

fläche sind. Die Bretter werden an den Steinen so festgeklemmt, dass die Brett-oberkanten etwas überstehen. Die auf die Steinoberflächen gebrachte Schicht von Portlandcementbrei wird dann nach dem Anziehen des Cementes über den Brettkanten mittelst Lineals eben gestrichen, so dass sich eine oben ebene Schicht von etwa 0,5 bis 1 cm Stärke auf den Steinen bildet. Nach dem Erhärten werden die gemeinsam bearbeiteten Körper durch Zerschneiden der Cementschicht in den Fugen getrennt und dann die ganzen überliegenden Druckflächen der Würfel in derselben Weise abgeglichen. Beide Flächen werden hierauf eben-geschliffen.

b. Bei der Benutzung dieses Verfahrens darf man indessen nicht ausser Acht lassen, dass mit der Herstellung und Benutzung solcher würfelförmiger Probekörper noch keineswegs ohne weiteres die Gewinnung gleicher Druckfestigkeiten verknüpft ist, wie sie an einem einheitlichen Würfel aus dem gleichen Ziegelmaterial gefunden sein würde. Geometrisch ähnliche Körper aus gleichem Material geben keineswegs die gleichen Druckfestigkeiten, wenn sie einmal aus einem Stück, das andere Mal aus mehreren Stücken zusammengesetzt sind.

Vicat, Bauschinger u. A. (*L 135*) haben diesen Fall untersucht. Vicat

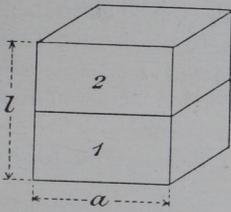


Fig. 112.

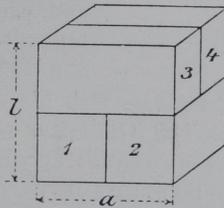


Fig. 113.

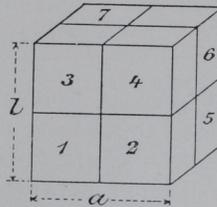


Fig. 114.

fand z. B. an Würfeln aus Gips, die er nach Maassgabe von Fig. 112, 113 und 114 bildete, die Druckfestigkeiten gegen diejenige des Würfels aus einem Stück

Würfel aus 1 2 4 8 Stücken
Verhältnisse für $\sigma_B = 1$ 0,94 0,89 0,88

Ob bei fester Verbindung der Theile durch ein Bindemittel die Unterschiede in den Druckfestigkeiten zusammengefügtter und einheitlicher Körper ganz verschwinden, kann nur an der Hand von Versuchen entschieden werden.

Ueber solche Versuche spricht Bauschinger (*L 2* Heft 10, S. 7 u. f.). Er sagt, dass er zuweilen beim Zerdrücken von Würfeln aus zwei auf einander gemauerten Ziegelsteinhälften grössere¹⁾ Bruchfestigkeiten gefunden habe, als an Steinen, die er nach dem Abgleichen der Druckflächen mit Cementmörtel und unter Benutzung von Filzzwischenlagen am ganzen Stein gefunden hat. „Dieses, auf den ersten Anblick auffällige Resultat“, sagt Bauschinger, „erklärt sich wohl aus dem Gebrauch von Filzbeilagen bei meinem älteren Verfahren und vielleicht auch aus der anderen Beschaffenheit der Mörtelbänder“ [reiner Cement bei den würfelförmlichen Proben und Mörtel aus 1 Cement + 3 Sand bei seinen älteren Versuchen]. Das weitere Studium dieser Frage würde, wie man sieht, von grossem Nutzen sein. (Vergl. auch 105.)

b. Biegungsfestigkeit.

1. Begriffsentwickelungen.

168. Für das eigentliche Materialprüfungswesen werden Biegeversuche nur in beschränktem Maasse angewendet, und man sucht in diesen Fällen den Vorgang so einfach wie möglich zu gestalten. Es wird also genügen,

¹⁾ Nach dem in Absatz 162 S. 111 Gesagten müsste mit abnehmendem $1/n$ auch σ_B kleiner werden.

wenn hier nur die Bedingungen für diese einfachen Fälle und die Vorgänge, die mit ihnen verknüpft sind, behandelt werden. Ausführlicheres über die Biegetheorie und die verwickelten Fälle wird man ja in den Werken über Festigkeitslehre, z. B. von Bach (*L 137*), dem ich hier im wesentlichen folgen werde, leicht finden können.

Ein prismatischer Körper (Fig. 115) von der Länge l sei an dem einen Ende A fest eingespannt und am anderen Ende B im Schwerpunkt

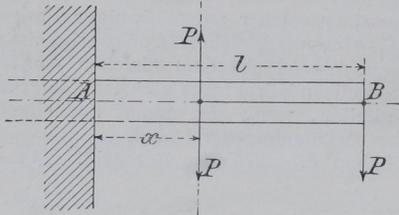


Fig. 115.

seiner Querschnittsfläche durch eine Kraft P belastet, die in der Ebene einer der Haupttaxen des Querschnittes und der Stabmittellinie liegt.

Im Querschnitt 1, in der Entfernung x von der Einspannstelle A , erzeugt die Kraft P ein Moment:

$$M = P(l - x)$$

und eine in die Querschnittsebene 1 fallende Kraft P , die in den folgenden Betrachtungen zunächst ausser

Acht gelassen werden soll, so dass sich die angreifenden äusseren Kräfte für den Querschnitt 1 durch ein Kräftepaar ersetzen lassen.

Die Kraft P des Kräftepaares strebt den Körper zu biegen; der Körper erfährt eine Krümmung.

169. Unter der Voraussetzung, dass die ursprünglichen, senkrecht zur Mittellinie AB gedachten Querschnittsebenen des Körpers auch nach der Krümmung eben und senkrecht zur Mittellinie bleiben, können zwei benachbarte, um dx von einander entfernte Querschnitte 1 und 2 (Fig. 116 und 117) nach eingetretener Krümmung nicht mehr parallel sein. Stellt

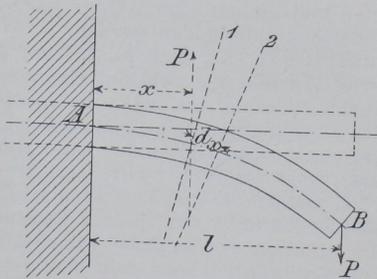


Fig. 116.

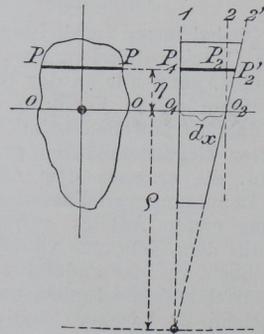


Fig. 117.

man sich den Körper aus einzelnen parallel zur Mittellinie laufenden Schichten PP bestehend vor, so wird bei der Krümmung eine dieser Faserschichten, z. B. OO ihre ursprüngliche Länge dx beibehalten können, während für die oberen Schichten, z. B. PP , eine Verlängerung, und für die unteren eine Verkürzung eintreten muss, da die Querschnitte auch nach geschehener Krümmung des Stabes eben sein sollen. Die Entfernung der Projektion der Spur von beiden Ebenen 1 und 2 von der Schicht $OO = \rho$ (Fig. 117) ist der Krümmungshalbmesser der Stabaxe. Die Dehnung, welche die Faserschicht PP erfuh, kann man ausdrücken:

$$\varepsilon = \frac{\overline{P_1 P'_2} - \overline{P_1 P_2}}{\overline{P_1 P_2}} = \frac{P_1 P'_2}{O_1 O_2} - 1, \text{ oder da } \frac{\overline{P_1 P'_2}}{O_1 O_2} = \frac{\varrho + \eta}{\varrho},$$

wenn η der Abstand der Schicht \overline{PP} von der Schicht \overline{OO} ist. Es ist also:

$$\varepsilon = \frac{\varrho + \eta}{\varrho} - 1 = \frac{\eta}{\varrho}$$

an der vom Krümmungsmittelpunkt abgewendeten Stabseite und

$$- \varepsilon = - \frac{\eta}{\varrho}$$

an der entgegengesetzten Seite des Stabes.

Unter der Voraussetzung, dass die Fasern keinen Einfluss auf einander ausüben, Seitenkräfte also ausgeschlossen sind, können aus den früheren Betrachtungen (34) die bei der Längenänderung der Fasern eintretenden Spannungen berechnet werden aus:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}, \text{ und da } \varepsilon = \frac{\eta}{\varrho}, \text{ so wird}$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} \frac{\eta}{\varrho} \dots \dots \dots 14.$$

170. Die inneren Kräfte, die Spannungen σ , müssen gleich Null und mit den äusseren Kräften, Moment M , im Gleichgewicht sein. Es muss also die Summe der Spannungen gleich Null und ihr Moment gleich M sein.

Wenn in Fig. 118 der Flächenstreifen PP von der Breite z und der Höhe $d\eta$, also $df = z d\eta$ ist, so ist die erste Forderung, dass die Summe der Spannungen gleich Null sei, erfüllt durch:

$$\int \sigma df = 0, \text{ wenn}$$

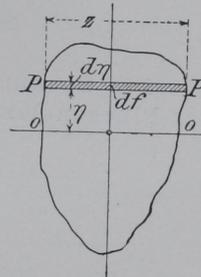


Fig. 118.

die Integration sich über den ganzen Querschnitt erstreckt.

Da ϱ für jeden Querschnitt eine Konstante und da $\sigma = 1/\alpha \cdot \eta/\varrho$ (Gl. 14), so ergibt sich:

$$\int \frac{1}{\alpha} \eta df = 0$$

Wenn die Dehnungszahl α des Materiales für Zug und Druck gleich ist, so gilt innerhalb der Proportionalitätsgrenze

$$\int \eta df = 0 \dots \dots \dots 15.$$

d. h. also, die Faserschicht, in der die Spannungen und Dehnungen Null sind, geht durch den Schwerpunkt der Fläche; diese Schicht nennt man auch wohl die neutrale Faserschicht; sie steht senkrecht zur Angriffsebene des Momentes M . Da diese Ebene, der Voraussetzung gemäss (168), die eine Hauptaxe des Querschnittes enthält, so enthält die neutrale Schicht die andere Hauptaxe.

Die zweite Gleichgewichtsbedingung lautete, dass das Moment der inneren Kräfte gleich dem Moment der äusseren Kräfte sein muss, d. h.

$$\int \sigma df \eta = M,$$

und wenn man, wie früher, $\sigma = 1/a \cdot \eta/\rho$ setzt und a für Zug und Druck gleich annimmt, so erhält man:

$$M = \frac{1}{\alpha \rho} \int \eta^2 df,$$

und wenn man $\int \eta^2 df$, das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die neutrale Faserschicht \overline{OO} , nämlich:

$$\int \eta^2 df = \Theta \text{ setzt, so wird:}$$

$$M = \frac{\Theta}{\alpha \rho} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M}{\Theta} \dots \dots \dots 16)$$

Aus Gleichung 14 und 16

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\eta}{\rho} \text{ und } \frac{1}{\rho} = \alpha \frac{M}{\Theta} \text{ ergibt sich:}$$

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} \eta \dots \dots \dots 17)$$

Die Spannungen σ sind also proportional dem Abstände η der Flächenelemente von der neutralen Faserschicht; sie sind am

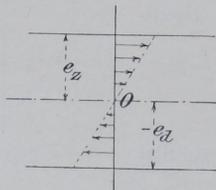


Fig. 119.

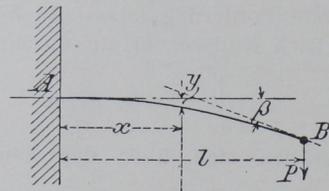


Fig. 120.

grössten in den äussersten Schichten des Querschnittes vom Abstände $\eta = e_z$ oder e_a (Fig. 119).

Dementsprechend ist also die

$$\left. \begin{aligned} \text{grösste Zugspannung } +\sigma &= \frac{M}{\Theta} e_z \\ \text{grösste Druckspannung } -\sigma &= -\frac{M}{\Theta} e_a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 18)$$

171. Mit der gleichen Annäherung, mit der man für den reciproken Werth des Krümmungsradius die zweite Ableitung von y nach da setzen darf:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ist auch nach Gl. 16 zu setzen}$$

$$M = \pm \frac{\Theta}{\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2}, \text{ d. h.}$$

$$P(l-x) = \frac{\Theta}{a} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Hieraus ergibt sich aber unter der früheren Voraussetzung, dass a für Zug- und Druckbeanspruchung gleichen Werth hat und dass der Querschnitt des Stabes für die ganze Länge l der gleiche, also auch Θ eine Konstante ist, durch Integration:

$$\frac{\Theta}{a} \frac{dy}{dx} = P \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C.$$

Da die gekrümmte Stabaxe, d. i. die elastische Linie, die ursprüngliche gerade Stabaxe (Fig. 120) in der Einspannstelle berührt [eine Voraussetzung, die allerdings nur ausnahmsweise erfüllt ist], so ist:

für $x=0$; $\frac{dy}{dx} = 0$, also auch $C=0$ und daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\Theta} P \left(l - \frac{x}{2} \right) x \dots \dots \dots a)$$

Hieraus kann man für jeden Punkt der elastischen Linie den Winkel β (Fig. 120) berechnen, welchen deren Tangente im betrachteten Punkte mit der ursprünglichen Stabaxe einschliesst.

Für das freie Ende B ist nach Gl. a, da $x=l$

$$\text{tg } \beta = \frac{a}{\Theta} \cdot P \left(l - \frac{l}{2} \right) l = \frac{a}{2\Theta} Pl^2$$

und da β stets nur ein kleiner Winkel ist, so kann man setzen:

$$\beta = \frac{a}{2\Theta} Pl^2.$$

Aus der Gleichung a folgt, dass für

$$x=0 \text{ auch } y=0 \text{ wird.}$$

Durch Integration ergibt sich nun die Gleichung der elastischen Linie:

$$y = \frac{a}{\Theta} \frac{P}{2} \left(l - \frac{x}{3} \right) x^2.$$

Die Durchbiegung δ am Ende B beträgt daher für $x=l$

$$\delta = \frac{a}{\Theta} \frac{P}{2} \left(l - \frac{l}{3} \right) l^2, \text{ d. h.}$$

$$\delta = \frac{a}{\Theta} \frac{P}{3} l^3 \dots \dots \dots 19)$$

172. Für Biegungsversuche zur Erprobung von Materialien wird fast ausschliesslich der Probestab auf zwei Stützen aufgelegt und in der Mitte zwischen diesen durch eine Kraft P beansprucht. Man kann sich in diesem Falle den Stab als in der Mitte eingespannt vorstellen und am Ende mit $P/2$ in umgekehrter Richtung beansprucht denken (Fig. 121).

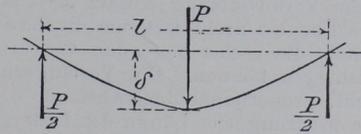


Fig. 121.

Daher kann also geschrieben werden:

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} \text{ und nach Gl. 18}$$

$$\pm \sigma = \frac{Pl e}{4 \Theta} \dots \dots \dots 20$$

Unter den gleichen Voraussetzungen findet sich die Durchbiegung δ in der Stabmitte, indem man in Gleichung 19 für den einseitig eingespannten Stab $l = l/2$ und $P = P/2$ einsetzt. Dann wird:

$$\delta = \frac{\alpha P l^3}{\Theta 2^3 2^3} \text{ oder}$$

$$\delta = \frac{a P l^3}{48 \Theta} \dots \dots \dots 21$$

a. Obwohl diese Formeln für die Biegefestigkeit eigentlich nur für den Zustand des Materials innerhalb der Proportionalitätsgrenze, wo a konstant ist, aufgestellt sind, so werden sie dennoch der Einfachheit wegen bei den Materialprüfungen vielfach so benutzt, als ob sie bis zum eintretenden Bruch, oder bis zur übermässigen Verbiegung Gültigkeit hätten.

Bei der Ableitung der Gleichungen ist ausserdem eine ganze Reihe von Voraussetzungen gemacht, deren Zuverlässigkeit ohne weiteres angenommen wurde. Man wird sich darüber klar werden müssen, wie weit diese Voraussetzungen berechtigt sind, und in welchem Maasse das Nichtzutreffen der Annahmen das Ergebniss eines Biegeversuches beeinträchtigen kann. Ich folge hierbei den Darstellungen von Bach (L 137 § 20).

b. Die erste Voraussetzung war, dass die auf den Körper wirkenden äusseren Kräfte für jeden Querschnitt nur ein Kräftepaar ergeben, dessen Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptaxen senkrecht schneidet. Die zweite Voraussetzung war, dass die Fasern, aus denen der Stab bestehend gedacht wurde, nicht aufeinander einwirken. Drittens sollten die ursprünglich ebenen und senkrecht zur Stabaxe stehenden Querschnittsflächen auch nach der Krümmung eben und senkrecht zur Axe bleiben. Viertens sollte die Dehnungszahl a für Zug und Druck gleich gross und bis zur Proportionalitätsgrenze konstant sein.

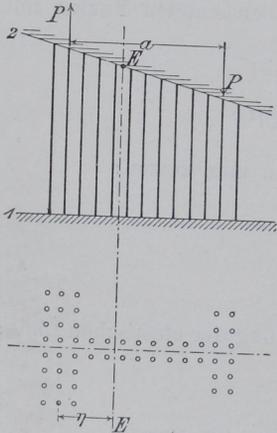


Fig. 122.

Ueber den Grad der Zulässigkeit dieser Annahmen lässt sich am besten ein Urtheil gewinnen, wenn man sich, wie Bach es thut (L 137 § 20), einen Körper so ausgeführt denkt, dass sie wirklich erfüllt sind. Demnach nimmt Bach an, der Stab bestehe aus lauter gleichlangen Spiralfedern, die unabhängig von einander, alle mit den beiden Endflächen 1 und 2 (Fig. 122) fest verbunden sind. An 2 wirkt in der Symmetrieebene [der Ebene der einen Hauptaxe des Querschnittes — siehe Voraussetzung Absatz 168] das Kräftepaar P , dessen Moment $M = Pa$ ist. Die Ebene ε dreht sich um die Axe EE . Die links liegenden Federn werden gedehnt, die rechts liegenden verkürzt; diese letzteren sollen nach der Seite nicht ausbiegen können. Die Verlängerungen und Verkürzungen λ müssen, wie man sieht, proportional dem Abstände η von der Axe EE sein. Man hat also, wenn l die ursprüngliche Länge der Feder war:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$$

Ist die Dehnung im Abstände 1 = ε_1 , so ist:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \eta; \text{ alsdann ist die Spannung } \sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} \eta, \text{ und dieser entspricht, wenn}$$

der Querschnitt der fraglichen Faserschicht f_0 ist, eine Kraft:

$$\sigma f_0 = \frac{\epsilon_1}{a} \eta f_0.$$

Um Gleichgewicht zu erzielen, muss die Summe dieser inneren Kräfte gleich Null sein, d. h.

$$\Sigma \sigma f_0 = \Sigma \frac{\epsilon_1}{a} \eta f_0 = 0 \dots \dots \dots a)$$

und ferner muss die Summe der Momente dieser inneren Kräfte gleich dem Moment der äusseren Kräfte sein, also:

$$M = Pa, \text{ d. h.}$$

$$\Sigma \sigma f_0 \eta = \Sigma \frac{\epsilon_1}{a} \cdot f_0 \eta^2 = M \dots \dots \dots b)$$

Da hier a für Zug und Druck gleich gesetzt werden kann, folgt aus der ersten Gleichung:

$$\Sigma f_0 \eta = 0,$$

d. h. die Nullaxe EE geht durch den Schwerpunkt aller Faserquerschnitte und bildet die zweite Hauptaxe des Stabquerschnittes.

$$\text{Da } \Sigma f_0 \eta^2 = \Theta,$$

so geht die zweite Bedingungsgleichung b , unter denselben Voraussetzungen für a , über in:

$$M = \frac{\epsilon_1}{a} \Theta.$$

Sind e_z und e_d die Werthe von η für die äussersten Fasern des Querschnittes, so ist deren Spannung:

$$+ \sigma = \frac{\epsilon_1}{a} e_z \text{ oder } - \sigma = - \frac{\epsilon_1}{a} e_d \text{ daher}$$

$$\frac{\epsilon_1}{a} = + \frac{\sigma}{e_z} \text{ oder } \frac{\epsilon_1}{a} = - \frac{\sigma}{e_d}$$

Eine Krümmung des Stabes durch das Kräftepaar PP findet nicht statt, der Stab bleibt gerade. Die Querschnittsebene hört auf senkrecht zur Stabaxe zu stehen. Alle Querschnitte schneiden sich vielmehr in der Linie, deren Projektion M im Abstände ρ (Fig. 123) von der neutralen Faserschicht EE liegt. Danach ist also ρ nicht mehr der Krümmungshalbmesser, M nicht mehr Krümmungsmittelpunkt, denn da der Stab gerade bleibt, ist der Krümmungshalbmesser gleich ∞ .

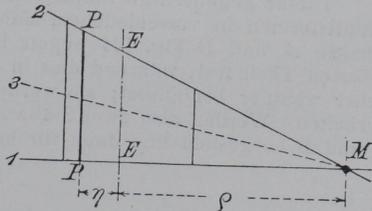


Fig. 123.

Die Beziehungen:

$$\epsilon = \frac{\rho + \eta}{\rho} - 1 = \frac{\eta}{\rho},$$

die für den gebogenen Stab unter der Voraussetzung abgeleitet wurden, dass die Querschnitte senkrecht zur Stabaxe bleiben, gelten eben auch dann, wenn die Axe gerade bleibt und diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Da ρ nicht mehr die Bedeutung des Krümmungshalbmessers hat, darf man

$$\frac{1}{\rho} \text{ nicht mehr durch } + \frac{d^2 \eta}{dx^2}$$

ersetzen.

c. Die erste Voraussetzung, dass auf den Stab nur ein Kräftepaar als äussere Kraft wirke, ist in der Regel nicht erfüllt; die Erzeugung des biegenden Momentes erfordert fast immer Nebenkräfte. Meistens ist immer noch eine Schubkraft vorhanden, deren Einfluss allerdings in vielen Fällen unbedeutend ist. Oertliche Anstrengungen des Materials in Folge der Auflagerungen und der Ein-

wirkung der Angriffsvorkehrungen sind fast immer vorhanden (*L 120*) und können ähnliche Wirkungen, wie die Einspannvorrichtungen bei Zug- und Druckversuchen haben. Bei starken Biegungen des Probestückes hat z. B. die Reibung zwischen Probestück und Auflager einen erheblichen Einfluss, namentlich wenn starke Belastungen erforderlich sind. Unter diesen Umständen wirkt dann auch die in der Regel nicht gut zu vermeidende Aenderung der Stützweite l beeinflussend auf das Ergebniss des Biegeversuches.

d. Die zweite Voraussetzung, dass die Fasern keinen Einfluss auf einander ausüben, ist für den aus einem Ganzen bestehenden Stab durchaus nicht erfüllt, denn, wie in Abschnitt 43 und 59 bereits dargelegt, ist mit den Längenänderungen der Fasern immer eine Querschnittsänderung verbunden; je grösser die Längenänderungen, desto grösser sind die Querschnittsänderungen; sie sind also am grössten in den äussersten Schichten und gleich Null in der neutralen Faserschicht. Die Fasern müssen, wegen der Querschnittsänderungen, während der Krümmung ihre Lage gegen die neutrale Schicht verändern und sich hierdurch gegenseitig beeinflussen. Jeder Zwang aber, der der Querschnittsänderung entgegen wirkt, erhöht die Zug- und Druckfestigkeit (*103*), daher ist auch die Beziehung:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

nicht mehr streng anwendbar.

Ausser durch die Querschnittsänderungen beeinflussen sich die Fasern auch durch die verschiedene Längenänderung, die sie je nach dem Abstände η von

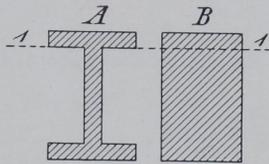


Fig. 124.

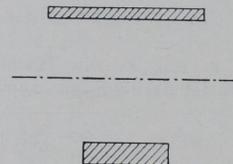


Fig. 125.

der neutralen Faserschicht erfahren und die ein Gleitbestreben zwischen den benachbarten Fasern erzeugen.

Dieser gegenseitige Einfluss der Fasern macht sich bei verschiedenen Querschnittsformen in verschiedenem Maasse geltend. Im Schnitt 1 der beiden Querschnitte A und B Fig. 124 liegen in A die Fasern nach der einen Seite zum grössten Theil frei, während dies in B nicht der Fall ist. In A sind diese Fasern daher weniger beeinflusst; sie werden sich daher mehr der Theorie entsprechend verhalten. Werden also zwei Stäbe aus gleichem Material nach den Querschnitten A und B hergestellt und dann für beide auf Grund der Gleichung:

$$M = \sigma \frac{\Theta}{e_z}$$

aus den Versuchsergebnissen die Bruchspannungen berechnet, so muss sich für B eine etwas grössere Biegefestigkeit ergeben als bei A.

Je mehr der Stabquerschnitt sich in zwei schmale, der [idealen] neutralen Faserschicht parallele Streifen (Fig. 125) auflöst, um so vollkommener ist die Voraussetzung wegen der gegenseitigen Einflusslosigkeit der Fasern erfüllt.

e. Die dritte Voraussetzung, dass die Querschnitte eben bleiben, trifft ebenfalls nicht genau zu, denn die meistens gleichzeitig mit den biegenden Momenten auftretende Schubkraft wirkt auf Krümmung der Querschnitte hin. Unter anderen haben aber Bauschinger, Bach u. A. durch Versuche erwiesen, dass bei Schmiedeeisen im rechteckigen Querschnitt die Querschnittsflächen eben und senkrecht zur Stabaxe bleiben, selbst wenn die Durchbiegung erheblich über die Elasticitätsgrenze hinausgetrieben wird. Die oben gemachte Annahme ist daher für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Stäbe als zutreffend anzuerkennen.¹⁾

¹⁾ Vergl. indessen, was in Abs. 382 zu Fig. 261 gesagt wird.

f. Dass die vierte Voraussetzung, die Dehnungszahl a sei für Zug und Druck gleich und die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten, nur für einige Materialien zutreffend ist, z. B. für Schmiedeeisen oder Stahl, wurde in Abschnitt 37, S. 20 bereits besprochen.

173. Weil man nach Voraufgehendem nicht erwarten darf, dass die Ergebnisse der Biegeversuche mit den Ergebnissen der Theorie übereinstimmen, die auf Grund einer Anzahl von vereinfachenden Annahmen aufgestellt worden ist, darf man auch nicht erwarten, dass die aus den Ergebnissen des Biegeversuches berechneten Bruchspannungen für Zug und Druck mit den aus den Ergebnissen der Zug- und Druckversuche abgeleiteten übereinstimmen (*L 105*, S. 41, No. 26 und S. 97 u. f.). Am wenigsten stimmen sie bei denjenigen Materialien überein, bei denen die Proportionalitätsgrenze überhaupt nicht besteht und bei denen die Dehnungszahl a nicht gleich der Verkürzungszahl ist. (Vergl. aber auch *L 112*.)

Aus diesen Gründen würde es am zweckmässigsten sein, die für die Konstruktion zulässigen Biegebeanspruchungen bei den vorgenannten Materialien nicht aus Zug- und Druckversuchen, sondern unmittelbar aus Biegeversuchen abzuleiten oder wenigstens auf dem Versuchswege die gesetzmässigen Beeinflussungen festzustellen (*L 138*). Dabei würde dann, wie aus dem Voraufgehenden einleuchtet, das Ergebniss mehr oder minder von der Querschnittsform abhängig sein.

174. Nun würde es aber auf der einen Seite erhebliche Kosten und Umstände verursachen, wollte man die Biegefestigkeit der Materialien auch für alle möglichen Querschnittsformen und Belastungsformen ermitteln, und auf der andern Seite würde man bei Berücksichtigung aller Nebenumstände bei Aufstellung der Theorie auf solche Weitläufigkeiten stossen, dass man einstweilen für das Materialprüfungswesen sicher bei den in Abschn. 168—171 benutzten Annahmen stehen bleiben wird. Die einfache Theorie wird man wohl nur in besonderen Fällen durch genaue Rechnung ergänzen, wenn die Verhältnisse so liegen, dass man ihre Wirkungen klar übersehen kann. Für gewöhnlich wird man darauf zu achten haben, dass die Biegeversuche unter solchen Umständen ausgeführt werden, dass möglichst ungetrübte Biegebeanspruchungen auftreten.

Man ist also auch bei den Biegeversuchen darauf angewiesen, die Bedingungen für eine möglichst gute Art der Inanspruchnahme der Stäbe aufzusuchen und die Formen thunlichst so zu wählen, dass man an allen Orten zu unmittelbar vergleichbaren Ergebnissen kommt.

2. Der Biegeversuch.

175. Bei der praktischen Ausführung des Biegeversuches pflegt man dem Probekörper eine der einfachen Querschnittsformen zu geben, von denen man die Trägheitsmomente Θ in den Tabellen der Handbücher für den Konstrukteur entweder zahlenmässig berechnet vorfindet, oder von denen man sie nach einfachen, dort ebenfalls angegebenen Formeln berechnen kann. Kommen complicirte Querschnitte vor, so sind die Trägheitsmomente durch Annäherungsrechnungen oder mit Hilfe eines Momentenplanimeters zu bestimmen.

Ich will auf diese Dinge hier nicht näher eingehen, behalte mir vielmehr vor, hierauf am Schluss des Buches noch zurückzukommen.

176. Wie bereits früher (172) erwähnt, wird der Biegeversuch im Materialprüfungswesen meistens nach Fig. 121, S. 125 so angeordnet, dass der Stab auf zwei Auflager gelegt und in der Mitte belastet wird. Bei stufenweiser Vergrößerung von P pflegt man dann für jede Laststufe die Durchbiegung δ in der Mitte zu messen.

Aus der Kraft P und der erzielten Formänderung δ kann man, wie beim Zerreiß- und Druckversuch, eine Schaulinie (Fig. 126) entwerfen.

Ist für das untersuchte Material a konstant, so ist die Durchbiegung des Stabes gemäss Gleichung 21:

$$\delta = \frac{a Pl^3}{48 \Theta}$$

proportional der Kraft P , und da:

$$\sigma = \frac{Pl e}{4 \Theta},$$

auch proportional der Spannung σ .

Die Schaulinie wird daher anfangs bis zum Punkte P geradlinig sein. P ist die Proportionalitätsgrenze für die Biegung. Von P ab zeigt die Linie eine sanfte Krümmung bis zum Punkte S , wo die Biegungen bei wachsendem P plötzlich stark zunehmen. Den Punkt S nennt man die Biegegrenze, entsprechend der bereits bekannten Streck- und Quetschgrenze (37—39) des Materiales.

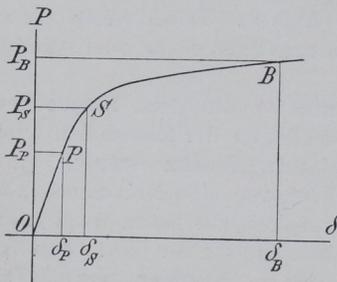


Fig. 126.

Während manche Körper bei Weiterführung des Versuches zu Bruche gehen, also auch die Spannung an der Bruchgrenze (Punkt B , Fig. 126) zu bestimmen gestattet, lassen sich andere auch durch die stärksten Biegungen nicht zum Bruche bringen. In diesen Fällen muss, ebenso

wie beim Druckversuch, die Streckgrenze an Stelle der Bruchgrenze als Gütemaassstab für das Material genommen werden. Für den Technologen ist aber auch hier wiederum der weitere Verlauf des Schaubildes oft von Wichtigkeit, weil er Rückschlüsse auf die Verarbeitbarkeit des Materiales gestattet.

177. Nachdem also auch beim Biegeversuch die Punkte P , S und B als charakteristische Punkte hervortreten und die zugehörigen Spannungen und Formänderungen zur Kennzeichnung der Eigenart der Materialien vielfach benutzt werden, ist es wünschenswerth, auch hier eine abgekürzte, leicht übersichtliche Bezeichnung einzuführen. Deswegen wird im weiteren Verlaufe dieses Werkes überall da, wo es darauf ankommt, kurz anzudeuten, aus was für einer Art der Beanspruchung die angegebenen Werthe hervorgingen, neben der Bezeichnung:

σ_P, S, B oder ϵ_P, S, B für Zugbeanspruchung	}	gewonnen aus dem
$\sigma_{-P, -S, -B}$ oder $\epsilon_{-P, -S, -B}$ für Druckbeanspruchung		
Zug- oder Druckversuch, die Bezeichnung:		
$\sigma_{P', S', B'}$ oder $\epsilon_{P', S', B'}$ für Zugbeanspruchung	}	gesetzt werden,
$\sigma_{-P', -S', -B'}$ oder $\epsilon_{-P', -S', -B'}$ für Druckbeanspruchung		

wenn angedeutet werden soll, dass die Werthe durch einen Biegeversuch

festgestellt wurden oder sich auf den Fall der Biegung beziehen. Sind in gleicher Weise die einfachen Zeichen σ , ε kenntlich zu machen, so werden sie geschrieben werden σ_1 , ε_1 u. s. w.

178. Ebenso wie beim Zug- und Druckversuch kann es von Interesse werden, beim Biegeversuch das Verhalten des Materials bei Entlastung und wiederholter Belastung zu studiren. Man kann diese Vorgänge, ebenso wie in Absatz 41, auch hier im Schaubilde zum Ausdruck bringen, indem man die Linien für die bleibende (Biegeungsrest) und elastische Biegung (Federung) verzeichnet.

Auch die Nachwirkungsercheinungen kann man durch den Biegeversuch studiren und kann, wie beim Zug- und Druckversuch, aus den Schaubildflächen die gesammte und die spezifische Formänderungsarbeit für die Biegebeanspruchung ermitteln. (Vergl. 48—54) (*L* 137, § 42, S. 215.)

179. Auch bei den Biegeversuchen treten an den Staboberflächen häufig ähnliche Fließfiguren auf, wie bei den Zugversuchen (88—90), und ebenso sind die Erscheinungen auf den Bruchflächen durchaus charakteristisch. Ich möchte aber auf die Einzelheiten hier noch nicht eingehen und behalte mir vor, hierauf bei Besprechung der Schlagbiegeversuche im Abs. 272 u. f. zurückzukommen und auf Einzelheiten auch bei der Behandlung der Brucherscheinungen bei Dauerversuchen (333 u. f.) näher einzugehen.

180. Was über die eigentliche Versuchsausführung zu sagen ist, bezieht sich auf eine kurze Darstellung der Messverfahren und der Apparate für die Feinmessungen bei Biegeversuchen; indessen sollen an dieser Stelle nur die allgemeinen Grundsätze behandelt werden.

Bei rohen Versuchen wird gewöhnlich durch Anlegen eines Maassstabes die Durchbiegung in der Mitte von einer in Bezug auf die Auflager-

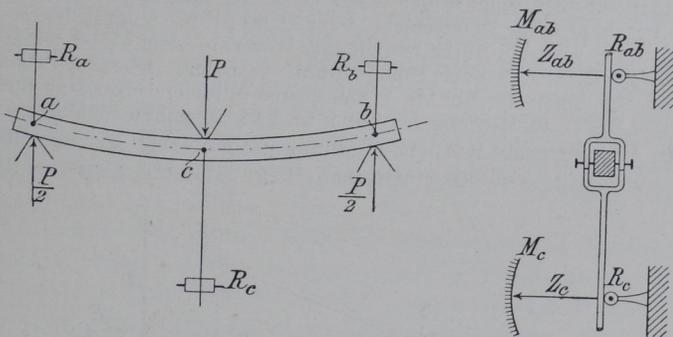


Fig. 127.

punkte festliegenden Marke (Lineal oder gespannter Faden) aus gemessen. Da aber hierbei, wie noch zu zeigen ist (268), Lagenänderungen gegen die Auflager, Verdrückungen in diesen Punkten und unter den Angriffsstellen für die Kraft P nicht wohl vermieden werden können, so müssen namentlich Feinmessungen mit grösster Vorsicht ausgeführt werden, wenn man sich frei von Fehlern machen will.

Man pflegt diese Messungen gewöhnlich von der neutralen Faserschicht ausgehend vorzunehmen. Bauschinger hat hierfür einen sehr sinnreichen Apparat erdacht, dessen Beschreibung gut kennzeichnen wird, worauf es bei

den Apparaten für Biegemessung ankommt. Das Schema der Anordnung ist in Fig. 127 gegeben. In der neutralen Faser werden vor dem Versuch auf den Seitenflächen des Körpers Körnerpunkte a , b und c eingeschlagen, und zwar über den beiden Auflagern in der Entfernung l von einander und in der Stabmitte. Sie dienen den Spitzschrauben der drei Bügel als Festpunkte. Die Bügel tragen in Gelenken (in der Figur nicht angedeutet) bewegliche Stangen, die sich mit ihren Enden auf die Rollen $Rabc$ der Rollenfühlhebel auflegen und diese durch Reibung bewegen, sobald die Punkte a , b , c ihre Lage ändern. Die Bewegungen der Zeiger z werden an den Gradbögen M abgelesen. Das Uebersetzungsverhältniss [Verhältniss der Rollenhalbmesser zum Halbmesser der Messbögen] ist $\frac{1}{20}$ oder $\frac{1}{50}$, so dass man, je nach Benutzung der grossen oder der kleinen Rollen, am Apparate die Bewegungen der Körnerpunkte gegen die fest aufgestellten Rollenständer mit $\frac{1}{2000}$ oder $\frac{1}{5000}$ cm ablesen kann, da die Bögen mit Millimetertheilung versehen sind. Durch die beiden seitlichen Rollen a und c werden die Bewegungen über den Auflagern, durch b diejenigen der Stabmitte gemessen; der Unterschied der Ablesungen

$$c - \frac{a + b}{2} = \delta$$

gibt also die wirkliche Durchbiegung des Stabes in der Mitte an. Bei starken Verbiegungen ändert sich natürlich im Laufe des Versuches die Länge l . (Vergl. hierüber f 5 Abs. 266—270.)

Die beiden Messungen über den Auflagern lassen sich vermeiden, wenn man in irgend einer Weise neben dem Probekörper eine feste Latte anbringt, die die Bewegungen der Punkte in der neutralen Faserschicht über den Auflagern ohne Zwang mitmacht, und wenn man dann die Verschiebungen des mittleren Punktes gegen die Latte misst.

Bei Biegeversuchen mit Holzbalken wird in der Charlottenburger Versuchsanstalt zuweilen auch in der Weise verfahren, dass in den Punkten a und b (Fig. 127) der neutralen Faserschicht feine Drahtstifte eingeschlagen werden. Ueber diese Stifte wird ein durch angehängte Gewichte beschwerter feiner Kupfer- oder Stahldraht [Kratzen- oder Blumendraht] gespannt. Dieser Draht dient als Zeigermarke für einen im Punkte c befestigten Millimetermaassstab aus Papier. Man kann bei dieser Einrichtung bis auf etwa 0,02 cm genau ablesen.

181. Hat man mit Körpern zu thun, die nur sehr geringe Biegungen erfahren, oder will man die elastischen Biegungen mit grösserer Genauig-

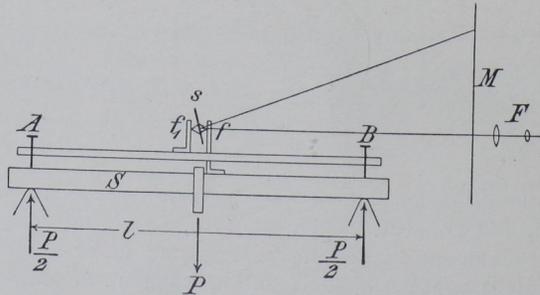


Fig. 128.

keit feststellen, so kann man Spiegelapparate (87) benutzen und die Durchbiegungen mit ausserordentlicher Feinheit feststellen. Auf den Probekörper S (Fig. 128) stellt man eine Latte L mit drei Spitzen [Holzbrett mit

eingeschlagenen Nägeln], von denen eine über dem linken [A] und zwei über dem rechten Auflager B liegen, so dass die Entfernung zwischen den Spitzen in A und B gleich der Stützweite l ist. Auf Stab und Latte werden mit Wachskolophoniumkitt zwei federnde Winkelchen f und f_1 in der Mitte aufgeklebt. Zwischen f und f_1 wird nun der Spiegelkörper genau so eingeschaltet, wie früher beim Zugversuch unter 87 beschrieben. Die Ablesungen geschehen mittelst des Fernrohrs am Maassstab M in der bereits bekannten Weise. Man kann auf diese Weise leicht die Durchbiegungen bis auf $\frac{1}{50000}$ cm schätzen. Die gemessene Gesamtbiegung darf freilich bei dieser Art der Messung nicht über 0,05 cm hinausgehen, aber bei Steinen, Mörtel- und Betonkörpern ist das Verfahren alsdann ein sehr leistungsfähiges.

182. Eine sehr sinnreiche Anwendung des Spiegels benutzte Intze, um seinen Zuhörern die Durchbiegungen eines Stabes nach allen Richtungen sichtbar zu machen. Er verwendete einen Grundsatz, der übrigens auch früher schon befolgt wurde, um feinere Bestimmungen der Durchbiegung von Stäben in einer Ebene auszuführen. Hierbei bestimmt man den Winkel β (Fig. 120, S. 124), den die elastische Linie über den Auflagern mit ihrer

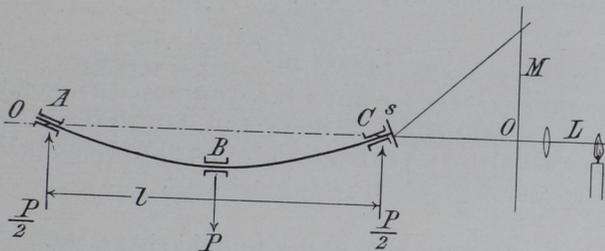


Fig. 129.

ursprünglichen Richtung bildet. An das eine Stabende wird ein Spiegel befestigt, und dessen Winkelbewegung wird abgelesen. Intze lagerte nun seinen Stab derart, dass er ihn unter der Last P um seine ursprüngliche Längsaxe drehen konnte (Fig. 129).

Wurde auf den Spiegel mittelst einer optischen Linsenzusammensetzung L ein dünnes Lichtbündel geworfen, so dass auf der Bildfläche M ein Lichtpunkt erschien, so konnte man den doppelten Winkel β an dem Maassstabe ablesen, oder auf dem Papier anzeichnen. Drehte man nun den Stab [z. B. ein Winkeleisen] und die Papierfläche gemeinsam um die ursprüngliche Mittellinie OO , so musste sich der Winkel β , entsprechend den verschiedenen Trägheitsmomenten des Stabquerschnittes, für die verschiedenen Lagen des Stabes ändern. Wenn die den verschiedenen Stablagen zugehörigen Bildpunkte in allen Lagen verzeichnet wurden, so erhielt man eine Ellipse, entsprechend der sogenannten Trägheitsellipse des Stabquerschnittes.

183. Für die Materialprüfung wird, wie im Abschnitt 172 und 175 bereits hervorgehoben, der Stab über zwei Auflagern liegend in der Mitte belastet geprüft. Als Ergebnisse des Biegeversuchs pflegt man nach der Gleichung:

$$\sigma_1 = \frac{Pl e}{4 \Theta} \dots \dots \dots 20.$$

Die Spannungen für die
 σ_p , Proportionalitätsgrenze,
 σ_s , Biegegrenze,
 σ_B , Bruchgrenze

und die dazu gehörigen Biegungen δ_1 zu bestimmen.

Aus der Gleichung für die Biegungen und den gefundenen Werthen für δ berechnet sich:

$$\alpha_1 = 48 \frac{\Theta \delta}{l^3 P}, \dots \dots \dots 22.$$

oder wenn man das Verhältniss δ/l als den Biegunbspfeil bezeichnet:

$$\alpha_1 = 48 \frac{\Theta \delta}{l^2 P l} \dots \dots \dots 23.$$

Da der Elasticitätsmodul $E = 1/\alpha$, so ergibt sich:

$$E_1 = \frac{1}{\alpha} = \frac{l^2 P l}{48 \Theta \delta} \dots \dots \dots 24.$$

Bezeichnet man den von der Spannungseinheit erzeugten Biegunbspfeil als die Biegungsgrösse, so ist [Gl. 20 und 23] diese:

$$\frac{\delta/l}{\sigma} = \frac{\alpha Pl^2 4\Theta}{48 \Theta Pl e} = \frac{\alpha l}{12 e} \dots \dots \dots 25.$$

Die Biegungsgrösse ist mit α innerhalb der Proportionalitätsgrenze eine Konstante, die, ausser von dem Material, abhängig ist von dem Verhältniss der Stützweite zur Entfernung der äussersten Faserschicht von der neutralen Faser.

3. Biegung und das Aehnlichkeitsgesetz.

184. Auch für die Biegeversuche kann man aus dem Aehnlichkeitsgesetz gewisse Vortheile ziehen. Kick (*L 100*) spricht das Gesetz für den Fall der Biegung wie folgt aus:

Stäbe geometrisch ähnlicher Form desselben Materiales bedürfen zu ähnlicher Durchbiegung, wenn sie in gleicher Art unterstützt oder befestigt und in gleicher Weise beansprucht sind, Belastungen, welche sich proportional ihren Querschnitten verhalten.

Die Worte „wenn sie in gleicher Art unterstützt“ und „in gleicher

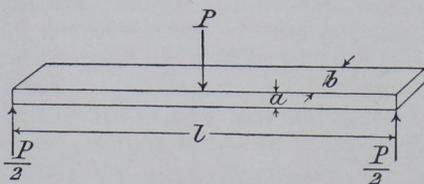


Fig. 130.

„in gleicher Weise beansprucht sind“ können leicht missverstanden werden. Es ist daher darauf aufmerksam zu machen, dass sie sich nicht ganz allgemein auf die Art und Weise der Versuchsanordnung beziehen; im Besonderen müssen vielmehr auch die Abmessungen der Auflager- und Befestigungstheile geometrisch ähn-

liche Abmessungen erhalten, wenn die Bedingungen des Gesetzes streng erfüllt sein sollen.

185. Um die Begründung für das Gesetz zu suchen, seien zwei

geometrisch ähnliche Körper A und A_1 von prismatischer Form (Fig. 130) untersucht. Alle Werthe, die sich auf A beziehen, werden ohne Index, die auf A_1 bezüglichen mit dem Index 1 bezeichnet.

In den beiden Körpern verhalten sich:

1. die Längen $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{l}{l_1} = \frac{1}{n}$,
2. die Flächen $\frac{ab}{a_1 b_1} = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l_1}} \frac{1}{n^2}$,
3. die Körperinhalte und Gewichte $\frac{J}{J_1} = \frac{G}{G_1} = \frac{1}{n^3}$,
4. die Trägheitsmomente $\frac{\Theta}{\Theta_1} = \frac{1}{n^4}$.

Wenn die Durchbiegungen durch den Biegungeppfeil ausgedrückt werden, so ist eine ähnliche Formänderung in beiden Proben A und A_1 erzeugt, wenn:

$$\frac{\delta}{l} = \frac{\delta_1}{l_1} \text{ ist,}$$

denn es wird:

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{l}{l_1} = \frac{1}{n}.$$

Aus der Gleichung 23, S. 134, ergibt sich für Körper A :

$$\frac{\delta}{l} = \frac{a}{48} \frac{Pl^2}{\Theta} \text{ und für Körper } A_1:$$

$$\frac{\delta_1}{l_1} = \frac{a}{48} \frac{P_1 l_1^2}{\Theta_1} \text{ d. h. } = \frac{a}{48} \frac{P_1 l^2 n^2}{\Theta n^4} = \frac{a}{48} \frac{P_1 l^2}{\Theta} \frac{1}{n^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\delta}{l} \cdot \frac{l_1}{\delta_1} = 1 = \frac{aPl^2}{48\Theta} \cdot \frac{48\Theta n^2}{aP_1 l^2} = \frac{P}{P_1} n^2.$$

Der gleiche Biegungeppfeil, d. h. geometrisch ähnliche Formänderung, wird also erzielt, wenn die Belastungen sich verhalten wie 1 zu n^2 oder wie die Querschnittsflächen.

Das Verhältniss der Spannungen ergibt sich aus:

$$\sigma = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{e}{\Theta} \text{ und, da } e_1 = en \text{ und } P_1 = Pn^2,$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1 l_1}{4} \cdot \frac{e_1}{\Theta_1} = \frac{Pn^2 ln}{4} \cdot \frac{en}{\Theta n^4} = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{e}{\Theta}, \text{ so wird}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 \text{ oder}$$

Gleiche Spannungen erzeugen in geometrisch ähnlichen Körpern gleiche Biegungeppfeile.

Benutzt man also zur Auftragung der Schaulinien die Spannungen σ und den Biegungeppfeil δ/l , so erhält man für geometrisch ähnliche Körper aus gleichem Material aufeinanderfallende Schaulinien.

186. Das Aehnlichkeitsgesetz gilt ganz unabhängig von der Biegunge-

theorie für jede Formänderung, auch für die bleibenden Formänderungen, und wenn seine Forderungen beim Versuch nicht erfüllt erscheinen, obwohl alle Grundbedingungen über die Aehnlichkeit der Verhältnisse innegehalten sind, so können nur Unterschiede im Material wirkend gewesen sein.

Um also vergleichbare Ergebnisse unter solchen Verhältnissen zu erzielen, die es unmöglich machen, völlig gleichgestaltete Probestäbe zu benutzen, empfiehlt es sich, in diesen Fällen wenigstens geometrisch ähnliche Stabformen zu verwenden.

Die Belastungsstufen sind dabei proportional den Quadraten der Längenabmessungen, beziehungsweise proportional den Querschnittsflächen zu machen und die Biegungen zweckmässig als Biegungspfeil aufzuschreiben. Die Biegungsgrösse und die Dehnungszahl a sind dann innerhalb der Proportionalitätsgrenze konstante Zahlen und die Biegungspfeile auch über die Elasticitätsgrenze hinaus für die gleichen Spannungen gleich, sobald die Stäbe verschiedener Grösse aus gleichem Material von gleichem Zustande hergestellt sind.

Man erkennt auch hier wieder die Wichtigkeit der Einführung einheitlicher Prüfungsverfahren, die von möglichst weiten Kreisen anerkannt werden. Die Versuche von Bach (*L 138*) mit Gusseisenstäben von verschiedener Form lehren sehr schlagend den geringen Werth, den die Mittheilung von Prüfungsergebnissen aus einem Biegeversuch mit Gusseisen hat, wenn nicht zugleich die Angaben über die benutzten Querschnittsformen beigefügt sind, oder wenn nicht angegeben wird, dass die Ergebnisse auf einen einheitlichen Querschnitt, z. B. das Quadrat oder den Kreis mit den Erfahrungszahlen umgerechnet wurden. Die Erfahrungszahlen sind übrigens noch sehr spärlich und bedürfen der Vermehrung um so dringender, als es keineswegs ausgeschlossen ist, dass sie mit den äusseren Umständen [Verhältnisse beim Giessen, Abkühlen u. s. w.] zusammenhängen.¹⁾

Für die Prüfung von Gusseisen haben diese Erörterungen besonderen Werth, weil dieses Material sehr häufig und unzweifelhaft am zweckmässigsten durch den Biegeversuch geprüft wird. Bei uns in Deutschland ist vielfach der von den Konferenzen zur Vereinheitlichung der Materialprüfungsverfahren (*L 128*) empfohlene Stab von quadratischem Querschnitt mit 3,0 cm Seite und 1 m Stützweite im Gebrauch. Man sollte diesen Stab möglichst allgemein einführen, und wo seine Anwendung unmöglich, wenigstens mit Stäben arbeiten, deren Verhältniss der Stützweite zur Quadratseite

$$l/a = 33,3$$

genommen ist. Uebrigens ist die Art des Giessens und der Umstand, ob die Gusshaut an den Stäben vorhanden ist oder nicht, von erheblichem Einfluss auf das Ergebniss (*L 138*).

c. Knickfestigkeit.

1. Begriffsentwicklung.

187. Die Ausführung des Knickversuches gehört im eigentlichen Materialprüfungswesen zu den Ausnahmen. Kommt ein Knickversuch vor, so handelt es sich fast immer um die Feststellung der Formänderung (Ausbiegung) von Konstruktionstheilen unter Probelasten, z. B. um Prüfung

¹⁾ Jedenfalls ist auch das Verhältniss $\sigma_B : \sigma_B'$ für Gusseisen von dessen chemischer Zusammensetzung abhängig.

von Ständern, Säulen, Gestängen, Brückengliedern u. s. w., selten aber um die vollständige Ermittlung der Materialkonstanten.

Ich will daher auf eine Entwicklung der Knickungstheorien nicht eingehen, sondern kurz die Eulerschen Gleichungen (189) hinschreiben, die ja die wichtigste Grundlage für die Knickungstheorie zu bleiben scheinen. Im Uebrigen verweise ich auf die Werke über Festigkeitslehre von Bach (*L 137*), Grashof (*L 139*) u. A. oder auf die eingehenden Versuche von Bauschinger (*L 140*), Tetmajer (*L 141. 142*) u. A. Bauschinger kommt zu dem Schluss, dass die Eulerschen Gleichungen ausreichend für die Theorie der Knickung sind; Zimmermann (*L 143*) ist gleicher Ansicht. Eine hübsche Herleitung der Eulerschen Gleichungen gab neuerdings Land (*L 144*).

188. Wenn ein langer prismatischer Stab auf Druck geprüft wird, so wird er fast niemals, wie der kurze Körper gleichen Querschnittes, ausbauchen und tonnenförmige Gestalt annehmen, oder die in Absatz 125 mitgetheilten Brucherscheinungen zeigen. Er wird vielmehr fast immer nach der einen oder anderen Seite ausbiegen, und die Brucherscheinungen werden denjenigen ähnlich sein, die man beim Biegeversuch erhält.

Der lange Körper ist niemals ganz streng geradlinig; auch ist es fast unmöglich, ihn so in die Maschine einzuspannen, dass die Krafrichtung genau in die Schwerpunktsaxe des Körpers fällt. Ebenso sind Nebenspannungen, die auf Verbiegen wirken, z. B. die aus mangelhafter Anlage in den Druckflächen, oder bei wagerechter Anordnung der Probirmaschine, in Folge der aus dem Eigengewichte des Probekörpers sich ergebenden Verbiegungen, fast gar nicht zu vermeiden; sie treten im Laufe des Versuches hervor. Alle diese Umstände veranlassen, dass neben der Druckbeanspruchung auch noch Biegungsbeanspruchungen auftreten. Das auf Biegung wirkende Moment ist bei kurzen Körpern klein, und die Kraft P kann noch die Druckfestigkeit überwinden. Aber wenn die Körper im Verhältniss zu den Querschnittsabmessungen lang genug werden, so vergrössert sich unter dem Einfluss der in der Richtung der Stabaxe wirkenden Kraft P der Hebelarm des Biegemomentes schliesslich unaufhaltsam, und der Körper geht nun durch seitliches Ausbiegen zu Bruche. Die Ausbiegung erfolgt, wenn der Körper frei ausweichen kann, in der Regel in der Ebene, welcher das kleinste Trägheitsmoment des Körpers entspricht. War eine merkliche Anfangsbiegung vorhanden, wie das z. B. bei wagerechter Lagerung an langen Körpern vorkommen kann, so pflegt die Durchbiegung bei Körpern, deren Trägheitsmomente für verschiedene Richtungen gleich oder fast gleich sind, in der Regel in der Ebene der ersten Biegung zu verlaufen.

189. Je nach der Art, wie der Körper an seinen Enden befestigt ist, wird die Entwicklung der Form der elastischen Linie beim Knicken und demgemäss auch die Grösse der zum Knicken erforderlichen Kraft, eine andere. Man pflegt vier Angriffsformen zu unterscheiden.

a) Der Körper ist, wie in Fig. 131 angedeutet, an einem Ende fest eingespannt, und die Kraft P wirkt auf das andere Ende parallel zur ursprünglichen Stabaxe, aber sonst ungezwungen ein; das freie Ende des Stabes kann also ganz ungezwungen seitlich ausweichen. Dieser Fall kommt im Prüfungswesen fast gar nicht vor.

b) Der Körper ist, nach Fig. 132, an beiden Enden frei beweglich (in Schneiden-, Spitzen- oder Kugelgelenken), aber die Enden

sind so geführt, dass die Krafrichtung stets durch die Stützmittelpunkte geht. Dieser Fall wird bei Versuchen häufig benutzt.

c) Der Körper ist, nach Fig. 133, wie im Fall *a* fest eingespannt und am andern Ende wie bei Fall *b* beweglich und geführt.

d) Der Körper ist, nach Fig. 134, an beiden Enden fest eingespannt, aber die Enden sind so geführt, dass die Krafrichtung stets durch die Stützmittelpunkte geht. Bei Versuchen häufig angewendet.

Die für diese vier Fälle sich ergebenden Grenzbelastungen *P*, bei welchen nach Bauschinger die bereits von vornherein vorhandenen und bei der langsamen Steigerung der Belastung zuerst langsam wachsenden

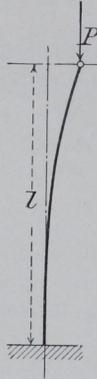


Fig. 131.

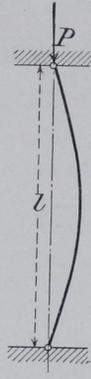


Fig. 132.

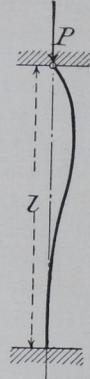


Fig. 133.

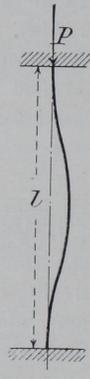


Fig. 134.

Ausbiegungen fast plötzlich jedes Maass überschreiten,¹⁾ sind durch die folgenden vier Eulerschen Gleichungen für die einzelnen Belastungsarten gegeben, und zwar beim Vorgange nach Fig. 131:

$$a) P = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{a} \frac{\Theta}{l^2} \dots \dots \dots 26.$$

wenn *a* die Dehnungszahl, *l* die Stablänge und Θ das für die Biegungrichtung maassgebende Trägheitsmoment ist.

Beim Vorgange nach Fig. 132 wird:

$$b) P = \pi^2 \frac{1}{a} \frac{\Theta}{l^2} \dots \dots \dots 27.$$

bei Beanspruchung nach Fig. 133 wird:

¹⁾ Bach (*L 137*, §. 24) giebt für die Ausbiegung *y* im Fall *a* die Gleichung:

$$y = a \frac{1 - \cos\left(x \sqrt{\frac{aP}{\Theta}}\right)}{\cos\left(e \sqrt{\frac{aP}{\Theta}}\right)} \text{ und}$$

stellt hierzu eine sehr anschauliche Rechnung über die Biegungen an, die ein schmiedeeiserner Stab von 100 cm Länge und 1 cm Durchmesser erfährt, wenn *P* allmählich wächst. Wenn *a* der unbekannt kleine Hebelarm ist an dem die Kraft *P* das Biegemoment erzeugt, so wird für

Belastung *P* = 5 10 15 20 22,5 24,7 kg,
die Biegung *S* am Stabende 0,32*a* 0,85*a* 1,95*a* 5,54*a* 13,16*a* ∞*a*, der Stab knickt aus.

$$c) P = 2\pi^2 \frac{1}{a} \frac{\Theta}{l^2} \dots \dots \dots 28.$$

und wenn Fig. 134 in Frage kommt:

$$d) P = 4\pi^2 \frac{1}{a} \frac{\Theta}{l^2} \dots \dots \dots 29.$$

Bei Anwendung dieser Formeln für die Rechnung muss man im Auge behalten, dass man hinsichtlich ihrer Ableitung gegen die Voraussetzungen ähnliche Einwendungen machen kann, wie sie in Abschnitt 172 gegen die Biegungstheorie vorgeführt wurden. Auch wird man nicht vergessen dürfen, dass die vier Belastungsformen praktisch nie zum Ausdruck kommen, dass es vielmehr Uebergänge von einem Fall zum andern giebt, ja dass es sogar vorkommen kann, dass während des Versuches die Art der Inanspruchnahme von einem Fall zum andern überspringt. Der Konstrukteur muss diese Möglichkeiten von Fall zu Fall erwägen. Aus diesen Gründen haben die empirisch abgeleiteten Formeln wohl nicht immer den praktischen Werth, den sie scheinbar wegen der Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen besitzen, aus denen sie abgeleitet wurden.

2. Der Knickversuch.

190. Die Einspannvorrichtungen für die Ausführung von Knickversuchen müssen so eingerichtet sein, dass der Körper seine Form möglichst ungetrübt nach einer der in Fig. 131 bis 134 gegebenen Arten ändert. Deswegen pflegt man die Körper selbst oder besondere Auflagerstücke mit Schneiden, Spitzen oder Kugeln zu versehen, und im letzteren Falle richtet man es auch wohl so ein, dass die Auflagerstücke auch unverrückbar fest mit den Maschinentheilen verbunden werden können.

In Fig. 38, Absatz 73, S. 44, ist die Einspannvorrichtung für die Werdermaschine schematisch angegeben. Die Platte ist in der Kugelschale entweder frei beweglich [allerdings durch die Reibung auf der Kugelfläche gehindert], oder sie kann mit Hilfe von vier Schrauben unbeweglich eingestellt werden.

191. Die Messung der Formänderung ist meistens eine etwas umständliche Sache. Am einfachsten kann sie sich in den Fällen gestalten, in denen die Körper selbst mit den Schneiden, Spitzen oder Kugeln für die Auflagerung versehen sind, und wenn man sicher ist, dass die Auflagerpunkte keinerlei Seitenverschiebung erfahren können. Das wird aber nur selten der Fall sein, und bei Feinmessungen ist man daher darauf angewiesen, immer die Möglichkeit der Verschiebung an den Auflagern vorzusetzen.

Sind die Seitenbewegungen in den Auflagern ausgeschlossen, so genügt es, die Messung der Durchbiegung in der Stabmitte, bezogen auf zwei feste Punkte im Raum, vorzunehmen, so dass die beiden Bewegungskomponenten in der Ebene des Mittelquerschnittes rechtwinkelig zu einander festgestellt werden. Im zweiten Falle wird man in gleicher Weise auch noch die Bewegungskomponenten in zwei möglichst nahe den Auflagern liegenden Querschnittsebenen messen, und dann die wirkliche Stabbiegung aus allen diesen Messungen rechnerisch oder zeichnerisch ermitteln; allerdings ein umständliches aber nothwendiges Verfahren.

192. Bauschinger hat auch für diese Art der Messung sehr zweckmäßige Apparate konstruirt, deren schematische Zeichnung in Fig. 135 gegeben ist. Die Bewegungen des Säulenquerschnittes S , in Folge der Aus-

knickung in der Richtung AB , werden mittelst der in eine Körnermarke eingreifenden Spitze der Stange h auf den Zeiger Z übertragen, der an einem mit dem Maschinengestell fest verbundenen Rahmen G seinen Drehpunkt hat und die Bewegungskomponente von S in AB in doppeltem Maassstabe am Messbogen M anzeigt. Ganz in gleicher Weise werden die Komponenten in CD durch die Stange h_1 auf den Zeiger Z_1 übertragen, der an M_1 die Bewegung ebenfalls in doppeltem Maassstabe anzeigt. Die Messbogen werden zu Anfang durch eine Einstellvorrichtung auf Null gestellt; sie tragen positive und negative Bezifferung, so dass man aus der Ablesung den

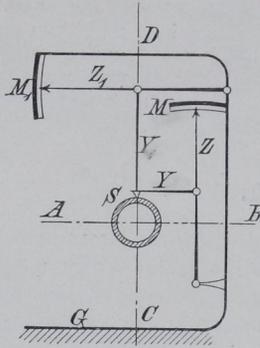


Fig. 135.

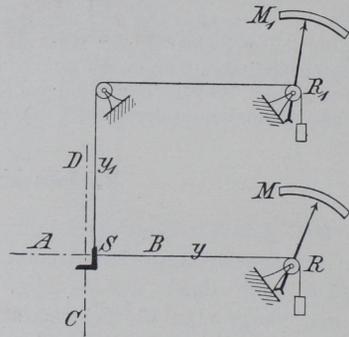


Fig. 136.

Quadranten erkennt, in den der Mittelpunkt des Querschnittes eintritt. Bauschinger wendet drei solcher Apparate an, wie oben angegeben; sie arbeiten recht sicher.

193. Bauschinger hat gelegentlich auch seinen in Abschnitt 77, S. 47, Fig. 42 beschriebenen Rollenapparat benutzt, indem er ihn, wie in Fig. 136 angedeutet, aufstellte. Die Bewegungen des Stabquerschnittes S werden durch die Drähte Y und Y_1 auf die Rollen R und R_1 übertragen und von den Zeigern im zehnfachen oder zwanzigfachen Maassstabe angezeigt. Die Stützen für alle Rollen müssen natürlich fest im Raume stehen.

194. Man kann das Bauschingersche Verfahren ganz gut auch für Selbstaufzeichnungen bis zu etwa fünffacher Vergrößerung benutzen, wenn man nach Fig. 137 an leichten Holzhebeln H eine Tafel P und einen Schreibstift Z befestigt. Der Stift wird dann Biegungsrichtung und Biegungsgrösse angeben, und man braucht keine Berechnung aus Beobachtungswerthen anzustellen.

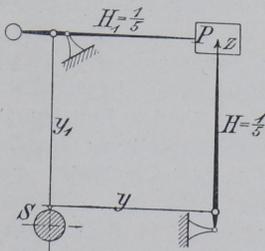


Fig. 137.

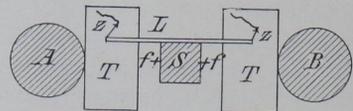


Fig. 138.

195. Im Ingenieur-Laboratorium in Boston, Mass., wird an der Emerymaschine, die in Fig. 138 schematisch angedeutete Einrichtung benutzt, um die Verbiegungen der Knickprobe selbstthätig aufzuzeichnen.

Zu dem Zweck ist an dem Probestab S eine Latte L befestigt, die mittelst der beiden Zeiger Z die Bewegungen ihrer Endpunkte auf die Tafeln T verzeichnet, die ihrerseits mit den Säulen A und B des Maschinengestells fest verbunden sind. Aus den Aufzeichnungen werden die Bewegungen des Stabmittelpunktes in der Querschnittsebene von S abgeleitet. Man misst übrigens durch die beiden bei f angebrachten Mikrometer zugleich auch die Zusammendrückungen des Stabes in der Längsrichtung.

196. Bauschinger hat, um sich von der Messung der Verschiebungen an beiden Stabenden frei zu machen und die Messung nur auf die Mittelebene zu beschränken, die in Fig. 139 schematisch angedeutete Einrichtung getroffen. Auf dem Stabe S sind drei zweitheilige auseinander klappbare Ringe R durch je vier Stellschrauben befestigt. Die beiden äusseren Ringe tragen auf Vorsprüngen die lose aufliegende Latte L . Der mittlere Ring trägt die beiden Ablesemikroskope M_1 und M_2 , von denen das eine am Objektiv-Mikrometer O_1 die Verschiebungen des Stabes in senkrechter Richtung angiebt; das Mikroskop M_2 misst an O_2 die Verschiebung in wagerechter Richtung. Die Latte L ist durch die Eigenbewegungen der beiden Stützpunkte nur äusserst wenig beeinflusst, so dass man ihre Lage in Bezug auf die Mittelpunkte des Stabquerschnittes in der Befestigungsebene der Lattenenden als unverrückbar ansehen darf. Man misst also unmittelbar die beiden Komponenten der Durchbiegungen des Stabes, bezogen auf die Lattenlänge l . Die Messungen sind aber etwas umständlich und erfordern geübte Beobachter.

197. Für die Knickversuche werden meistens liegend angeordnete Maschinen gebraucht, weil diese Versuche vielfach ausgeführt werden, um grosse Körper, Säulen u. s. w. zu probiren und weil aufrechtstehende Maschinen für lange Stücke unbequem werden. Bei den liegenden Maschinen hat man besondere Vorkehrungen für zwanglose Aufhebung des Eigengewichtes der Probekörper zu treffen, falls man feine Versuche durchführen will. Bauschinger hat dies bei der Werdermaschine gethan, indem

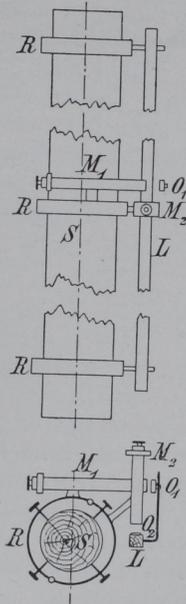


Fig. 139.

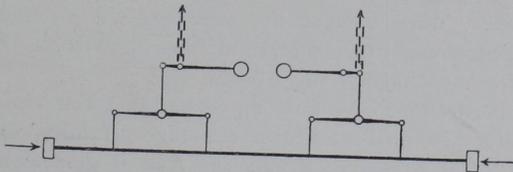


Fig. 140.

er unter die Säule Balancirhebel angreifen liess, die ihre Stütze am Maschinengestell hatten. Man muss solche Hebel dann aber so einrichten, dass sie auch die Seitenbewegungen der Säule ohne Zwang gestatten. Wo Krane über der Maschine vorhanden sind, kann dies leicht und recht vollkommen geschehen, indem man nach Maassgabe von Fig. 140 die Probe

an Hebeln aufhängt, wobei die Stützpunkte so gewählt werden können, dass die Biegungen unter dem Eigengewicht zwischen den Stützpunkten ein Minimum werden. Tetmajer giebt (*L 142*, S. 22) eine Aufhängung in Federn an.

198. Bei den Knickversuchen wird meistens die grösste Durchbiegung unter einer vorgeschriebenen Probelast gemessen und festgestellt, ob bleibende Durchbiegungen vorhanden sind oder nicht. Wird der Versuch als Materialprüfung bis zur Zerstörung durchgeführt, so pflegt man die Durchbiegung für bestimmte Laststufen bis zur Erreichung der Grenzbelastung zu messen, bei welcher unaufhaltsames Ausweichen des Körpers oder der Bruch stattfindet.

Will man Schaubilder über die Grösse der Biegungen unter verschiedenen Lasten verzeichnen, so können hierzu natürlich nur die absoluten Biegungen benutzt werden. Man wird innerhalb der Proportionalitätsgrenze proportionale Biegungen finden, indessen meistens durch viele Zufälligkeiten getrübt.

d. Verdrehungsfestigkeit.

1. Begriffsentwicklung.

199. Ebenso wie die Knickfestigkeit, wird die Verdrehungs- oder Verwindungsfestigkeit im eigentlichen Materialprüfungswesen selten festgestellt (*L 136*, 1896 S. 1381). Wenn dies geschieht, so pflegt es sich meistens um die Prüfung cylindrischer Stücke, namentlich von Wellen und Axen zu handeln. Die Prüfung von Konstruktionstheilen auf Festigkeit gegen Verdrehen kommt vor, ist aber dann nicht mehr Aufgabe des Materialprüfungswesens. Ich gebe deswegen nur die Gleichungen für den kreisförmigen Querschnitt und verweise auch hier wieder auf die Werke über Festigkeitslehre, z. B. von Bach, Grashof u. A. (*L 137* und *139*), sowie auf die eingehenden Arbeiten von Bauschinger (*L 145*) und Bach (*L 138*).

200. Ein gerader prismatischer Körper wird allein auf Verdrehung beansprucht, wenn die auf ihn wirkenden äusseren Kräfte in allen Querschnitten nur ein Kräftepaar erzeugen, dessen Ebene senkrecht zur Axe des Körpers steht.

Das Drehmoment M_a der Kräftepaare bewirkt eine Verdrehung des Endquerschnittes 2 gegen den Endquerschnitt 1 des Körpers Fig. 141. Die Erfahrung lehrt, dass hierbei die ursprünglich ebenen Querschnitte auch nach der Verdrehung eben sind, und dass die Grösse der Verdrehung des Stabes in allen Abschnitten die gleiche ist.

Ist nun die Verdrehung, die zwei im Abstände 1 von einander stehende Querschnitte 1 und 2, Fig. 142, gegen einander erfahren, die Schiebung γ senkrecht zu OA im Abstände r von der Axe O gemessen, so wird für den Punkt B im Abstände r' von der Axe die Schiebung:

$$\gamma' = \gamma \frac{r'}{r}$$

sein, d. h. die Schiebungen sind proportional dem Abstände r' an der Axe O ; ihre Grösse für verschiedene Abstände r' ist durch die Gerade $A'O$ bestimmt.