$$\sigma_1 = \frac{Pl}{4}\frac{e}{\Theta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 20.$$

Die Spannungen für die

$\sigma_{P'}$ Proportionalitätsgrenze,

$\sigma_{S'}$ Biegegrenze,

$\sigma_{B'}$ Bruchgrenze

und die dazu gehörigen Biegungen δ_1 zu bestimmen.

Aus der Gleichung für die Biegungen und den gefundenen Werthen für δ berechnet sich:

$$\alpha_1 = 48\frac{\Theta}{l^3}\frac{\delta}{P}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 22.$$

oder wenn man das Verhältniss δ/l als den Biegungspfeil bezeichnet:

$$\alpha_1 = 48\frac{\Theta}{l^2 P}\frac{\delta}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 23.$$

Da der Elasticitätsmodul $E = 1/\alpha$, so ergiebt sich:

$$E_1 = \frac{1}{\alpha} = \frac{l^2 P}{48\Theta}\frac{l}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 24.$$

Bezeichnet man den von der Spannungseinheit erzeugten Biegungspfeil als die Biegungsgrösse, so ist [Gl. 20 und 23] diese:

$$\frac{\delta/l}{\sigma} = \frac{\alpha}{48}\frac{Pl^2}{\Theta}\frac{4\Theta}{Ple} = \frac{\alpha}{12}\frac{l}{e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 25.$$

Die Biegungsgrösse ist mit α innerhalb der Proportionalitätsgrenze eine Konstante, die, ausser von dem Material, abhängig ist von dem Verhältniss der Stützweite zur Entfernung der äussersten Faserschicht von der neutralen Faser.

3. Biegung und das Aehnlichkeitsgesetz.

184. Auch für die Biegeversuche kann man aus dem Aehnlichkeitsgesetz gewisse Vortheile ziehen. Kick (*L 100*) spricht das Gesetz für den Fall der Biegung wie folgt aus:

> Stäbe geometrisch ähnlicher Form desselben Materiales bedürfen zu ähnlicher Durchbiegung, wenn sie in gleicher Art unterstützt oder befestigt und in gleicher Weise beansprucht sind, Belastungen, welche sich proportional ihren Querschnitten verhalten.

Die Worte „wenn sie in gleicher Art unterstützt“ und „in gleicher Weise beansprucht sind“ können leicht missverstanden werden. Es ist daher darauf aufmerksam zu machen, dass sie sich nicht ganz allgemein auf die Art und Weise der Versuchsanordnung beziehen; im Besonderen müssen vielmehr auch die Abmessungen der Auflager- und Befestigungstheile geometrisch ähnliche Abmessungen erhalten, wenn die Bedingungen des Gesetzes streng erfüllt sein sollen.

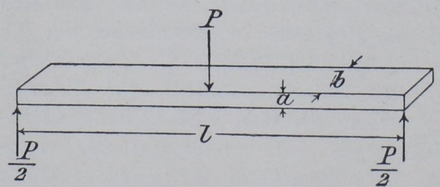

Fig. 130.

185. Um die Begründung für das Gesetz zu suchen, seien zwei geometrisch ähnliche Körper A und A_1 von prismatischer Form (Fig. 130) untersucht. Alle Werthe, die sich auf A beziehen, werden ohne Index, die auf A_1 bezüglichen mit dem Index 1 bezeichnet.

In den beiden Körpern verhalten sich:

1. die Längen $\qquad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{l}{l_1} = \frac{1}{n}$,
2. die Flächen $\qquad \frac{ab}{a_1 b_1} = \frac{\cancel{b}\,l}{\cancel{b_1}\,l_1} = \frac{1}{n^2}$,
3. die Körperinhalte und Gewichte $\qquad \frac{J}{J_1} = \frac{G}{G_1} = \frac{1}{n^3}$,
4. die Trägheitsmomente $\qquad \frac{\Theta}{\Theta_1} = \frac{1}{n^4}$.

Wenn die Durchbiegungen durch den Biegungspfeil ausgedrückt werden, so ist eine ähnliche Formänderung in beiden Proben A und A_1 erzeugt, wenn:

$$\frac{\delta}{l} = \frac{\delta_1}{l_1} \text{ ist,}$$

denn es wird:

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{l}{l_1} = \frac{1}{n}.$$

Aus der Gleichung 23, S. 134, ergiebt sich für Körper A:

$$\frac{\delta}{l} = \frac{\alpha}{48} \frac{Pl^2}{\Theta} \text{ und für Körper } A_1:$$

$$\frac{\delta_1}{l_1} = \frac{\alpha}{48} \frac{P_1 l_1^2}{\Theta_1} \text{ d. h.} = \frac{\alpha}{48} \frac{P_1 l^2 n^2}{\Theta n^4} = \frac{\alpha}{48} \frac{P_1 l^2}{\Theta} \frac{1}{n^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\delta}{l} \cdot \frac{l_1}{\delta_1} = 1 = \frac{\alpha P l^2}{48\,\Theta} \cdot \frac{48\,\Theta n^2}{\alpha P_1 l^2} = \frac{P}{P_1} n^2.$$

Der gleiche Biegungspfeil, d. h. geometrisch ähnliche Formänderung, wird also erzielt, wenn die Belastungen sich verhalten wie 1 zu n^2 oder wie die Querschnittsflächen.

Das Verhältniss der Spannungen ergiebt sich aus:

$$\sigma = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{e}{\Theta} \text{ und, da } e_1 = en \text{ und } P_1 = Pn^2,$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1 l_1}{4} \frac{e_1}{\Theta_1} = \frac{Pn^2 ln}{4} \cdot \frac{en}{\Theta n^4} = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{e}{\Theta}, \text{ so wird}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 \text{ oder}$$

Gleiche Spannungen erzeugen in geometrisch ähnlichen Körpern gleiche Biegungspfeile.

Benutzt man also zur Auftragung der Schaulinien die Spannungen σ und den Biegungspfeil δ/l, so erhält man für geometrisch ähnliche Körper aus gleichem Material aufeinanderfallende Schaulinien.

186. Das Aehnlichkeitsgesetz gilt ganz unabhängig von der Biegungstheorie für jede Formänderung, auch für die bleibenden Formänderungen, und wenn seine Forderungen beim Versuch nicht erfüllt erscheinen, obwohl alle Grundbedingungen über die Aehnlichkeit der Verhältnisse innegehalten sind, so können nur Unterschiede im Material wirkend gewesen sein.

Um also vergleichbare Ergebnisse unter solchen Verhältnissen zu erzielen, die es unmöglich machen, völlig gleichgestaltete Probestäbe zu benutzen, empfiehlt es sich, in diesen Fällen wenigstens geometrisch ähnliche Stabformen zu verwenden.

Die Belastungsstufen sind dabei proportional den Quadraten der Längenabmessungen, beziehungsweise proportional den Querschnittsflächen zu machen und die Biegungen zweckmässig als Biegungspfeil aufzuschreiben. Die Biegungsgrösse und die Dehnungszahl α sind dann innerhalb der Proportionalitätsgrenze konstante Zahlen und die Biegungspfeile auch über die Elasticitätsgrenze hinaus für die gleichen Spannungen gleich, sobald die Stäbe verschiedener Grösse aus gleichem Material von gleichem Zustande hergestellt sind.

Man erkennt auch hier wieder die Wichtigkeit der Einführung einheitlicher Prüfungsverfahren, die von möglichst weiten Kreisen anerkannt werden. Die Versuche von Bach (*L 138*) mit Gusseisenstäben von verschiedener Form lehren sehr schlagend den geringen Werth, den die Mittheilung von Prüfungsergebnissen aus einem Biegeversuch mit Gusseisen hat, wenn nicht zugleich die Angaben über die benutzten Querschnittsformen beigefügt sind, oder wenn nicht angegeben wird, dass die Ergebnisse auf einen einheitlichen Querschnitt, z. B. das Quadrat oder den Kreis mit den Erfahrungszahlen umgerechnet wurden. Die Erfahrungszahlen sind übrigens noch sehr spärlich und bedürfen der Vermehrung um so dringender, als es keineswegs ausgeschlossen ist, dass sie mit den äusseren Umständen [Verhältnisse beim Giessen, Abkühlen u. s. w.] zusammenhängen.[1])

Für die Prüfung von Gusseisen haben diese Erörterungen besonderen Werth, weil dieses Material sehr häufig und unzweifelhaft am zweckmässigsten durch den Biegeversuch geprüft wird. Bei uns in Deutschland ist vielfach der von den Konferenzen zur Vereinheitlichung der Materialprüfungsverfahren (*L 128*) empfohlene Stab von quadratischem Querschnitt mit 3,0 cm Seite und 1 m Stützweite im Gebrauch. Man sollte diesen Stab möglichst allgemein einführen, und wo seine Anwendung unmöglich, wenigstens mit Stäben arbeiten, deren Verhältniss der Stützweite zur Quadratseite

$$l/a = 33{,}3$$

genommen ist. Uebrigens ist die Art des Giessens und der Umstand, ob die Gusshaut an den Stäben vorhanden ist oder nicht, von erheblichem Einfluss auf das Ergebniss (*L 138*).

c. Knickfestigkeit.

1. Begriffsentwickelung.

187. Die Ausführung des Knickversuches gehört im eigentlichen Materialprüfungswesen zu den Ausnahmen. Kommt ein Knickversuch vor, so handelt es sich fast immer um die Feststellung der Formänderung (Ausbiegung) von Konstruktionstheilen unter Probelasten, z. B. um Prüfung

---

[1]) Jedenfalls ist auch das Verhältniss $\sigma_B : \sigma_{B'}$ für Gusseisen von dessen chemischer Zusammensetzung abhängig.