theorie für jede Formänderung, auch für die bleibenden Formänderungen, und wenn seine Forderungen beim Versuch nicht erfüllt erscheinen, obwohl alle Grundbedingungen über die Aehnlichkeit der Verhältnisse innegehalten sind, so können nur Unterschiede im Material wirkend gewesen sein.

Um also vergleichbare Ergebnisse unter solchen Verhältnissen zu erzielen, die es unmöglich machen, völlig gleichgestaltete Probestäbe zu benutzen, empfiehlt es sich, in diesen Fällen wenigstens geometrisch ähnliche Stabformen zu verwenden.

Die Belastungsstufen sind dabei proportional den Quadraten der Längenabmessungen, beziehungsweise proportional den Querschnittsflächen zu machen und die Biegungen zweckmässig als Biegungspfeil aufzuschreiben. Die Biegungsgrösse und die Dehnungszahl α sind dann innerhalb der Proportionalitätsgrenze konstante Zahlen und die Biegungspfeile auch über die Elasticitätsgrenze hinaus für die gleichen Spannungen gleich, sobald die Stäbe verschiedener Grösse aus gleichem Material von gleichem Zustande hergestellt sind.

Man erkennt auch hier wieder die Wichtigkeit der Einführung einheitlicher Prüfungsverfahren, die von möglichst weiten Kreisen anerkannt werden. Die Versuche von Bach (*L 138*) mit Gusseisenstäben von verschiedener Form lehren sehr schlagend den geringen Werth, den die Mittheilung von Prüfungsergebnissen aus einem Biegeversuch mit Gusseisen hat, wenn nicht zugleich die Angaben über die benutzten Querschnittsformen beigefügt sind, oder wenn nicht angegeben wird, dass die Ergebnisse auf einen einheitlichen Querschnitt, z. B. das Quadrat oder den Kreis mit den Erfahrungszahlen umgerechnet wurden. Die Erfahrungszahlen sind übrigens noch sehr spärlich und bedürfen der Vermehrung um so dringender, als es keineswegs ausgeschlossen ist, dass sie mit den äusseren Umständen [Verhältnisse beim Giessen, Abkühlen u. s. w.] zusammenhängen.[1])

Für die Prüfung von Gusseisen haben diese Erörterungen besonderen Werth, weil dieses Material sehr häufig und unzweifelhaft am zweckmässigsten durch den Biegeversuch geprüft wird. Bei uns in Deutschland ist vielfach der von den Konferenzen zur Vereinheitlichung der Materialprüfungsverfahren (*L 128*) empfohlene Stab von quadratischem Querschnitt mit 3,0 cm Seite und 1 m Stützweite im Gebrauch. Man sollte diesen Stab möglichst allgemein einführen, und wo seine Anwendung unmöglich, wenigstens mit Stäben arbeiten, deren Verhältniss der Stützweite zur Quadratseite

$$l/a = 33{,}3$$

genommen ist. Uebrigens ist die Art des Giessens und der Umstand, ob die Gusshaut an den Stäben vorhanden ist oder nicht, von erheblichem Einfluss auf das Ergebniss (*L 138*).

c. Knickfestigkeit.

1. Begriffsentwickelung.

187. Die Ausführung des Knickversuches gehört im eigentlichen Materialprüfungswesen zu den Ausnahmen. Kommt ein Knickversuch vor, so handelt es sich fast immer um die Feststellung der Formänderung (Ausbiegung) von Konstruktionstheilen unter Probelasten, z. B. um Prüfung

[1]) Jedenfalls ist auch das Verhältniss $\sigma_B : \sigma_{B'}$ für Gusseisen von dessen chemischer Zusammensetzung abhängig.

von Ständern, Säulen, Gestängen, Brückengliedern u. s. w., selten aber um die vollständige Ermittelung der Materialkonstanten.

Ich will daher auf eine Entwickelung der Knickungstheorien nicht eingehen, sondern kurz die Eulerschen Gleichungen (*189*) hinschreiben, die ja die wichtigste Grundlage für die Knickungstheorie zu bleiben scheinen. Im Uebrigen verweise ich auf die Werke über Festigkeitslehre von Bach (*L 137*), Grashof (*L 139*) u. A. oder auf die eingehenden Versuche von Bauschinger (*L 140*), Tetmajer (*L 141. 142*) u. A. Bauschinger kommt zu dem Schluss, dass die Eulerschen Gleichungen ausreichend für die Theorie der Knickung sind; Zimmermann (*L 143*) ist gleicher Ansicht. Eine hübsche Herleitung der Eulerschen Gleichungen gab neuerdings Land (*L 144*).

188. Wenn ein langer prismatischer Stab auf Druck geprüft wird, so wird er fast niemals, wie der kurze Körper gleichen Querschnittes, ausbauchen und tonnenförmige Gestalt annehmen, oder die in Absatz 125 mitgetheilten Brucherscheinungen zeigen. Er wird vielmehr fast immer nach der einen oder anderen Seite ausbiegen, und die Brucherscheinungen werden denjenigen ähnlich sein, die man beim Biegeversuch erhält.

Der lange Körper ist niemals ganz streng geradlinig; auch ist es fast unmöglich, ihn so in die Maschine einzuspannen, dass die Kraftrichtung genau in die Schwerpunktsaxe des Körpers fällt. Ebenso sind Nebenspannungen, die auf Verbiegen wirken, z. B. die aus mangelhafter Anlage in den Druckflächen, oder bei wagerechter Anordnung der Probirmaschine, in Folge der aus dem Eigengewichte des Probekörpers sich ergebenden Verbiegungen, fast gar nicht zu vermeiden; sie treten im Laufe des Versuches hervor. Alle diese Umstände veranlassen, dass neben der Druckbeanspruchung auch noch Biegungsbeanspruchungen auftreten. Das auf Biegung wirkende Moment ist bei kurzen Körpern klein, und die Kraft P kann noch die Druckfestigkeit überwinden. Aber wenn die Körper im Verhältniss zu den Querschnittsabmessungen lang genug werden, so vergrössert sich unter dem Einfluss der in der Richtung der Stabaxe wirkenden Kraft P der Hebelarm des Biegemomentes schliesslich unaufhaltsam, und der Körper geht nun durch seitliches Ausbiegen zu Bruche. Die Ausbiegung erfolgt, wenn der Körper frei ausweichen kann, in der Regel in der Ebene, welcher das kleinste Trägheitsmoment des Körpers entspricht. War eine merkliche Anfangsbiegung vorhanden, wie das z. B. bei wagerechter Lagerung an langen Körpern vorkommen kann, so pflegt die Durchbiegung bei Körpern, deren Trägheitsmomente für verschiedene Richtungen gleich oder fast gleich sind, in der Regel in der Ebene der ersten Biegung zu verlaufen.

189. Je nach der Art, wie der Körper an seinen Enden befestigt ist, wird die Entwickelung der Form der elastischen Linie beim Knicken und demgemäss auch die Grösse der zum Knicken erforderlichen Kraft, eine andere. Man pflegt vier Angriffsformen zu unterscheiden.

a) Der Körper ist, wie in Fig. 131 angedeutet, an einem Ende fest eingespannt, und die Kraft P wirkt auf das andere Ende parallel zur ursprünglichen Stabaxe, aber sonst ungezwungen ein; das freie Ende des Stabes kann also ganz ungezwungen seitlich ausweichen. Dieser Fall kommt im Prüfungswesen fast gar nicht vor.

b) Der Körper ist, nach Fig. 132, an beiden Enden frei beweglich (in Schneiden-, Spitzen- oder Kugelgelenken), aber die Enden sind so geführt, dass die Kraftrichtung stets durch die Stützmittelpunkte geht. Dieser Fall wird bei Versuchen häufig benutzt.

c) Der Körper ist, nach Fig. 133, wie im Fall *a* fest eingespannt und am andern Ende wie bei Fall *b* beweglich und geführt.

d) Der Körper ist, nach Fig. 134, an beiden Enden fest eingespannt, aber die Enden sind so geführt, dass die Kraftrichtung stets durch die Stützmittelpunkte geht. Bei Versuchen häufig angewendet.

Die für diese vier Fälle sich ergebenden Grenzbelastungen P, bei welchen nach Bauschinger die bereits von vornherein vorhandenen und bei der langsamen Steigerung der Belastung zuerst langsam wachsenden

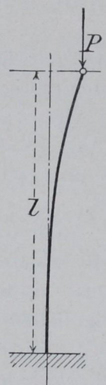

Fig. 131.

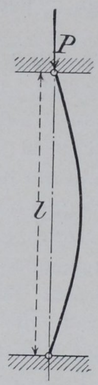

Fig. 132.

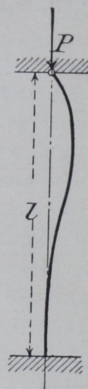

Fig. 133.

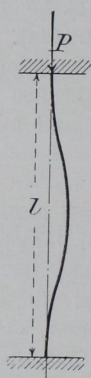

Fig. 134.

Ausbiegungen fast plötzlich jedes Maass überschreiten,[1]) sind durch die folgenden vier Eulerschen Gleichungen für die einzelnen Belastungsarten gegeben, und zwar beim Vorgange nach Fig. 131:

$$a)\quad P = \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26.$$

wenn α die Dehnungszahl, l die Stablänge und Θ das für die Biegungsrichtung maassgebende Trägheitsmoment ist.

Beim Vorgange nach Fig. 132 wird:

$$b)\quad P = \pi^2 \frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27.$$

bei Beanspruchung nach Fig. 133 wird:

[1]) Bach (*L 137*, §. 24) giebt für die Ausbiegung y im Fall a die Gleichung:

$$y = a \frac{1 - \cos\left(x\sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\right)}{\cos\left(e\sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\right)} \quad \text{und}$$

stellt hierzu eine sehr anschauliche Rechnung über die Biegungen an, die ein schmiedeeiserner Stab von 100 cm Länge und 1 cm Durchmesser erfährt, wenn P allmählich wächst. Wenn a der unbekannte kleine Hebelarm ist an dem die Kraft P das Biegemoment erzeugt, so wird für

Belastung $P =$	5	10	15	20	22,5	24,7 kg,
die Biegung S am Stabende	0,32 a	0,85 a	1,95 a	5,54 a	13,16 a	∞a, der Stab knickt aus.

$$c)\ P = 2\pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 28.$$

und wenn Fig. 134 in Frage kommt:

$$d)\ P = 4\pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 29.$$

Bei Anwendung dieser Formeln für die Rechnung muss man im Auge behalten, dass man hinsichtlich ihrer Ableitung gegen die Voraussetzungen ähnliche Einwendungen machen kann, wie sie in Abschnitt *172* gegen die Biegungstheorie vorgeführt wurden. Auch wird man nicht vergessen dürfen, dass die vier Belastungsformen praktisch nie zum Ausdruck kommen, dass es vielmehr Uebergänge von einem Fall zum andern giebt, ja dass es sogar vorkommen kann, dass während des Versuches die Art der Inanspruchnahme von einem Fall zum andern überspringt. Der Konstrukteur muss diese Möglichkeiten von Fall zu Fall erwägen. Aus diesen Gründen haben die empirisch abgeleiteten Formeln wohl nicht immer den praktischen Werth, den sie scheinbar wegen der Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen besitzen, aus denen sie abgeleitet wurden.

2. Der Knickversuch.

190. Die Einspannvorrichtungen für die Ausführung von Knickversuchen müssen so eingerichtet sein, dass der Körper seine Form möglichst ungetrübt nach einer der in Fig. 131 bis 134 gegebenen Arten ändert. Deswegen pflegt man die Körper selbst oder besondere Auflagerstücke mit Schneiden, Spitzen oder Kugeln zu versehen, und im letzteren Falle richtet man es auch wohl so ein, dass die Auflagerstücke auch unverrückbar fest mit den Maschinentheilen verbunden werden können.

In Fig. 38, Absatz *73*, S. 44, ist die Einspannvorrichtung für die Werdermaschine schematisch angegeben. Die Platte ist in der Kugelschale entweder frei beweglich [allerdings durch die Reibung auf der Kugelfläche gehindert], oder sie kann mit Hülfe von vier Schrauben unbeweglich eingestellt werden.

191. Die Messung der Formänderung ist meistens eine etwas umständliche Sache. Am einfachsten kann sie sich in den Fällen gestalten, n denen die Körper selbst mit den Schneiden, Spitzen oder Kugeln für die Auflagerung versehen sind, und wenn man sicher ist, dass die Auflagerpunkte keinerlei Seitenverschiebung erfahren können. Das wird aber nur selten der Fall sein, und bei Feinmessungen ist man daher darauf angewiesen, immer die Möglichkeit der Verschiebung an den Auflagern vorauszusetzen.

Sind die Seitenbewegungen in den Auflagern ausgeschlossen, so genügt es, die Messung der Durchbiegung in der Stabmitte, bezogen auf zwei feste Punkte im Raum, vorzunehmen, so dass die beiden Bewegungskomponenten in der Ebene des Mittelquerschnittes rechtwinkelig zu einander festgestellt werden. Im zweiten Falle wird man in gleicher Weise auch noch die Bewegungskomponenten in zwei möglichst nahe den Auflagern liegenden Querschnittsebenen messen, und dann die wirkliche Stabbiegung aus allen diesen Messungen rechnerisch oder zeichnerisch ermitteln; allerdings ein umständliches aber nothwendiges Verfahren.

192. Bauschinger hat auch für diese Art der Messung sehr zweckmässige Apparate konstruirt, deren schematische Zeichnung in Fig. 135 gegeben ist. Die Bewegungen des Säulenquerschnittes S, in Folge der Aus-