theorie für jede Formänderung, auch für die bleibenden Formänderungen, und wenn seine Forderungen beim Versuch nicht erfüllt erscheinen, obwohl alle Grundbedingungen über die Aehnlichkeit der Verhältnisse innegehalten sind, so können nur Unterschiede im Material wirkend gewesen sein.

Um also vergleichbare Ergebnisse unter solchen Verhältnissen zu erzielen, die es unmöglich machen, völlig gleichgestaltete Probestäbe zu benutzen, empfiehlt es sich, in diesen Fällen wenigstens geometrisch ähnliche Stabformen zu verwenden.

Die Belastungsstufen sind dabei proportional den Quadraten der Längenabmessungen, beziehungsweise proportional den Querschnittsflächen zu machen und die Biegungen zweckmässig als Biegungspfeil aufzuschreiben. Die Biegungsgrösse und die Dehnungszahl α sind dann innerhalb der Proportionalitätsgrenze konstante Zahlen und die Biegungspfeile auch über die Elasticitätsgrenze hinaus für die gleichen Spannungen gleich, sobald die Stäbe verschiedener Grösse aus gleichem Material von gleichem Zustande hergestellt sind.

Man erkennt auch hier wieder die Wichtigkeit der Einführung einheitlicher Prüfungsverfahren, die von möglichst weiten Kreisen anerkannt werden. Die Versuche von Bach (*L 138*) mit Gusseisenstäben von verschiedener Form lehren sehr schlagend den geringen Werth, den die Mittheilung von Prüfungsergebnissen aus einem Biegeversuch mit Gusseisen hat, wenn nicht zugleich die Angaben über die benutzten Querschnittsformen beigefügt sind, oder wenn nicht angegeben wird, dass die Ergebnisse auf einen einheitlichen Querschnitt, z. B. das Quadrat oder den Kreis mit den Erfahrungszahlen umgerechnet wurden. Die Erfahrungszahlen sind übrigens noch sehr spärlich und bedürfen der Vermehrung um so dringender, als es keineswegs ausgeschlossen ist, dass sie mit den äusseren Umständen [Verhältnisse beim Giessen, Abkühlen u. s. w.] zusammenhängen.[1])

Für die Prüfung von Gusseisen haben diese Erörterungen besonderen Werth, weil dieses Material sehr häufig und unzweifelhaft am zweckmässigsten durch den Biegeversuch geprüft wird. Bei uns in Deutschland ist vielfach der von den Konferenzen zur Vereinheitlichung der Materialprüfungsverfahren (*L 128*) empfohlene Stab von quadratischem Querschnitt mit 3,0 cm Seite und 1 m Stützweite im Gebrauch. Man sollte diesen Stab möglichst allgemein einführen, und wo seine Anwendung unmöglich, wenigstens mit Stäben arbeiten, deren Verhältniss der Stützweite zur Quadratseite

$$l/a = 33{,}3$$

genommen ist. Uebrigens ist die Art des Giessens und der Umstand, ob die Gusshaut an den Stäben vorhanden ist oder nicht, von erheblichem Einfluss auf das Ergebniss (*L 138*).

c. Knickfestigkeit.

1. Begriffsentwickelung.

187. Die Ausführung des Knickversuches gehört im eigentlichen Materialprüfungswesen zu den Ausnahmen. Kommt ein Knickversuch vor, so handelt es sich fast immer um die Feststellung der Formänderung (Ausbiegung) von Konstruktionstheilen unter Probelasten, z. B. um Prüfung

[1]) Jedenfalls ist auch das Verhältniss $\sigma_B : \sigma_{B'}$ für Gusseisen von dessen chemischer Zusammensetzung abhängig.

von Ständern, Säulen, Gestängen, Brückengliedern u. s. w., selten aber um die vollständige Ermittelung der Materialkonstanten.

Ich will daher auf eine Entwickelung der Knickungstheorien nicht eingehen, sondern kurz die Eulerschen Gleichungen (*189*) hinschreiben, die ja die wichtigste Grundlage für die Knickungstheorie zu bleiben scheinen. Im Uebrigen verweise ich auf die Werke über Festigkeitslehre von Bach (*L 137*), Grashof (*L 139*) u. A. oder auf die eingehenden Versuche von Bauschinger (*L 140*), Tetmajer (*L 141. 142*) u. A. Bauschinger kommt zu dem Schluss, dass die Eulerschen Gleichungen ausreichend für die Theorie der Knickung sind; Zimmermann (*L 143*) ist gleicher Ansicht. Eine hübsche Herleitung der Eulerschen Gleichungen gab neuerdings Land (*L 144*).

188. Wenn ein langer prismatischer Stab auf Druck geprüft wird, so wird er fast niemals, wie der kurze Körper gleichen Querschnittes, ausbauchen und tonnenförmige Gestalt annehmen, oder die in Absatz 125 mitgetheilten Brucherscheinungen zeigen. Er wird vielmehr fast immer nach der einen oder anderen Seite ausbiegen, und die Brucherscheinungen werden denjenigen ähnlich sein, die man beim Biegeversuch erhält.

Der lange Körper ist niemals ganz streng geradlinig; auch ist es fast unmöglich, ihn so in die Maschine einzuspannen, dass die Kraftrichtung genau in die Schwerpunktsaxe des Körpers fällt. Ebenso sind Nebenspannungen, die auf Verbiegen wirken, z. B. die aus mangelhafter Anlage in den Druckflächen, oder bei wagerechter Anordnung der Probirmaschine, in Folge der aus dem Eigengewichte des Probekörpers sich ergebenden Verbiegungen, fast gar nicht zu vermeiden; sie treten im Laufe des Versuches hervor. Alle diese Umstände veranlassen, dass neben der Druckbeanspruchung auch noch Biegungsbeanspruchungen auftreten. Das auf Biegung wirkende Moment ist bei kurzen Körpern klein, und die Kraft P kann noch die Druckfestigkeit überwinden. Aber wenn die Körper im Verhältniss zu den Querschnittsabmessungen lang genug werden, so vergrössert sich unter dem Einfluss der in der Richtung der Stabaxe wirkenden Kraft P der Hebelarm des Biegemomentes schliesslich unaufhaltsam, und der Körper geht nun durch seitliches Ausbiegen zu Bruche. Die Ausbiegung erfolgt, wenn der Körper frei ausweichen kann, in der Regel in der Ebene, welcher das kleinste Trägheitsmoment des Körpers entspricht. War eine merkliche Anfangsbiegung vorhanden, wie das z. B. bei wagerechter Lagerung an langen Körpern vorkommen kann, so pflegt die Durchbiegung bei Körpern, deren Trägheitsmomente für verschiedene Richtungen gleich oder fast gleich sind, in der Regel in der Ebene der ersten Biegung zu verlaufen.

189. Je nach der Art, wie der Körper an seinen Enden befestigt ist, wird die Entwickelung der Form der elastischen Linie beim Knicken und demgemäss auch die Grösse der zum Knicken erforderlichen Kraft, eine andere. Man pflegt vier Angriffsformen zu unterscheiden.

a) Der Körper ist, wie in Fig. 131 angedeutet, an einem Ende fest eingespannt, und die Kraft P wirkt auf das andere Ende parallel zur ursprünglichen Stabaxe, aber sonst ungezwungen ein; das freie Ende des Stabes kann also ganz ungezwungen seitlich ausweichen. Dieser Fall kommt im Prüfungswesen fast gar nicht vor.

b) Der Körper ist, nach Fig. 132, an beiden Enden frei beweglich (in Schneiden-, Spitzen- oder Kugelgelenken), aber die Enden sind so geführt, dass die Kraftrichtung stets durch die Stützmittelpunkte geht. Dieser Fall wird bei Versuchen häufig benutzt.

c) Der Körper ist, nach Fig. 133, wie im Fall *a* fest eingespannt und am andern Ende wie bei Fall *b* beweglich und geführt.

d) Der Körper ist, nach Fig. 134, an beiden Enden fest eingespannt, aber die Enden sind so geführt, dass die Kraftrichtung stets durch die Stützmittelpunkte geht. Bei Versuchen häufig angewendet.

Die für diese vier Fälle sich ergebenden Grenzbelastungen P, bei welchen nach Bauschinger die bereits von vornherein vorhandenen und bei der langsamen Steigerung der Belastung zuerst langsam wachsenden

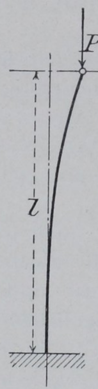

Fig. 131.

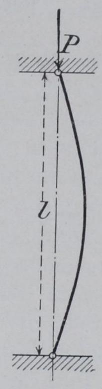

Fig. 132.

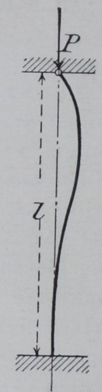

Fig. 133.

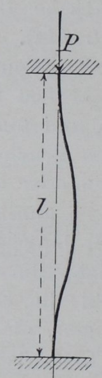

Fig. 134.

Ausbiegungen fast plötzlich jedes Maass überschreiten,[1]) sind durch die folgenden vier Eulerschen Gleichungen für die einzelnen Belastungsarten gegeben, und zwar beim Vorgange nach Fig. 131:

$$a)\quad P = \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 26.$$

wenn α die Dehnungszahl, l die Stablänge und Θ das für die Biegungsrichtung maassgebende Trägheitsmoment ist.

Beim Vorgange nach Fig. 132 wird:

$$b)\quad P = \pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 27.$$

bei Beanspruchung nach Fig. 133 wird:

---

[1]) Bach (*L 137*, §. 24) giebt für die Ausbiegung y im Fall a die Gleichung:

$$y = a\,\frac{1 - \cos\left(x\sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\right)}{\cos\left(e\sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\right)} \quad \text{und}$$

stellt hierzu eine sehr anschauliche Rechnung über die Biegungen an, die ein schmiedeeiserner Stab von 100 cm Länge und 1 cm Durchmesser erfährt, wenn P allmählich wächst. Wenn a der unbekannte kleine Hebelarm ist an dem die Kraft P das Biegemoment erzeugt, so wird für

Belastung $P =$	5	10	15	20	22,5	24,7 kg,	
die Biegung S am Stabende	$0{,}32\,a$	$0{,}85\,a$	$1{,}95\,a$	$5{,}54\,a$	$13{,}16\,a$	$\infty\,a$,	der Stab knickt aus.

$$c)\ P = 2\pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 28.$$

und wenn Fig. 134 in Frage kommt:

$$d)\ P = 4\pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 29.$$

Bei Anwendung dieser Formeln für die Rechnung muss man im Auge behalten, dass man hinsichtlich ihrer Ableitung gegen die Voraussetzungen ähnliche Einwendungen machen kann, wie sie in Abschnitt *172* gegen die Biegungstheorie vorgeführt wurden. Auch wird man nicht vergessen dürfen, dass die vier Belastungsformen praktisch nie zum Ausdruck kommen, dass es vielmehr Uebergänge von einem Fall zum andern giebt, ja dass es sogar vorkommen kann, dass während des Versuches die Art der Inanspruchnahme von einem Fall zum andern überspringt. Der Konstrukteur muss diese Möglichkeiten von Fall zu Fall erwägen. Aus diesen Gründen haben die empirisch abgeleiteten Formeln wohl nicht immer den praktischen Werth, den sie scheinbar wegen der Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen besitzen, aus denen sie abgeleitet wurden.

2. Der Knickversuch.

190. Die Einspannvorrichtungen für die Ausführung von Knickversuchen müssen so eingerichtet sein, dass der Körper seine Form möglichst ungetrübt nach einer der in Fig. 131 bis 134 gegebenen Arten ändert. Deswegen pflegt man die Körper selbst oder besondere Auflagerstücke mit Schneiden, Spitzen oder Kugeln zu versehen, und im letzteren Falle richtet man es auch wohl so ein, dass die Auflagerstücke auch unverrückbar fest mit den Maschinentheilen verbunden werden können.

In Fig. 38, Absatz *73*, S. 44, ist die Einspannvorrichtung für die Werdermaschine schematisch angegeben. Die Platte ist in der Kugelschale entweder frei beweglich [allerdings durch die Reibung auf der Kugelfläche gehindert], oder sie kann mit Hülfe von vier Schrauben unbeweglich eingestellt werden.

191. Die Messung der Formänderung ist meistens eine etwas umständliche Sache. Am einfachsten kann sie sich in den Fällen gestalten, n denen die Körper selbst mit den Schneiden, Spitzen oder Kugeln für die Auflagerung versehen sind, und wenn man sicher ist, dass die Auflagerpunkte keinerlei Seitenverschiebung erfahren können. Das wird aber nur selten der Fall sein, und bei Feinmessungen ist man daher darauf angewiesen, immer die Möglichkeit der Verschiebung an den Auflagern vorauszusetzen.

Sind die Seitenbewegungen in den Auflagern ausgeschlossen, so genügt es, die Messung der Durchbiegung in der Stabmitte, bezogen auf zwei feste Punkte im Raum, vorzunehmen, so dass die beiden Bewegungskomponenten in der Ebene des Mittelquerschnittes rechtwinkelig zu einander festgestellt werden. Im zweiten Falle wird man in gleicher Weise auch noch die Bewegungskomponenten in zwei möglichst nahe den Auflagern liegenden Querschnittsebenen messen, und dann die wirkliche Stabbiegung aus allen diesen Messungen rechnerisch oder zeichnerisch ermitteln; allerdings ein umständliches aber nothwendiges Verfahren.

192. Bauschinger hat auch für diese Art der Messung sehr zweckmässige Apparate konstruirt, deren schematische Zeichnung in Fig. 135 gegeben ist. Die Bewegungen des Säulenquerschnittes S, in Folge der Aus-knickung in der Richtung AB, werden mittelst der in eine Körnermarke eingreifenden Spitze der Stange h auf den Zeiger Z übertragen, der an einem mit dem Maschinengestell fest verbundenen Rahmen G seinen Drehpunkt hat und die Bewegungskomponente von S in AB in doppeltem Maassstabe am Messbogen M anzeigt. Ganz in gleicher Weise werden die Komponenten in CD durch die Stange h_1 auf den Zeiger Z_1 übertragen, der an M_1 die Bewegung ebenfalls in doppeltem Maassstabe anzeigt. Die Messbogen werden zu Anfang durch eine Einstellvorrichtung auf Null gestellt; sie tragen positive und negative Bezifferung, so dass man aus der Ablesung den

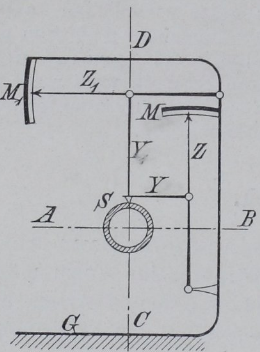

Fig. 135.

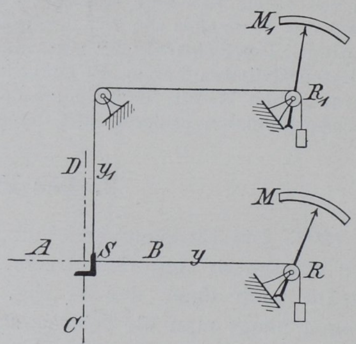

Fig. 136.

Quadranten erkennt, in den der Mittelpunkt des Querschnittes eintritt. Bauschinger wendet drei solcher Apparate an, wie oben angegeben; sie arbeiten recht sicher.

193. Bauschinger hat gelegentlich auch seinen in Abschnitt *77*, S. 47, Fig. 42 beschriebenen Rollenapparat benutzt, indem er ihn, wie in Fig. 136 angedeutet, aufstellte. Die Bewegungen des Stabquerschnittes S werden durch die Drähte Y und Y_1 auf die Rollen R und R_1 übertragen und von den Zeigern im zehnfachen oder zwanzigfachen Maassstabe angezeigt. Die Stützen für alle Rollen müssen natürlich fest im Raume stehen.

194. Man kann das Bauschingersche Verfahren ganz gut auch für Selbstaufzeichnungen bis zu etwa fünffacher Vergrösserung benutzen, wenn man nach Fig. 137 an leichten Holzhebeln H eine Tafel P und einen Schreibstift Z befestigt. Der Stift wird dann Biegungsrichtung und Biegungsgrösse angeben, und man braucht keine Berechnung aus Beobachtungswerthen anzustellen.

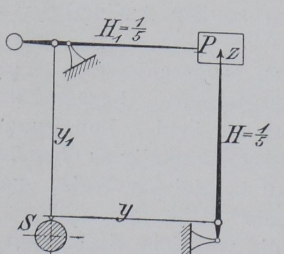

Fig. 137.

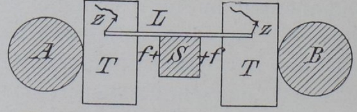

Fig. 138.

195. Im Ingenieur-Laboratorium in Boston, Mass., wird an der Emerymaschine, die in Fig. 138 schematisch angedeutete Einrichtung benutzt, um die Verbiegungen der Knickprobe selbstthätig aufzuzeichnen.

Zu dem Zweck ist an dem Probestab S eine Latte L befestigt, die mittelst der beiden Zeiger Z die Bewegungen ihrer Endpunkte auf die Tafeln T verzeichnet, die ihrerseits mit den Säulen A und B des Maschinengestells fest verbunden sind. Aus den Aufzeichnungen werden die Bewegungen des Stabmittelpunktes in der Querschnittsebene von S abgeleitet. Man misst übrigens durch die beiden bei f angebrachten Mikrometer zugleich auch die Zusammendrückungen des Stabes in der Längsrichtung.

196. Bauschinger hat, um sich von der Messung der Verschiebungen an beiden Stabenden frei zu machen und die Messung nur auf die Mittelebene zu beschränken, die in Fig. 139 schematisch angedeutete Einrichtung getroffen. Auf dem Stabe S sind drei zweitheilige auseinander klappbare Ringe R durch je vier Stellschrauben befestigt. Die beiden äusseren Ringe tragen auf Vorsprüngen die lose aufliegende Latte L. Der mittlere Ring trägt die beiden Ablesemikroskope M_1 und M_2, von denen das eine am Objektiv-Mikrometer O_1 die Verschiebungen des Stabes in senkrechter Richtung angiebt; das Mikroskop M_2 misst an O_2 die Verschiebungen in wagerechter Richtung. Die Latte L ist durch die Eigenbewegungen der beiden Stützpunkte nur äusserst wenig beeinflusst, so dass man ihre Lage in Bezug auf die Mittelpunkte des Stabquerschnittes in der Befestigungsebene der Lattenenden als unverrückbar ansehen darf. Man misst also unmittelbar die beiden Komponenten der Durchbiegungen des Stabes, bezogen auf die Lattenlänge l. Die Messungen sind aber etwas umständlich und erfordern geübte Beobachter.

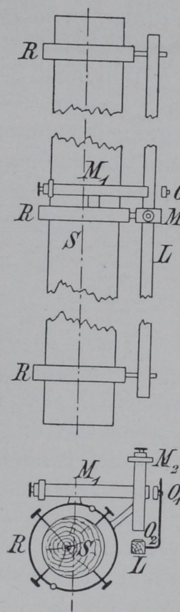

Fig. 139.

197. Für die Knickversuche werden meistens liegend angeordnete Maschinen gebraucht, weil diese Versuche vielfach ausgeführt werden, um grosse Körper, Säulen u. s. w. zu probiren und weil aufrechtstehende Maschinen für lange Stücke unbequem werden. Bei den liegenden Maschinen hat man besondere Vorkehrungen für zwanglose Aufhebung des Eigengewichtes der Probekörper zu treffen, falls man feine Versuche durchführen will. Bauschinger hat dies bei der Werdermaschine gethan, indem

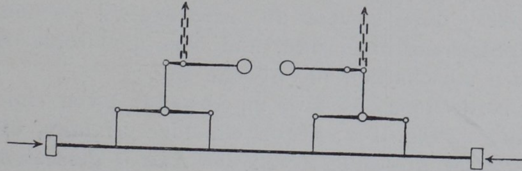

Fig. 140.

er unter die Säule Balancirhebel angreifen liess, die ihre Stütze am Maschinengestell hatten. Man muss solche Hebel dann aber so einrichten, dass sie auch die Seitenbewegungen der Säule ohne Zwang gestatten. Wo Krahnen über der Maschine vorhanden sind, kann dies leicht und recht vollkommen geschehen, indem man nach Maassgabe von Fig. 140 die Probe an Hebeln aufhängt, wobei die Stützpunkte so gewählt werden können, dass die Biegungen unter dem Eigengewicht zwischen den Stützpunkten ein Minimum werden. Tetmajer giebt (*L 142*, S. 22) eine Aufhängung in Federn an.

198. Bei den Knickversuchen wird meistens die grösste Durchbiegung unter einer vorgeschriebenen Probebelastung gemessen und festgestellt, ob bleibende Durchbiegungen vorhanden sind oder nicht. Wird der Versuch als Materialprüfung bis zur Zerstörung durchgeführt, so pflegt man die Durchbiegung für bestimmte Laststufen bis zur Erreichung der Grenzbelastung zu messen, bei welcher unaufhaltsames Ausweichen des Körpers oder der Bruch stattfindet.

Will man Schaubilder über die Grösse der Biegungen unter verschiedenen Lasten verzeichnen, so können hierzu natürlich nur die absoluten Biegungen benutzt werden. Man wird innerhalb der Proportionalitätsgrenze proportionale Biegungen finden, indessen meistens durch viele Zufälligkeiten getrübt.

d. Verdrehungsfestigkeit.

1. Begriffsentwickelung.

199. Ebenso wie die Knickfestigkeit, wird die Verdrehungs- oder Verwindungsfestigkeit im eigentlichen Materialprüfungswesen selten festgestellt (*L 136*, 1896 S. 1381). Wenn dies geschieht, so pflegt es sich meistens um die Prüfung cylindrischer Stücke, namentlich von Wellen und Axen zu handeln. Die Prüfung von Konstruktionstheilen auf Festigkeit gegen Verdrehen kommt vor, ist aber dann nicht mehr Aufgabe des Materialprüfungswesens. Ich gebe deswegen nur die Gleichungen für den kreisförmigen Querschnitt und verweise auch hier wieder auf die Werke über Festigkeitslehre, z. B. von Bach, Grashof u. A. (*L 137* und *139*), sowie auf die eingehenden Arbeiten von Bauschinger (*L 145*) und Bach (*L 138*).

200. Ein gerader prismatischer Körper wird allein auf Verdrehung beansprucht, wenn die auf ihn wirkenden äusseren Kräfte in allen Querschnitten nur ein Kräftepaar erzeugen, dessen Ebene senkrecht zur Axe des Körpers steht.

Das Drehmoment M_d der Kräftepaare bewirkt eine Verdrehung des Endquerschnittes 2 gegen den Endquerschnitt 1 des Körpers Fig. 141. Die Erfahrung lehrt, dass hierbei die ursprünglich ebenen Querschnitte auch nach der Verdrehung eben sind, und dass die Grösse der Verdrehung des Stabes in allen Abschnitten die gleiche ist.

Ist nun die Verdrehung, die zwei im Abstande 1 von einander stehende Querschnitte 1 und 2, Fig. 142, gegen einander erfahren, die Schiebung γ senkrecht zu OA im Abstande r von der Axe O gemessen, so wird für den Punkt B im Abstande r' von der Axe die Schiebung:

$$\gamma' = \gamma \frac{r'}{r}$$

sein, d. h. die Schiebungen sind proportional dem Abstande r' an der Axe O; ihre Grösse für verschiedene Abstände r' ist durch die Gerade $A'O$ bestimmt.