori Fehlerschätzer für diese Zugänge erlauben eine adaptive Netzverfeinerung oft nur bezüglich der Zerlegung in der Zeit oder jener im Raum [19]. Allerdings wurden auch für Lösungsverfahren mit separater Raum- und Zeitdiskretisierung bereits Fehlerschätzer entwickelt, welche die Abschätzung der Anteile des tatsächlichen Fehlers in Raum und Zeit kombinieren [23, 7]. Der Beweis der Äquivalenz des Fehlerschätzers zum tatsächlichen Fehler in der Energienorm basiert hierbei meist auf einer Zerlegung des Residuums der schwachen Formulierung in einen räumlichen sowie einen zeitlichen Anteil, was gerade durch die getrennte Behandlung der Raum- und Zeit-Diskretisierung ermöglicht wird [23]. Die Notwendigkeit der sequentiellen Lösung bei solchen Ansätzen erschwert allerdings dennoch den Einsatz kombinierter adaptiver Verfeinerungsmethoden in Raum und Zeit [19]. In diesem Kapitel wollen wir für das Modellproblem der Wärmeleitgleichung mit Raumdimension 1 eine gemeinsame Raum-Zeit-Finite-Elemente Diskretisierung basierend auf den Ausführungen in [19] betrachten. Dabei werden wir die Zeit im Wesentlichen wie eine zweite Raumkoordinate behandeln, sodass als Finite-Elemente Zerlegung des Raum-Zeit Gebiets Q Triangulierungen, wie beispielsweise in Abbildung 3.1 dargestellt, zum Einsatz kommen. Der Vorteil dieses Zugangs ist der Entfall der sequentiellen Lösung sowie die Möglichkeit der Verwendung völlig unstrukturierter, adaptiv verfeinerter Netze.

Wir beginnen dieses Kapitel nun mit der Anführung einiger, für die Aufstellung der schwachen Variationsformulierung des Modellproblems, notwendiger theoretischer Grundlagen.

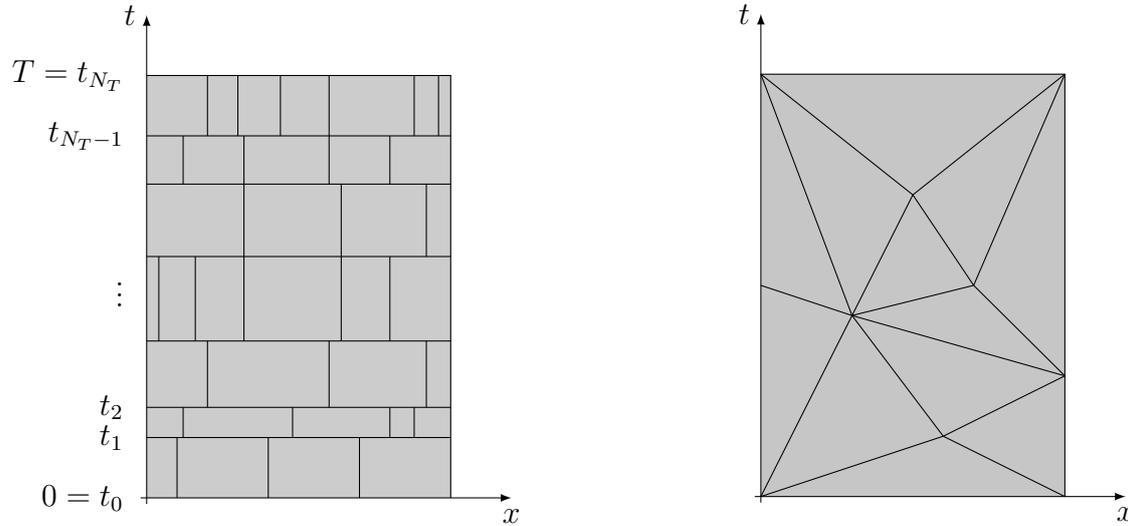


Abbildung 3.1: Beispiel einer separaten Zerlegung in Raum und Zeit [23] (links) und einer Raum-Zeit-Triangulierung von Q

3.1 Räume Banachraum-wertiger Funktionen und das Bochner-Integral

Anders als bei der elliptischen Poisson-Gleichung erfordert die schwache Lösungstheorie parabolischer Probleme wie dem Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitgleichung, die Einführung von abstrakteren (Sobolev)-Räumen, deren Elemente Banachraumwertige Funktionen sind. Wir wollen zu diesem Themenkreis einige grundlegende Definitionen und Aussagen angeben, um die späteren Ausführungen theoretisch zu untermauern. Zu diesem Zwecke betrachten wir das endliche Zeitintervall $[0, T]$ mit der Zeitgrenze $T > 0$. Des Weiteren sei mit $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über \mathbb{R} gegeben. Den Dualraum von X bezeichnen wir mit X' und dessen Norm mit $\|\cdot\|_*$. Wir wollen nun Abbildungen der Form

$$u : [0, T] \rightarrow X \quad (3.1)$$

betrachten. Mit $\mathcal{C}([0, T]; X)$ bezeichnen wir den Raum jener solcher Funktionen, die auf dem Intervall $[0, T]$ stetig sind. Mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0, T]; X)} := \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|$$

ausgestattet, ist $\mathcal{C}([0, T]; X)$ ein Banachraum [9, Lem. 7.1.1]. Außerdem gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Identität

$$\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}([a, b])) = \mathcal{C}([a, b] \times [0, T]).$$

Auch für Funktionen u wie in (3.1) lässt sich ein geeigneter Integralbegriff definieren. Die Erweiterung des Lebesgue-Integrals auf Banachraum-wertige Funktionen stellt das so genannte Bochner-Integral [8] dar.

Definition 3.1 (Bochner-Integral einfacher Funktionen, [9, Def. 7.1.8]). Eine Funktion $u : [0, T] \rightarrow X$ heißt einfach, wenn es höchstens endliche viele, paarweise disjunkte, Lebesgue-messbare Mengen $E_i \subset [0, T]$ ($i = 1, \dots, m$) mit Lebesgue-Maß $\mu(E_i) < \infty$, sowie für jedes i ein $u_i \in X \setminus \{0\}$ gibt, sodass

$$u|_{E_i} = u_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m$$

gilt und u sonst verschwindet. Für eine solche einfache Funktion ist das Bochner-Integral über $[0, T]$ definiert mit

$$\int_0^T u(t) dt := \sum_{i=1}^m u_i \mu(E_i) \in X.$$

Definition 3.2 (Bochner-Messbarkeit, [9, Def. 7.1.9]). Eine beliebige Funktion

$$u : [0, T] \rightarrow X$$

wird als Bochner-messbar bezeichnet, falls eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen existiert, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(t) - u_n(t)\| = 0$$

für fast alle $t \in [0, T]$.

Definition 3.3 (Bochner-Integrierbarkeit, [9, Def. 7.1.14]). Es sei $u : [0, T] \rightarrow X$ eine Bochner-messbare Funktion und $(u_n)_n$ eine Folge einfacher Funktionen, die wie in Definition 3.2 fast überall gegen u konvergiert. Dann heißt u Bochner-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $m, n \geq N$ gilt, dass

$$\int_0^T \|u_m(t) - u_n(t)\| dt < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Das Bochner-Integral von u über einer Lebesgue-messbaren Menge $B \subset [0, T]$ ist dann definiert durch

$$\int_B u(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T u_n(t) \chi_B(t) dt \in X. \quad (3.3)$$

Dabei bezeichnet χ_B die charakteristische Funktion bezüglich der Menge B .

Bemerkung 3.4 (Wohldefiniertheit des Bochner-Integrals). Es sei u eine Bochner-integrierbare Funktion und $(u_n)_n$ eine Folge einfacher Funktionen

$$u_n = \sum_{i=1}^{m_n} u_n^i \chi_{E_n^i},$$

die fast überall gegen u konvergiert. Aus der Definition des Bochner-Integrals für einfache Funktionen erhalten wir mittels der Dreiecksungleichung und der Definition des Lebesgue-Integrals,

$$\left\| \int_0^T u_n(t) dt \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m_n} u_n^i \mu(E_n^i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{m_n} \|u_n^i\| |\mu(E_n^i)| = \int_0^T \|u_n(t)\| dt.$$

Daraus folgt aufgrund der Eigenschaft (3.2) in der Definition der Bochner-Integrierbarkeit von u , dass mit

$$\left(\int_0^T u_n(t) dt \right)_n$$

eine Cauchy-Folge in X gegeben ist. Die Existenz des Grenzwerts in (3.3) ergibt sich hiermit aus der Vollständigkeit des Banachraums X . Dieser Grenzwert hängt nicht von der Wahl der Folge einfacher Funktionen ab, somit ist das Bochner-Integral der Funktion u wohldefiniert [9].

Wir bemerken, dass für $X = \mathbb{R}$ das Bochner-Integral mit dem Lebesgue-Integral übereinstimmt [9]. Aber auch im allgemeinen Fall besteht ein Zusammenhang zwischen Bochner- und Lebesgue-Integrierbarkeit.

Satz 3.5 (Bochner, z.B.: [9, Satz 7.1.15]). *Eine Bochner-messbare Funktion*

$$u : [0, T] \rightarrow X$$

ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn die Abbildung $t \mapsto \|u(t)\|$ Lebesgue-integrierbar ist.

Mithilfe des Satzes von Bochner lässt sich insbesondere zeigen, dass jede beliebige Funktion $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ Bochner-integrierbar ist [9, Lem. 7.1.17]. Wir können nun Räume Bochner-integrierbarer Funktionen definieren, die fast überall gleich sind.

Definition 3.6 ([11]). Der Raum $L_p(0, T; X)$ ist definiert als der Raum der Äquivalenzklassen jener Bochner-messbarer Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$ für die gilt, dass

$$\|u\|_{L_p(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

falls $1 \leq p < \infty$ und

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;X)} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \|u(t)\| < \infty$$

für den Fall $p = \infty$.

Einige wesentliche Eigenschaften dieser Räume sind in folgendem Satz zusammengefasst. Beweise der Aussagen und weiterführende Resultate finden sich etwa in [9] und [11].

Satz 3.7 ([9, Satz 7.1.23, 7.1.24; Lem. 7.1.25]).

1. Mit den in Definition 3.6 gegebenen Normen ausgestattet ist $L_p(0, T; X)$ für jedes $p \in [0, \infty]$ ein Banachraum. Falls H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) ist, so ist auch $L_2(0, T; H)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{L_2(0,T;H)} := \int_0^T (u(t), v(t)) \, dt.$$

2. Für $1 \leq p < \infty$ liegt der Raum $\mathcal{C}([0, T]; X)$ dicht und ist stetig eingebettet in $L_p(0, T; X)$.
3. Für $v \in L_p(0, T; X)$ und $u \in L_q(0, T; X')$ mit $p, q \in [1, \infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt $t \mapsto \langle u(t), v(t) \rangle \in L_1(0, T)$ und es gilt die Hölder'sche Ungleichung

$$\int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{X' \times X} dt \leq \|u\|_{L_q(0,T;X')} \|v\|_{L_p(0,T;X)}.$$

4. Sei entweder der Raum X reflexiv oder X' separabel. Dann gilt für $1 \leq p < \infty$ und $1 \leq q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$(L_p(0, T; X))' \cong L_q(0, T; X').$$

Für $p \neq 1$ ist die duale Paarung gegeben durch

$$\langle u, v \rangle_{L_q(0,T;X') \times L_p(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{X' \times X} \, dt.$$

5. Es sei $1 \leq p < \infty$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann folgt aus der Bochner-Messbarkeit einer abstrakten Funktion $\tilde{u} = \tilde{u}(t) : [0, T] \rightarrow L_p(a, b)$ die Lebesgue-Messbarkeit der reellwertigen Funktion

$$u = u(x, t) := [\tilde{u}(t)](x) \tag{3.4}$$

über der Menge $(a, b) \times (0, T)$. Insbesondere kann der Raum $L_p(0, T; L_p(a, b))$ mit dem Raum $L_p((a, b) \times (0, T))$ identifiziert werden.

Mithilfe der Aussage von Satz 3.5 lassen sich zudem weitere analoge Varianten von wichtigen Resultaten aus der Lebesgue'schen Integrationstheorie, wie etwa der Satz von Lebesgue, herleiten.

Satz 3.8 (Lebesgue'scher Satz von der dominierten Konvergenz, [18, Thm. 10.4]). *Es sei $u : [0, T] \rightarrow X$ eine Bochner-messbare Funktion und $(u_n)_n$ eine Folge in $L_p(0, T; X)$ mit $u_n(t) \rightarrow u(t)$ in X für fast alle t . Weiters existiere eine Funktion $g \in L_p(0, T; \mathbb{R})$, sodass $\|u_n(t)\| \leq g(t)$ für fast alle $t \in [0, T]$. Dann folgt $u \in L_p(0, T; X)$ und $u_n \rightarrow u$ in $L_p(0, T; X)$.*

Um nun die für die schwache Formulierung der Wärmeleitgleichung notwendigen, zeitabhängigen Sobolev-Räume zu definieren, müssen wir festlegen was wir im Zusammenhang Banachraum-wertiger Funktionen unter einer schwachen Ableitung verstehen.

Definition 3.9 (Schwache Zeitableitung, [11]). Es sei $u \in L_1(0, T; X)$. Falls für eine Funktion $v \in L_1(0, T; X)$ die Gleichung

$$\int_0^T \phi'(t)u(t) dt = - \int_0^T \phi(t)v(t) dt \quad (3.5)$$

für jede skalare Funktion $\phi \in C_0^\infty(0, T)$ erfüllt ist, so nennen wir v „schwache (Zeit)-Ableitung“ von u und schreiben im Sinne der Identifikation (3.4) im letzten Punkt von Satz 3.5, $\partial_t u = v$. Die Ausdrücke in den Integranden von (3.5) sind jeweils als das Produkt eines Elements des Raums X mit einem Skalar aufzufassen.

Bemerkung 3.10. Wir werden bei der schwachen Formulierung der Wärmeleitgleichung insbesondere auf den Raum der Funktionen $u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ treffen, deren schwache Ableitung $\partial_t u$ im Raum $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ liegt. Die schwache Ableitung ist gleich wie in Definition 3.9 über die Erfüllung der Gleichung (3.5) für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(0, T)$ definiert. Die rechte Seite von (3.5) ist für diesen Fall als Element des Raums $H^{-1}(\Omega)$ aufzufassen, die linke Seite liegt in $H_0^1(\Omega)$ und es gilt die Inklusion $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

Nun stehen uns alle notwendigen Mittel zur Verfügung um die allgemeinen zeitabhängigen Sobolev-Räume zu definieren.

Definition 3.11 ([11]). Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir den Sobolev-Raum

$$W_p^1(0, T; X) := \{u \in L_p(0, T; X) : \partial_t u \text{ existiert und liegt in } L_p(0, T; X)\},$$

mit der Norm

$$\|u\|_{W_p^1(0, T; X)} = \begin{cases} \left[\|u\|_{L_p(0, T; X)}^p + \|\partial_t u\|_{L_p(0, T; X)}^p \right]^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L_\infty(0, T; X)} + \|\partial_t u\|_{L_\infty(0, T; X)} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Für $p = 2$ schreiben wir $H^1(0, T; X) = W_2^1(0, T; X)$.

Auch für diese Räume lassen sich Analoga zu Einbettungssatz und Fundamentalsatz der Integralrechnung im zeitunabhängigen Fall zeigen.

Satz 3.12 ([11]). *Es sei $u \in W_p^1(0, T; X)$ für ein $1 \leq p \leq \infty$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. (Einbettungssatz) $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ (das heißt die Äquivalenzklasse von u hat einen stetigen Repräsentanten), weiters gibt es eine nur von T abhängige Konstante $c > 0$, sodass

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0, T]; X)} \leq c \|u\|_{W_p^1(0, T; X)}.$$

2. (Fundamentalsatz der Integralrechnung) Für alle $0 \leq s \leq t \leq T$ gilt

$$u(t) = u(s) + \int_s^t \partial_\tau u(\tau) \, d\tau.$$

Bei der schwachen Formulierung der Wärmeleitgleichung werden wir, wie bereits erwähnt, im Speziellen auf die Räume

$$L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{und} \quad L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

treffen. Für Funktionen in letzterem Raum gilt das folgende für uns wichtige Einbettungsergebnis.

Satz 3.13 ([11]). *Es sei $u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ mit*

$$\partial_t u \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Dann gilt

$$u \in \mathcal{C}([0, T]; L_2(\Omega)),$$

und es gibt eine nur von T abhängige Konstante $c > 0$, sodass

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0, T]; L_2(\Omega))} \leq c \left[\|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \right].$$

Außerdem ist die Abbildung

$$t \mapsto \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2$$

absolut stetig und für ihre Zeitableitung gilt

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = 2 \langle \partial_t u(t), u(t) \rangle_\Omega \tag{3.6}$$

für fast alle $t \in [0, T]$.

Bemerkung 3.14. Die betrachteten zeitabhängigen L_2 -Räume können auch ohne die abstrakte Bochner-Integraltheorie elementar in folgender Weise definiert werden:

$$\begin{aligned} L_2(0, T; L_2(\Omega)) &:= L_2(\Omega \times (0, T)), \\ L_2(0, T; H^1(\Omega)) &:= \{u \in L_2(\Omega \times (0, T)) \mid \nabla_x u \in L_2(\Omega \times (0, T))\}, \\ L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) &:= \{u \in L_2(0, T; H^1(\Omega)) \mid u(t) \in H_0^1(\Omega) \text{ für fast alle } t\}, \\ L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) &:= (L_2(0, T; H_0^1(\Omega)))'. \end{aligned}$$

Es kann mittels maßtheoretischer Mittel gezeigt werden, dass diese Definitionen zu den abstrakten Definitionen äquivalent sind [18, Kap. 10].

Damit haben wir die nötigen theoretischen Resultate, um die schwache Formulierung eines parabolischen Anfangsrandwertproblems aufzustellen. Wir beginnen mit der Angabe des zu betrachtenden Modellproblems.

3.2 Das parabolische Modellproblem

Für ein offenes, beschränktes und zusammenhängendes Raumgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}$ und eine gegebene, feste Zeitschranke $T > 0$ betrachten wir das Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitgleichung

$$\begin{aligned} c_H \partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) &= f(x, t) && \text{in } Q := \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) &= 0 && \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dabei sei mit $c_H > 0$ eine Wärmekapazitätskonstante, mit $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ eine Wärmequelle und mit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ eine Anfangsbedingung gegeben. Wir werden für die theoretischen Untersuchungen im Folgenden der Einfachheit halber aber nur den Fall einer homogenen Anfangsbedingung $u_0 = 0$ betrachten.

Physikalisch betrachtet modelliert $u(x, t)$ beispielsweise die Temperatur am Ort $x \in \Omega$ zur Zeit $t \in [0, T]$ eines dünnen, homogenen und zylindrischen Stabes der (gedacht) auf der x -Achse liegt (Abbildung 3.2), wobei angenommen wird, dass der Querschnittsradius r relativ zur Länge $d = \text{diam}(\Omega)$ sehr klein ist ($r \ll d$). Außerdem wird die Mantelfläche als thermisch isoliert angenommen, sodass Wärmeflüsse nur in Richtungen parallel zur x -Achse auftreten können. Die Randbedingung $u(x, t) = 0$ für $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T]$ bedeutet, dass die Temperatur an den beiden Stab-Enden konstant Null gehalten wird.

Bemerkung 3.15. Für die Wohlgestelltheit der schwachen Formulierung wäre die Forderung $f \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ausreichend, allerdings erfordern die späteren Ausführungen zum Fehlerschätzer, ähnlich wie bereits in Kapitel 2, die Quadratintegrierbarkeit rechten Seite auf Q .

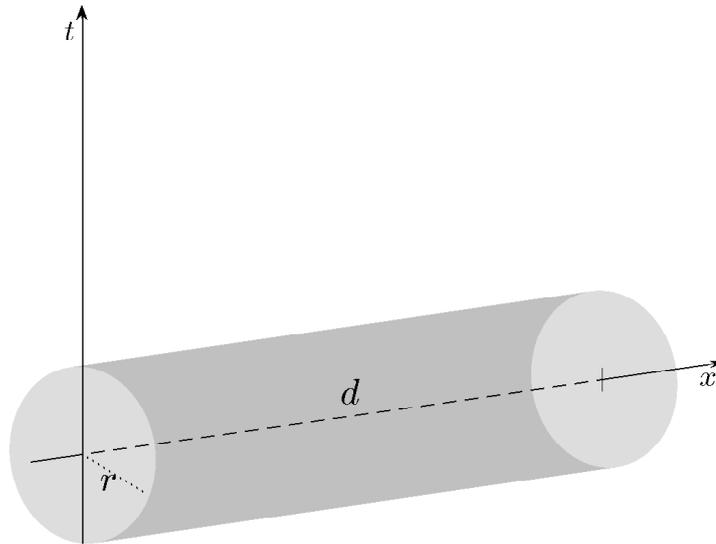


Abbildung 3.2: Modell eines dünnen Stabes

3.2.1 Variationsformulierung

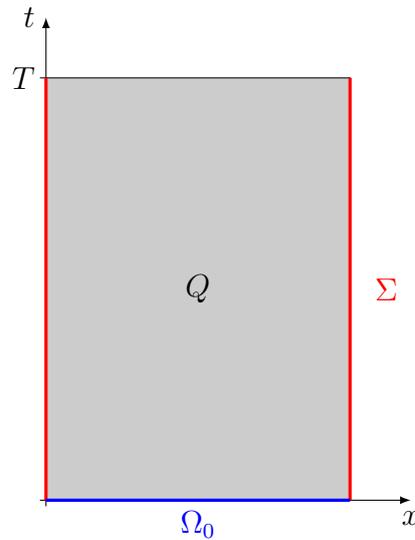
Die schwache Formulierung des Problems (3.7) mit homogener Anfangsbedingung ist folgendermaßen gegeben [20]:

Gesucht ist $u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ mit $u(x, 0) = 0$ für $x \in \Omega$, sodass

$$c_H \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t u v \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x u \partial_x v \, dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v \, dx dt \quad (3.8)$$

für alle $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ erfüllt ist.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die punktweise Forderung der Anfangsbedingung an u aufgrund von Satz 3.13 sinnhaftig ist. Für alles Weitere wollen wir die Bilinearform, die durch die linke Seite von (3.8) definiert ist, mit $a(\cdot, \cdot)$ bezeichnen. Außerdem seien die seitlichen Ränder von Q als die Menge $\Sigma := \partial\Omega \times [0, T]$ und der Anfangsrand im \mathbb{R}^2 mit $\Omega_0 := \Omega \times \{0\}$ definiert (siehe Abbildung 3.3).

Abbildung 3.3: Das Raum-Zeit-Gebiet Q

Für den Beweis der Eindeutigkeit für die Lösung dieser Variationsformulierung muss aufgrund des fehlenden Konzepts der Elliptizität der Bilinearform eine geeignete Stabilitätsbedingung verwendet werden [20], welche den Ausgangspunkt für die Untersuchungen eines geeigneten a posteriori Fehlerschätzers darstellen wird. Da wir insbesondere Teile des Beweises dieser Stabilitätsbedingung aus [20] verwenden werden, wollen wir diesen im Folgenden im Detail anführen. Dazu betrachten wir zunächst für eine gegebene Funktion $\phi \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ das quasi-statische Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\partial_{xx}w(x, t) &= c_H\phi(x, t) && \text{für } x \in \Omega, \\ w(x, t) &= 0 && \text{für } x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

und die zugehörige schwache Formulierung:

Gesucht ist eine Funktion $w \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ sodass die Gleichung

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_x w \partial_x v \, dx dt = c_H \int_0^T \int_{\Omega} \phi v \, dx dt \quad (3.10)$$

für jede Testfunktion $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ erfüllt ist.

Aus dem Sobolev'schen Normäquivalenzsatz folgt, dass mit der Abbildung

$$v \mapsto \left(\int_0^T \int_{\Omega} (\partial_x v)^2 \, dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine äquivalente Norm im Raum $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ definiert ist. Damit ist die Bilinearform auf der linken Seite von (3.10) $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -elliptisch und stetig. Zusammen mit der Beschränktheit der Linearform auf der rechten Seite folgern wir mit dem Lemma von Lax-Milgram die Existenz einer eindeutigen Lösung $w \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ der Variationsformulierung (3.10) für eine beliebig vorgegebene rechte Seite ϕ , die Element des Raums $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ist. Damit ergibt sich schließlich die Wohldefiniertheit des Newton-Potentials

$$N : L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad N\phi := w. \quad (3.11)$$

Hierfür lassen sich schließlich die für jede Funktion $\phi \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ geltenden Beziehungen

$$\|N\phi\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} = c_H \|\phi\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \quad \text{und} \quad (3.12)$$

$$\langle \phi, N\phi \rangle_Q = c_H \|\phi\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \quad (3.13)$$

zeigen [20]. Wir bemerken, dass wir hierbei, anders als in [20], die Norm in $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ mit

$$\|\phi\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))} := \sup_{0 \neq v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} \frac{\langle \phi, v \rangle}{\|v\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}}$$

definieren. Für die Energienorm im Raum $L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ergibt sich

$$\|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 = \|\partial_t u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \quad (3.14)$$

$$= c_H^{-2} \|N\partial_t u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2. \quad (3.15)$$

Wir sind nun im Stande, die Stabilitätsbedingung zu formulieren und zu beweisen.

Satz 3.16 (Stabilitätsbedingung, [20, Thm. 2.1]). *Für jede beliebige Funktion $u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ mit $u(x, 0) = 0$ für $x \in \Omega$ gilt die Stabilitätsbedingung*

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \min(c_H, 1) \|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq \sup_{0 \neq v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} \frac{a(u, v)}{\|v\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}}.$$

Beweis. Wir betrachten für eine gegebene Funktion

$$u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

mit $u(x, 0) = 0$ für $x \in \Omega$ die Funktion $v = u + N\partial_t u$, welche nach der Definition des Newton Potentials im Raum $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ liegt. Mit Anwendung der Gleichung (3.6) aus Satz 3.13 erhalten wir

$$\begin{aligned} a(u, u) &= c_H \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t u u \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x u \partial_x u \, dx dt \\ &= \frac{1}{2} c_H \int_0^T \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \, dt + \|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Nach dem Fundamentalsatz der Differentialrechnung und Integralrechnung und der Voraussetzung $u(x, 0) = 0$ für alle $x \in \Omega$ gilt für das erste Integral

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \, dt = \|u(T)\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Somit folgt die Gültigkeit der Abschätzung

$$a(u, u) \geq \|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2. \quad (3.16)$$

Wir müssen nun noch $a(u, N\partial_t u)$ geeignet abschätzen. Dazu verwenden wir zunächst Eigenschaft (3.13) und die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung um das Folgende zu erhalten:

$$\begin{aligned} a(u, N\partial_t u) &= c_H \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t u (N\partial_t u) \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x u \partial_x (N\partial_t u) \, dx dt \\ &\geq c_H^2 \|\partial_t u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 - \|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} \|N\partial_t u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} \\ &\geq c_H^2 \|\partial_t u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 - \frac{1}{2} \left(\|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \|N\partial_t u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Eigenschaft (3.12) des Newton-Potentials verwenden, erhalten wir schließlich die Abschätzung

$$a(u, N\partial_t u) \geq \frac{1}{2} c_H^2 \|\partial_t u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2. \quad (3.17)$$

Nun können wir die beiden Ungleichungen (3.16) und (3.17) zusammensetzen und erhalten für $a(u, u + N\partial_t u) = a(u, u) + a(u, N\partial_t u)$ die Ungleichung

$$a(u, u + N\partial_t u) \geq \frac{1}{2} \left(c_H^2 \|\partial_t u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \right). \quad (3.18)$$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass mit

$$\|u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),c_H} := \left(c_H^2 \|\partial_t u\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 + \|u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine zur Energienorm in (3.14) äquivalente Norm gegeben ist:

$$\begin{aligned} \min(c_H, 1) \|u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq \|u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),c_H} \\ &\leq \max(c_H, 1) \|u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Damit gilt insbesondere die für die späteren Überlegungen zur Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers relevante Ungleichung

$$a(u, u + N\partial_t u) \geq \frac{1}{2} \min(c_H^2, 1) \|u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2. \quad (3.20)$$

Wir schätzen die $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -Norm der Funktion $u + N\partial_t u$ nun unter erneuter Benützung der Eigenschaft (3.12) wie folgt nach oben ab:

$$\begin{aligned} \|u + N\partial_t u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 &\leq 2 \left(\|N\partial_t u\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 + \|u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \right) \\ &= 2 \left(c_H^2 \|\partial_t u\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 + \|u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \right). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir hiermit für (3.18) die Abschätzungen

$$a(u, u + N\partial_t u) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \|u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),c_H} \|u + N\partial_t u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

woraus schließlich unter Beachtung der Normäquivalenz in (3.19) die zu zeigende Aussage folgt. \square

Damit folgt nun die eindeutige Lösbarkeit der Variationsformulierung (3.8).

Korollar 3.17 ([20, Cor. 2.3]). *Für jede gegebene Quellfunktion $f \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ hat das Variationsproblem (3.8) eine eindeutige Lösung*

$$u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

welche die Abschätzung

$$\|u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq 2\sqrt{2} \min(c_H, 1)^{-1} \|f\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$$

erfüllt.

Beweis. Wir zeigen die Beschränktheit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung ergibt sich für uns

$$\begin{aligned} a(u, v) &= c_H \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t uv \, dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x u \partial_x v \, dxdt \\ &\leq \max(c_H, 1) \left(\|\partial_t u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))} + \|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} \right) \|v\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} \\ &\leq \sqrt{2} \max(c_H, 1) \|u\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))} \|v\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösbarkeit folgt dann hiermit und mit Satz 3.16 aus [19, Thm. 3.7]. Die Abschätzung folgt aus der Beschränktheit der Linearform $v \mapsto \langle f, v \rangle$. \square

Nachdem jetzt die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems (3.8) gezeigt ist, wollen wir noch eine wichtige Regularitätsaussage angeben.

Satz 3.18 (Verbesserte Regularität, [11, Chpt. 7, Thm. 5]). *Für die eindeutige Lösung $u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ der Variationsformulierung (3.8) mit $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ gilt die verbesserte Regularitätseigenschaft*

$$u \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L_{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in L_2(0, T; L_2(\Omega)).$$

Zusätzlich gibt es eine Konstante $c > 0$, welche nur von Ω , T und c_H abhängt, sodass die Ungleichung

$$\|u\|_{L_{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|u\|_{L_2(0, T; H^2(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega))} \leq c \|f\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega))}$$

erfüllt ist.

3.2.2 Raum-Zeit-Finite-Elemente Diskretisierung

Mit $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}\}$ bezeichnen wir in diesem Kapitel eine gleichmäßig formreguläre Familie zulässiger Zerlegungen des Raum-Zeit Rechtecks Q in Dreiecke (siehe Abbildung 3.1). Wir verwenden hierzu die selbe Notation wie im Einleitungskapitel, insbesondere ist eine spezielle Zerlegung \mathcal{T} bestehend aus N Dreiecken gegeben durch

$$\bar{\mathcal{T}} = \bigcup_{l=1}^N \bar{\tau}_l.$$

Mit \mathcal{N} und \mathcal{E} bezeichnen wir wieder die Menge aller Knoten $z_k = (x_k, t_k)$ (für $k = 1, \dots, M$) beziehungsweise die Menge aller Kanten e einer festen Zerlegung \mathcal{T} . Die Knoten und Kanten eines Dreiecks τ_l werden wieder mit \mathcal{N}_l beziehungsweise \mathcal{E}_l definiert. Mengen von Knoten beziehungsweise Kanten auf anderen Teilmengen von Q erhalten die entsprechende Menge als Index, so ist zum Beispiel $\mathcal{N}_{\Sigma \cup \Omega_0}$ die Menge

der Knoten am Anfangsrand und jener am seitlichen Rand Σ und \mathcal{E}_Q die Menge der Kanten im Inneren des Raum-Zeit-Rechtecks.

Wir definieren nun für die kontinuierlichen Variationsformulierung (3.8) für eine kompaktere Schreibweise die Räume

$$X := \{v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) : v(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega\}$$

und $Y := L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$. In einigen Aussagen werden wir die Normen dieser Räume der Kürze halber oft mit $\|\cdot\|_X$ respektive $\|\cdot\|_Y$ bezeichnen.

Für die Diskretisierung seien mit $X_{\mathcal{T}} \subseteq X$ und $Y_{\mathcal{T}} \subset Y$ zwei endlich-dimensionale Räume gegeben, wobei wir zusätzlich die Bedingung $X_{\mathcal{T}} \subset Y_{\mathcal{T}}$ fordern. Die Galerkin-Petrov-Diskretisierung der Variationsformulierung (3.8) lautet dann allgemein [20]:

Gesucht ist eine Funktion $u_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ sodass

$$c_H \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t u_{\mathcal{T}} v_{\mathcal{T}} \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x u_{\mathcal{T}} \partial_x v_{\mathcal{T}} \, dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v_{\mathcal{T}} \, dx dt \quad (3.21)$$

für alle Testfunktionen $v_{\mathcal{T}} \in Y_{\mathcal{T}}$ erfüllt ist.

Über einer diskrete Stabilitätsabschätzung mit einer diskreten Norm kann auch die eindeutige Lösbarkeit dieses diskreten Problems gezeigt werden [20].

Als spezielle Ansatzräume für das diskrete Problem (3.21) wollen wir für diese Arbeit

$$X_{\mathcal{T}} = Y_{\mathcal{T}} = V_{\mathcal{T}} := S^1(\mathcal{T}) \cap X$$

wählen, wobei mit $S^1(\mathcal{T})$ der Raum der stückweise linearen, global stetigen Funktionen bezüglich der Zerlegung \mathcal{T} des Raum-Zeit-Gebiets Q bezeichnet sei. Dieser Raum wird dann wieder durch die Basisfunktionen φ_k (für $k = 1, \dots, M$) aufgespannt, welche punktweise definiert sind mit

$$\varphi_k(x, t) := \begin{cases} 1 & \text{für } (x, t) = z_k, \\ 0 & \text{für } (x, t) = z_j \neq z_k, \\ \text{linear} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alles weitere bezeichnen wir sodann mit u und $u_{\mathcal{T}}$ die eindeutigen Lösungen des kontinuierlichen Variationsproblems (3.8) beziehungsweise der diskreten Formulierung (3.21) bezüglich des Test- und Ansatzraums $V_{\mathcal{T}}$. Für den Fehler in der $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -Norm lässt sich eine zur elliptischen a priori Fehlerabschätzung aus Satz 1.1 im Einleitungskapitel analoge Abschätzung zeigen.

Satz 3.19 (A priori Fehlerabschätzung, [20, Cor. 3.4]). *Falls für ein $s \in [1, 2]$ die Bedingung $u \in H^s(Q)$ erfüllt ist, so gilt für den Fehler die a priori Abschätzung*

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq ch^{s-1} \|u\|_{H^s(Q)}, \quad (3.22)$$

wobei $h = \max_{l=1,\dots,N} h_l$.

3.3 Das Residuum

Der Ausgangspunkt für die Definition des a posteriori Fehlerschätzers für das Modellproblem der Wärmeleitgleichung mit homogenen Anfangs- und Randbedingungen ist wieder das Residuum der diskreten Lösung $u_{\mathcal{T}}$. Wir definieren $R \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ mit

$$\langle R, v \rangle := \int_0^T \int_{\Omega} f v \, dx dt - c_H \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t u_{\mathcal{T}} v \, dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x u_{\mathcal{T}} \partial_x v \, dx dt \quad (3.23)$$

für jede Funktion $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Durch Einsetzen von (3.8) ergibt sich sofort die Beziehung

$$\langle R, v \rangle = a(u - u_{\mathcal{T}}, v) \quad \forall v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (3.24)$$

Ähnlich zu Kapitel 2 können wir eine Äquivalenz des Residuums und des tatsächlichen Fehlers zeigen. Dabei kommt die Stabilitätsbedingung aus Satz 3.16 zum Einsatz.

Lemma 3.20 (Äquivalenz von Residuum und Fehler). *Für das Residuum R und die eindeutigen Lösung u und $u_{\mathcal{T}}$ der Variationsformulierungen (3.8) beziehungsweise (3.21) gilt die Spektraläquivalenz*

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \min(c_H, 1) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_X \leq \|R\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \sqrt{2} \max(c_H, 1) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_X. \quad (3.25)$$

Beweis. Da $u - u_{\mathcal{T}} \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ mit $(u - u_{\mathcal{T}})(x, 0) = 0$ für alle $x \in \Omega$ erhalten wir aus Satz 3.16 die Abschätzung

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \min(c_H, 1) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_X \leq \sup_{0 \neq v \in Y} \frac{a(u - u_{\mathcal{T}}, v)}{\|v\|_Y}.$$

Wegen der Beziehung (3.24) stimmt die rechte Seite mit der Norm von R im Raum $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) = Y'$ (vergleiche Satz 3.7, Punkt (4)) überein und die linke Ungleichung von (3.25) ist gezeigt. Die verbleibende Ungleichung folgt aus der Beschränktheit der Bilinearform, welche wir bereits im Beweis von Korollar 3.17 gezeigt haben:

$$\langle R, v \rangle = a(u - u_{\mathcal{T}}, v) \leq \sqrt{2} \max(c_H, 1) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_X \|v\|_Y \quad \forall v \in Y.$$

Somit ist die zu zeigende Äquivalenz bewiesen. \square

Wir sehen also, dass anders als in der trivial gültigen Äquivalenz des Residuums der Poissongleichung und des Fehlers in Kapitel 2, die Konstanten in den Schranken in Lemma 3.20 von c_H und damit von der betrachteten Differentialgleichung und dem modellierten physikalischen Problem selbst abhängen. Eine weitere Eigenschaft, die Galerkin-Orthogonalität, welche ein wichtiges Werkzeug beim Beweis der Zuverlässigkeitseigenschaft des Fehlerschätzers in Kapitel 2 war, gilt wegen der Konformität des diskreten Ansatzraums, $V_{\mathcal{T}} \subset Y$, auch für das Residuum der Finite-Elemente Lösung $u_{\mathcal{T}}$ im hier betrachteten Fall der Wärmeleitgleichung:

$$\langle R, v_{\mathcal{T}} \rangle = 0, \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}. \quad (3.26)$$

Als nächstes wollen wir R wieder punktweise als eine Summe lokaler Residuumsanteile darstellen. Durch Anwendung des Gauß'schen Satzes in der Komponentenversion für die x -Komponente erhalten wir für alle $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ die Identität

$$\begin{aligned} \langle R, v \rangle &= \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{\tau_l} f v \, dx dt - c_H \int_{\tau_l} \partial_t u_{\mathcal{T}} v \, dx dt - \int_{\tau_l} \partial_x u_{\mathcal{T}} \partial_x v \, dx dt \right\} \\ &= \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{\tau_l} (f - c_H \partial_t u_{\mathcal{T}} + \partial_{xx} u_{\mathcal{T}}) v \, dx dt - \int_{\partial \tau_l} n_{l_x} \partial_x u_{\mathcal{T}} v \, dx dt \right\}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun die Element- und Kantenresiduen mit den Darstellungen

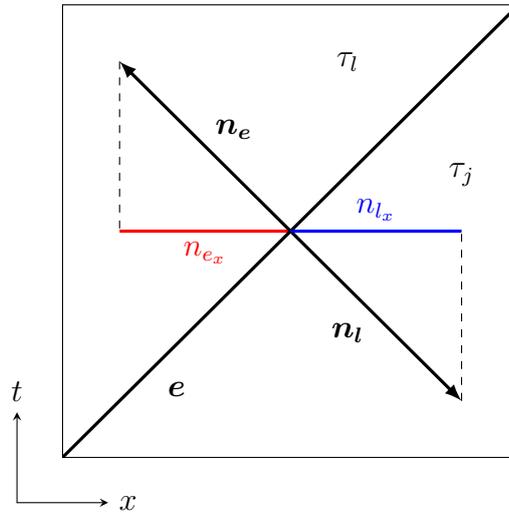
$$r|_{\tau_l} = f - c_H \partial_t u_{\mathcal{T}} + \partial_{xx} u_{\mathcal{T}} \text{ auf } \tau_l, \quad (3.27)$$

$$j|_e = \begin{cases} -\gamma_e (n_{e_x} \partial_x u_{\mathcal{T}}) & \text{für } e \in \mathcal{E}_Q, \\ 0 & \text{für } e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_Q. \end{cases} \quad (3.28)$$

Dabei sind mit n_{l_x} und n_{e_x} die x -Komponenten des äußeren Normalenvektors n_l von Element τ_l beziehungsweise des beliebig zu wählenden Normalenvektors n_e an einer inneren Kante e bezeichnet (Abbildung 3.4). Somit lässt sich das Residuum nach Umstellung der Summation über die Kanten der Elemente in Kurzform darstellen als

$$\langle R, v \rangle = \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{\tau_l} r v \, dx dt + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l} \int_e j v \, ds_{(x,t)} \right\}.$$

Auch hier dient der Faktor $\frac{1}{2}$ dem Ausgleich der Doppelzählung der Kantenresiduen.

Abbildung 3.4: Räumliche Normalenkomponenten auf einer inneren Kante e

3.4 Der Fehlerschätzer

Wir wollen nun für jedes Element τ_l analog zur Vorgangsweise bei der Definition der lokalen Fehlerindikatoren für die Poisson-Gleichung die lokalen Anteile des Residuums aus der Darstellung in (3.27) als rechte Seite für ein lokales Variationsproblem mit einer $H^1(\tau_l)$ -elliptischen Bilinearform verwenden. Wir betrachten die folgende kontinuierliche Variationsformulierung auf τ_l :

Gesucht ist eine Funktion

$$w \in H_{\Sigma \cup \Omega_0}^1(\tau_l) := \{ \phi \in H^1(\tau_l) : \phi = 0 \text{ auf } \partial\tau_l \cap (\Sigma \cup \Omega_0) \},$$

sodass

$$\int_{\tau_l} (\nabla_{(x,t)} w \cdot \nabla_{(x,t)} v + wv) \, dxdt = \int_{\tau_l} rv \, dxdt + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l} \int_e jv \, ds_{(x,t)} \quad (3.29)$$

für alle $v \in H_{\Sigma \cup \Omega_0}^1(\tau_l)$ erfüllt ist.

Die Bilinearform auf der linken Seite ist in diesem Fall $H_{\Sigma \cup \Omega_0}^1(\tau_l)$ -elliptisch und stetig. Die Linearform auf der rechten Seite ist beschränkt. Somit hat das lokale Problem eine eindeutige Lösung in $H_{\Sigma \cup \Omega_0}^1(\tau_l)$. Das Variationsproblem (3.29) kann als eine schwache

Form des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta_{(x,t)}w + w &= r && \text{in } \tau_l, \\ \frac{\partial w}{\partial n_l} &= \frac{1}{2}j && \text{auf } e \in \mathcal{E}_l \setminus \mathcal{E}_{\Sigma \cup \Omega_0}, \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\tau_l \cap (\Sigma \cup \Omega_0), \end{aligned}$$

interpretiert werden.

Wir wollen nun die kontinuierliche Variationsformulierung geeignet diskretisieren. Dazu wählen wir analog zum Fall der Poisson-Gleichung in Kapitel 2 als Kompromiss zwischen hoher Genauigkeit und geringem Rechenaufwand auf dem Element τ_l den endlich-dimensionalen Ansatzraum

$$W_l = \text{span} \{ \psi_e, \psi_l : e \in \mathcal{E}_l \setminus \mathcal{E}_{\Sigma \cup \Omega_0} \}.$$

Die Element- und Kanten-Bubble-Funktionen welche in (1.4) und (1.5) bezüglich eines Raumbereichs im \mathbb{R}^2 definiert wurden sind hier nun als Funktionen auf dem ebenfalls zweidimensionalen Raum-Zeit-Gebiet Q zu verstehen. Wir haben die Inklusionen $W_l \subset X \subset Y$ und für jede Funktion $v_l \in W_l$ gilt

$$v_l|_{\tau_l} \in H_{\Sigma \cup \Omega_0}^1(\tau_l).$$

Die diskrete Variationsformulierung auf dem Element τ_l lautet hiermit:

Gesucht ist eine Funktion $w_l \in W_l$ sodass

$$\int_{\tau_l} (\nabla_{(x,t)}w_l \cdot \nabla_{(x,t)}v_l + w_lv_l) \, dxdt = \int_{\tau_l} rv_l \, dxdt + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l} \int_e jv_l \, ds_{(x,t)} \quad (3.30)$$

für alle $v_l \in W_l$ erfüllt ist.

Als lokalen Fehlerindikator auf dem Element τ_l betrachten wir die Größe

$$\eta_l = \|w_l\|_{H^1(\tau_l)},$$

wobei mit $w_l \in W_l$ die eindeutige Lösung der diskreten Variationsformulierung (3.30) bezeichnet sei. Die Frage die sich nun stellt ist ob mit der Größe

$$\eta = \sqrt{\sum_{l=1}^N \eta_l^2} \quad (3.31)$$

auch im Fall des parabolischen Modellproblems ein zuverlässiger und effizienter Schätzer für den Fehler

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))}$$

gegeben ist. Wir beginnen mit dem Beweis der Effizienz von η , welcher ähnlich verläuft wie jener der Effizienz des Fehlerschätzers in Kapitel 2.

3.4.1 Effizienz

Aus der Definition des lokalen Fehlerindikators und der Funktion w_l als Lösung der diskreten Variationsformulierung (3.30) auf dem Element τ_l erhalten wir

$$\begin{aligned} \eta_l^2 &= \int_{\tau_l} \left[(\nabla_{(x,t)} w_l)^2 + w_l^2 \right] dxdt \\ &= \int_{\tau_l} r w_l dxdt + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_Q} \int_e j w_l ds_{(x,t)}. \end{aligned}$$

Eine Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung führt uns damit zu

$$\eta_l^2 \leq \|r\|_{L_2(\tau_l)} \|w_l\|_{L_2(\tau_l)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_Q} \|j\|_{L_2(e)} \|w_l\|_{L_2(e)}. \quad (3.32)$$

Wir bemerken, dass per Definition des diskreten Ansatzraums W_l jede Funktion $v_l \in W_l$ auf den Knoten des Elements τ_l den Wert Null annimmt damit erhalten wir analog zum Fall in Kapitel 2 für τ_l , jede Kante $e \in \mathcal{E}_l$ und jede Funktion $v_l \in W_l$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|v_l\|_{L_2(\tau_l)} &\leq ch_l \|\nabla_{(x,t)} v_l\|_{L_2(\tau_l)}, \\ \|v_l\|_{L_2(e)} &\leq ch_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla_{(x,t)} v_l\|_{L_2(\tau_l)}. \end{aligned}$$

Diese Abschätzungen und die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für Summen liefern uns für (3.32)

$$\begin{aligned} \eta_l^2 &\leq c \left\{ h_l \|r\|_{L_2(\tau_l)} \|\nabla_{(x,t)} w_l\|_{L_2(\tau_l)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_Q} h_e^{\frac{1}{2}} \|j\|_{L_2(e)} \|\nabla_{(x,t)} w_l\|_{L_2(\tau_l)} \right\} \\ &\leq c \left\{ h_l^2 \|r\|_{L_2(\tau_l)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_Q} h_e \|j\|_{L_2(e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \eta_l. \end{aligned}$$

Damit haben wir den lokalen Fehlerindikator η_l durch die Normen des Elementresiduums und der Kantenresiduen abgeschätzt, es gilt

$$\eta_l \leq c \left\{ h_l^2 \|r\|_{L_2(\tau_l)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_Q} h_e \|j\|_{L_2(e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.33)$$

Für ein Element $\tau_i \subset \mathcal{T}$ definieren wir nun für die weiteren Ausführungen der Kürze halber die Größe

$$\bar{r}_i := \bar{f}_i - c_H \partial_t u_{\mathcal{T}} + \partial_{xx} u_{\mathcal{T}}.$$

Hierbei definiert \bar{f}_i wieder das Integralmittel von f über τ_i ,

$$\bar{f}_i = \frac{1}{\Delta_i} \int_{\tau_i} f \, dxdt.$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$v_i := \bar{r}_i \psi_i.$$

Aus der Definition der Element-Bubble-Funktion folgen die Eigenschaften $\text{supp } v_i \subseteq \bar{\tau}_i$ und $v_i \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Wir können v_i also als Testfunktion in die kontinuierliche Variationsformulierung (3.8) des Modellproblems der Wärmeleitgleichung einsetzen. Wir erhalten

$$c_H \int_{\tau_i} \partial_t u v_i \, dxdt + \int_{\tau_i} \partial_x u \partial_x v_i \, dxdt = \int_{\tau_i} f v_i \, dxdt,$$

wobei an dieser Stelle zu bemerken ist, dass aufgrund von Satz 3.18, $\partial_t u \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ gilt. Durch Anwendung der ersten Ungleichung in Satz 1.3 und des Satzes von Gauß für die x -Komponente der Lösung $u_{\mathcal{T}}$ der diskreten Variationsformulierung des ursprünglichen globalen Problems ergibt sich hiermit

$$\begin{aligned} c \|\bar{r}_i\|_{L_2(\tau_i)}^2 &\leq \int_{\tau_i} (\bar{f}_i - c_H \partial_t u_{\mathcal{T}} + \partial_{xx} u_{\mathcal{T}}) v_i \, dxdt \\ &= c_H \int_{\tau_i} \partial_t (u - u_{\mathcal{T}}) v_i \, dxdt + \int_{\tau_i} \partial_x (u - u_{\mathcal{T}}) \partial_x v_i \, dxdt \\ &\quad + \int_{\tau_i} (\bar{f}_i - f) v_i \, dxdt. \end{aligned}$$

Nach der Definition des Newton-Potentials erhalten wir damit durch Einsetzen der Testfunktion $v_i \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ in die Variationsformulierung (3.10) mit

$$\phi = \partial_t (u - u_{\mathcal{T}}) \in L_2(0, T; L_2(\Omega)) \subset L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

und anschließender Nutzung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} c_H \int_{\tau_i} \partial_t (u - u_{\mathcal{T}}) v_i \, dx dt &= \int_{\tau_i} \partial_x [N \partial_t (u - u_{\mathcal{T}})] \partial_x v_i \, dx dt \\ &\leq \|\partial_x [N \partial_t (u - u_{\mathcal{T}})]\|_{L_2(\tau_i)} \|\partial_x v_i\|_{L_2(\tau_i)}. \end{aligned}$$

Durch abermalige Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung sowie der trivialen Abschätzung

$$\|\partial_x v_i\|_{L_2(\tau_i)} \leq \|\nabla_{(x,t)} v_i\|_{L_2(\tau_i)}$$

erhalten wir für die L_2 -Norm von \bar{r}_i somit das Resultat

$$\begin{aligned} c \|\bar{r}_i\|_{L_2(\tau_i)}^2 &\leq \left(\|\partial_x [N \partial_t (u - u_{\mathcal{T}})]\|_{L_2(\tau_i)} + \|\partial_x (u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\tau_i)} \right) \|\nabla_{(x,t)} v_i\|_{L_2(\tau_i)} \\ &\quad + \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)} \|v_i\|_{L_2(\tau_i)}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Wir verwenden nun die lokale Ungleichung für Element-Bubble-Funktionen aus Satz 1.3, welche sich analog auf die Raum-Zeit Betrachtung übertragen. Sie sind für den hier betrachteten Fall gegeben mit

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{L_2(\tau_i)} &\leq \|\bar{r}_i\|_{L_2(\tau_i)}, \\ \|\nabla_{(x,t)} v_i\|_{L_2(\tau_i)} &\leq ch_i^{-1} \|\bar{r}_i\|_{L_2(\tau_i)}. \end{aligned}$$

Für das Residuum r gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$\|r\|_{L_2(\tau_i)} \leq \|\bar{r}_i\|_{L_2(\tau_i)} + \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)}.$$

Somit können wir (3.34) weiter abschätzen und erhalten schließlich für das Elementresiduum auf τ_i die lokale Ungleichung

$$\begin{aligned} \|r\|_{L_2(\tau_i)} &\leq c \left\{ h_i^{-1} \left(\|\partial_x [N \partial_t (u - u_{\mathcal{T}})]\|_{L_2(\tau_i)} + \|\partial_x (u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\tau_i)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)} \right\}. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wollen wir nun die Normen der Kantenresiduen abschätzen. Dazu betrachten wir für eine beliebige innere Kante $e \in \mathcal{E}_Q$ die Funktion

$$v_e := j|_e \psi_e. \quad (3.35)$$

Für v_e gilt aufgrund der Definition der Kanten-Bubble-Funktion $\text{supp } v_e \subseteq \bar{\omega}_e$ somit liegt auch diese Funktion im Ansatzraum $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ der schwachen Formulierung

(3.8) der Wärmeleitgleichung. Wir erhalten durch Einsetzen von v_e als Testfunktion in (3.8) somit die Gleichung

$$c_H \int_{\omega_e} \partial_t u v_e \, dxdt + \int_{\omega_e} \partial_x u \partial_x v_e \, dxdt = \int_{\omega_e} f v_e \, dxdt. \quad (3.36)$$

Da v_e per Definition auf allen Kanten $e' \neq e$ des Netzes verschwindet, zeigt sich mithilfe des Satzes von Gauß für die schwache partielle Ableitung nach x der Finite-Elemente-Lösung $u_{\mathcal{T}}$ im Residuum $r = f - c_H \partial_t u_{\mathcal{T}} + \partial_{xx} u_{\mathcal{T}}$ auf den Elementen $\tau_i \subset \omega_e$ somit

$$\begin{aligned} \int_{\omega_e} r v_e \, dxdt &= \sum_{\tau_i \subset \omega_e} \left\{ \int_{\tau_i} f v_e \, dxdt - c_H \int_{\tau_i} \partial_t u_{\mathcal{T}} v_e \, dxdt \right. \\ &\quad \left. - \int_{\tau_i} \partial_x u_{\mathcal{T}} \partial_x v_e \, dxdt + \int_e n_{i,x} \partial_x u_{\mathcal{T}} v_e \, ds_{(x,t)} \right\} \\ &= \int_{\omega_e} f v_e \, dxdt - c_H \int_{\omega_e} \partial_t u_{\mathcal{T}} v_e \, dxdt - \int_{\omega_e} \partial_x u_{\mathcal{T}} \partial_x v_e \, dxdt - \int_e j v_e \, ds_{(x,t)}. \end{aligned}$$

Mit der Gleichung (3.36) ergibt sich nun die Identität

$$\int_{\omega_e} r v_e \, dxdt = c_H \int_{\omega_e} \partial_t (u - u_{\mathcal{T}}) v_e \, dxdt + \int_{\omega_e} \partial_x (u - u_{\mathcal{T}}) \partial_x v_e \, dxdt - \int_e j v_e \, ds_{(x,t)}. \quad (3.37)$$

Wir erhalten damit nach einer Anwendung der ersten lokalen Ungleichung für Kanten-Bubble-Funktionen aus Satz 1.4, einer Addition von 0 und der eben gezeigtten Identität (3.37),

$$\begin{aligned} c \|j\|_{L_2(e)}^2 &\leq \int_e j v_e \, ds_{(x,t)} \\ &= \int_{\omega_e} r v_e \, dxdt + \int_e j v_e \, ds_{(x,t)} - \int_{\omega_e} r v_e \, dxdt \\ &= c_H \int_{\omega_e} \partial_t (u - u_{\mathcal{T}}) v_e \, dxdt + \int_{\omega_e} \partial_x (u - u_{\mathcal{T}}) \partial_x v_e \, dxdt - \int_{\omega_e} r v_e \, dxdt. \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise wie bei der Herleitung der Abschätzung für die Elementresiduen, folgern wir mit der Definition des Newton-Potentials in (3.11) und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung,

$$\begin{aligned} c \|j\|_{L_2(e)}^2 &\leq \sum_{\tau_i \subset \omega_e} \left\{ \left(\|\partial_x [N \partial_t (u - u_{\mathcal{T}})]\|_{L_2(\tau_i)} + \|\partial_x (u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\tau_i)} \right) \|\nabla_{(x,t)} v_e\|_{L_2(\tau_i)} \right. \\ &\quad \left. + \|r\|_{L_2(\tau_i)} \|v_e\|_{L_2(\tau_i)} \right\}. \end{aligned}$$

Wir können nun die für jedes Element $\tau_i \subset \omega_e$ geltenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|v_e\|_{L_2(\tau_i)} &\leq ch_i^{\frac{1}{2}} \|j\|_{L_2(e)}, \\ \|\nabla_{(x,t)} v_e\|_{L_2(\tau_i)} &\leq ch_i^{-\frac{1}{2}} \|j\|_{L_2(e)}. \end{aligned}$$

aus Satz 1.4 zu den Kanten-Bubble-Funktionen sowie die Abschätzung des Elementresiduums aus (3.35) anwenden und erhalten schließlich die Abschätzung für das Kantenresiduum auf der Kante e mit

$$\begin{aligned} \|j\|_{L_2(e)} \leq c \sum_{\tau_i \subset \omega_e} \left\{ h_i^{-\frac{1}{2}} \left(\|\partial_x [N\partial_t (u - u_{\mathcal{T}})]\|_{L_2(\tau_i)} + \|\partial_x (u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\tau_i)} \right) \right. \\ \left. + h_i^{\frac{1}{2}} \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Nun können wir die beiden Abschätzungen (3.35) und (3.38) der Element- beziehungsweise Kantenresiduen zur Abschätzung der rechten Seite von (3.33) anwenden. Wir erhalten damit zunächst eine lokale Effizienzabschätzung des Fehlerindicators η_l auf dem Element τ_l mit

$$\eta_l \leq c \left\{ \|\partial_x [N\partial_t (u - u_{\mathcal{T}})]\|_{L_2(\omega_l)}^2 + \|\partial_x (u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(\omega_l)}^2 + \sum_{\tau_i \subset \omega_l} h_i^2 \|\bar{f}_i - f\|_{L_2(\tau_i)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Man beachte wie bei der Herleitung die Terme

$$\|\partial_x [N\partial_t (u - u_{\mathcal{T}})]\|_{L_2(\tau_i)}$$

wegen der Beziehungen

$$\begin{aligned} \|\partial_x [N\partial_t (u - u_{\mathcal{T}})]\|_{L_2(Q)} &= \|N\partial_t (u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &= c_H \|\partial_t (u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \end{aligned} \quad (3.39)$$

die Rolle lokaler Anteile der schwachen Zeitableitung von $u - u_{\mathcal{T}}$ in der Norm des Dualraums von $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ angenommen haben.

Wir führen nun eine Summation über alle Elemente τ_l der Zerlegung \mathcal{T} durch. Unter Berücksichtigung von Mehrfachzählungen der Normen bei der Zusammenfassung der Konstanten mittels der vorausgesetzten gleichmäßigen Formregularitätseigenschaft und der Verwendung der Beziehung (3.39) haben wir schließlich die Effizienz von η als Schätzer des Fehlers in der Norm des Raums $L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ bewiesen.

Satz 3.21 (Effizienz von η). *Für die Größe*

$$\eta = \sqrt{\sum_{l=1}^N \eta_l^2}$$

mit den lokalen Fehlerindikatoren $\eta_l = \|w_l\|_{H^1(\tau_l)}$, wobei w_l die eindeutige Lösung des lokalen diskreten Hilfsproblems (3.30) auf dem Element τ_l ist, gilt die Effizienzabschätzung

$$\eta \leq c \left\{ \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 + \sum_{l=1}^N h_l^2 \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.40)$$

Die Konstante $c > 0$ hängt dabei nur von c_H und der Formregularitätskonstante der Netzfamilie ab.

3.4.2 Zur Zuverlässigkeit

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass die Effizienz des Fehlerschätzers über den Einsatz des Newton-Potentials N zur Definition lokaler Anteile der schwachen Zeitableitung des Fehlers in ganz ähnlicher Weise bewiesen werden kann wie die Effizienz des Fehlerschätzers der Poisson-Gleichung in Kapitel 2. Ein wichtiger Punkt war dabei die Tatsache, dass die Lösungen der lokalen Hilfsprobleme analog zum Fall der Poisson-Gleichung im Raum $H^1(Q)$ liegen.

Betrachten wir nun den Zuverlässigkeitsbeweis des Poisson-Fehlerschätzers in Kapitel 2 so erkennen wir, dass dabei weniger die Eigenschaften der lokalen Hilfsprobleme, als jene des ursprünglichen globalen Problems zu tragen kamen. So mussten wir bei der Abschätzung des Residuums Ungleichungen anwenden, welche für alle Funktionen aus dem Testraum der schwachen Formulierung des betrachteten Dirichlet-Randwertproblems zu gelten hatten. Die wesentlichen Punkte des Beweises der Zuverlässigkeit lassen sich in allgemeiner Form angeben [23]:

1. Die Äquivalenz des Residuums in dualen Norm des Testraums mit der Norm des tatsächlichen Fehlers im Ansatzraum der kontinuierlichen Formulierung
2. Die Galerkin-Orthogonalität des Residuums bezüglich des diskreten Ansatzraums
3. Die lokalen Ungleichungen aus den Sätzen 1.3 und 1.4 zu den Bubble-Funktionen
4. Die Quasi-Interpolationsabschätzungen aus Satz 1.7

Die Äquivalenz zwischen Residuum und Fehler im Fall der Wärmeleitgleichung haben wir bereits mithilfe der Stabilitätsbedingung aus Satz 3.16 in Lemma 3.20 gezeigt. Auch die Galerkin-Orthogonalität des Residuums in Punkt 2 folgt, wie bereits in (3.26) untersucht, aus der Konformität des diskreten Ansatzraums $V_{\mathcal{T}}$. Die lokalen Ungleichungen für Bubble-Funktionen gelten, wie wir bereits im Effizienzbeweis bemerkt haben, analog für die Raum-Zeit Betrachtung. Trotz dem Erhalt der Gültigkeit dieser Punkte für den Fall der Wärmeleitgleichung, wollen wir vorweg nehmen, dass die Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers η für das parabolische Modellproblem im Rahmen dieser Arbeit nicht bewiesen werden konnte. Der Grund liegt dabei im letzten Schritt der

obigen Auflistung, die Erfüllung von geeigneten Quasi-Interpolationsabschätzungen für beliebige Funktionen aus dem Testraum $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ der schwachen Formulierung (3.8) des Modellproblems. Wir wollen im Folgenden dennoch die analogen Schritte zu jenen im Zuverlässigkeitsbeweis von Kapitel 2 bis zu diesem Punkt beschreiben und einige Überlegungen zur Frage nach der Existenz von geeigneten Quasi-Interpolationsabschätzungen angeben.

Wir beginnen die Abschätzung des Residuums mit einer Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. Für alle $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ gilt

$$\begin{aligned} \langle R, v \rangle &= \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{\tau_l} r v \, dx dt + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l} \int_e j v \, ds_{(x,t)} \right\} \\ &\leq \sum_{l=1}^N \left\{ \|r\|_{L_2(\tau_l)} \|v\|_{L_2(\tau_l)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l} \|j\|_{L_2(e)} \|v\|_{L_2(e)} \right\} \end{aligned}$$

Wegen der Galerkin-Orthogonalität des Residuums erhalten wir damit insbesondere

$$\begin{aligned} \langle R, v \rangle &= \langle R, v - v_{\mathcal{T}} \rangle \\ &\leq \sum_{l=1}^N \left\{ \|r\|_{L_2(\tau_l)} \|v - v_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\tau_l)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_l} \|j\|_{L_2(e)} \|v - v_{\mathcal{T}}\|_{L_2(e)} \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

für jede beliebige Funktion $v_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$. Die Abschätzungen der Element- und Kantenresiduen erfolgen nun völlig analog zu jenen in Kapitel 2 mit dem Einsatz der Sätze 1.3 und 1.4. Wir erhalten für ein beliebiges Element τ_l und jede Kante $e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_Q$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|r\|_{L_2(\tau_l)} &\leq c \left(h_l^{-1} \eta_l + \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)} \right), \\ \|j\|_{L_2(e)} &\leq c \left(h_l^{-\frac{1}{2}} \eta_l + h_l^{\frac{1}{2}} \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)} \right). \end{aligned}$$

Setzen wir diese Abschätzungen nun in (3.41) ein und beachten, dass per Definition $j|_e = 0$ für jede Randkante e gilt, so folgt

$$\begin{aligned} \langle R, v \rangle &\leq c \sum_{l=1}^N \left\{ \left(h_l^{-1} \eta_l + \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)} \right) \|v - v_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\tau_l)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{e \in \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_Q} \left(h_l^{-\frac{1}{2}} \eta_l + h_l^{\frac{1}{2}} \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)} \right) \|v - v_{\mathcal{T}}\|_{L_2(e)} \right\}. \end{aligned}$$

Die offene Frage ist, ob gezeigt werden kann, dass für jedes $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ eine Funktion $v_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ existiert, sodass, in Ermangelung jeglicher Information der Existenz

geschweige denn Regularität der schwachen Zeitableitung von v , Ungleichungen der Form

$$\|v - v_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\tau_l)} \leq ch_l \|\partial_x v\|_{L_2(\widehat{\omega}_l)}, \quad (3.42)$$

$$\|v - v_{\mathcal{T}}\|_{L_2(e)} \leq ch_e^{\frac{1}{2}} \|\partial_x v\|_{L_2(\widehat{\omega}_e)}, \quad (3.43)$$

für alle Elemente τ_l und Kanten e gelten. Hierbei sollen $\widehat{\omega}_l$ und $\widehat{\omega}_e$ möglichst kleine Mengen von Elementen in der Nachbarschaft des Elements τ_l beziehungsweise der Kante e sein. Hätten wir Ungleichungen dieser Form zur Verfügung so würde daraus mit der Äquivalenz zwischen Fehler und Residuum in (3.20) und der vorausgesetzten Formregularität der Netzfolge, die Zuverlässigkeit des betrachteten Schätzers η in der Form

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_X \leq c \left\{ \eta + \sum_{l=1}^N h_l^2 \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_l)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

analog zur Vorgangsweise in Kapitel 2 folgen.

Wir wollen im Folgenden einige Überlegungen bezüglich der ersten Ungleichung (3.42) angeben. Da die Funktionen $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ im Allgemeinen nicht stetig sein müssen, ist davon auszugehen, dass wir bei der Wahl der Funktion $v_{\mathcal{T}}$ in jedem Fall wieder auf eine Quasi-Interpolierende von v , wie etwa in Definition 1.5, zurückgreifen müssen. Ein notwendiges Instrument zum Beweis der Quasi-Interpolationsabschätzungen in Satz 1.7 war dabei die Poincaré'sche Ungleichung. Wir betrachten diesbezüglich nun der Einfachheit halber ein offenes Rechteck $A \times B \subsetneq Q$. Wendet man die Poincaré'sche Ungleichung bezüglich des Integrals über dem Raumintervall A an, so ergibt sich die Ungleichung

$$\int_B \int_A |v(x, t) - \bar{v}_A(t)|^2 dx dt \leq c \operatorname{diam}(A)^2 \|\partial_x v\|_{L_2(A \times B)}^2. \quad (3.44)$$

Dabei sei mit $\bar{v}_A(t)$ das Integralmittel von v über A zur Zeit $t \in B$ bezeichnet:

$$\bar{v}_A(t) := \frac{1}{|A|} \int_A v(x, t) dx.$$

Diese Abschätzung hat eine ähnliche Struktur wie die gewünschte Ungleichung (3.42). Um in weiterer Form einen quasi-interpolierenden Operator zu definieren, der eine Funktion $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ auf den Raum $V_{\mathcal{T}}$ der stückweise-linearer Funktionen abbildet, müssten wir allerdings die zeitabhängige Größe durch das konstante Raum-Zeit-Mittel

$$\bar{v}_{A \times B} := \frac{1}{|A \times B|} \int_B \int_A v(x, t) dx dt$$

ersetzen. Dass dies im Allgemeinen jedoch nicht möglich ist, zeigt das folgende Beispiel. Es sei $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ mit

$$v(x, t) = xt + \alpha t \quad \text{für } (x, t) \in A \times B,$$

wobei α eine positive reelle Zahl ist. Dann ist das Integral

$$\int_B \int_A |v(x, t) - \bar{v}_{A \times B}|^2 dx dt$$

monoton steigend in α . Die rechte Seite von (3.44) hingegen ist allerdings nicht von α abhängig. Es folgt, dass die Ungleichung

$$\|v - \bar{v}_{A \times B}\|_{L_2(A \times B)}^2 \leq c \operatorname{diam}(A)^2 \|\partial_x v\|_{L_2(A \times B)}^2 \quad (3.45)$$

nicht für alle $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ erfüllt sein kann. Man beachte, dass dieses Resultat nicht durch die Wahl einer anderen Konstanten geändert werden kann, da $\bar{v}_{A \times B}$ bereits die beste L_2 -Approximation von v durch Konstanten ist, das heißt

$$\|v - \bar{v}_{A \times B}\|_{L_2(A \times B)} \leq \inf_{c \in \mathbb{R}} \|v - c\|_{L_2(A \times B)}.$$

Es stellt sich die Frage ob es reicht, $\langle R, v \rangle$ nur für Funktionen $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ mit geeigneten zusätzlichen Eigenschaften abzuschätzen. Gehen wir zurück zur Äquivalenz zwischen Residuum und tatsächlichem Fehler und dem Beweis der Stabilitätsabschätzung in Satz 3.16 so gilt wegen $u - u_{\mathcal{T}} = 0$ in Ω_0 durch Einsetzen in (3.20) die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \min(c_h^2, 1) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_X^2 \leq \langle R, u - u_{\mathcal{T}} + N \partial_t(u - u_{\mathcal{T}}) \rangle. \quad (3.46)$$

Offen ist ob wir mithilfe der Beziehung

$$\|N \partial_t(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} = c_H \|\partial_t(u - u_{\mathcal{T}})\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}$$

direkt eine Ungleichung der Form

$$\langle R, u - u_{\mathcal{T}} + N \partial_t(u - u_{\mathcal{T}}) \rangle \leq \left\{ \eta + \sum_{l=1}^N h_l^2 \|\bar{f}_l - f\|_{L_2(\tau_L)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_X$$

zeigen können. Wir erinnern an dieser Stelle, dass wir wegen der Forderung $f \in L_2(Q)$ etwa das Resultat der verbesserten Regularität aus Satz 3.18 anwenden können und damit für die schwache Lösung u die Regularitätseigenschaft

$$u \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L_{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$$

erhalten. Für den Term $N\partial_t(u - u_{\mathcal{T}}) \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ erhalten wir zwar direkt keine weiteren Eigenschaften für die schwache Zeitableitung, allerdings erfüllt dieser per Definition des Newton-Potentials die Variationsformulierung

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_x [N\partial_t(u - u_{\mathcal{T}})] \partial_x v \, dx dt = c_H \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t(u - u_{\mathcal{T}}) v \, dx dt, \quad (3.47)$$

für alle $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Es bleibt unklar, ob diese Zusatzeigenschaft der Funktion $N\partial_t(u - u_{\mathcal{T}})$ zur Gültigkeit einer lokalen Poincaré-Ungleichung der Form (3.45) ausreicht. Bei der Recherche zum Thema „parabolischer Poincaré-Ungleichungen“ findet sich hierzu die folgende bemerkenswerte Aussage.

Satz 3.22 (Parabolische Poincaré-Ungleichung, [3, Thm. 2.2]). *Es sei $v \in L_2(0, T; H^1(\Omega))$ so gegeben, dass die Gleichung*

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_x v \partial_x \phi \, dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} v \partial_t \phi \, dx dt \quad (3.48)$$

für alle $\phi \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ mit $\phi(x, 0) = \phi(x, T) = 0$ erfüllt ist. Weiters sei $(x_0, t_0) \in Q$ so, dass

$$Q_r := \left(x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2}\right) \times (t_0, t_0 + r^2) \subset Q,$$

sowie $Q_{2r} \subset Q$ (siehe Abbildung 3.5). Dann gilt

$$\|v - \bar{v}_r\|_{L_2(Q_r)} \leq cr \|\partial_x v\|_{L_2(Q_{2r})},$$

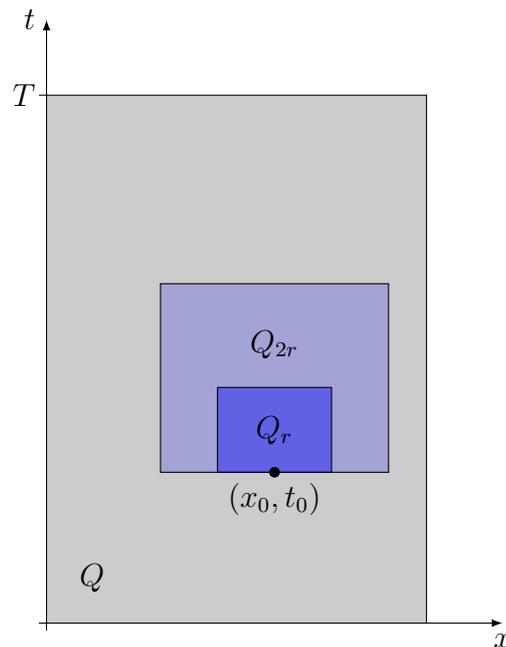
wobei mit \bar{v}_r das konstante Intergralmittel von v über dem Raum-Zeit-Rechteck Q_r bezeichnet ist.

Wir bemerken, dass (3.48) eine schwache Formulierung der Wärmeleitgleichung

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = 0 \quad \text{in } Q$$

darstellt. Der Beweis von Satz 3.22 basiert auf dem Einsatz spezieller Testfunktionen mit dem Ziel die L_2 -Norm einer Lösung von (3.48) bezüglich der Zeitvariable zu kontrollieren [3]. Im Gegensatz zur Forderung von Satz 3.22 erfüllt die Funktion $N\partial_t(u - u_{\mathcal{T}})$ allerdings nur das quasi-statische Variationsproblem (3.47), sodass der Satz im hier betrachteten Fall nicht angewendet werden kann.

Wir wollen nun abschließend dennoch den in diesem Kapitel untersuchten Fehlerschätzer η in einem adaptiven Raum-Zeit-Finite-Elemente-Verfahren zur numerischen Lösung einiger Modellproblem anwenden und die erhaltenen Resultate mit jenen der Standard-Finite-Elemente-Methode ohne adaptiver Netzverfeinerung vergleichen.

Abbildung 3.5: Die Raum-Zeit-Rechtecke Q_r und Q_{2r}

3.5 Numerische Ergebnisse

Bevor wir nun mit der Betrachtung einiger Beispiele beginnen, wollen wir noch einige Informationen zur verwendeten Implementierung des Algorithmus 2.1 angeben. Die C++-Implementierung des adaptive Raum-Zeit-Finite-Elemente-Verfahrens entstand in Teilen bereits in [15]. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir aber aufgrund des zusätzlichen Einbezugs der Element-Bubble-Funktionen in den Ansatzräumen der lokalen Hilfsprobleme, wie bereits in Kapitel 2, eine leicht modifizierte Version des Fehlerschätzers. Weiters merken wir an, dass Korrekturen der Implementierung aus [15] vorgenommen wurden. Als iterativen Löser für das globale lineare Gleichungssystem, welches aus der Raum-Zeit-Diskretisierung der schwachen Formulierung (3.8) entsteht, verwenden wir das GMRES-Verfahren („generalized minimal residual method“) mit Neustarts und einer unvollständigen LU-Zerlegung als Vorkonditionierung [16]. Außerdem verwenden wir als Startlösung ab der zweiten Iteration des adaptiven Verfahrens, die stückweise lineare Interpolation der diskreten Lösung der letzten Iteration auf das aktuelle Netz. Die kleinen linearen Gleichungssysteme der lokalen Hilfsprobleme werden jeweils direkt mithilfe einer Cholesky-Zerlegung gelöst. Als Verfeinerungsmethode verwenden wir wie in Kapitel 2 die RGB-Methode. Zur Auswahl der zu verfeinernden Elemente wollen wir für die Beispiel in diesem Abschnitt die so genannte Dörfler-Markierungsmethode betrachten.

Algorithmus 3.1 (Dörfler-Markierung [24, Algorithm III.1.2]).

(0) Gegeben: Partition \mathcal{T} von Q in Dreiecke, Fehlerindikatoren η_l für jedes Element τ_l von \mathcal{T} , Adaptivitätsparameter $\theta \in [0, 1]$.

Gesucht: Menge \mathcal{Q} von zu verfeinernden Elementen.

(1) Berechne den globalen Fehlerschätzer

$$\eta = \sqrt{\sum_{l=1}^N \eta_l^2}$$

und setze $\Sigma_{\mathcal{T}} = 0$ sowie $\mathcal{Q} = \emptyset$.

(2) Falls

$$\Sigma_{\mathcal{T}} \geq \theta \eta^2,$$

stoppe das Verfahren. Ansonsten, gehe zu Schritt (3).

(3) Setze $\tilde{\mathcal{Q}} = \{\tau_j : j = 1, \dots, N\} \setminus \mathcal{Q}$. Berechne

$$\tilde{\eta}_{max} = \max_{\tau_l \in \tilde{\mathcal{Q}}} \eta_l.$$

(4) Prüfe für jedes Element $\tau_l \in \tilde{\mathcal{Q}}$ ob

$$\eta_l = \tilde{\eta}_{max}.$$

Falls ja, füge τ_l zu \mathcal{Q} hinzu und setze $\Sigma_{\mathcal{T}} = \Sigma_{\mathcal{T}} + \eta_l^2$. Sonst überspringe τ_l . Nachdem die Überprüfung für alle Elemente abgeschlossen ist, gehe zu Schritt (2).

Dieser Algorithmus liefert die kleinste Menge \mathcal{Q} an zu verfeinernden Elementen, sodass die Ungleichung

$$\sum_{\tau_l \in \mathcal{Q}} \eta_l^2 \geq \theta \eta^2 \tag{3.49}$$

erfüllt ist. Im Gegensatz zur Maximierungsstrategie in Algorithmus 2.2, hat die Dörfler-Markierungsmethode das Ziel den Fehler möglichst gleichmäßig über die Elemente zu verteilen, weshalb sie oftmals auch als Gleichverteilungs-Strategie („equilibration-strategy“) bezeichnet wird [23]. Die oftmals besseren Resultate dieser Markierungsstrategie haben allerdings den Preis eines höheren Rechenaufwands im Vergleich zur simplen Maximierungsstrategie welche wir in Kapitel 2 beschrieben haben. Wir werden für alle folgenden Beispiele als Markierungsmethode die Dörfler-Markierung verwenden. Wenn nicht anders angegeben werden wir dabei für den Adaptivitätsparameter

den Wert $\theta = 0.5$ wählen. Für alle folgenden Beispiele betrachten wir den Fehler jeweils in der Norm

$$\|\cdot\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} = \sqrt{\|\cdot\|_{L_2(Q)}^2 + \|\partial_x(\cdot)\|_{L_2(Q)}^2} \quad \left[= \|\cdot\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \right].$$

Wir betrachten den Effizienzindex $\Theta_{\mathcal{T}}$ des Fehlerschätzers η analog zu jenem in Kapitel 2 für ein festes Netz \mathcal{T} bezüglich dieser Norm, das heißt

$$\Theta_{\mathcal{T}} := \frac{\eta}{\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}}.$$

Für das L -te konstruierte Netz \mathcal{T}_L (für $L \geq 1$) definieren wir zudem wieder die geschätzte Konvergenzordnung („estimated order of convergence“) [19] des Fehlers mit

$$\text{eoc}_L := \frac{\log \|u - u_{\mathcal{T}_L}\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} - \log \|u - u_{\mathcal{T}_{L-1}}\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}}{\log M_L - \log M_{L-1}}.$$

Dabei sei wieder mit M_L die Anzahl der Knoten des Netzes \mathcal{T}_L bezeichnen.

Beispiel 3.1 ([17]). Wir wollen für dieses Beispiel das Modell der Wärmeleitgleichung (3.7) mit der exakten Lösung

$$u(x, t) = t \cos(\pi t) \sin(\pi x) \quad \text{für } (x, t) \in Q$$

betrachten (siehe Abbildung 3.6). Dies ist eine leicht veränderte Version von [17, Ex. 2.3.1] mit dem zusätzlichen Faktor t in der Lösung.

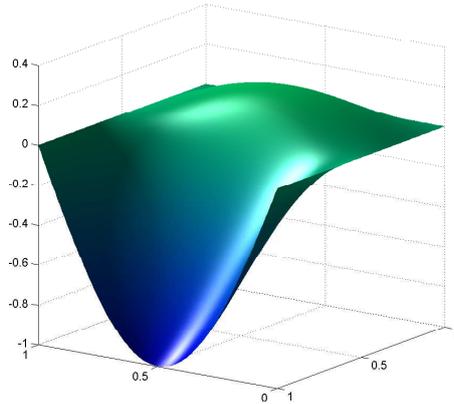
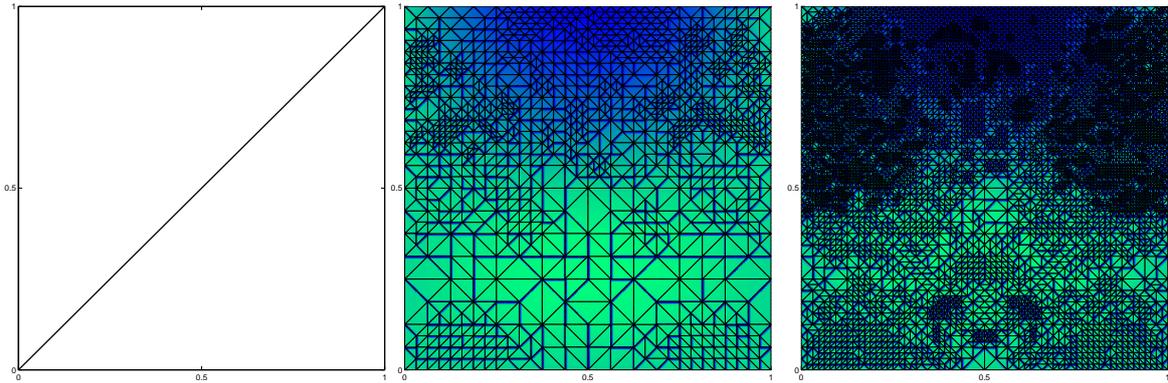


Abbildung 3.6: Lösung u zu Beispiel 3.1

Hierbei sei $Q = (0, 1)^2$ und $c_H = 1$. Die Anfangsbedingung ist gemäß der Lösung homogen. Diese Lösung ist glatt, wir erwarten daher aufgrund von Satz 3.19 für den Fehler die optimale Konvergenzordnung 1 bezüglich h beziehungsweise $-\frac{1}{2}$ bezüglich der Knotenanzahl M . Die erhaltenen Fehlermaße des adaptiven Verfahrens und des

Abbildung 3.7: Das Startnetz \mathcal{T}_0 und die adaptiven Netze \mathcal{T}_{12} und \mathcal{T}_{17} zu Beispiel 3.1

uniformen Verfahrens, ausgehend vom Startnetz \mathcal{T}_0 in Abbildung 3.7, sind in Tabelle 3.1 zu finden. Ein Log-log-Plot der Fehler und des Fehlerschätzers gegen die Knotenanzahl ist in Abbildung 3.8 gegeben. Die Ergebnisse bestätigen die Erwartungen, denn beide Verfahren erreichen die optimale Konvergenzordnung. In Abbildung 3.8 erkennen wir zudem, dass das adaptive Verfahren trotz der Glattheit der Lösung einen minimalen Vorteil in Bezug auf die benötigte Anzahl an Knoten hat. Wir erkennen auch, dass der Fehlerschätzer parallel zum Fehler des adaptiven Verfahrens verläuft, diesen jedoch leicht unterschätzt. So beobachten wir in diesem Beispiel, dass η den Fehler in der $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -Norm effizient und zuverlässig schätzt. Außerdem lassen die Werte des Effizienzindex auf eine mögliche, wenn auch sehr langsame Konvergenz von η gegen den Fehler schließen. Fehlerschätzer, die ein solches Verhalten aufweisen, bei denen also der Effizienzindex gegen 1 konvergiert, werden als asymptotisch exakt bezeichnet [23].

L	N	M	$\ u - u_{\mathcal{T}}\ _{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}$	eoc	η	Θ
Uniforme Verfeinerung						
8	131072	66049	$6.476 \cdot 10^{-3}$	-0.50		
9	524288	263169	$3.238 \cdot 10^{-3}$	-0.50		
10	2097152	1050625	$1.619 \cdot 10^{-3}$	-0.50		
Adaptive Verfeinerung						
14	66355	33393	$7.479 \cdot 10^{-3}$	-0.54	$6.758 \cdot 10^{-3}$	0.90
16	215069	107918	$4.086 \cdot 10^{-3}$	-0.64	$3.751 \cdot 10^{-3}$	0.92
19	1205412	603665	$1.779 \cdot 10^{-3}$	-0.47	$1.651 \cdot 10^{-3}$	0.93

Tabelle 3.1: Vergleich der uniformen und adaptiven Verfeinerungsmethoden (Bsp. 3.1)

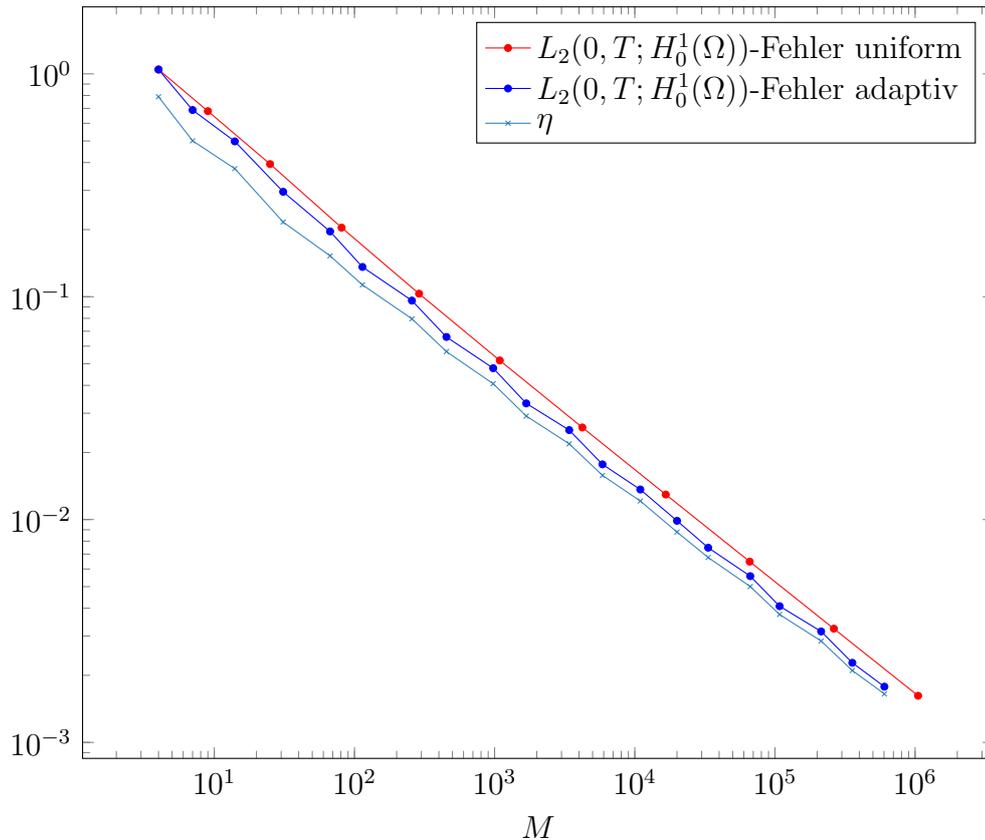


Abbildung 3.8: Log-Log-Plot der Fehler und des Fehlerschätzers zu Beispiel 3.1

Wir erwähnen, dass die Effizienz bezüglich des Fehlers in der $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -Norm eine stärkere Eigenschaft ist als die Effizienz bezüglich des Fehlers in der $L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ -Norm, die wir in Abschnitt 3.4.1 bewiesen haben. Umgekehrt folgt aus der Zuverlässigkeit bezüglich des Fehlers in der $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -Norm nicht die Zuverlässigkeit bezüglich der Norm des Raums $L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Falls wie in diesem Beispiel a priori bekannt ist, dass die Lösung glatt ist, so kann es sinnvoll sein einen niedrigeren Adaptivitätsparameter für die Dörfler-Markierung zu wählen. Dies hat zur Folge, dass pro Iterationsschritt weniger Elemente verfeinert werden. Einige adaptive Netze die während einer Anwendung des adaptiven Verfahrens mit dem Adaptivitätsparameter $\theta = 0.3$ entstanden sind, sind in Abbildung 3.7 zu sehen.

Beispiel 3.2. [17, Ex. 2.3.2] In diesem Beispiel betrachten wir nun ein Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitgleichung bei dem die Rand- und Anfangsbedingungen und

die Funktion f so gewählt seien, dass die exakte Lösung mit der Funktion

$$u(x, t) = \left[x^2 + \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}$$

gegeben ist. Diese Funktion hat eine Punktsingularität in $(x, t) = (0, \frac{1}{2})$, es gilt die Regularitätseigenschaft $u \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(Q)$ für $\varepsilon > 0$ [17]. Die Aussage von Satz 3.19 legt nahe, dass wir bei der Methode mit uniformer Verfeinerung also maximal mit einer Konvergenzordnung von $\frac{1}{2}$ bezüglich h oder äquivalent $-\frac{1}{4}$ bezüglich der Knotenanzahl M rechnen können.

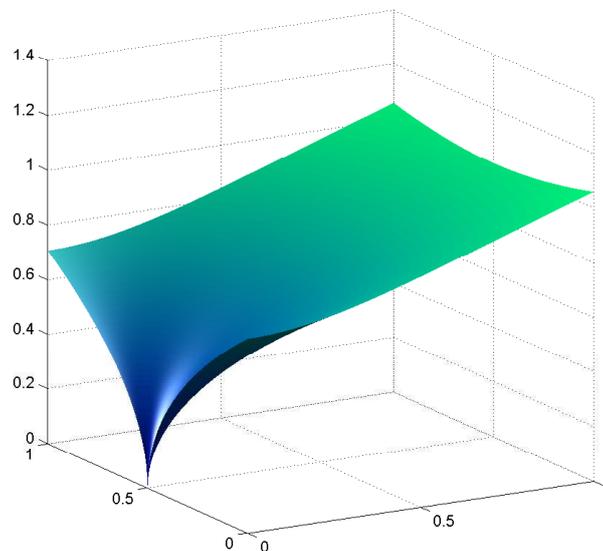


Abbildung 3.9: Lösung u zu Beispiel 3.2

Die exakte Lösung ist in Abbildung 3.9 dargestellt. Die erhaltenen Werte für den Fehler und den Fehlerschätzer η des adaptiven Verfahrens und jene des Fehlers des uniformen Verfahrens sind in Tabelle 3.2 aufgelistet und im Log-Log-Plot in Abbildung 3.10 ersichtlich. Für die uniforme Methode erhalten wir wie erwartet die geschätzte Konvergenzordnung $\text{eoc} = -\frac{1}{4}$. Für das adaptive Verfahren beobachten wir eine Konvergenzordnung von $-\frac{1}{2}$, was der optimalen linearen Konvergenzrate in h bei uniformer Verfeinerung entspricht. Wie auch schon in Beispiel 2.2 des elliptischen Modellproblems in Kapitel 2 kann also auch in dem hier betrachteten Fall durch die Anwendung der adaptiven Verfeinerung die, aufgrund fehlender Regularität der Lösung verminderte Konvergenzrate, ausgeglichen werden. Das verwendete Startnetz und zwei adaptive Netze sind in Abbildung 3.11 dargestellt. Wir erkennen, dass die Punktsingularität vom adaptiven Verfahren gut erkannt wird.

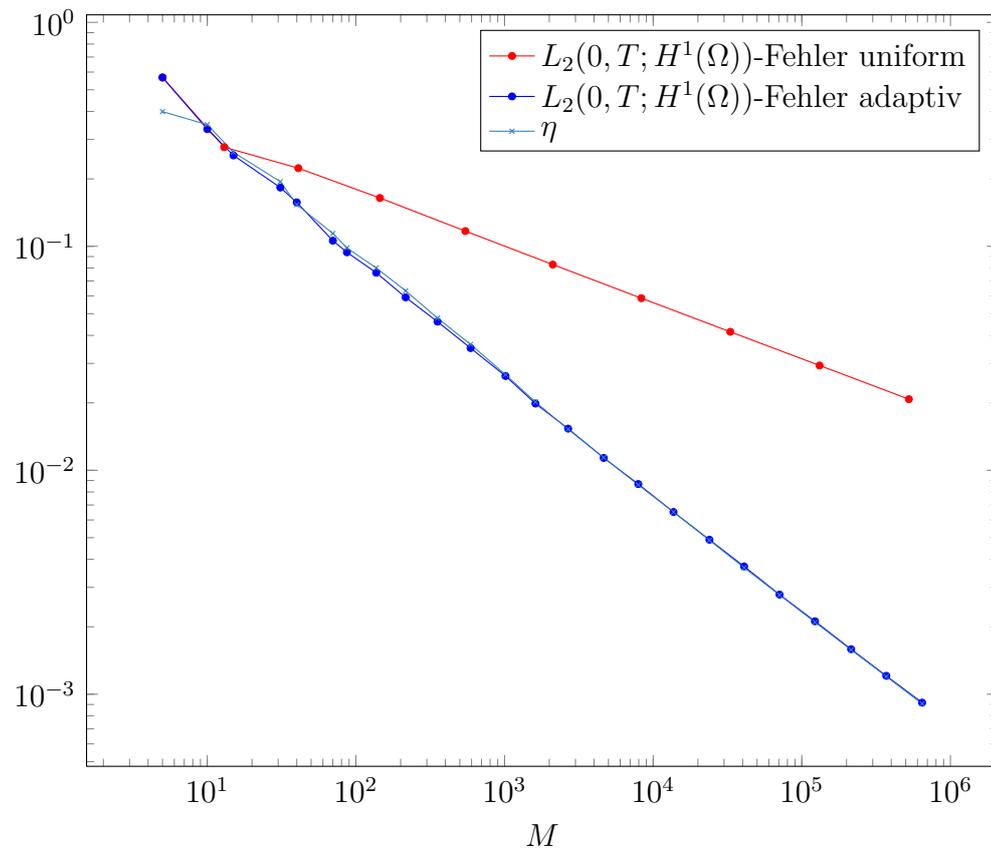
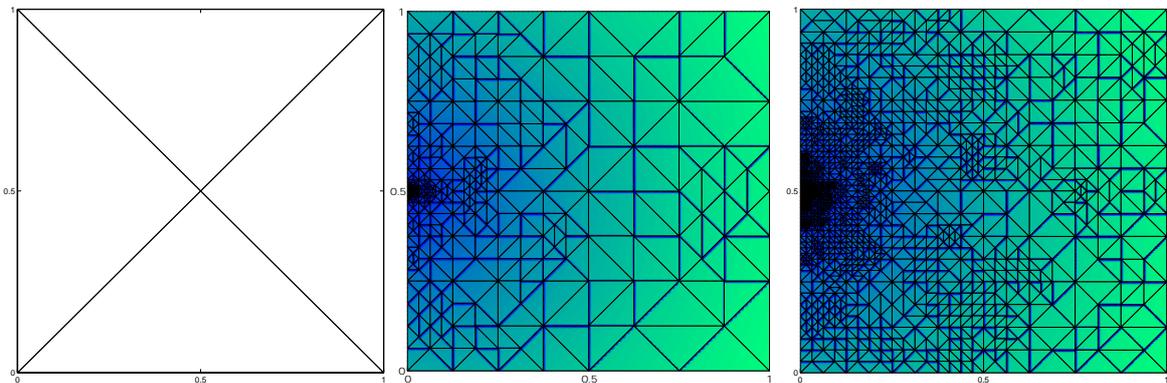


Abbildung 3.10: Log-Log-Plot der Fehler und des Fehlerschätzers zu Beispiel 3.2

Abbildung 3.11: Das Startnetz \mathcal{T}_0 und die adaptiven Netze \mathcal{T}_9 und \mathcal{T}_{12} zu Beispiel 3.2

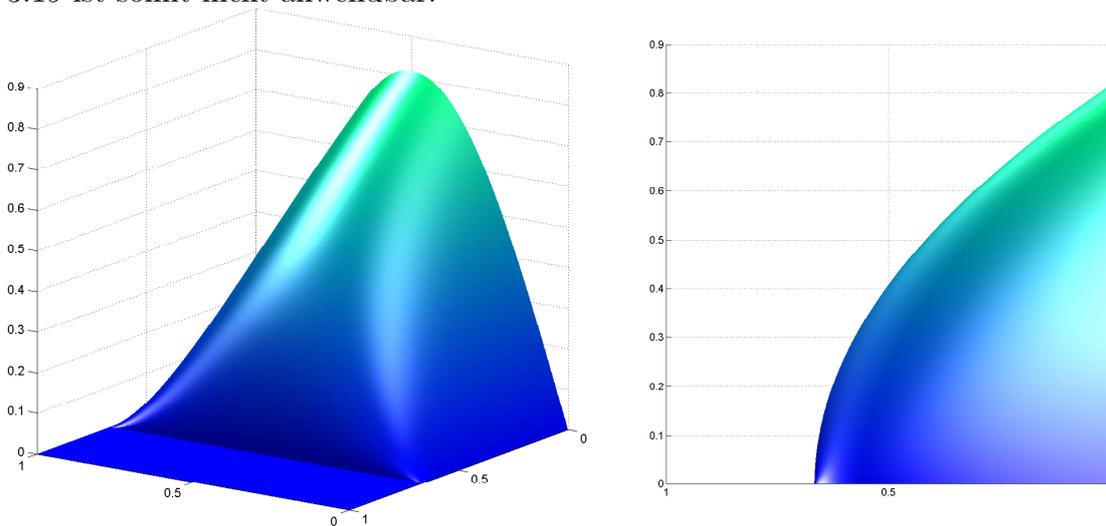
L	N	M	$\ u - u_{\mathcal{T}}\ _{L_2(0,T;H^1(\Omega))}$	eoc	η	Θ
Uniforme Verfeinerung						
7	65536	33025	$4.151 \cdot 10^{-2}$	-0.25		
8	262144	131585	$2.936 \cdot 10^{-2}$	-0.25		
9	1048576	525313	$2.077 \cdot 10^{-2}$	-0.25		
Adaptive Verfeinerung						
17	47301	23911	$4.896 \cdot 10^{-3}$	-0.51	$4.870 \cdot 10^{-3}$	0.99
20	243989	122605	$2.117 \cdot 10^{-3}$	-0.50	$2.096 \cdot 10^{-3}$	0.99
23	1286931	644884	$9.170 \cdot 10^{-4}$	-0.50	$9.072 \cdot 10^{-4}$	0.99

Tabelle 3.2: Vergleich der uniformen und adaptiven Verfeinerungsmethoden (Bsp. 3.2)

Beispiel 3.3 ([17]). Wir wollen nun ein Beispiel betrachten, bei dem die Lösung eine Liniensingularität entlang einer Geraden $t = \text{const.}$ aufweist. Wir betrachten dazu die Wärmeleitgleichung auf dem Raum-Zeit-Quadrat $Q = (0, 1)^2$ mit einer Anfangsbedingung u_0 und einer Funktion f , die so vorgegeben seien, dass die Lösung mit

$$u(x, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3} - t} \sin(\pi x) & \text{für } t < \frac{2}{3} \\ 0 & \text{für } t \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

gegeben ist. Im Vergleich zu [17, Ex. 2.3.3] betrachten wir die Liniensingularität hier also in $t = \frac{2}{3}$. Ein Plot der Lösungsfunktion u findet sich in Abbildung 3.12. Es gilt $u \in H^{1-\varepsilon}(Q)$, $\varepsilon > 0$. Die a priori Aussage zur Konvergenzrate des Fehlers aus Satz 3.19 ist somit nicht anwendbar.

Abbildung 3.12: Lösung u zu Beispiel 3.3

Insbesondere ist bei diesem Beispiel die für die theoretischen Untersuchungen wichtige Voraussetzung $f \in L_2(Q)$ verletzt. Dennoch zeigt sich, dass das adaptive Verfahren im Falle dieses Beispiels gute Resultate liefern kann. Die numerischen Ergebnisse der Anwendung des adaptiven und uniformen Verfahrens sind in Zahlen in Tabelle 3.3 und graphisch in Abbildung 3.14 dargestellt. Es zeigt sich, dass das adaptive Verfahren eine höhere Konvergenzordnung erreicht als das Verfahren mit uniformer Verfeinerung. Wir erkennen einen ungefähr parallelen Verlauf der Fehlerschätzer und tatsächlichen Fehler bei der adaptiven Methode, was wieder für die Effizienz und Zuverlässigkeit von η bezüglich der Abschätzung des Fehlers in der $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -Norm spricht. Außerdem sehen wir in Abbildung 3.13, dass die Liniensingularität entlang $t = \frac{2}{3}$ von den Fehlerindikatoren einigermaßen gut erkannt wird.

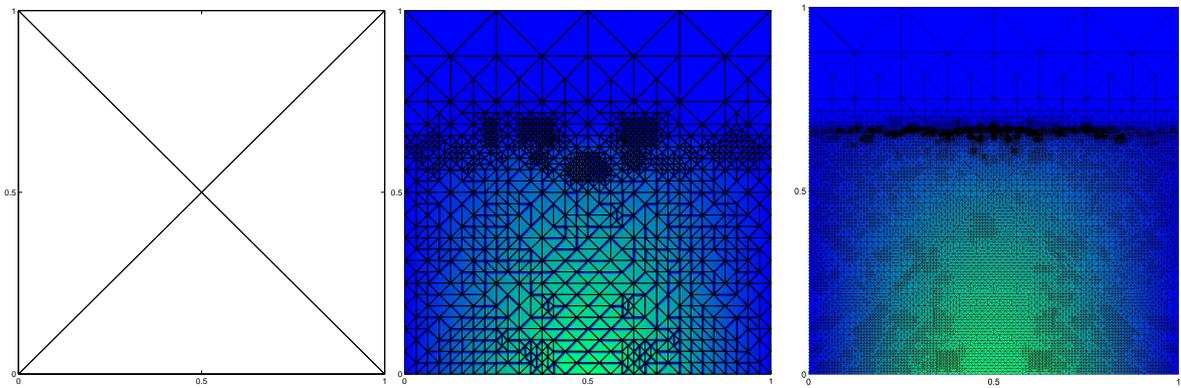


Abbildung 3.13: Das Startnetz \mathcal{T}_0 und die adaptiven Netze \mathcal{T}_9 und \mathcal{T}_{17} zu Beispiel 3.3

Die Bereiche in denen die Lösung glatt ist sind gröber aufgelöst als die Umgebung der Linie $t = \frac{2}{3}$. Nicht unerwähnt lassen wollen wir jedoch, dass in Tests weiterer Varianten dieses Modellproblems bei denen die Liniensingularität der Lösung näher oder sogar auf $t = 1$ liegt, das adaptive Verfahren teilweise sogar schlechtere Ergebnisse lieferte als das Verfahren mit uniformer Verfeinerung, ein Verhalten das auch bereits in [15] aufgetreten ist und welches bei der verwendeten Implementierung selbst dann auftritt wenn als lokale Fehlerindikatoren jeweils die tatsächlichen Fehler auf den Elementen verwendet werden. Laut der Anmerkung in [17, S. 37], wäre es möglicherweise denkbar, dass bei der Verwendung stetiger Ansatzfunktionen für die Finite-Elemente-Variationsformulierung solcher Probleme eine anisotrope Netzverfeinerung zu besseren Ergebnissen führt.

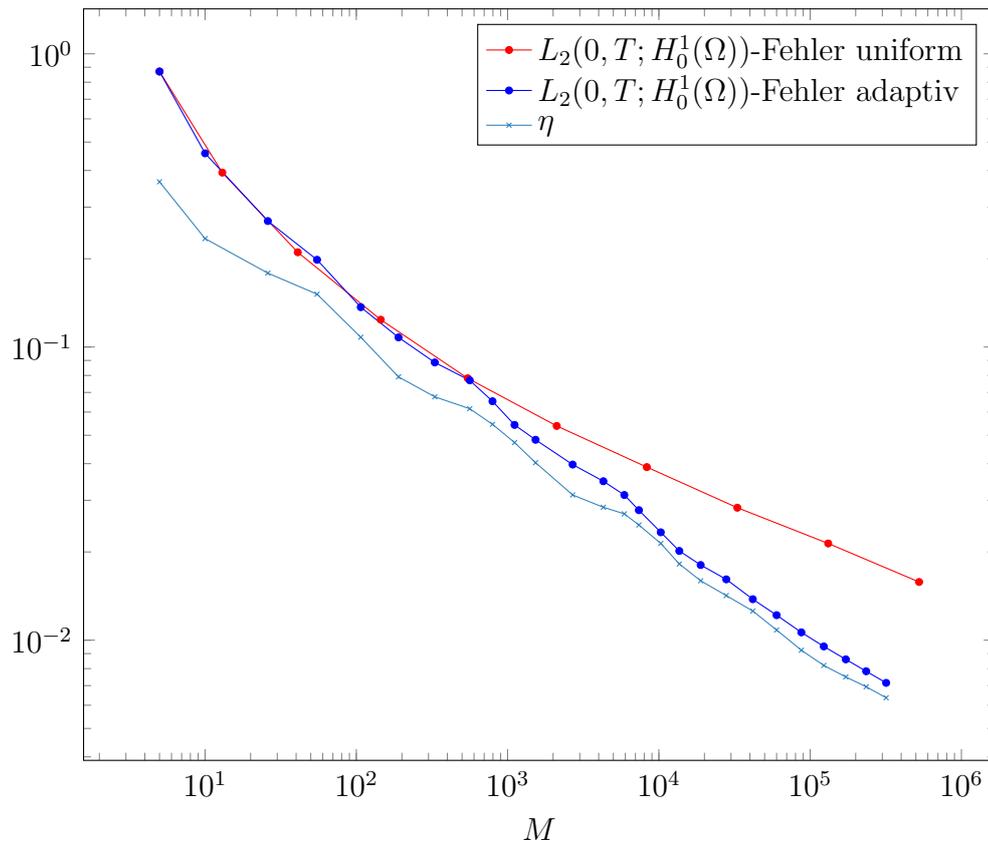


Abbildung 3.14: Log-Log-Plot der Fehler und des Fehlerschätzers zu Beispiel 3.3

L	N	M	$\ u - u_{\mathcal{T}}\ _{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}$	eoc	η	Θ
Uniforme Verfeinerung						
7	65536	33025	$2.831 \cdot 10^{-2}$	-0.23		
8	262144	131585	$2.138 \cdot 10^{-2}$	-0.20		
9	1048576	525313	$1.580 \cdot 10^{-2}$	-0.22		
Adaptive Verfeinerung						
19	83313	41780	$1.380 \cdot 10^{-2}$	-0.39	$1.257 \cdot 10^{-2}$	0.91
23	343678	172060	$8.603 \cdot 10^{-3}$	-0.30	$7.495 \cdot 10^{-3}$	0.87
25	635499	318012	$7.154 \cdot 10^{-3}$	-0.30	$6.364 \cdot 10^{-3}$	0.89

Tabelle 3.3: Vergleich der uniformen und adaptiven Verfeinerungsmethoden (Bsp. 3.3)

Beispiel 3.4 ([20]). Wir betrachten im letzten Beispiel nun das Testproblem

$$\begin{aligned} 100\partial_t u - \partial_{xx} u &= 0 && \text{in } Q = (0, 1) \times (0, 2), \\ u(x, t) &= 0 && \text{für } (x, t) \in \Sigma, \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } x \in \Omega, \end{aligned}$$

wobei die Anfangsbedingung gegeben sei durch die Funktion

$$u_0(x) = \begin{cases} 256x^2(1 - 4x)^2 & \text{für } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ 0 & \text{für } x \in (\frac{1}{4}, 1] \end{cases}.$$

Die exakte Lösung für dieses Problem ist in Reihendarstellung mit

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e^{-\frac{(k\pi)^2 t}{100}} \sin(k\pi x),$$

gegeben. Dabei sind die vorkommenden Koeffizienten u_k definiert mit

$$u_k = 1024 \frac{(192 - k^2\pi^2)(1 - \cos(\frac{k\pi}{4})) - 24k\pi \sin(\frac{k\pi}{4})}{(k\pi)^5}.$$

Die exakte Lösung u ist in Abbildung 3.15 dargestellt. Der Verlauf der Fehler des adaptiven und des uniformen Verfahrens ist in Abbildung 3.16 zu sehen.

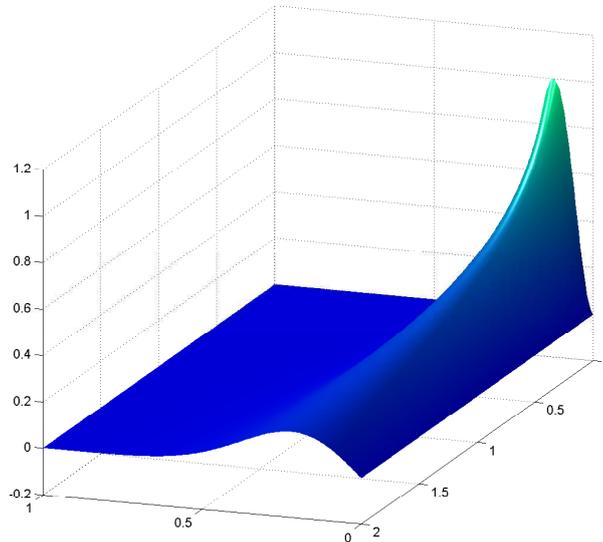


Abbildung 3.15: Lösung u zu Beispiel 3.4

Wir erkennen anhand des Fehlerplots und der numerischen Resultate in Tabelle 3.4, dass der Fehler im Fall uniformer Verfeinerung ungefähr mit der asymptotischen Rate $-\frac{1}{2}$ bezüglich der Knotenanzahl M beziehungsweise mit einer linearen Rate in h fällt.

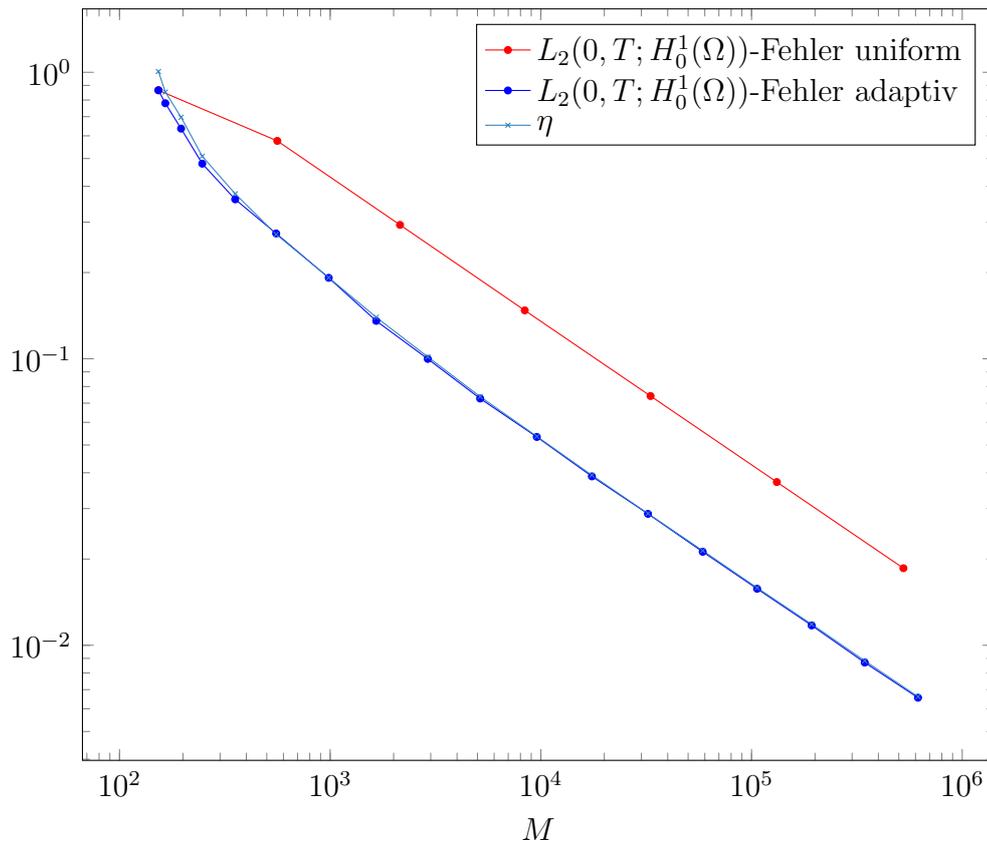


Abbildung 3.16: Log-Log-Plot der Fehler und des Fehlerschätzers zu Beispiel 3.4

L	N	M	$\ u - u_{\mathcal{T}}\ _{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}$	eoc	η	Θ
Uniforme Verfeinerung						
4	65536	33153	$7.412 \cdot 10^{-2}$	-0.50		
5	262144	131841	$3.713 \cdot 10^{-2}$	-0.50		
6	1048576	525825	$1.858 \cdot 10^{-2}$	-0.50		
Adaptive Verfeinerung						
12	64144	32242	$2.876 \cdot 10^{-2}$	-0.49	$2.882 \cdot 10^{-2}$	1.00
14	211962	106268	$1.575 \cdot 10^{-2}$	-0.50	$1.587 \cdot 10^{-2}$	1.01
17	1232359	616842	$6.559 \cdot 10^{-3}$	-0.49	$6.617 \cdot 10^{-3}$	1.01

Tabelle 3.4: Vergleich der uniformen und adaptiven Verfeinerungsmethoden (Bsp. 3.4)

Diese optimale Ordnung aus Satz 3.19 wird auch vom adaptiven Verfahren erreicht mit dem zusätzlichen Vorteil einer wesentlich geringeren Anzahl an benötigten

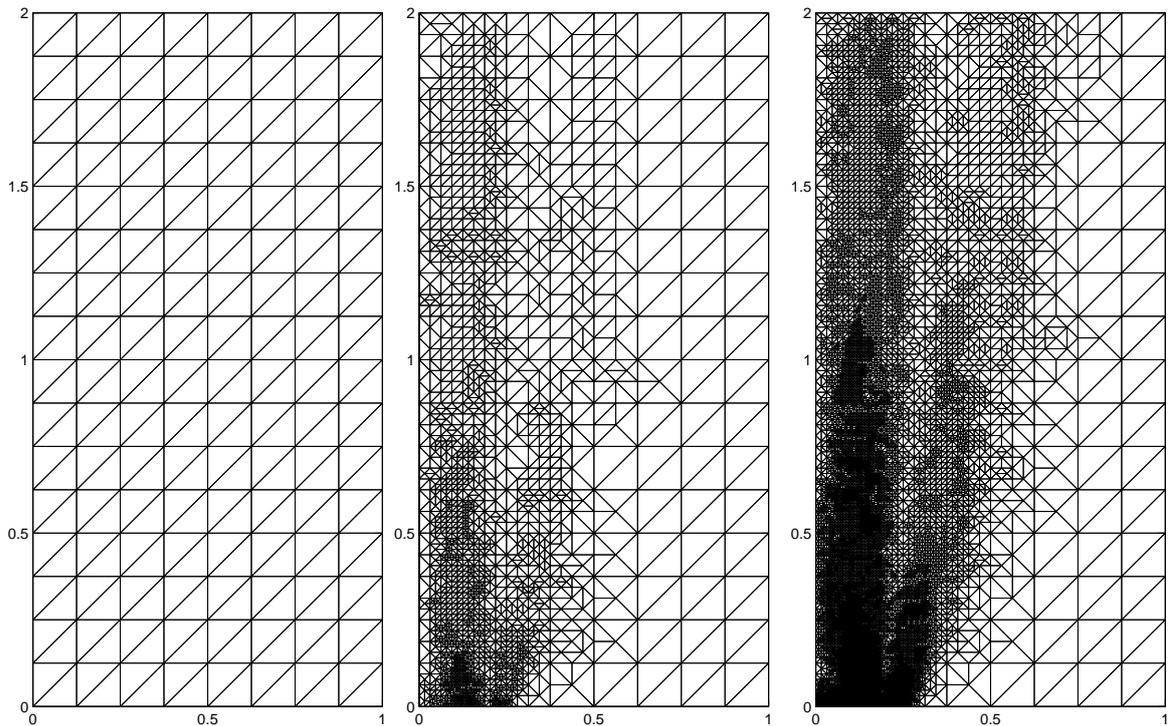


Abbildung 3.17: Das Startnetz \mathcal{T}_0 und die adaptiven Netze \mathcal{T}_7 und \mathcal{T}_{10} zu Beispiel 3.4

Knoten. Außerdem lässt sich in diesem Beispiel anhand des Log-Log-Plots und den Werten des Effizienzindex in Tabelle 3.4 erkennen, dass der Fehlerschätzer den tatsächlichen Fehler in der $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -Norm sehr genau abschätzt. Das sehr gute Abschneiden des adaptiven Verfahrens kann bei diesem Beispiel durch den Entfall der Datenoszillation bezüglich der Quellfunktion $f = 0$ begründet werden. In Abbildung 3.17 zeigen wir schließlich das verwendete Startnetz sowie zwei Netze zu verschiedenen Levels des adaptiven Verfahrens.

3.5.1 Zusammenfassung und Ausblick

Die betrachteten Beispiele im letzten Abschnitt haben gezeigt, dass ein adaptives Raum-Zeit-Finite-Elemente-Verfahren auf Basis des Fehlerschätzers η aus Abschnitt 3.4 für die Wärmeleitgleichung im Vergleich zur Methode mit uniformer Verfeinerung Verbesserungen in Bezug auf die erreichbare Konvergenzrate sowie die benötigte Anzahl an Knoten bewirken kann. Dies deckt sich also mit den Beobachtungen zum ursprünglichen Fehlerschätzer des elliptischen Problems in Kapitel 2. Insbesondere die Ergebnisse der Beispiele 3.1, 3.2 und 3.4 deuten daraufhin, dass der Fehlerschätzer den jeweiligen Fehler in der hier betrachteten Norm effizient und zuverlässig abschätzt. Die Resultate von Beispiel 3.3 zeigen diesbezüglich ein etwas weniger stabiles Verhalten, was durch das Auftreten der Liniensingularität in der Zeit begründbar ist. Vergleichen

wir die erhaltenen Ergebnisse mit den theoretischen Untersuchungen, so können wir die gezeigte Effizienz von η bezüglich des Fehlers in der Energienorm

$$\|\cdot\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} = \left(\|\cdot\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t(\cdot)\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

für die Beispiele mit homogenen Randdaten nicht nur bestätigen sondern beobachten, wie bereits erwähnt, sogar die stärkere Eigenschaft der Effizienz bezüglich des Fehlers in der $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -Norm. Die Resultate in den Beispiel 3.1 und 3.4 deuten sogar auf eine mögliche asymptotische Exaktheit des Fehlerschätzers bezüglich des Fehlers in dieser Norm hin. Allerdings bedeutet eine genaue Schätzung des $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -Fehlers auch, dass der Fehler in der Energienorm tendenziell unterschätzt wird. Für die praktische Anwendung ist daher eine möglichst genaue Analyse der vorkommenden Konstanten in der Effizienzabschätzung von Vorteil. Zusätzlich müssen in der Praxis generell bei adaptiven Verfahren meist auch die auftretenden Datenoszillationen geeignet kontrolliert werden [23]. Wie auch schon in Kapitel 2 erwähnt, ist zudem die Verwendung angepasster Vorkonditionierungstechniken und eine parallele Implementierung des globalen Löser bei adaptiven Finite-Elemente-Verfahren unabkömmlich [20].

Abschließend ist zu sagen, dass für den betrachteten Fehlerschätzer im Sinne einer praktischen Anwendung sicherlich noch weitere Analysen insbesondere bezüglich der Zuverlässigkeit notwendig sind. Man kann hierzu auch über eine Modifikation der lokalen Hilfsprobleme zur Konstruktion des Fehlerschätzers nachdenken. Auch die am Ende von Beispiel 3.3 angesprochene schwache Leistung bei bestimmten Modellproblemen, deren Lösung eine Liniensingularität in der Zeit aufweist, erfordert wie bereits erwähnt unter Umständen den Einsatz geeigneter Verfeinerungsmethoden. Andererseits zeigen Ergebnisse wie jene, die wir etwa im letzten Beispiel erhalten haben, dass die Verbindung eines a posteriori Fehlerschätzers mit einer kombinierten Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode [20] als numerische Lösungsmethode für die Wärmeleitgleichung durchaus Potential hat und eine gute Alternative zu adaptiven Verfahren, welche auf einer separaten Diskretisierung in Raum und Zeit basieren, darstellen kann.

Literaturverzeichnis

- [1] ADAMS, R. A.: *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975
- [2] AINSWORTH, M. ; ODEN, J.T.: A posteriori error estimation in finite element analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 142 (1997), Nr. 1, S. 1 – 88
- [3] ARAMAKI, J.: Poincare Inequality and Campanato Estimates for Weak Solutions of Parabolic Equations. In: *Electronic Journal of Differential Equations* 2016, No. 204 (2016)
- [4] BABUSKA, I. ; RHEINBOLDT, W.C.: On the reliability and optimality of the finite element method. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 10 (1978)
- [5] BABUSKA, I. ; RHEINBOLDT, W.C.: Reliable error estimation and mesh adaptation for the finite element method. In: *Computational Methods in Nonlinear Mechanics* (1979)
- [6] BANK, R. E. ; WEISER, A.: Some A Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations. In: *Mathematics of Computation* 44 (1985), S. 283–301
- [7] BERGAM, A. ; BERNARDI, C. ; MGHAZLI, Z.: A Posteriori Analysis of the Finite Element Discretization of Some Parabolic Equations. In: *Mathematics of Computation* 74 (2005), Nr. 251, S. 1117–1138
- [8] BOCHNER, S.: Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind. In: *Fundamenta Mathematicae* 20 (1933)
- [9] EMMRICH, E.: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen - Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende*. Springer-Verlag, 2013
- [10] ERIKSSON, K. ; JOHNSON, C.: Adaptive Finite Element Methods for Parabolic Problems I: A Linear Model Problem. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 28 (1991), S. 43–77
- [11] EVANS, L. C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010 (Graduate studies in mathematics)
- [12] MITCHELL, W.: A Collection of 2D Elliptic Problems for Testing Adaptive Algorithms. In: *Applied Mathematics and Computation* 220 (2013)

-
- [13] FEISCHL, M. ; PAGE, M. ; PRAETORIUS, D.: Convergence and quasi-optimality of adaptive FEM with inhomogeneous Dirichlet data. In: *ASC Report* (2011), Nr. 16
- [14] FLEISCHHACKER, M.: Ein Finite Elemente Fehlerschätzer und adaptive Netzverfeinerung für die Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2 . In: *Bachelorarbeit, TU Graz* (2015)
- [15] FLEISCHHACKER, M.: Ein Finite Elemente Fehlerschätzer für die Wärmeleitgleichung im \mathbb{R}^1 . In: *Projekt Technomathematik, TU Graz* (2016)
- [16] JU, L. ; BURKARDT, J.: *MGMRES Restarted GMRES solver for sparse linear systems*. https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/cpp_src/mgmres/mgmres.html, 2011. – Zugriff: Dezember 2017
- [17] NEUMÜLLER, M.: Space-Time Methods. Fast Solvers and Applications. In: *Monographic Series TU Graz, Computation in Engineering and Science 20, TU Graz* (2013)
- [18] SCHWEIZER, B.: *Partielle Differentialgleichungen - Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Verlag, 2013
- [19] STEINBACH, O.: *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems: Finite and Boundary Elements*. Springer Science & Business Media, 2007
- [20] STEINBACH, O.: Space-Time Finite Element Methods for Parabolic Problems. In: *Computational Methods in Applied Mathematics* 15 (2015), Nr. 4, S. 551–566
- [21] THOME, V.: *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Springer Berlin Heidelberg, 2013 (Springer Series in Computational Mathematics)
- [22] VERFÜHRT, R.: A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 50 (1994), S. 67–83
- [23] VERFÜHRT, R.: *A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods*. Oxford University Press, 2013
- [24] VERFÜHRT, R.: Adaptive Finite Element Methods. In: <http://www.ruhr-uni-bochum.de/num1/files/lectures/AdaptiveFEM.pdf> (2013). – Zugriff: Dezember 2017
- [25] VERFÜHRT, R.: Numerik II Finite Elemente. In: <http://www.ruhr-uni-bochum.de/num1/files/lectures/NumDgl2.pdf> (2016). – Zugriff: Dezember 2017

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Datum

Unterschrift