XI. Elektrische Leitfähigkeit.

A. Allgemeine Begriffe.

401. Der elektrische Leitwiderstand w_t eines Leiters von der Länge l (in m) und dem Querschnitt q (in qmm) bei der Temperatur t ist

$$w_t = \omega_t \cdot \frac{l}{q} \text{ in Ohm } (\Omega) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Um anzudeuten, daß die Länge in m, der Querschnitt aber in qmm einzusetzen ist, schreibt man als Einheit auch kurz Ω m/qmm.

In der Gleichung bedeutet ω_t eine für den Stoff des Leiters bei der Temperatur t kennzeichnende Größe, die man den spezifischen Leitwiderstand für die Temperatur t nennt. ω_t ist der Widerstand, den ein Stab von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt aus dem betreffendem Stoffe bei der Temperatur t zeigt.

Der reziproke Wert des elektrischen Leitwiderstandes w_t heißt die Leitfähigkeit L_t. Es ist $L_t = \frac{1}{w_t} = \frac{1}{\omega_t} \cdot \frac{q}{l}$; der reziproke Wert des spezifischen Leitwiderstandes $\frac{1}{\omega_t}$ heißt die spezifische Leitfähigkeit des Stoffes und soll mit Λ_t bezeichnet werden. Es ist somit

$$L_t = \Lambda_t \cdot \frac{q}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

Oft bezieht man ω_t auch auf die Länge von 1 cm und den Querschnitt von 1 qcm. ω_t gibt dann für die betreffende Temperatur t den Leitwiderstand eines Würfels von 1 ccm Rauminhalt an. Diese Einheit für ω_t soll angedeutet werden mit Ω/cm^3; es gilt dann die Beziehung

$$\omega_t \text{ in } \Omega/\text{cm}^3 = \omega_t \text{ in } \Omega \text{ m/qmm} \times 10^{-4}.$$

Ausgedrückt in elektromagnetischen Zentimeter-Gramm-Sekunden-Einheiten (e.m. CGS) ist $1\,\Omega = 10^9$ CGS.

So hat z. B. das Eisen bei $t = 20\ \text{C}^0$ den spezifischen Leitwiderstand von etwa

$$\begin{aligned} \omega_{20} &= 0{,}10\ \Omega \text{ m/qmm} \\ &= 0{,}10 \cdot 10^{-4}\ \Omega/\text{cm}^3 \\ &= 0{,}10 \cdot 10^{-4} \cdot 10^9 = 0{,}10 \cdot 10^5 \text{ e.m. CGS.} \end{aligned}$$

Die spezifische Leitfähigkeit für Eisen würde sonach sein:

$$\begin{aligned} \Lambda_{20} &= 10 \text{ reziproke } \Omega \text{ m/qmm} \\ &= 10 \cdot 10^4 \text{ reziproke } \Omega/\text{cm}^3 \\ &= 10 \cdot 10^{-5} \text{ CGS.} \end{aligned}$$

Der Leitwiderstand w_t sowohl, wie auch der spezifische Leitwiderstand ω_t sind abhängig von der Temperatur. Die Abhängigkeit kann durch eine Gleichung von folgender Form ausgedrückt werden:

$$\omega_t = \omega_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 + \ldots) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

worin ω_0 den spezifischen Widerstand bei 0 C°, ω_t den bei t C° bezeichnet, und α, β unveränderliche Zahlen sind. Aus Gl. 2 ergibt sich durch Reihenentwicklung

$$\Lambda_t = \Lambda_0 [1 - \alpha t + (\alpha^2 - \beta) t^2 + \ldots] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

als Ausdruck für die Abhängigkeit des spezifischen Leitvermögens von der Temperatur. Darf in den Gl. 2 und 3 die Zahl β wegen ihrer Kleinheit gegenüber dem Werte von α vernachlässigt werden, so erhält man aus Gl. 2

$$\omega_t = \omega_0 (1 + \alpha t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2a)$$

Man nennt α den Temperaturkoeffizienten des elektrischen Leitwiderstandes.

Über die Leitwiderstände der einzelnen Metalle und ihrer Legierungen sowie über die Temperaturkoeffizienten sollen hier keine Zahlenangaben gemacht werden, da sie aus den vielen vorhandenen Tabellenwerken leicht zu entnehmen sind.

B. Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von der Zusammensetzung.

402. Eine Legierung bestehe aus c_v Raumprozenten des Stoffes B und $100 - c_v$ Raumprozenten des Stoffes A. Ihr Gefüge sei ein Gemenge aus Kristallen der reinen Stoffe A und B, die in feiner Verteilung nebeneinander gelagert sind. Für die folgende Betrachtung ist es gleichgültig, ob die beiden Kristallarten teilweise ein Eutektikum bilden oder nicht. Es werde angenommen, daß in der Fläche des Querschnitts der Legierung c_f Flächenprozent des Stoffes B und demnach $100 - c_f$ Flächenprozent des Stoffes A vorhanden sind. Unter der Voraussetzung, daß die beiden Gefügebestandteile A und B in der Masse der Legierung möglichst gleichmäßig verteilt sind, werden in jedem Schnitt durch die Legierung die Flächenanteile c_f und $100 - c_f$ der beiden Gefügebestandteile A und B gefunden. Man denke sich aus der Legierung einen Stab vom Querschnitt 100 und der Länge h herausgeschnitten, und ferner den Stab durch unendlich viele Querschnitte in Scheiben von außerordentlich kleiner Dicke dh zerlegt. In einer dieser dünnen Scheiben ist dann der Rauminhalt des Stoffes B gleich $c_f \cdot dh$; mithin ist der gesamte Raumanteil des Stoffes B in dem ganzen Stab von der Länge h

$$c_v = \int_0^h c_f \cdot dh,$$

und da wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Verteilung der Gefügebestandteile c_f als unveränderlich gelten kann,

$$c_v = c_f \cdot h.$$

Ebenso findet man für den gesamten Raumanteil des Stoffes A

$$100 \cdot h - c_v = (100 - c_f)\, h.$$

Setzt man $h = 1$, also $100\,h = 100$, so verhält sich

$$\frac{c_v}{100 - c_v} = \frac{c_f}{100 - c_f}.$$

Man kann also anstatt des Mengenverhältnisses der beiden Gefügebestandteile in Raumprozenten auch ihr Verhältnis in Flächenprozenten innerhalb des Querschnittes setzen.

Es soll nun die Leitfähigkeit Λ der aus den Kristallen von A und B aufgebauten Legierung aus den bekannten Raumprozenten c_v und $100 - c_v$, sowie aus den bekannten spezifischen Leitfähigkeiten Λ_a und Λ_b der beiden Kristallarten unter der Voraussetzung berechnet werden, daß irgendwelche Nebenerscheinungen, wie z. B. Thomson- oder Peltierwirkungen (*173*), die unter dem Einfluß des die Legierung durchfließenden elektrischen Stromes elektromotorische Kräfte in der Legierung selbst erzeugen könnten, nicht eintreten.

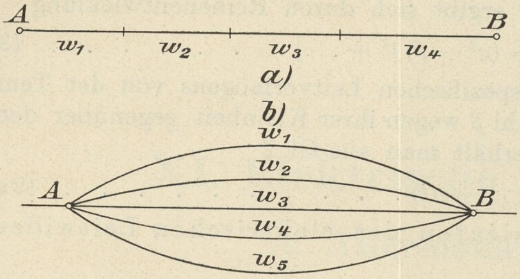

Abb. 486.

Bei der Rechnung sind folgende beiden Gesetze zu berücksichtigen:

a) Sind mehrere Leiter von den Widerständen w_1, w_2, $w_3 \ldots$ zwischen den Punkten A und B wie in Abb. 486a hintereinandergeschaltet, so ist der Gesamtwiderstand der Leiter

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$$

b) Sind mehrere Leiter von der Leitfähigkeit L_1, L_2, $L_3 \ldots$ wie in Abb. 486b nebeneinandergeschaltet, so ist die gesamte Leitfähigkeit $L = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots$

Wir denken uns nun aus der Legierung einen Stab vom Querschnitt 1 und der Länge 1 ausgeschnitten. Der spezifische Leitwiderstand dieses Stabes sei ω und seine spezifische Leitfähigkeit $\Lambda = \frac{1}{\omega}$. Aus dem Stab denke man sich eine dünne Scheibe von der Dicke dh senkrecht zur Längsrichtung abgeschnitten. Ist c_v der Gehalt der Legierung an Stoff B in Raumprozenten, so ist auch der Flächenanteil an Stoff B in diesem Schnitt nach obigem c_v Flächenprozente. Wir können uns deswegen die dünne Scheibe von der Dicke dh aus zwei Scheibenteilen bestehend denken, deren einer den Querschnitt $\frac{c_v}{100}$, der andere den Querschnitt $\frac{100 - c_v}{100}$ besitzt. Jeder der dünnen Scheibenteile hat die Dicke dh. Beide Scheibenteile sind nebeneinandergeschaltet wie in Abb. 486b. Es ist somit die Leitfähigkeit $d\Lambda$ der ganzen Scheibe gleich der Summe der Leitfähigkeit der Scheibenteile, also

$$d\Lambda = \Lambda_b \cdot \frac{c_v}{100} \cdot \frac{1}{dh} + \Lambda_a \frac{100 - c_v}{100} \cdot \frac{1}{dh}.$$

Von solchen Scheiben mit der Leitfähigkeit $d\Lambda$ und dem Widerstand $dW = \frac{1}{d\Lambda}$ sind nun auf der Länge 1 unendlich viele nach Abb. 486a hintereinandergeschaltet. Es ist sonach die Summe der Widerstände aller dieser Scheiben gleich dem Widerstand des ganzen Stabes. Es ist nun

$$dW = \frac{1}{d\Lambda} = 100 \cdot dh \frac{1}{c_v \cdot \Lambda_b + (100 - c_v)\,\Lambda_a},$$

oder der gesamte Widersand über die Länge 1

$$W = \int_0^1 dW = 100 \frac{1}{c_v \cdot \Lambda_b + (100 - c_v)\,\Lambda_a} \int_0^1 dh = \frac{100}{c_v \cdot \Lambda_b + (100 - c_v)\,\Lambda_a},$$

oder die Leitfähigkeit $\Lambda = \frac{1}{W}$

$$\Lambda = \frac{c_v}{100} \Lambda_b + \frac{100 - c_v}{100} \Lambda_a = \Lambda_a + \frac{c_v}{100} (\Lambda_b - \Lambda_a) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

D. h. also unter den genannten Voraussetzungen 1. gleichmäßige Verteilung der beiden die Legierung aufbauenden Kristallarten A und B innerhalb der Legierung und 2. Ausschluß aller Nebenwirkungen durch elektromotorische Kräfte in der Legierung, ist die Leitfähigkeit der Legierung eine additive Eigenschaft (*209*), die sich aus der Zusammensetzung der Legierung in Raumprozenten und aus den bekannten Leitfähigkeiten der Kristallarten A und B nach der Mischungsregel berechnen läßt.

Zeichnet man die Leitfähigkeit $\varLambda$ der Legierungen als Ordinaten zu dem Gehalt an Stoff B in Raumprozenten c_v als Abszisse, so ist die Linie für $\varLambda$ eine Gerade, die die Punkte miteinander verbindet, welche die Leitfähigkeit der beiden Kristallarten A und B darstellen.

Wenn nun auch nicht erwartet werden darf, daß die obengenannten Bedingungen für die Gültigkeit des Gesetzes in Gl. 4 je völlig erfüllt sein werden, so zeigt uns doch die obige Überlegung, daß es zur Auffindung irgendwelcher Gesetzmäßigkeiten zwischen dem Verhalten der Legierung und dem ihrer Bestandteile gegenüber dem elektrischen Strom zweckmäßig ist

1) den Gehalt der Legierung an den einzelnen Bestandteilen nicht, wie sonst üblich, in Gewichtsprozenten c, sondern in Raumprozenten c_v zum Ausdruck zu bringen;

2) nicht den spezifischen Leitwiderstand der Legierung in Beziehung zu setzen zum elektrischen Leitwiderstand ihrer Bestandteile, sondern die spezifischen Leitfähigkeiten miteinander zu vergleichen.

Die Beziehungen zwischen Leitfähigkeit von Legierungen in Abhängigkeit von ihrer Zusammensetzung in Raumprozenten und von den spezifischen Leitfähigkeiten der Legierungsbestandteile sind namentlich durch die Arbeiten von Guertler geklärt worden (L_9 *1* bis *7*).

403. Bereits Matthiessen (L_9 *16*) teilte auf Grund seiner klassischen Untersuchungen über die elektrische Leitfähigkeit die Metalle in zwei Klassen ein:

Klasse I: Metalle, die, wenn sie paarweise miteinander legiert sind, Legierungen liefern, deren elektrische Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Zusammensetzung in Raumprozenten additiv ist. Die Linie c_v, $\varLambda$ (c_v = Abszisse, $\varLambda$ = Ordinate) ist eine Gerade (die additive Linie). In diese Klasse gehören die Metalle Blei, Zinn, Kadmium, Zink.

Klasse II: Metalle, die mit einem Metall der Klasse I oder untereinander legiert nicht additive Leitfähigkeit, sondern eine schlechtere Leitfähigkeit ergeben, als die nach der Mischungsregel berechnete. Die Linie c_v, $\varLambda$ liegt hier durchweg unterhalb der additiven Linie.

H. Le Chatelier (L_9 *21*) sprach später die Vermutung aus, 1. daß die elektrische Leitfähigkeit solcher Legierungen, die bei gewöhnlicher Temperatur einfache Gemenge der sie aufbauenden Metalle A und B darstellen, additiv in bezug auf die Zusammensetzung in Raumprozenten ist, und 2. daß solche Legierungen, deren Leitfähigkeit stark unter die nach der Mischungsregel berechnete heruntergedrückt wird, aus Mischkristallen der beiden Stoffe A und B aufgebaut seien.

Die zweite Vermutung Le Chateliers hat sich im Laufe der Zeit zur Gewißheit verdichtet. Guertler führt eine ganze Reihe von Fällen an, wo die Bildung von Mischkristallen zu sehr starker Erniedrigung der Leitfähigkeit der Legierung gegenüber der nach der Mischungsregel berechneten führte.

Für die erste Vermutung Le Chateliers sind weitere Beispiele noch nicht gebracht worden, als die von Matthiessen bereits erwähnten Legierungen der Klasse I. Bei diesen, z. B. bei den Legierungen von Zink und Kadmium, sowie von Blei und Kadmium, weicht die c_v, $\varLambda$-Linie teilweise merklich von der additiven Geraden ab. Man kann aus dem vorhandenen

Versuchsmaterial wohl den Schluß ziehen, daß bei den Legierungen der genannten Metalle sich die c_v, Λ-Linie der additiven Geraden nähert. Man darf aber nicht schließen, daß allgemein bei Legierungen, die bei gewöhnlicher Temperatur vollständig in die reinen Bestandteile A und B zerfallen sind, unbedingt die c_v, Λ-Linie eine Gerade sein müsse.

Es wäre möglich, daß dieser weitergehende Schluß berechtigt ist; aber es ist hierfür erst ausreichendes Beweismaterial beizubringen.

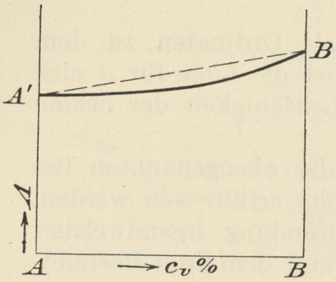

Abb. 487.

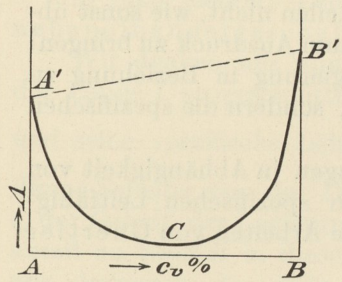

Abb. 488.

Man erhält nach Obigem die in Abb. 487 und 488 abgebildeten Grundarten von c_v, Λ-Linien:

a) Abb. 487. $A'B'$ geradlinig oder schwach nach unten durchgebogen, für Legierungen, die im wesentlichen aus einem Gemenge von zwei Kristallarten A und B bestehen.

Hierher gehören Legierungen mit folgenden Arten der c, t-Bilder: $Aa\,2\gamma'$ (Abb. 26), oder andere Erstarrungsarten, sofern unterhalb der Erstarrung noch vollkommene Entmischung in die Bestandteile A und B eintritt (z. B. Abb. 48).

b) Abb. 488. $A'CB'$ eine stark von der Geraden $A'B'$ nach unten abweichende gekrümmte Linie mit einem Mindestwert C bei einer mittleren Konzentration. Diese Art von c_v, Λ-Linien gilt für Legierungen, deren Stoffe A und B eine ununterbrochene Reihe von Mischkristallen bilden.

Hierher gehören Legierungen mit c, t-Bildern nach $Aa\,1\alpha$ (Abb. 8), $Aa\,1\beta$ (Abb. 10), $Aa\,1\gamma$ (Abb. 11), soweit nicht unterhalb der Erstarrungszone wieder Zerfall der Mischkristalle eintritt, wie z. B. in den Abb. 34, 35, 36.

Im Falle a) würden die in Abs. *402* gemachten Voraussetzungen ganz oder nahezu erfüllt sein. Nebenwirkungen treten nicht ein oder machen sich wenigstens nicht deutlich bemerkbar.

Für den Fall b) gilt natürlich die in Abs. *402* gemachte Rechnung nicht mehr, da eben die Voraussetzung nicht erfüllt ist, daß die Legierung aus einem Gemenge zweier Kristallarten besteht. Die Legierung ist nur aus einheitlichen Kristallen einer Art (Mischkristallen) aufgebaut. Die beiden Stoffe A und B lösen sich also im festen Zustand gegenseitig auf. In Lösungen pflegen aber durchgreifende Änderungen der Eigenschaften der Bestandteile einzutreten, so daß die Berechnung der Eigenschaften nach der Mischungsregel unmöglich wird.

Von technischer Bedeutung ist die wesentliche Verminderung der Leitfähigkeit, die reine Metalle schon durch verhältnismäßig sehr kleine Beimengungen fremder Stoffe erleiden, wenn diese Stoffe mit ihnen Mischkristalle bilden.

So genügen z. B. geringe Zusätze von Arsen, Phosphor oder Aluminium zum Kupfer, um recht beträchtliche Verminderung der Leitfähigkeit herbeizuführen. Durch Legierung des Kupfers mit Mangan oder Nickel wird die Leitfähigkeit so stark erniedrigt, daß man die erhaltenen Legierungen wegen ihrer geringen Leitfähigkeit zum Bau von Widerständen benutzt.

Die obengenannten Fälle a) und b) lassen nun mehrfache gegenseitige Verknüpfungen zu. So ist zu erwarten, daß bei Legierungen mit c, t-Linien nach Art $Aa\,2\gamma$ die c_v, Λ-Linie für gewöhnliche Temperatur zwischen den Punkten A, P (Abb. 21) wegen der Mischkristallbildung entsprechend dem Falle b) stark absinkt bis zum Wert der Leitfähigkeit, der dem gesättigten Mischkristall P entspricht. Ebenso wird zwischen B_0 und Q ein solcher Abfall aus gleichem Grunde stattfinden. Zwischen P und Q wird dann der Fall a) bestehen. Die Legierung ist dort aus einem Gemenge der gesättigten Mischkristalle P und Q aufgebaut. Die c_v, Λ-Linie wird sonach zwischen P und Q nahezu geradlinig oder nach unten schwach gekrümmt verlaufen. Ein Beispiel hierfür bietet Abb. 489. Sie gibt die c, Λ-Linie für die Legierungen von Kupfer und Silber, die nach $Aa2\gamma$ erstarren, und unterhalb der Erstarrungszone keine Umwandlungen erleiden.

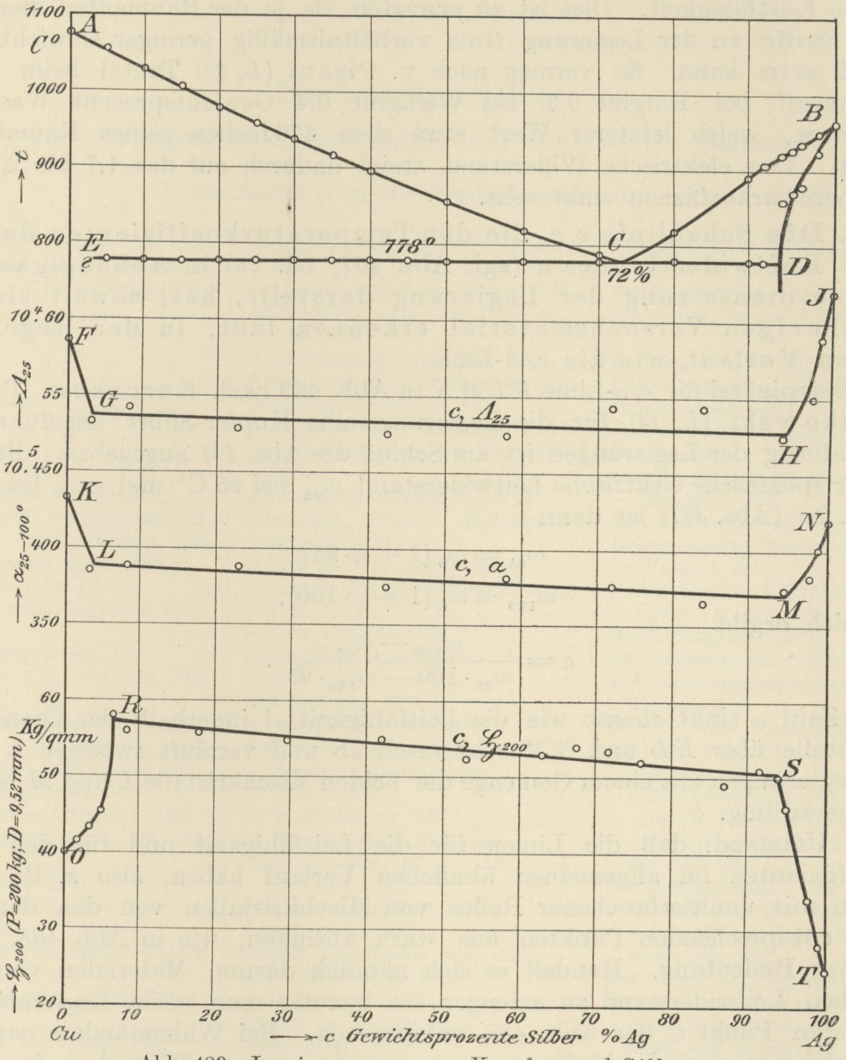

Abb. 489. Legierungen von Kupfer und Silber.

ACBDE: c, t-Bild nach Friedrich und Leroux.

c, Λ_{25}-, c, α-, $c, \mathfrak{H}_{200}$- Linien nach Kurnakow, Puschin und Senkowski.

Die c, t-Linie $ACBDE$ in Abb. 489 ist aufgestellt von Friedrich und Leroux (L_9 *23*). Das Kupfer bildet danach Mischkristalle von 0 % Silber bis zu dem noch nicht sicher festgelegten Punkt E. Das Silber andererseits vermag vom Kupfer von 0 bis etwa 6 % in seinen Kristallen in fester Lösung aufzunehmen. Zwischen den Punkten E und D bilden die Mischkristalle eine Lücke.

Die c, Λ_{25}-Linie für die Leitfähigkeit bei 25 C° $FGHJ$ ist aufgestellt von Kurnakow, Puschin und Senkowski (L_9 *13*). Die Legierungen wurden in kleine Stäbchen von 4 bis 5 mm Durchmesser gegossen, alsdann kaltgewalzt, und weiter kalt auf 0,75 bis 1,2 mm Durchmesser gezogen. Schließlich wurden die so vorbereiteten Stäbchen bei 550 C° 8 Stunden lang geglüht. Die c, Λ-Linie zeigt starken Abfall über FG und JH. Zwischen G und H ist der Verlauf angenähert geradlinig, weil hier die Legierungen aus einem Gemenge der beiden Grenzmischkristalle G und H bestehen.

Wesentlichen Einfluß haben Lösungen von Gasen in Metallen auf die elektrische Leitfähigkeit. Dies ist zu erwarten, da ja der Raumanteil dieser gasförmigen Stoffe an der Legierung trotz verhältnismäßig geringer Gewichtsmenge sehr groß sein kann. So vermag nach v. Pirani (L_9 *22*) Tantal beim Glühen in Wasserstoff bei Rotglut 0,3, bei Weißglut 0,4 Gewichtsprozent Wasserstoff aufzunehmen, welch letzterer Wert etwa dem 470fachen seines Rauminhaltes entspricht. Der elektrische Widerstand steigt dadurch auf das 1,7 bis 2,1fache, der Temperaturkoeffizient sinkt sehr.

404. Die Schaulinie c, α, die den Temperaturkoeffizienten des elektrischen Leitwiderstandes α (vgl. Abs. *401*, Gl. 2a) in Abhängigkeit von der Zusammensetzung der Legierung darstellt, hat, soweit sich aus dem bisherigen Versuchsmaterial erkennen läßt, in der Regel ganz ähnlichen Verlauf, wie die c, Λ-Linie.

Als Beispiel sei die c, α-Linie $KLMN$ in Abb. 489 nach Kurnakow, Puschin und Senkowski (L_9 *13*) für die Legierungsreihe Kupfer-Silber angeführt. Die Vorbehandlung der Legierungen ist am Schluß des Abs. *403* angegeben. Bestimmt wurde der spezifische elektrische Leitwiderstand ω_{25} bei 25 C° und ω_{100} bei 100 C°. Nach Gl. 2a (Abs. *401*) ist dann

$$\omega_{25} = \omega_0 (1 + \alpha \cdot 25)$$
$$\omega_{100} = \omega_0 (1 + \alpha \cdot 100),$$

woraus sich ergibt

$$\alpha = \frac{\omega_{100} - \omega_{25}}{\omega_{25} \cdot 100 - \omega_{100} \cdot 25}.$$

Die Zahl α sinkt ebenso wie die Leitfähigkeit Λ innerhalb der Grenzen der Mischkristalle über KL und NM sehr rasch ab und verläuft zwischen L und M, wo die Legierungen aus einem Gemenge der beiden Mischkristalle L und M bestehen, nahezu geradlinig.

Der Umstand, daß die Linien für die Leitfähigkeit und für den Temperaturkoeffizienten im allgemeinen ähnlichen Verlauf haben, also z. B. bei Legierungen mit ununterbrochener Reihe von Mischkristallen von den den reinen Metallen entsprechenden Punkten aus stark absinken, wie in Abb. 488, ist von technischer Bedeutung. Handelt es sich nämlich darum, Materialen von hohem elektrischen Leitwiderstand zu erzeugen, so benutzt man solche Legierungen, die dem tiefsten Punkt C der Abb. 488 entsprechen. Bei Widerständen namentlich für das elektrotechnische Meßwesen legt man besonderen Wert darauf, daß sich der Widerstand infolge von Temperaturänderungen, wie sie durch die im Widerstand selbst erzeugte Joulesche Wärme unvermeidlich sind, möglichst wenig ändert. Dies setzt möglichst kleinen Temperaturkoeffizienten voraus. Es fügt sich nun wegen des ähnlichen Verlaufs der Linie für die elektrische Leitfähigkeit und für den Temperaturkoeffizienten glücklich, daß die Legierungen mit dem Höchstwert des Widerstandes in der Regel auch nahe dem Mindestmaß für den Temperaturkoeffizienten liegen. Bei gewissen Legierungen sinkt der Koeffizient sogar auf Null, wie z. B. bei gewissen Legierungen von Kupfer und Nickel oder von Kupfer und Mangan (II B).