

Bernhard GIRSTMAIR

Vergleich von Rad-Schiene Kontaktmodellen und deren Einfluss auf den Kraftschluss

Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieur
Studienrichtung Wirtschaftsingenieurwesen-Maschinenbau
vorgelegt der Fakultät für Maschinenbau und
Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Graz

Beurteilerin: Ellermann, Katrin, Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil.
Betreuer: Mair, Mathias, Dipl.-Ing.
Betreuer extern: Marte, Christof, Dipl.-Ing.

Institut für Mechanik
Technische Universität Graz

Graz, 2012

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am 15. März 2012

.....
(B. Girstmair)

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Zeitraum von August 2011 bis Februar 2012 am Kompetenzzentrum - Das virtuelle Fahrzeug - Forschungsgesellschaft mbH und am Institut für Mechanik der TU Graz.

Großer Dank gilt Herrn Dipl. Ing. Christof Marte und Herrn Dr. Klaus Six vom Kompetenzzentrum die mir in fachlichen Diskussionen stets wichtige Hinweise zur Arbeit gegeben haben. Auch ihre ständige Hilfsbereitschaft sowie das freundliche Arbeitsklima haben zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Sehr herzlich möchte ich mich bei Frau Professor Katrin Ellermann für die Übernahme und wissenschaftliche Betreuung der Arbeit bedanken. Es sei an dieser Stelle auch Herrn Dipl. Ing. Mathias Mair für seine wertvollen fachlichen Anregungen und freundschaftlichen Ratschläge zu dieser Arbeit gedankt.

Ein herzliches Dankeschön gilt vor allem meinen Eltern, die mir während meines Studiums stets Rückhalt gegeben haben und deren finanzielle Unterstützung mir diesen akademischen Werdegang erst ermöglicht hat.

Graz, im März 2012

Bernhard Girstmair

Kurzfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist der Vergleich der Rad-Schiene Kontaktmodelle CONTACT beziehungsweise FASTSIM von J.J. Kalker, WheelsetContact vom Kompetenzzentrum - Das virtuelle Fahrzeug - Forschungsgesellschaft mbH und Siemens Rollkontakt Simulation bei konformen ebenen, konformen gekrümmten und nicht konformen Hertz'schen sowie nicht Hertz'schen Kontaktsituationen. Die Ermittlung und der Vergleich zwischen Längsschlüpfen und Reibkräften für die einzelnen Modelle sind ein wesentlicher Punkt dieser Diplomarbeit. Weiters wird die Form der Kontaktflächen verglichen und es werden die in der Kontaktfläche auftretenden Spannungen gegenübergestellt.

Die verwendeten Programme basieren auf stark unterschiedlichen mechanischen Modellen und weisen auch hinsichtlich der Rechenzeit starke Unterschiede auf. Das Hauptaugenmerk liegt auf den Programmen CONTACT beziehungsweise FASTSIM, deren Algorithmen und Lösungsprozesse analysiert werden.

Abstract

A comparison of the wheel-rail contact models CONTACT and FASTSIM by J.J. Kalker, WheelsetContact from the Virtual Vehicle and Siemens Rollkontakt Simulation is presented. Conform, conformly curved and non conform Hertzian as well as non Hertzian contact conditions are considered. The calculation of the interrelationship between longitudinal slips and traction forces of the different models form the main part of this work. Furthermore the shape of the contact area and the stresses that occure in this contact area are compared.

The used programmms are based on completely different mechanical models and have different computation times. The main focus is on the programmms CONTACT, respectively, FASTSIM, whose algorithm and solution processes are analyzed.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	7
1 Einleitung und Zielsetzung	10
1.1 Vorbemerkung und Motivation	10
1.2 Zielsetzung der Arbeit	11
2 Theoretische Grundlagen zur Beschreibung des Rad-Schiene Kontaktes	12
2.1 Der elastische Halbraum	13
2.1.1 Der elastische Halbraum belastet mit einer Streckenlast	13
2.1.2 Die Potential Funktionen von Boussinesq und Cerruti	15
2.1.3 Elastischer Halbraum - konzentrierte Normalkraft	17
2.1.4 Elastischer Halbraum - allgemeine Normalspannungsverteilung	18
2.1.5 Elastischer Halbraum - Hertz'sche Pressung	19
2.2 Normalkontaktmechanik - Hertz'sche Theorie	21
2.2.1 Beschreibung der Oberfläche der sich kontaktierenden Körper	21
2.2.2 Lösung des Problems	23
2.3 Kinematische Beziehungen von Rad-Schiene Systemen	25
2.3.1 Das Rad als starrer Körper	25
2.3.2 Die Konizität des Rades	26
2.3.3 Das Rad als elastischer Körper	26
2.3.4 Berechnung der Relativgeschwindigkeit in der gekrümmten Kontaktfläche	28
2.4 Tangentialkontaktmechanik	29
2.4.1 Das Bürstenmodell	29
2.4.2 Analytische Lösung für Walzenkontakt (Linienkontakt)	30
2.4.3 Näherungslösung für den dreidimensionalen Fall	32
2.4.4 Lineare Theorie für elliptische Kontakte	33
2.4.5 Kalkers vereinfachte Theorie des Rollkontaktes - FASTSIM	34
3 Die Kontaktmodelle CONTACT und FASTSIM von J.J. Kalker	35
3.1 CONTACT	35
3.1.1 Formulierung des Problems	35
3.1.2 Diskretisierung des Problems	37
3.1.3 Diskretisierung des Schlupfes	39
3.1.4 Die Lösung des Normalproblems mit Hilfe des NORM-Algorithmus	40
3.1.5 Die Lösung des Normalproblems bei vorgegebener Normalkraft - adaptierter NORM-Algorithmus	41
3.1.6 Die Lösung des Tangentialproblems mit Hilfe des TANG-Algorithmus	42
3.1.7 Lösungsprozesse	44
3.1.8 Spezifizierung eines Falles	46
3.2 FASTSIM	46
3.2.1 Der FASTSIM-Algorithmus	47

3.2.2	Spezifizierung eines Falles	48
4	Vergleich von Simulationsergebnissen	50
4.1	Systematik des Vergleichs bei Hertz'schen Kontaktsituationen	50
4.2	Hertz'scher Kontakt	53
4.2.1	Beispiel zum konformen ebenen Kontakt	53
4.2.2	Beispiele zum konformen gekrümmten Kontakt	58
4.2.3	Beispiel zum nicht-konformen Kontakt	60
4.3	Nicht Hertz'scher Kontakt - reale Profile	62
5	Zusammenfassung	72
	Abbildungsverzeichnis	74
	Literaturverzeichnis	77
A	Beispielanhang	79
A.1	Hertz'sche Theorie - ein einfaches Beispiel	79
B	Anhang	82
B.1	Fall <i>c</i>)	82
B.2	Fall <i>d</i>)	83

Symbolverzeichnis

Formelzeichen und Begriffe

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$...	Normalspannungen
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$...	Schubspannungen
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$...	Dehnungen und Gleitungen
u_x, u_y, u_z	...	Verschiebungen
F_z	...	Normalkraft
T_x	...	resultierende Tangentialkraft in Rollrichtung
T_y	...	resultierende Tangentialkraft in Querrichtung
p_z	...	Normalspannung an der Oberfläche
p_0	...	maximale Normalspannung an der Oberfläche
p_x	...	Tangentialspannung an der Oberfläche in Rollrichtung
p_{x0}	...	maximale Tangentialspannung an der Oberfläche in Rollrichtung
p_y	...	Tangentialspannung an der Oberfläche in Querrichtung
p_τ	...	resultierende Tangentialspannung an der Oberfläche
g	...	traction bound
μ_0	...	Haftkoeffizient
μ	...	Reibkoeffizient
E	...	Elastizitätsmodul
G	...	Schubmodul
ν	...	Querkontraktionszahl
Φ	...	Spannungsfunktion
$\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{H}_1$...	Potentialfunktionen
$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$...	partiellen Ableitungen der Potentialfunktionen
ψ_1	...	Boussinesq Potentialfunktion
ψ	...	partielle Ableitung der Boussinesq Potentialfunktion
a	...	Länge der Halbachse der Ellipse in Rollrichtung
b	...	Länge der Halbachse der Ellipse in Querrichtung
c	...	mittlerer Kontaktradius
R', R''	...	relativer Hauptkrümmungsradius in Roll- und Querrichtung
R_e	...	äquivalente Radius
E^*	...	äquivalente Elastizität
A, B	...	Hertz Faktoren
ρ	...	Krümmung
d	...	Eindringung
ω	...	Winkelgeschwindigkeit des Radsatzes um die Radsatzachse
ω_y	...	zur Berührebene parallele Komponente der Winkelgeschwindigkeit
ω_z	...	zur Berührebene normale Komponente der Winkelgeschwindigkeit

V	...	Referenzgeschwindigkeit
\mathbf{v}_c	...	Relativgeschwindigkeit in der Kontaktfläche
$\mathbf{v}_{c_gekrümmt}$...	Relativgeschwindigkeit in der gekrümmten Kontaktfläche
\mathbf{s}	...	Starrkörperschlupf
s_x	...	Längsschlupf
s_y	...	Querschlupf
s_z	...	Bohrschlupf
\mathbf{s}_τ	...	Starrkörperschlupfgeschwindigkeit
$\mathbf{w}_{Schlupf}$...	wahrer Schlupf
$\mathbf{w}_{Schlupf_stationär}$...	stationärer wahrer Schlupf
\mathbf{w}_τ	...	wahre Schlupfgeschwindigkeit
$\dot{\mathbf{u}}_\tau$...	Formänderungsschlupfgeschwindigkeit
$\mathcal{A}_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$...	Einflussfunktion
h	...	Abstand der undeformierten Körper
h^*	...	modifizierter Abstand der undeformierten Körper
e	...	Abstand der deformierten Körper
Q	...	gesamte potentielle Kontaktfläche
E	...	Fläche die nicht in Kontakt ist
C	...	Kontaktfläche
G, H	...	Gleit-, Haftgebiet
δq	...	in Rollproblemen, der pro Zeitschritt zurückgelegte Weg
δt	...	Zeitschritt

Indizes und Operatoren

$(\dots)_x, (\dots)_1$...	Rollrichtung
$(\dots)_y, (\dots)_2$...	Querrichtung
$(\dots)_z, (\dots)_3$...	Normalenrichtung
$(\dots)^S$...	Schiene
$(\dots)^R$...	Rad

Abkürzungen

WSC	...	WheelsetContact
SRS	...	Siemens Rollkontakt Simulation

1 Einleitung und Zielsetzung

Seit jeher hat der Mensch ein Grundbedürfnis nach Mobilität [21] und strebt danach sich mit geringstem Kraftaufwand und gleichzeitig größtmöglichem Komfort fortzubewegen. Die Erfindung des Rades steht mit dem Begriff der Mobilität in einem untrennbaren Zusammenhang, da im Wesentlichen alle Fahrzeuge des Landtransportes über das Abrollen eines Rades funktionieren.

1.1 Vorbemerkung und Motivation

Historisch gesehen begann die Entwicklung des Rades im bronzezeitlichen Ägypten mit der Idee, Zylinder unter schwere Lasten zu geben, um so beim Transport den Widerstand zu verringern [19]. Diese mussten allerdings nachdem sie unter der Last durch gerollt sind wieder vor die Last gegeben werden. Somit versteht man unter dem heutigem Begriff Rad eigentlich die Kombination des Rades mit einer Achse und entsprechender Lagerung. Zur Verbesserung der Spurführung und zur Verringerung des Rollwiderstandes wurden spezielle Fahrwege errichtet, und so gelten die gleisgebundenen Pferdebahnen des Bergbaus als Vorreiter der heutigen Eisenbahn. Die Erfindung der Dampfmaschine führte dazu, dass ein leistungsfähiger und zuverlässiger Antrieb für Fahrzeuge zur Verfügung stand und machte so die Eisenbahn zu einem Katalysator der industriellen Revolution [1]. Damit gewann auch der Rad-Schiene Kontakt zunehmend an Bedeutung, da er für die Kraftübertragung und Spurführung verantwortlich ist. Der Rad-Schiene Kontakt ist von großer Relevanz für das System Schienenfahrzeug, denn nur wenn man in der Lage ist, die Kontaktkräfte korrekt zu beschreiben, kann man auch eine gute Vorhersage über das fahrzeug-dynamische Verhalten von Schienenfahrzeugen treffen. Aus technischer Sicht ist der Rad-Schiene Kontakt interessant, da er starke Nichtlinearitäten in der Geometrie und im physikalischen Modell beinhaltet und in ihm die größten Belastungen in technischen Systemen überhaupt auftreten. Der Rad-Schiene Kontakt hat auch große wirtschaftliche Bedeutung für die Bahnbetreiber, spielen nämlich Rad und Schiene nicht perfekt zusammen, so tritt erhöhter Verschleiß beziehungsweise Schädigung auf, was zu höheren Instandhaltungskosten führt.

Erste Forschungsarbeiten im Bereich der Schienenfahrzeuge gab es bereits in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts [18, S. 4]. Es gibt eine Vielzahl von Entwicklungen (stärkeres Verkehrsaufkommen; höhere Achslasten, Geschwindigkeiten, Antriebs- und Bremsbeschleunigungen) die dazu führen, dass der Rad-Schiene Kontakt höher beansprucht wird und es dadurch erhöhten Verschleiß gibt. Außerdem ist das Auftreten von Ermüdungsercheinigungen und Schädigungsmuster, wie beispielsweise Head-Checks¹, erkennbar. Diese Sachverhalte zeigen, dass es nötig ist weiterzuforschen, um bestehende Modelle weiter zu verbessern, beziehungsweise neue Modelle zu entwickeln, die in der Lage sind, Verschleiß und Schädigung besser abzubilden. Ein guter Kompromiss zwischen Rechenzeit und Genauigkeit ist wichtig, da Kontaktmodelle häufig in Mehrkörpersimulationen integriert sind und deshalb schnelle Rechenzeiten aufweisen sollen.

¹Head-Checks sind kleine Risse an der Schienenkante

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Ziel dieser Diplomarbeit ist es mit den drei bestehenden Kontaktmodellen, die in den Programmen, CONTACT beziehungsweise FASTSIM von J.J.Kalker, WheelsetContact vom Kompetenzzentrum - Das virtuelle Fahrzeug - Forschungsgesellschaft mbH und Siemens Rollkontakt Simulation implementiert sind, verschiedene Szenarien hinsichtlich Genauigkeit zu simulieren und die Ergebnisse in einem systematischen Vergleich zu analysieren. Dabei werden konforme ebene, konforme gekrümmte und nicht-konforme Hertz'sche sowie nicht Hertz'sche Kontaktsituationen betrachtet. Die Ermittlung und der Vergleich zwischen Längsschlüpfen und Reibkräften für die einzelnen Modelle sind ein wesentlicher Punkt dieser Diplomarbeit. Weiters wird die Form der Kontaktflächen verglichen und es werden die in der Kontaktfläche auftretenden Spannungen gegenübergestellt.

In Kapitel 2 wird ein Einblick in die theoretischen Grundlagen des Rad-Schiene Kontaktes gegeben. Nach allgemeinen Überlegungen über die Funktionen des Rad-Schiene Kontaktes werden die Grundgleichungen von Boussinesq und Cerruti gezeigt. Anschließend wird die Theorie von Hertz erläutert. Es folgt eine kurze Einführung in die Kinematik des Rades, ehe das Kapitel mit den wichtigsten Theorien der Tangentialkontaktmechanik abgeschlossen wird.

Kapitel 3 widmet sich den mechanischen Modellen, die in den Programmen CONTACT und FASTSIM von J.J.Kalker implementiert sind. Dabei liegt der Fokus auf CONTACT, das in vielen Fällen als Referenz gilt und als Software frei verfügbar ist. Ausgehend von der Formulierung des Problems wird die Diskretisierung des Problems sowie die Lösungsalgorithmen und Prozesse erläutert. Beim Programm FASTSIM wird ebenfalls der Algorithmus erklärt.

Die Darstellung der Simulationsergebnisse, der in Kapitel 3 erklärten Programme, ist Inhalt des Kapitels 4. Dabei wird zunächst das Vorgehen beim Vergleich kurz erläutert und anschließend werden die Simulationsergebnisse gezeigt und analysiert.

2 Theoretische Grundlagen zur Beschreibung des Rad-Schiene Kontaktes

Die Beschreibung des Rad-Schiene Kontaktes ist eine Kernaufgabe in der technischen Abbildung von Schienenfahrzeugen. In ihm geschieht die Kraftübertragung und Spurführung. Man kann über das fahrzeug-dynamische Verhalten von Schienenfahrzeugen nur eine Vorhersage tätigen, wenn man die Kontaktkräfte korrekt beschreiben kann.

Der Rad-Schiene Kontakt hat im Wesentlichen drei Aufgaben zu erfüllen [5, S.13], die in Abbildung 2.1 dargestellt sind.

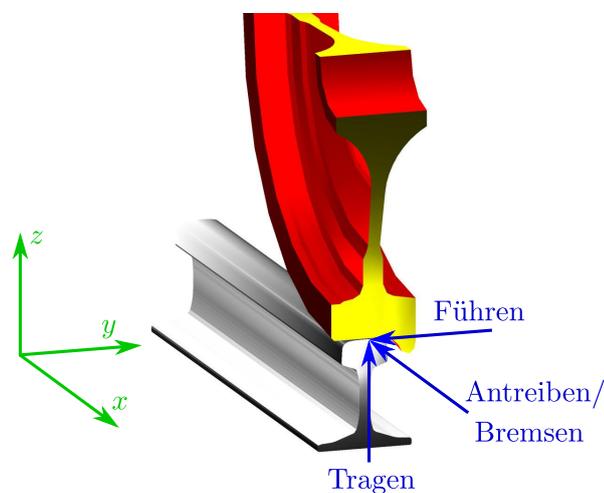


Abbildung 2.1: Funktionen des Rad-Schiene Kontaktes

1. Tragen: Der eingepprägten Gewichtskraft in vertikaler Richtung muss nach dem dritten newtonschen Gesetz eine Reaktionskraft entgegenwirken.
2. Führen: Das Fahrzeug muss in lateraler Richtung geführt werden, damit es die Spur hält.
3. Antreiben/Bremsen: Übertragung von Kräften in Rollrichtung, um das Fahrzeug zu beschleunigen oder abzubremsen.

Die Größe der Kontaktfläche, auf der diese Kräfte übertragen werden, liegt in der Größenordnung der geometrischen Abmessungen von Geldmünzen, also von der Flächendimension im Bereich von Quadratzentimeter. Diese Tatsache und aufgrund der hohen Radlasten im Bereich von 4 bis 15 Tonnen treten im Rad-Schiene Kontakt sehr hohe Spannungen auf.

Berühren sich nicht konforme elastische Körper, so entsteht eine Kontaktfläche, deren Dimension wesentlich kleiner ist als die Dimension der Krümmungsradien der sich kontakt-

ierenden Körper. Es handelt sich um einen nicht konformen Kontakt¹, wenn die Geometrien nicht übereinstimmen. Von einem konformen Kontakt spricht man im Gegensatz, wenn die Oberfläche der beiden unverformten Körper im Bereich des Kontaktes exakt oder beinahe exakt übereinstimmen [13, S. 2.7].

Bei der mechanischen Beschreibung des Rad-Schiene Kontaktes kann man im Wesentlichen zwischen zwei Problemstellungen unterscheiden:

- Normalproblem: Die Form, Lage und Größe der Kontaktfläche wird mit Hilfe des Normalproblems erfasst. Weiters muss der Verlauf der Normalspannung und das damit verbundene Maximum bestimmt werden. Mit dem Spannungsmaximum in Normalrichtung kann auch abgeschätzt werden, inwieweit der Werkstoff von seinen Materialeigenschaften belastet ist.
- Tangentialproblem: Kernfrage des Tangentialproblems ist neben dem Zusammenhang zwischen Schlupf und Tangentialspannung, die Detektion der Haft- und Gleitgebiete.

Im linear elastischen Bereich und bei gleichen Werkstoffkennwerten sind die beiden Problemstellungen unabhängig voneinander. Die Lösung kann dann in zwei Schritten berechnet werden, da die Verschiebung in Normalrichtung unabhängig von der Spannung in Tangentialrichtung, beziehungsweise die Verschiebung in Tangentialrichtung unabhängig von der Spannung in Normalrichtung ist. Zunächst ist das Normalproblem zu lösen, wobei Form und Lage der Kontaktfläche, sowie der Verlauf der Normalspannung bestimmt werden. Anschließend teilt man im Tangentialproblem die Kontaktfläche in Haft- und Gleitgebiet und berechnet den Verlauf der Tangentialspannung.

2.1 Der elastische Halbraum

Unter einem elastischen Halbraum versteht man einen unendlich ausgedehnten Körper, der nur durch eine Ebene begrenzt ist und elastisches Materialverhalten aufweist. Der elastische Halbraum wird in der Kontaktmechanik, wie beispielsweise in der Theorie von Hertz oder bei den Potential Funktionen von Boussinesq und Cerruti oft als Grundannahme getroffen. Für den elastischen Halbraum gibt es bekannte Lösungen für den Zusammenhang zwischen Spannungen und Verformungen [13, S. 2.8].

Sind die Verformungen der Körper klein genug, so kann die lineare Elastizitätstheorie angewandt werden. Die Kontaktspannungen sind stark auf die Nähe der Kontaktzone konzentriert und fallen mit zunehmender Entfernung vom Kontakt rapide ab. Die Spannungen können mit guter Näherung berechnet werden, indem man die Körper als elastische Halbräume betrachtet. Diese Idealisierung wird fast überall in der elastischen Kontakttheorie gemacht. Im folgenden werden die Grundgleichungen für den elastischen Halbraum wiedergegeben.

2.1.1 Der elastische Halbraum belastet mit einer Streckenlast

Zunächst wird mit dem einfachen Fall einer eindimensionalen Belastung in Form einer Linienlast begonnen, vergleiche Abbildung 2.2. Im Speziellen sind die Streifen der Belastung

¹Den nicht konformen Kontakt kann man weiter unterscheiden in Punktkontakt und Linienkontakt. Entscheidend ist hier wie die erstmalige Berührung aussieht. Kontaktieren sich die Körper in einem Punkt, handelt es sich um Punktkontakt, bei einem Kontakt entlang einer Linie spricht man vom Linienkontakt.

parallel zur y-Achse und haben eine Breite von $a + b$ in Richtung der x-Achse. Die Belastung setzt sich aus einer Komponente in Normalrichtung $p_z(x)$ und einer Komponente in Tangentialrichtung $p_x(x)$ zusammen. Es handelt sich um einen ebenen Spannungszustand, das heißt $\varepsilon_y = 0$. [12, S. 12f]

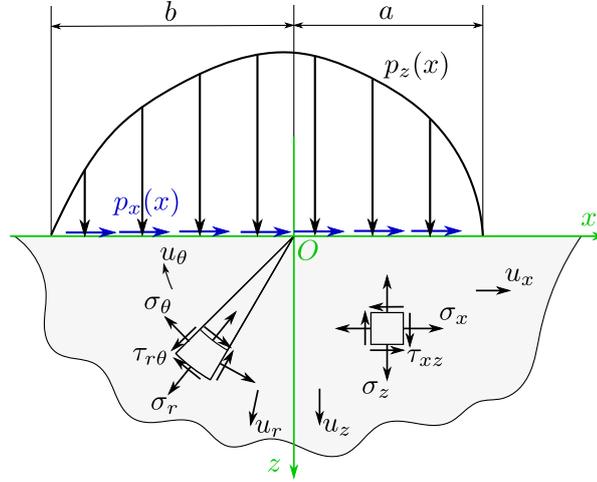


Abbildung 2.2: Elastischer Halbraum - Streckenlast (in Anlehnung an [12, S. 12])

Die Spannungskomponenten σ_x , σ_z und τ_{xz} müssen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

und

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

erfüllen. Für die korrespondierenden Dehnungen ε_x , ε_z und γ_{xz} muss die Beziehung der Kompatibilität

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (2.3)$$

gelten. Die Dehnungen stehen mit den Verschiebungen u_x und u_z in folgendem Zusammenhang:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.4)$$

Wobei ein ebener Dehnungszustand durch

$$\varepsilon_y = 0 \quad (2.5)$$

und

$$\sigma_y = \nu (\sigma_x + \sigma_z) \quad (2.6)$$

vorausgesetzt wird. Dabei ist ν die Querkontraktionszahl. Folglich kann das Hook'sche Gesetz mit

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} ((1 - \nu^2) \sigma_x - \nu (1 + \nu) \sigma_z) \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} ((1 - \nu^2) \sigma_z - \nu (1 + \nu) \sigma_x) \quad (2.8)$$

und

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xz} \quad (2.9)$$

angegeben werden, E ist der Elastizitätsmodul und G der Schubmodul. Eine Spannungsfunktion $\Phi(x, z)$, wird durch:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \quad (2.10)$$

definiert. Sind die Gleichgewichtsbedingungen (2.1),(2.2), die Kompatibilitätsgleichung (2.3) und das Hook'sche Gesetz (2.7), (2.8) und (2.9) erfüllt, dann gilt dass $\Phi(x, z)$ die biharmonische Gleichung erfüllt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Zusätzlich müssen noch die Randbedingungen erfüllt sein. An der Grenze $z = 0$, außerhalb der belasteten Region, ist die Fläche frei von Spannungen:

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\tau}_{xz} = 0, \quad x < -b, \quad x > a. \quad (2.12)$$

Innerhalb der belasteten Region ($-b \leq x \leq a$) müssen entweder die Spannungen an der Oberfläche

$$\bar{\sigma}_z = -p_z(x) \quad (2.13)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = -p_x(x) \quad (2.14)$$

bekannt sein, oder die Verschiebungen an der Oberfläche $\bar{u}_x(x)$ und $\bar{u}_z(x)$ sind gegeben. Zum Schluss muss noch hinzugefügt werden, dass bei großem Abstand vom Kontakt ($x, z \rightarrow \infty$) die Spannungen gegen null gehen müssen ($\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz} \rightarrow 0$). Um ein konkretes Problem lösen zu können, müssen zwei der vier Ausdrücke $p_z(x), p_x(x), \bar{u}_z(x), \bar{u}_x(x)$ in der belasteten Region bekannt sein.

In manchen Fällen ist es günstiger, Polarkoordinaten einzuführen. Die korrespondierenden Gleichungen können bei Johnson [12, S. 14] nachgeschlagen werden.

2.1.2 Die Potential Funktionen von Boussinesq und Cerruti

Der elastische Halbraum ist durch die planare Fläche $z = 0$ begrenzt. Eine zweidimensionale Belastung, die auf eine abgeschlossene Fläche begrenzt ist, verursacht im gesamten Halbraum Verschiebungen und Spannungen. Der Spannungszustand ist dreidimensional, deshalb treten allgemein die sechs Spannungskomponenten, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ auf. [12, S. 45]

Abbildung 2.3 zeigt den elastischen Halbraum. $C(\xi, \eta)$ ist ein Punkt der mit p_z, p_x und p_y belasteten Oberfläche S . Der Punkt $A(x, y, z)$ ist ein Punkt des Körpers. Die Projektion von $A(x, y, z)$ auf die Oberfläche ist der Punkt $B(x, y)$.

Der Abstand $\overline{CA} \equiv \kappa$ ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras

$$\overline{CA} \equiv \kappa = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}. \quad (2.15)$$

Die Belastungen $p_z(\xi, \eta), p_x(\xi, \eta)$ und $p_y(\xi, \eta)$ wirken auf der Fläche S . Folgende Potentialfunktionen $\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1$ und \mathcal{H}_1 werden durch

$$\mathcal{F}_1 = \iint_S p_x(\xi, \eta) \Omega d\xi d\eta \quad (2.16)$$

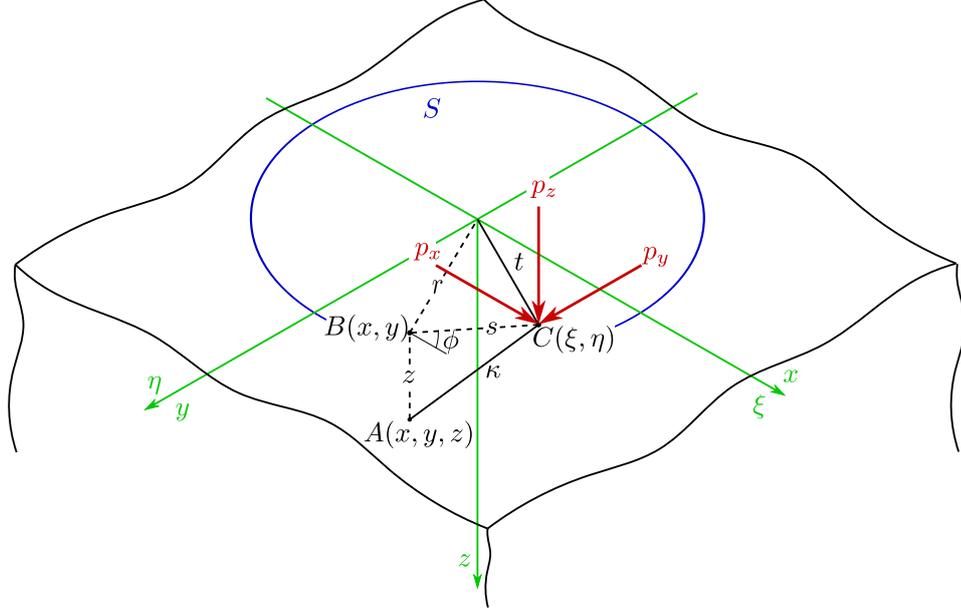


Abbildung 2.3: Elastischer Halbraum - allgemeine Belastung (in Anlehnung an [12, S. 46])

$$\mathcal{G}_1 = \iint_S p_y(\xi, \eta) \Omega \, d\xi \, d\eta \quad (2.17)$$

und

$$\mathcal{H}_1 = \iint_S p_z(\xi, \eta) \Omega \, d\xi \, d\eta \quad (2.18)$$

definiert. Die Beziehung

$$\Omega = z \ln(\kappa + z) - \kappa \quad (2.19)$$

wird für die weitere Rechnung als Vereinfachung verwendet. Zusätzlich definiert Johnson [12, S. 46] noch die partiellen Ableitungen der Potentialfunktionen \mathcal{F}_1 , \mathcal{G}_1 und \mathcal{H}_1 zu:

$$\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z} = \iint_S p_x(\xi, \eta) \ln(\kappa + z) \, d\xi \, d\eta \quad (2.20)$$

$$\mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial z} = \iint_S p_y(\xi, \eta) \ln(\kappa + z) \, d\xi \, d\eta \quad (2.21)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial z} = \iint_S p_z(\xi, \eta) \ln(\kappa + z) \, d\xi \, d\eta. \quad (2.22)$$

Aus der Summe der partiellen Ableitungen der Potentialfunktionen \mathcal{F}_1 , \mathcal{G}_1 und \mathcal{H}_1 nach x , y und z ergibt sich die sogenannte Boussinesq Potentialfunktion ψ_1

$$\psi_1 = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial z}. \quad (2.23)$$

Analog dazu folgt die Ableitung der Boussinesq Potentialfunktion ψ_1 mit

$$\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}. \quad (2.24)$$

Die Komponenten der elastischen Verschiebung u_x , u_y und u_z an einem Punkt $A(x, y, z)$ im Körper können durch die zuvor genannten Potentialfunktionen ausgedrückt werden:

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \quad (2.25)$$

$$u_y = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} \quad (2.26)$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} + (1 - 2\nu) \psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \quad (2.27)$$

Die Ausdrücke verkleinern sich mit $\frac{1}{\kappa}$ bei zunehmenden Abstand von der belasteten Fläche. Deshalb stellen sie die elastischen Verschiebungen nahe der belasteten Fläche dar. Die Spannungen können anschließend mit Hilfe des Hook'schen Gesetz berechnet werden. [12, S. 47]

2.1.3 Elastischer Halbraum - konzentrierte Normalkraft

Eine vertikale Kraft F_z die im Ursprung angreift, verursacht im gesamten elastischen Halbraum Verschiebungen in x-, y- und z-Richtung, vergleiche Abbildung 2.4.

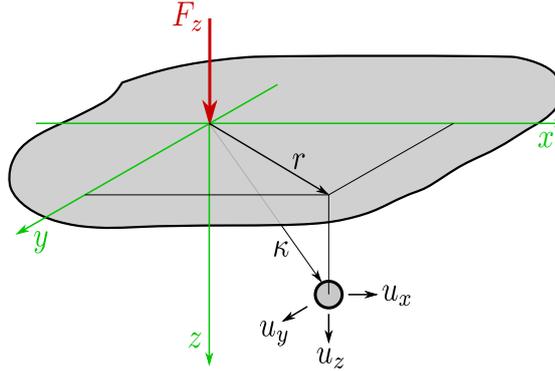


Abbildung 2.4: Elastischer Halbraum - konzentrische Kraft (in Anlehnung an [13, S. 2.14])

Im Folgenden werden die Ergebnisse des Abschnittes 2.1.2 angewandt. Die Fläche S reduziert sich in dem Beispiel auf null und somit berechnet sich das Doppelintegral zu

$$\iint_S p_z(\xi, \eta) d\xi d\eta = F_z. \quad (2.28)$$

Für den Abstandsvektor κ gilt

$$\kappa = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

Da nur eine Kraft in Normalenrichtung vorhanden ist, ergibt sich für die Potentialfunktionen $\mathcal{G}_1 = 0$ und $\mathcal{H}_1 = 0$. Die Boussinesq Potential Funktionen ψ_1 ist dadurch im gegebenen Beispiel sehr einfach zu bestimmen

$$\psi_1 = \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial z} = \iint_S p_z(\xi, \eta) \ln(\kappa + z) d\xi d\eta = F_z \ln(\kappa + z). \quad (2.30)$$

Die Ableitung der Boussinesq Potentialfunktion ψ kann anschließend mit

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \frac{F_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + z} \cdot \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2z + 1 \right) \\ \psi &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \frac{F_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + z} \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \psi &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \frac{F_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{F_z}{\kappa}\end{aligned}\quad (2.31)$$

berechnet werden. Zur Bestimmung der Verschiebungen benötigt man noch die partiellen Ableitungen von ψ_1 nach x , mit

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{F_z}{\kappa + z} \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{F_z x}{\kappa(\kappa + z)} \quad (2.32)$$

und nach y , mit

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \frac{F_z}{\kappa + z} \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2y = \frac{F_z y}{\kappa(\kappa + z)}. \quad (2.33)$$

Des Weiteren werden noch die partiellen Ableitungen von ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x = -\frac{F_z x}{\kappa^3}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2y = -\frac{F_z y}{\kappa^3} \quad (2.35)$$

und

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2z = -\frac{F_z z}{\kappa^3}, \quad (2.36)$$

benötigt. Eingesetzt in die Beziehungen (2.25), (2.26) und (2.27) geben die Gleichungen (2.37), (2.38) und (2.39) schlussendlich die Lösung des Problems an:

$$u_x = \frac{F_z}{4\pi G} \left[\frac{xz}{\kappa^3} - (1 - 2\nu) \frac{x}{\kappa(\kappa + z)} \right] \quad (2.37)$$

$$u_y = \frac{F_z}{4\pi G} \left[\frac{yz}{\kappa^3} - (1 - 2\nu) \frac{y}{\kappa(\kappa + z)} \right] \quad (2.38)$$

$$u_z = \frac{F_z}{4\pi G} \left[\frac{z^2}{\kappa^3} + \frac{2(1 - \nu)}{\kappa} \right]. \quad (2.39)$$

2.1.4 Elastischer Halbraum - allgemeine Normalspannungsverteilung

Im Folgenden wird der Fall einer allgemeinen Normalspannungsverteilung $p_z(x, y)$, die auf der Oberfläche S angreift, betrachtet. Die Verschiebung in z -Richtung an der Oberfläche \bar{u}_z im Punkt B kann mit Hilfe der Gleichung (2.40) bestimmt werden, vergleiche Abbildung 2.5. Der Abstand des Punktes B von der Stelle der Belastung wird mit Polarkoordinaten über s und ϕ definiert.

Zum Bestimmen der Verschiebung in z -Richtung an der Oberfläche \bar{u}_z im Punkt B ,

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_S p_z(s, \phi) ds d\phi, \quad (2.40)$$

muss die Normalspannungsverteilung als Funktion von s und ϕ beschrieben werden und über die Oberfläche S integriert werden.

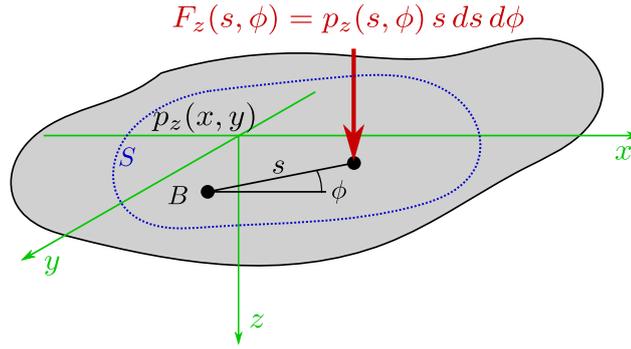


Abbildung 2.5: Elastischer Halbraum - Normalspannungsverteilung (in Anlehnung an [13, S. 2.15])

2.1.5 Elastischer Halbraum - Hertz'sche Pressung

Unter der Annahme, die Normalspannungsverteilung p_z einer Kontaktstelle hat die Form eines Halbellipsoides, vergleiche Abbildung 2.6, kann die Verschiebung an der Oberfläche in z -Richtung \bar{u}_z für den elastischen Halbraum für den Fall der Hertz'schen Pressung berechnet werden.

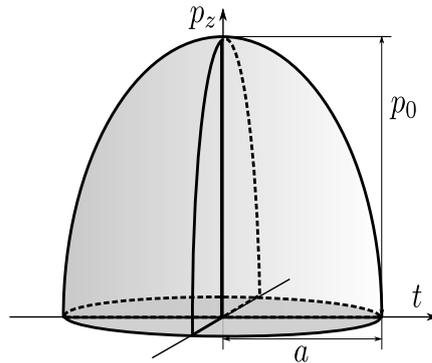


Abbildung 2.6: Normalspannung nach Hertz in Form eines Halbellipsoides

Der Verlauf der Normalspannung $p_z(t)$

$$p_z(t) = p_0 \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

ist durch die Form des Halbellipsoides bestimmt und kann dadurch als Funktion von t vorgegeben werden.

Die Grundfläche des Halbellipsoides ist dabei ein Kreis mit seinem Ursprung in O und dem Radius a , vergleiche Abbildung 2.7. Zum Bestimmen der Verschiebung an der Oberfläche S in z -Richtung \bar{u}_z im Punkt $B(r, 0)$ benötigt man die Spannung p_z als Funktion des Abstandes s und des Winkels ϕ eines beliebigen Punktes $C(s, \phi)$ zum Punkt B . Der Zusammenhang von r , s und t ist über den Cosinussatz gegeben,

$$t^2 = r^2 + s^2 + 2rs \cos \phi. \quad (2.42)$$

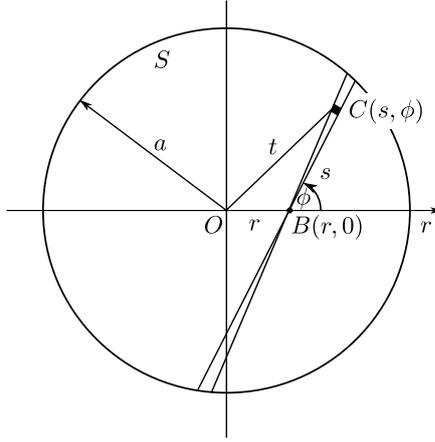


Abbildung 2.7: Hertz'sche Pressung - Beschreibung der Geometrie (in Anlehnung an [12, S. 57])

Eingesetzt in die Beziehung (2.41) kann die Normalspannung p_z

$$p_z(s, \phi) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2 + s^2 + 2rs \cos \phi}{a^2}}, \quad (2.43)$$

auch als Funktion von s und ϕ geschrieben werden. Substituiert man:

$$\alpha^2 = a^2 - r^2 \quad \beta = r \cos \phi, \quad (2.44)$$

so vereinfacht sich die Normalspannung $p_z(s, \phi)$ auf

$$p_z(s, \phi) = \frac{p_0}{a} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.45)$$

Die Verschiebung \bar{u}_z kann mit Hilfe der Beziehung (2.40)

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{\frac{1}{2}} ds d\phi \quad (2.46)$$

berechnet werden. Für das Integral nach ds gilt

$$\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{\frac{1}{2}} ds = -\frac{1}{2} \alpha \beta + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \right], \quad (2.47)$$

wobei die Terme $\alpha\beta$ und \tan^{-1} verschwinden, wenn man nach $d\phi$ von 0 bis 2π integriert. Nach der Rücksubstitution kann die Verschiebung \bar{u}_z

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4} (a^2 - r^2 + r^2 \cos^2 \phi) d\phi, \quad (2.48)$$

als einfaches Integral dargestellt werden. Die Lösung des Problems ist dann eine quadratische Verteilung der Verschiebung an der Oberfläche

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2). \quad (2.49)$$

2.2 Normalkontaktmechanik - Hertz'sche Theorie

Die Theorie beziehungsweise die Arbeit „*Ueber die Berührung fester elastischer Körper*“ von Heinrich Hertz [6, S. 1] gehört zu den wichtigsten Werken im Bereich der Kontaktmechanik. Experimente mit Glaslinsen brachten ihn auf die Idee, sich mit dieser Thematik zu beschäftigen. Sein Wissen aus dem elektrostatischen Bereich konnte er bei der Lösung des Problems anwenden.

Die Theorie der Elastizität besagt, dass die Ursache für Deformationen zwei Gründe haben kann. Einerseits können Kräfte, die auf das Innere der Körper wirken, zu Deformationen führen. Andererseits können aber auch Druckkräfte, die auf die Oberfläche wirken, den Körper verformen. Die Theorie von Hertz besagt, dass die Deformationen innerhalb und außerhalb der Kontaktfläche unabhängig voneinander betrachtet werden können.

Ausserhalb hängen die Deformationen ab von der Gestalt des Gesamtkörpers, der Verteilung der übrigen Kräfte und den endlichen Integralen der Kraftkomponenten im Unstetigkeitspunkte, innerhalb hängen sie nur ab von der Verteilung der im Inneren selbst angreifenden Kräfte. Die Drucke und Deformationen im Inneren sind gegen die im Aeussern unendlich gross. [6, S. 156]

Handelt es sich um einen nicht konformen Kontakt, so berühren sich die sich kontaktierenden Körper nach Hertz zunächst in einem Punkt. Selbst bei einer noch so kleinen Kraft werden sich aber auch die Punkte in der Umgebung der initialen Berührung verformen und es bildet sich eine Kontaktfläche aus. Diese Fläche ist von ihrer Dimension viel kleiner als die geometrischen Abmessungen der Körper. Deshalb kann Hertz auch den elastischen Halbraum anwenden. Die Verformungen müssen so klein sein, dass die lineare Elastizitätstheorie angewendet werden kann. Für Stahl trifft dies weitgehend zu. Weiters muss das Kontaktgebiet klein sein gegenüber den Krümmungen, sodass die Kontaktfläche selbst keine Krümmung aufweist und immer in einer Ebene liegt. Die Theorie gilt nur für vollkommen glatte Oberflächen, d.h. es gibt nur senkrechten Druck zwischen den sich berührenden Körpern.

Die Voraussetzungen, die gelten müssen, damit die Theorie von Hertz angewendet werden kann, können wie folgt zusammengefasst werden: [6, S. 156f]

- Die Oberflächen sind kontinuierlich und nicht konform.
- Kleine Verformungen treten auf.
- Die kontaktierenden Körper können als elastische Halbräume angenommen werden, das heißt, die Kontaktfläche ist viel kleiner als die Abmessungen und Krümmungsradien der Körper.
- Die Oberflächen sind vollkommen glatt.
- Die Körper lassen sich im Bereich des Kontaktes durch Funktionen 2. Grades annähern.

2.2.1 Beschreibung der Oberfläche der sich kontaktierenden Körper

Hertz beschreibt die Oberflächen der Körper mit Funktionen 2. Grades. Das entspricht einer Taylorreihenentwicklung, um den initialen Kontaktpunkt bis zum quadratischen Term. Da vorausgesetzt wird, dass die Kontaktfläche klein gegenüber den geometrischen Abmessungen der Körper ist, wird durch die Taylorreihenentwicklung kein großer Fehler erzeugt. Nach Hertz [6, S. 158ff] gilt für die Oberfläche des Körpers 1

$$z_1 = A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2 + C_1 x_1 y_1. \quad (2.50)$$

Durch die Drehung des Koordinatensystems fällt der Mischterm C_1 weg. Die Faktoren A_1 und B_1 sind durch die Hauptkrümmungsradien R_1' und R_2'' der Oberfläche bestimmt. So vereinfacht sich die vorige Beziehung zu

$$z_1 = \frac{1}{2R_1'}x_1^2 + \frac{1}{2R_1''}y_1^2. \quad (2.51)$$

Wobei die Radien in Richtung der x-Achse mit ' und in Richtung der y-Achse mit '' bezeichnet werden, vergleiche Abbildung 2.8.

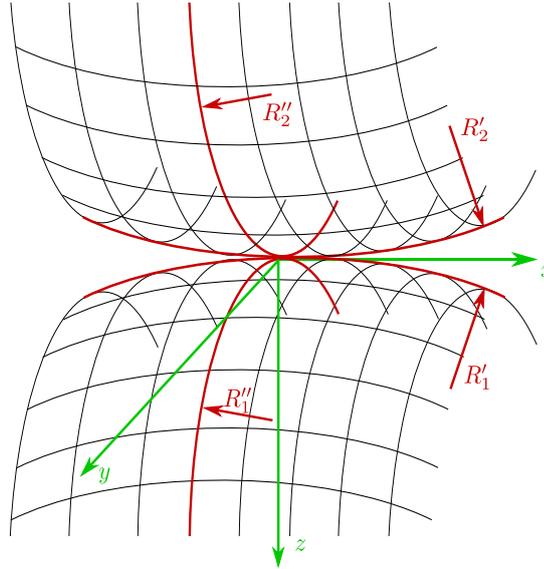


Abbildung 2.8: Hauptkrümmungsradien der Oberfläche in x- und y-Richtung

Für den zweiten Körper kann analog

$$z_2 = -\left(\frac{1}{2R_2'}x_2^2 + \frac{1}{2R_2''}y_2^2\right) \quad (2.52)$$

geschrieben werden. Ebenso ist der undeformierte Abstand h der beiden Körper zueinander durch die Gleichung

$$h = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R_1'}x^2 + \frac{1}{2R_1''}y^2 \quad (2.53)$$

beschrieben. Wobei R' und R'' die relativen Krümmungsradien der Körper zueinander sind. Zum Bestimmen der zwei unbekanntenen Hertz Faktoren A und B benötigt man zwei Gleichungen:

$$(A + B) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''} \right) \quad (2.54)$$

$$|B - A| = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right) \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right) \cos 2\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.55)$$

Wobei der Winkel θ die Verdrehung der beiden Koordinatensysteme zueinander angibt. Die relativen Hauptkrümmungsradien können in einen äquivalenten Radius R_e

$$R_e = (R'R'')^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (AB)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.56)$$

umgerechnet werden. Das Verhältnis der Hauptkrümmungsradien ist gleich dem Verhältnis der Hertz Faktoren

$$\left(\frac{R'}{R''} \right) = \left(\frac{B}{A} \right). \quad (2.57)$$

Ebenso definiert Hertz eine äquivalente Elastizität E^*

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}. \quad (2.58)$$

2.2.2 Lösung des Problems

Bei der Lösung des Problems trifft man auf elliptische Integrale die in tabellierter Form bekannt sind. Aus Abbildung 2.9 können die für die Berechnung notwendigen Werte rausgelesen werden. Nach Hertz hat die Kontaktfläche die Form einer Ellipse mit den Halbachsen a und b . Die Normalspannung hat die Form eines Halbellipsoides mit dem maximalen Druck p_0 . Weiters kann die Eindringung d bestimmt werden. Der Parameter F_z gibt die Kraft an, mit der die Körper zusammengedrückt werden.

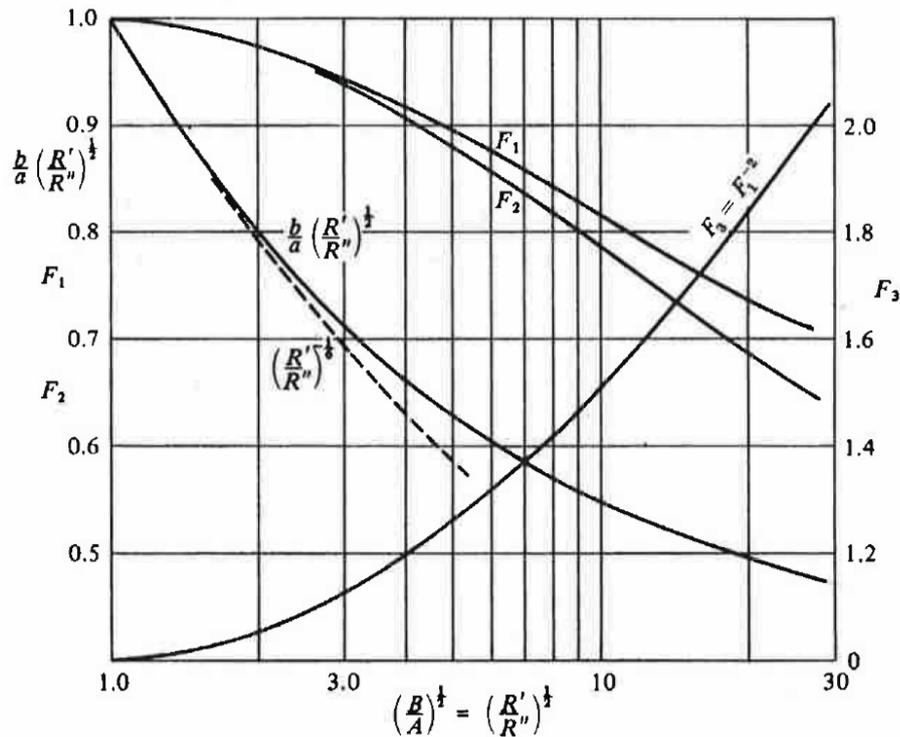


Abbildung 2.9: Hertz - Integraldiagramm [12, S. 97]

Ist der Wert für F_1 bekannt, kann der mittlere Kontaktradius c durch Einsetzen von F_z , R_e und E^* in die Beziehung

$$c = \left(\frac{3F_z R_e}{4E^*} \right)^{\frac{1}{3}} F_1 \quad (2.59)$$

berechnet werden. Der Bruch $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ beziehungsweise dessen Kehrwert $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ kann ebenfalls aus der Abbildung bestimmt werden und somit können die Halbachsen der Ellipse in Längs- und Querrichtung, a und b ,

$$a = c \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = c \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.60)$$

bestimmt werden. Für die Eindringung

$$d = \left(\frac{9F_z^2}{16E^*2R_e}\right)^{\frac{1}{3}} F_2 \quad (2.61)$$

benötigt man noch den Wert für F_2 . Die maximale Spannung p_0 kann entweder durch Einsetzen von a und b in die Gleichung

$$p_0 = \frac{3F_z}{2\pi ab}, \quad (2.62)$$

oder über die Beziehung

$$p_0 = \left(\frac{6F_z E^*2}{\pi^3 R_e^2}\right)^{\frac{1}{3}} F_3 \quad (2.63)$$

berechnet werden, hier muss allerdings der Wert für F_3 aus der Grafik rausgelesen werden.

2.3 Kinematische Beziehungen von Rad-Schiene Systemen

Kinematische Beziehungen sind für die Beschreibung des Rad-Schiene Kontaktes von großer Relevanz. Dabei spielt auch der Begriff des Schlupfes, der in dem Abschnitt erläutert werden soll, eine große Rolle.

2.3.1 Das Rad als starrer Körper

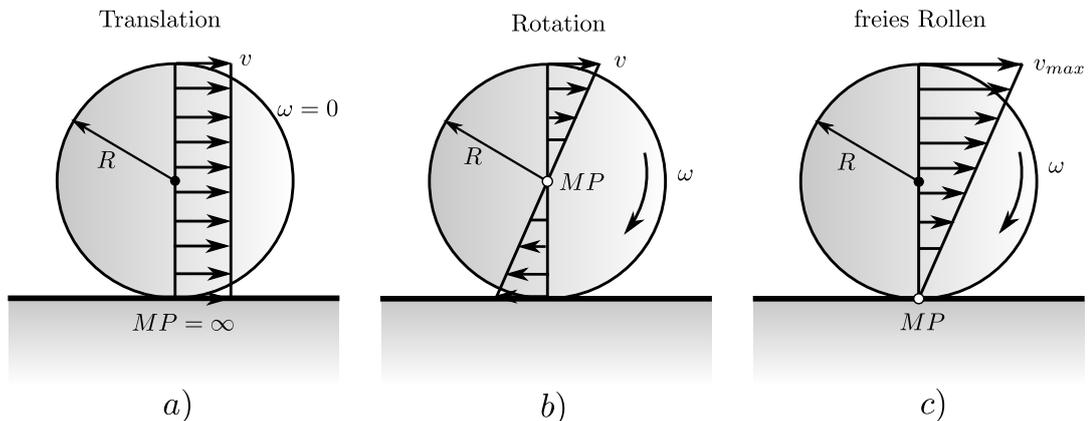


Abbildung 2.10: Geschwindigkeitsverteilung im starren Rad bei unterschiedlichen kinematischen Zuständen (in Anlehnung an [2, S. 13])

Betrachtet man das Rad als starren Körper, so gibt es nur einen Kontaktpunkt. Abbildung 2.10 zeigt drei spezielle kinematische Zustände, in denen sich ein starres Rad befinden kann.

- Fall a) bildet eine rein translatorische Bewegung ab. Der Momentanpol MP befindet sich im Unendlichen und die Winkelgeschwindigkeit ω ist gleich null. Dieser Zustand kann beispielsweise beim Bremsen eines Fahrzeuges auftreten, wenn das gebremste Rad blockiert.
- Fall b) stellt das Schleudern dar, das heißt der Radmittelpunkt ist ident mit dem Momentanpol. Das Rad hat eine Winkelgeschwindigkeit, die ungleich null ist, sein Schwerpunkt bewegt sich aber nicht. In der Praxis kann der Zustand beim Anfahren eines Autos oder beispielsweise einer Lokomotive vorkommen, wenn das Fahrzeug noch steht, die Räder aber durchdrehen.
- Fall c) zeigt das freie Rollen. Der Momentanpol ist gleich dem Radaufstandspunkt. Der Schwerpunkt hat dann die Geschwindigkeit $v_s = \omega \cdot R$. Die maximale Geschwindigkeit im Rad kann über $v_{max} = \omega \cdot 2R$ berechnet werden.

Kombiniertes Rollen

Die Rollbedingung $V = \omega \cdot R$ ist gebrochen, wobei V die Referenzgeschwindigkeit ist. Beim kombinierten Rollen gibt es eine Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_{rel} in der xy-Ebene zwischen Rad und Schiene im Kontaktpunkt KP , vergleiche Abbildung 2.11. Es tritt neben der Rollbewegung noch eine Gleitbewegung auf. Der Kontaktpunkt stimmt nicht mit dem Momentanpol MP überein und deshalb gibt es im Kontaktpunkt eine Geschwindigkeit in x-Richtung v_x und in y-Richtung v_y .

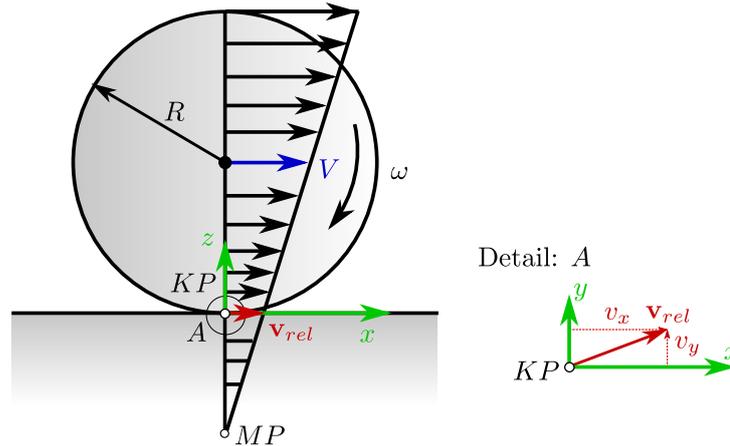


Abbildung 2.11: Kombiniertes Rollen

2.3.2 Die Konizität des Rades

Das Radprofil ist in der Regel konisch ausgeführt. Deshalb muss die Rotationsgeschwindigkeit des Radsatzes ω in eine Komponente parallel zur Berührebene ω_y und in eine Komponente normal auf die Berührebene ω_z aufgeteilt werden, vergleiche Abbildung 2.12.

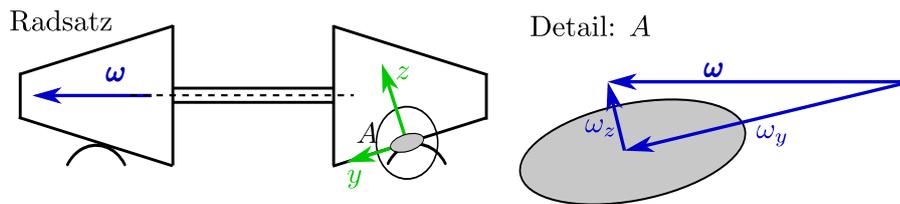


Abbildung 2.12: Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit in Komponenten

2.3.3 Das Rad als elastischer Körper

Stellt man sich das Rad als elastischen Körper vor, so bildet sich eine Kontaktfläche aus. Im folgenden wird angenommen, dass die Rollbedingung $V = \omega_y \cdot R$ gebrochen ist und deshalb im initialen Kontaktpunkt (Ursprung des Koordinatensystems) eine Geschwindigkeit v_x und v_y vorhanden ist. Aufgrund der Konizität gibt es noch, wie zuvor beschrieben, die Komponente der Winkelgeschwindigkeit ω_z . Da sich bei einem elastischen Rad eine Kontaktfläche ausbildet, entsteht noch eine zusätzliche Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_C in der Kontaktfläche. Diese kann wie folgt, für den Fall einer ebenen Kontaktfläche, berechnet werden, vergleiche Abbildung 2.13.

$$\mathbf{v}_C = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - \omega_z y \\ v_y + \omega_z x \\ -\omega_y x \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Die Komponente in z-Richtung ist dabei die Geschwindigkeit in die Kontaktfläche hinein und kann deshalb vernachlässigt werden, da die Körper nicht ineinander eindringen können.

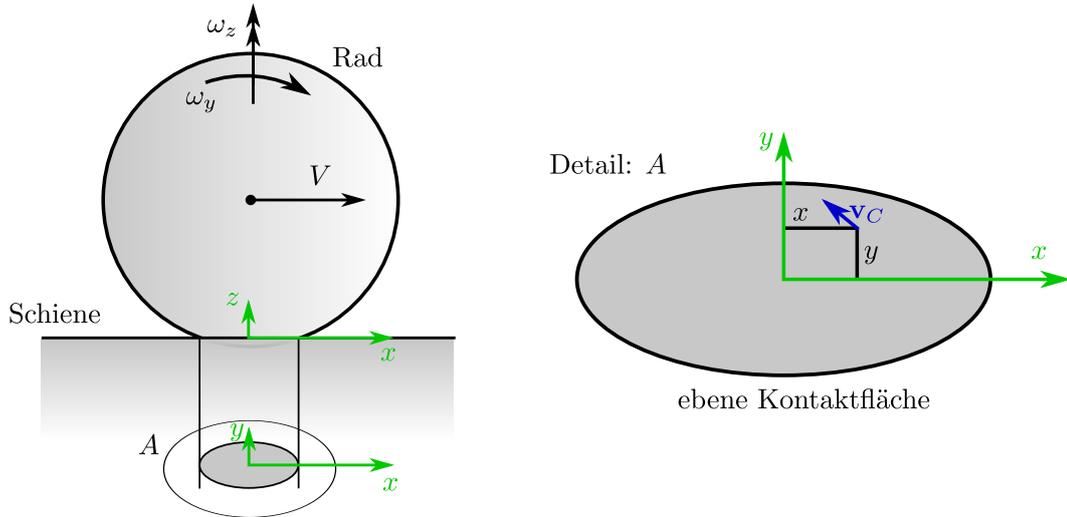


Abbildung 2.13: Relativgeschwindigkeiten in der Kontaktfläche beim elastischen Rad (in Anlehnung an [13, S. 2.34])

Das Verhältnis der Relativgeschwindigkeit in der Kontaktfläche \mathbf{v}_C zur Referenzgeschwindigkeit V nennt man Starrkörperschlupf \mathbf{s}

$$\mathbf{s} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} v_x - \omega_z y \\ v_y + \omega_z x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x - s_z y \\ s_y + s_z x \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Wobei s_x als Längsschlupf, s_y als Querschlupf und s_z als Bohrschlupf bezeichnet wird.

Anschließend soll zusätzlich noch die elastische Verformung berücksichtigt werden, die zu einem Formänderungsschlupf führt. Es wird der neue Begriff des wahren oder totalen Schlupfes $\mathbf{w}_{Schlupf}$,

$$\mathbf{w}_{Schlupf}(x, y, t) = \mathbf{s}(x, y) + \frac{1}{V} \begin{pmatrix} \dot{u}_x(x, y, t) \\ \dot{u}_y(x, y, t) \end{pmatrix} = \mathbf{s}(x, y) + \frac{1}{V} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial t} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{w}_{Schlupf}(x, y, t) = \begin{pmatrix} s_x - s_z y \\ s_y + s_z x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix} + \frac{1}{V} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial t} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

eingeführt, der sich aus der Summe des Starrkörperschlupfes und des Formänderungsschlupfes ergibt. Für stationäres Rollen sind die partiellen Ableitungen nach der Zeit gleich null und somit vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\mathbf{w}_{Schlupf_stationär}(x, y) = \begin{pmatrix} s_x - s_z y \\ s_y + s_z x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Beim Kontakt elastischer Körper, also auch beim Kontakt zwischen Rad und Schiene, bilden sich in der Kontaktfläche ein Haftgebiet und ein Gleitgebiet aus. Im Haftgebiet ist

der wahre Schlupf gleich null, da der Starrkörperschlupf durch den Formänderungsschlupf kompensiert wird. Im Gleitgebiet ist der wahre Schlupf ungleich null.

2.3.4 Berechnung der Relativgeschwindigkeit in der gekrümmten Kontaktfläche

Ist die Kontaktfläche selbst allerdings auch gekrümmt so berechnet sich die Relativgeschwindigkeit in der Kontaktfläche $\mathbf{v}_{c_gekrümmt}$ wie folgt:

$$\mathbf{v}_{c_gekrümmt} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - \omega_z y - \omega_y z \\ v_y + \omega_z x \\ -\omega_y x \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Es tritt ein neuer Term $\omega_y z$ auf, vergleiche Beziehung (2.64). Das Zustandekommen kann man sich auch mit Hilfe von Abbildung 2.14 erklären. Mit der Annahme, dass der Kontaktpunkt gleich dem Momentanpol ist und dass es keinen Bohrschlupf gibt, weist das Rad das dargestellte lineare Geschwindigkeitsprofil auf. Ist die Kontaktfläche gekrümmt so entsteht mit zunehmender Entfernung in vertikaler Richtung vom MP ein zusätzlicher Schlupf. Dieser Schlupf führt zu einer Tangentialspannung.

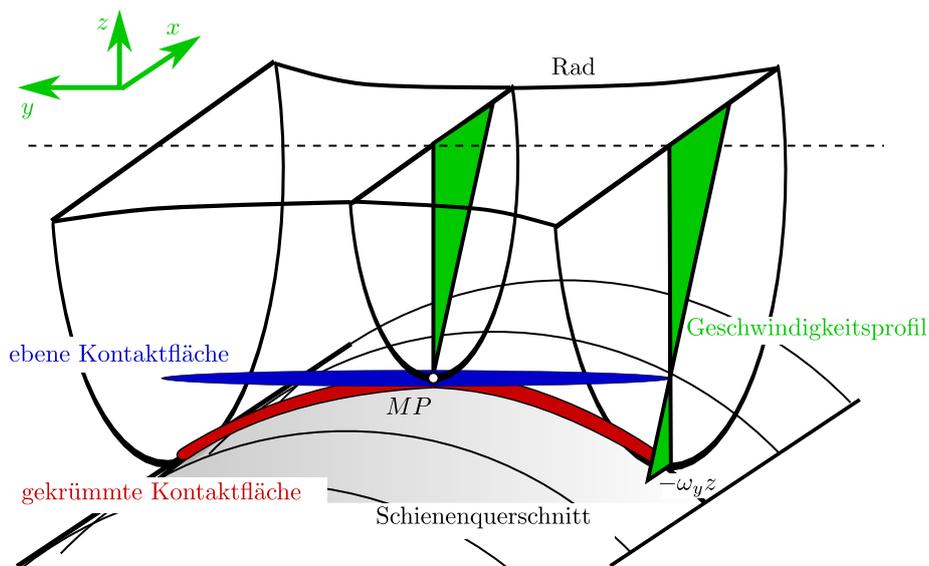


Abbildung 2.14: Darstellung der Rollradiendifferenz und Einfluss auf das Geschwindigkeitsprofil

2.4 Tangentialkontaktmechanik

Wesentliche Aufgabe der Tangentialkontaktmechanik ist es, einen Zusammenhang zwischen der Relativgeschwindigkeit in der Kontaktfläche, also dem Schlupf, und der Tangentialkraft, auch als Schlupfkraft bezeichnet, herzustellen. Bei seiner ersten lateraldynamischen Rechnung aus dem Jahr 1916 [3] stellte Carter einen linearen Zusammenhang zwischen Schlupf und Tangentialkraft auf,

$$\text{Schlupfkraft} = \text{Schlupfkoeffizient} \times \text{Schlupf}.$$

Es existierte bereits vorher eine Arbeit von Reynolds [16], die als Inhalt die Tangentialkontaktmechanik hatte. Reynolds stellte bei experimentellen Untersuchungen mit Gummwalzen fest, dass sich eine Haft- und Gleitzone ausbildet. Carter wurde wahrscheinlich durch diese Arbeit beeinflusst. Somit konnte erst im Jahr 1926 das Tangentialproblem für den einfachen Fall des Abrollens einer Walze auf einer Ebene von Carter gelöst werden.

Erst im Jahr 1967 konnte Kalker im Rahmen seiner Dissertation den allgemeinen Fall des rollenden Kontaktes für elliptische Kontaktflächen mit Längs-, Quer- und Bohrschlupf lösen. Für die Berechnung wird sein Programm CONTACT, das auch Inhalt dieser Diplomarbeit ist, verwendet. [18, S. 60f]

2.4.1 Das Bürstenmodell

Die Lösung des Normalproblems basiert auf der Arbeit von Hertz. Mit Hilfe seiner Gleichungen kann man, wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, die Kontaktfläche und die Normalspannungsverteilung in Form eines Halbellipsoides bestimmen, siehe Abschnitt 2.2.

Ein besseres Verständnis für die Lösung des Tangentialproblems schafft das Bürstenmodell. Grundannahme des Bürstenmodells ist, dass der Körper aus unendlich vielen Bürstenhaaren besteht, die sich gegenseitig nicht beeinflussen. Rollt diese weiche Bürste über eine unendlich starre Ebene so kann man beobachten, dass sich eine ebene Kontaktfläche ausbildet, die sich von der Einlaufkante EK bis zur Auslaufkante AK erstreckt, vergleiche Abbildung 2.15. An der Ein- und an der Auslaufkante sind die Bürstenhaare jeweils entspannt und haften auf der Ebene. Tritt ein Bürstenhaar in die Kontaktfläche ein so haftete es zunächst. Beim Durchlaufen der Kontaktfläche muss es sich jedoch verformen. Das Bürstenhaar haftet in der Kontaktfläche bis an der Gleitkante GK die Reibung nicht mehr ausreicht und das Haar zu rutschen beginnt. Den Zustand des Gleiten behält es bei bis es schlussendlich an der Auslaufkante wieder entspannt ist. Somit kann man das Ausbilden einer Haftzone im Bereich EK bis GK und einer Gleitzone im Bereich GK bis AK einfach erklären. Durch das Auftreten von einer Haft- und Gleitzone ist die elastische Kontaktpaarung wesentlich schwieriger zu beschreiben als die Kontaktpaarung zwischen starren Körpern.

Das Auftreten dieser beiden Zonen führt zu Relativbewegungen in der Kontaktfläche, die Tangentialspannungen hervorrufen. Die Normalspannung p_z hat im zweidimensionalen Fall den Verlauf einer Halbellipse. Bei der Bestimmung der Tangentialspannung p_x muss man zwischen dem Haft- und Gleitgebiet unterscheiden. Im Haftgebiet gilt das Gesetz nach Coulomb:

$$|T_x| \leq \mu_0 \cdot F_z, \quad (2.70)$$

beziehungsweise

$$|p_x| \leq \mu_0 \cdot p_z. \quad (2.71)$$

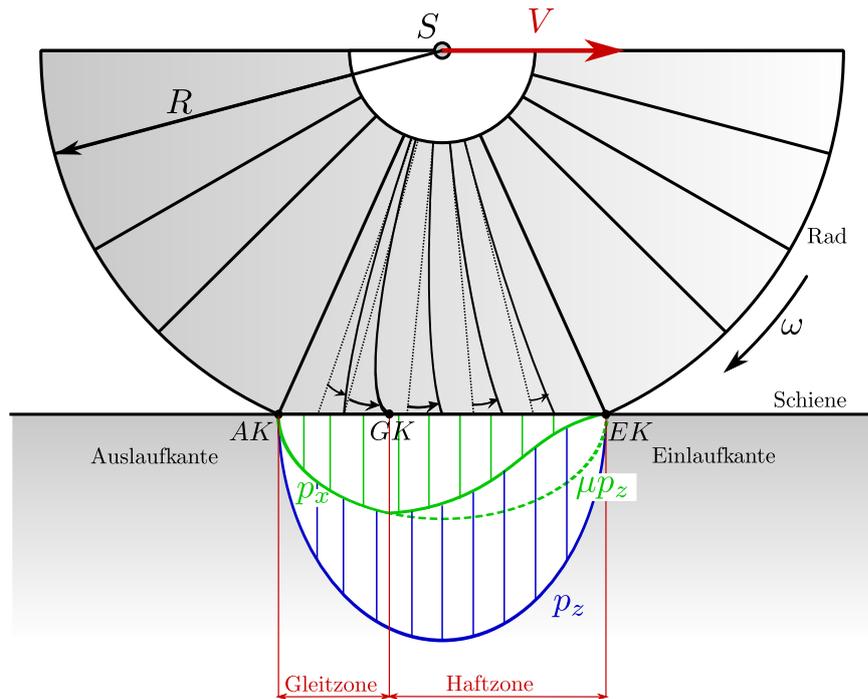


Abbildung 2.15: Das Bürstenmodell (in Anlehnung [17])

Der Betrag der Tangentialspannung p_x kann also nach der Ungleichung kleiner gleich dem Haftkoeffizient μ_0 mal der Normalspannung p_z sein. Im Gleitgebiet wird die Ungleichung zur Gleichung

$$T_x = \mu \cdot F_z, \quad (2.72)$$

beziehungsweise

$$p_x = \mu \cdot p_z \quad (2.73)$$

und die Tangentialspannung errechnet sich durch Multiplikation der Normalspannung mit dem Gleitkoeffizient μ , man bezeichnet das auch als den sogenannten „traction bound“.

Ist μ gleich dem μ_0 , so ergibt sich eine Tangentialspannungsverteilung wie sie in Abbildung 2.15 qualitativ dargestellt ist. Ein Bürstenhaar tritt an der Einlaufkante in die Kontaktfläche ein und haftet zunächst. In der Haftzone steigt die Tangentialspannung kontinuierlich an, da ständig ein Starrkörperschlupf vorhanden ist und bildet einen charakteristischen S-Schlag aus. Beim Erreichen der maximal möglichen Tangentialspannung beginnt das Bürstenhaar zu gleiten und bleibt im Gleitbereich auch in diesem Zustand. Die Tangentialspannung im Gleitgebiet ist gleich der Normalspannung p_z mal dem Gleitkoeffizienten μ und hat daher auch den Verlauf einer Halbellipse.

2.4.2 Analytische Lösung für Walzenkontakt (Linienkontakt)

Wie bereits in der Einleitung des Kapitels erwähnt, wurde das stationäre Abrollen einer Walze auf einer Ebene unter Längsschlupf bei elliptisch verteilter Flächenpressung 1926 von Carter [4] und Fromm [7] erstmals gelöst. Im folgenden wird die Lösung von Carter behandelt. Auf den Rad-Schiene Kontakt übertragen, ist die Walze ein Modell des Rades und die Ebene ein Modell der Schiene. Das Ergebnis der Arbeit ist, dass sich die Tangentialspannungsverteilung als Differenz zweier Kreise berechnen lässt. Man gelangt so zu exakten analytisch lösbaaren Integralen für die restlichen Zustandsgrößen, vergleiche Abbildung 2.16. [18, S. 64]

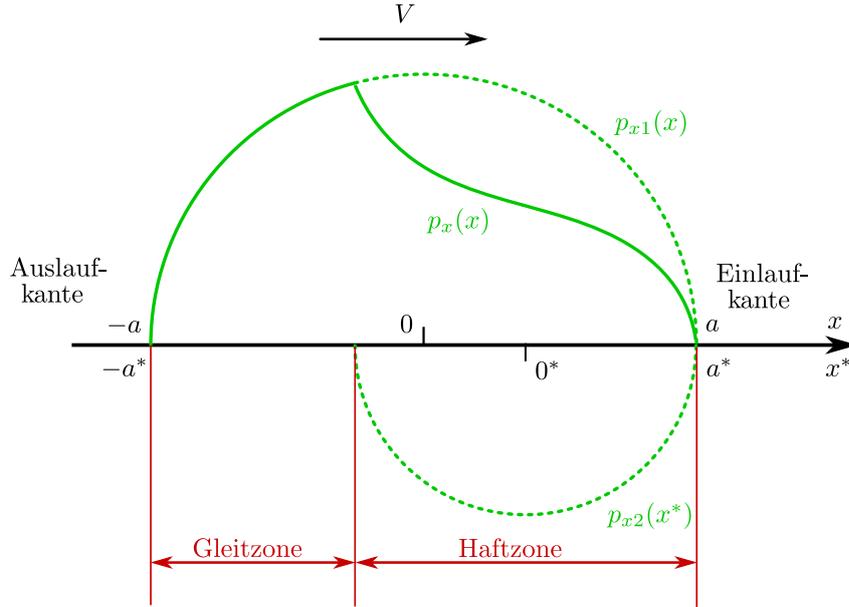


Abbildung 2.16: Tangentialspannungsverteilung nach Carter (in Anlehnung an [18, S. 65])

Ein Partikel tritt an der Einlaufkante in die Kontaktfläche ein und haftet zunächst. Die Tangentialspannung $p_x(x)$ nimmt ständig zu. Der charakteristische S-Schlag wird durch die Differenz der beiden Kreise gut abgebildet. Ist die maximale Tangentialspannung erreicht, folgt diese anschließend entlang dem „traction bound“ und wird an der Auslaufkante zu null.

Die gesuchte Tangentialspannung $p_x(x)$ lässt sich aus der Summe der Tangentialspannungen p_{x1} und p_{x2}

$$p_x(x) = p_{x1}(x) + p_{x2}(x^*) \quad (2.74)$$

bilden. Wobei p_{x1} über

$$p_{x1}(x) = \frac{\mu p_0}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \forall \quad -a < x < a \quad (2.75)$$

bestimmt ist. In allen anderen Fällen gilt, dass $p_{x1}(x) = 0$. Für $p_{x2}(x)$ gilt

$$p_{x2}(x) = -\frac{\mu p_0}{a} \sqrt{a^{*2} - x^{*2}} \quad \forall \quad -a^* < x^* < a^*, \quad (2.76)$$

und in allen anderen Fällen gilt analog $p_{x2}(x) = 0$. [18, S. 64]

Im Abschnitt 2.3.3 wurden die Begriffe Starrkörper-, Formänderungsschlupf und der Begriff des wahren oder totalen Schlupfes eingeführt und die entsprechenden Gleichungen formuliert. Abbildung 2.17 zeigt den Verlauf des wahren Schlupfes $\mathbf{w}_{Schlupf}(x)$ nach der Lösung von Carter. Im Haftgebiet ist der wahre Schlupf gleich null. Im Gleitgebiet steigt der wahre Schlupf an und erreicht sein Maximum an der Auslaufkante. [18, S. 65]

Für den Starrkörperschlupf s_x gilt die Beziehung,

$$s_x = 4(1 - \nu^2) \frac{\mu p_0}{E} \left(1 - \frac{a^*}{a}\right). \quad (2.77)$$

Folglich kann bei bekannten Starrkörperschlupf die Größe des Haftgebietes berechnet werden. Der Zustand des vollen Gleitens ist dadurch gekennzeichnet, dass das Haftgebiet zu

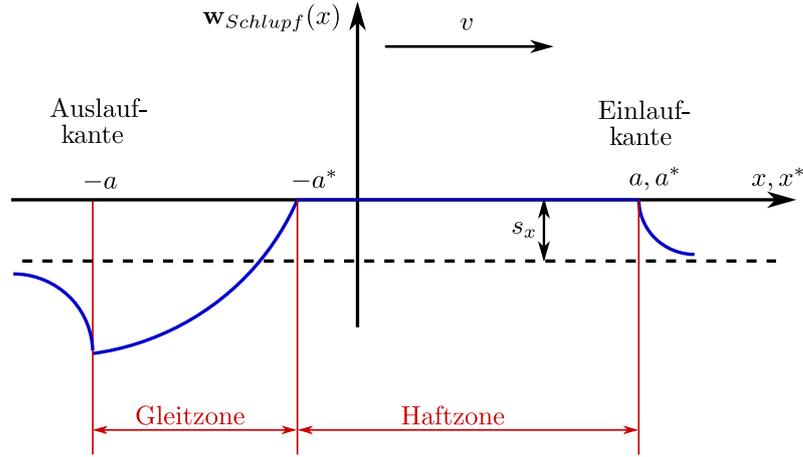


Abbildung 2.17: Verlauf des wahren Schlupfes nach Carter (in Anlehnung an [18, S. 65])

null wird. Der Maximalwert des Schlupfes, bis zu dem die Tangentialkraft ansteigt, wird als gesättigter Schlupf $s_{x_gesättigt}$ bezeichnet und nimmt den Wert

$$s_{x_gesättigt} = 4(1 - \nu^2) \frac{\mu p_0}{E} \quad (2.78)$$

an. Die Tangentialspannung $p_x(x)$ kann zu einer tangentialen Linienlast T_{Lx} (Längschubkraft mit der Einheit N/m)

$$T_{Lx} = \int p_x(x, t) dx \quad (2.79)$$

aufintegriert werden. Für das Verhältnis der tangentialen Linienlast T_{Lx} zur Normalkraft F_z , auch als Kraftschlusskoeffizienten bezeichnet, gilt:

$$\frac{T_{Lx}}{F_z} = \mu \left[1 - \left(1 - \frac{s_x}{s_{x_gesättigt}} \right)^2 \right] \quad \forall \quad 0 \leq s_x \leq s_{x_gesättigt} \quad (2.80)$$

$$\frac{T_{Lx}}{F_z} = \mu \quad \forall \quad s_x \geq s_{x_gesättigt} \quad (2.81)$$

Die Anfangssteigung kann nun noch durch Ableiten der tangentialen Linienlast T_{Lx} nach dem Längsschlupf s_x der Stelle 0

$$\frac{\partial T_{Lx}}{\partial s_x} \Big|_{s_x=0} = \mu F_z \frac{2}{s_{x_gesättigt}} \quad (2.82)$$

bestimmt werden. [18, S. 65f]

2.4.3 Näherungslösung für den dreidimensionalen Fall

Johnson [11] versuchte in Anlehnung an Carter eine analytische Lösung für den dreidimensionalen Fall herzuleiten. Er untersuchte eine Kugel unter reinem Längs- und Querschlupf und stellte die Analogie auf, dass sich die Tangentialspannungsverteilung als Differenz zweier Kugeln gebildet werden kann. Der Vorteil ist, dass man wieder auf analytische Integrale trifft, allerdings mit dem Nachteil, dass es nur mehr eine Näherungslösung ist.

Gemeinsam mit Vermeulen [10] konnte Johnson seine Lösung auf den Fall von elliptischen Kontaktflächen verallgemeinern und wieder analytische Näherungslösungen aufstellen. Abbildung 2.18 stellt die Ergebnisse von Vermeulen und Johnson graphisch dar. [18, S. 68]

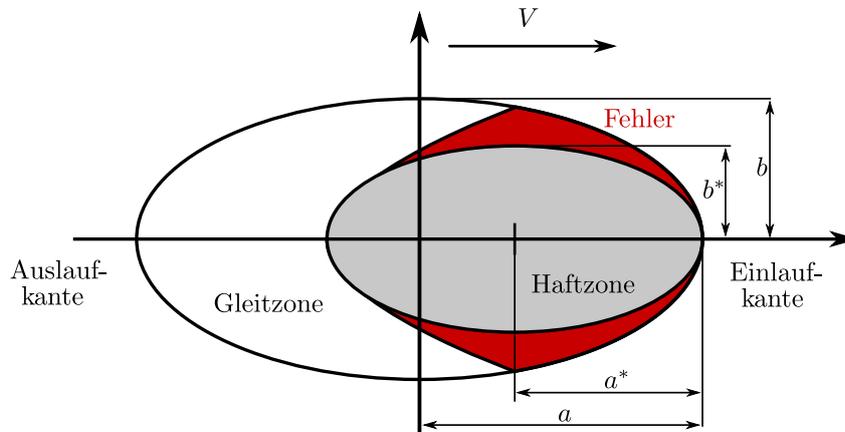


Abbildung 2.18: Haft- und Gleitgebiet nach der Näherung von Vermeulen und Johnson

Aus Abbildung 2.18 ist ersichtlich, dass sich eine Haftzone ausbildet, die bei einer elliptischen Kontaktfläche ebenfalls eine elliptische Form hat. Es ist jedoch nicht plausibel, dass es an der Einlaufkante eine so schmale Gleitzone gibt. Vergleiche der Näherungslösung von Vermeulen und Johnson mit exakteren Verfahren ergeben, dass der rot markierte Bereich auch Teil des Haftgebietes sein sollte und so einen Fehler darstellt.

2.4.4 Lineare Theorie für elliptische Kontakte

Die lineare Theorie [13, S. 2.39] gilt bei elliptischer Kontaktfläche und setzt voraus, dass die gesamte Kontaktfläche Haftgebiet ist. Das heißt die Theorie ist gültig für kleine Schlüpfе und/oder hohe Reibungskoeffizienten. Die Lösung der resultierenden Tangentialkräfte T_x und T_y sieht wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -abGC_{11}s_x \\ -abGC_{22}s_y - (ab)^{\frac{3}{2}}GC_{23}s_z \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Man sieht dass der Bohrschlupf s_z in Längsrichtung keine Reibkraft erzeugt, in Querrichtung allerdings schon. Die Koeffizienten C_{11} , C_{22} und C_{23} werden als Kalker Koeffizienten bezeichnet und durch die Linearisierung der exakten Theorie um den schlupffreien Zustand berechnet. Die Koeffizienten sind nur abhängig vom Verhältnis a/b und von der Querkontraktionszahl ν . [13, 2.39] Die Koeffizienten können in [9, S. 326] nachgeschlagen werden.

2.4.5 Kalkers vereinfachte Theorie des Rollkontaktes - FASTSIM

FASTSIM ist ein Algorithmus der eigenständig zur Verfügung steht und auch im Computerprogramm CONTACT implementiert ist. Im Abschnitt 2.3 wurde bereits die Beziehung für den wahren Schlupf beim stationären Rollen hergeleitet. Im Haftgebiet muss gelten, dass der stationäre wahre Schlupf,

$$\mathbf{w}_{\text{Schlupf_stationär}}(x, y) = \begin{pmatrix} s_x - s_z y \\ s_y + s_z x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.84)$$

null ist. Setzt man einen linearen Zusammenhang zwischen den Tangentialspannungen p_x beziehungsweise p_y und Verschiebungen u_x, u_y an, wobei die Proportionalität durch die Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{L} , mit den Komponenten L_1, L_2 und L_3 , beschrieben wird, so folgt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial x} \\ \frac{\partial p_y}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_x}{L_1} - \frac{s_z y}{L_3} \\ \frac{s_y}{L_2} + \frac{s_z x}{L_3} \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Dieser Ansatz entspricht dem Bürstenmodell, vergleiche Abschnitt 2.4.1. Nach Integration und Bestimmung der Integrationskonstanten, mit der Randbedingung, dass die Spannung an der Einlaufkante null sein muss, folgt für die x-Komponente p_x und die y-Komponente p_y der Spannung,

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{s_x}{L_1} - \frac{s_z y}{L_3} \right) (x - \bar{a}) \\ \frac{s_y}{L_2} (x - \bar{a}) + \frac{s_z}{2L_3} (x^2 - \bar{a}^2) \end{pmatrix} \quad \text{mit : } \bar{a} = a \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.86)$$

Die Koeffizienten L_1, L_2 und L_3 werden durch Linearisieren um den schlupffreien Zustand aus der exakten Theorie bestimmt. [13, S. 41ff]

3 Die Kontaktmodelle CONTACT und FASTSIM von J.J. Kalker

Das Programm CONTACT hat eine lange Geschichte. So wurde Version 1 bereits im Jahre 1982 geschrieben und folgte dem Programm DUVOROL. Das Programm FASTSIM stellt eine Näherungslösung dar und ist häufig in Mehrkörpersimulationen integriert.

3.1 CONTACT

CONTACT wurde von J.J.Kalker im Rahmen seiner Dissertation entwickelt. Das Programm basiert auf der exakten Theorie der Elastizität und löst sowohl das Normalproblem (reibungsfrei) als auch das Tangentialproblem (reibungsbefahet) für stationäre und instationäre Fälle. Die Körper können dabei linear-elastisches oder visko-elastisches Materialverhalten aufweisen und aus demselben Material bestehen, oder auch aus unterschiedlichem Material aufgebaut sein. Die Geometrie der beiden Körper ist frei (nicht Hertz'scher Kontakt), die Kontaktfläche ist allerdings immer eben. Die Krümmung der Kontaktfläche kann aber durch die Vorgabe der lokalen Schlupfterme berücksichtigt werden. Es kann entweder der Starrkörperschlupf vorgegeben werden und die resultierende Tangentialkraft bestimmt werden oder umgekehrt. [20, S. 5f]

3.1.1 Formulierung des Problems

Die Gleichung der Elastizität für das Innere der zwei sich kontaktierenden Körper kann in manchen Fällen zur Gleichung der Grenzfläche

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_j(\mathbf{y}) ds \quad (3.1)$$

konvertiert werden. Der Vorteil der Beziehung (3.1) ist, dass nur über die zweidimensionale Kontaktfläche \mathcal{C} des Körpers integriert werden muss.

Die Indizes i, j geben die Koordinatenrichtungen 1, 2, 3 an, wobei die erste die Rollrichtung x , die zweite die Querrichtung y und die dritte die Normalenrichtung z kennzeichnet. Die Position in der Kontaktfläche wird mit \mathbf{x} und \mathbf{y} beschrieben. Die Verschiebungsdifferenz $u_i(\mathbf{x}) = u_i^{(R)}(\mathbf{x}) - u_i^{(S)}(\mathbf{x})$ errechnet sich über das Integral der Tangentialspannung $p_j(\mathbf{y})$ mal der Einflussfunktion $\mathcal{A}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mal einem infinitesimalen Flächenelement ds . Mit der Tangentialspannung $p_j(\mathbf{y})$ an der Stelle \mathbf{y} auf das Rad in positiver j -Richtung. Die Einflussfunktion beschreibt die Verschiebungsdifferenz in i -Richtung an der Stelle \mathbf{x} aufgrund der Belastung in j -Richtung an der Stelle \mathbf{y} . [20, S. 9] Die Einflussfunktionen können für den elastischen Halbraum im Dreidimensionalen, dank Boussinesq und Cerruti, bestimmt werden.

Für das Normalproblem und das Tangentialproblem gibt es zwei wichtige Größen, nämlich den deformierten Abstand e der Körper zueinander und die wahre Schlupfgeschwindigkeit \mathbf{w}_τ . Der deformierte Abstand e ist gleich der Summe aus dem undeformierten Abstand

h , der undeformierten Körper vor Kontakt, und der Verschiebungsdifferenz in Normalenrichtung u_z ,

$$e := h + u_z. \quad (3.2)$$

Der zweite wichtige Begriff ist die wahre oder totale Schlupfgeschwindigkeit \mathbf{w}_τ ,

$$\mathbf{w}_\tau := \mathbf{s}_\tau + \dot{\mathbf{u}}_\tau. \quad (3.3)$$

Diese setzt sich aus der Formänderungsschlupfgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ und der Starrkörperschlupfgeschwindigkeit \mathbf{s}_τ zusammen. Die Formänderungsschlupfgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ ist die zeitlichen Ableitung der Verschiebungsdifferenz in Tangentialrichtung. Die Geschwindigkeit \mathbf{s}_τ der Teilchen im undeformierten Zustand in Tangentialrichtung bezeichnet man als Starrkörperschlupfgeschwindigkeit. [20, S. 8] Vergleiche zur Definition des Schlupfes Abschnitt 2.3 beziehungsweise Gleichung (2.66). Die Schlupfgeschwindigkeiten sind im Gegensatz zum Schlupf, nicht auf die Referenzgeschwindigkeit bezogen, deshalb auch nicht dimensionslos. Zur Unterscheidung soll die Indizierung mit τ helfen.

Für die Bestimmung der Kontaktfläche, beziehungsweise zur Detektion der Haft- und Gleitzone gelten folgende Kontaktbedingungen, vergleiche Abbildung 3.1 und Abbildung 3.2: [20, S. 8f]

Normalproblem:

Für die Fläche die nicht in Kontakt ist **E** gilt

$$e > 0, \quad p_z = 0 \quad (3.4)$$

Innerhalb der Kontaktfläche **C** gilt

$$e = 0, \quad p_z \geq 0 \quad (3.5)$$

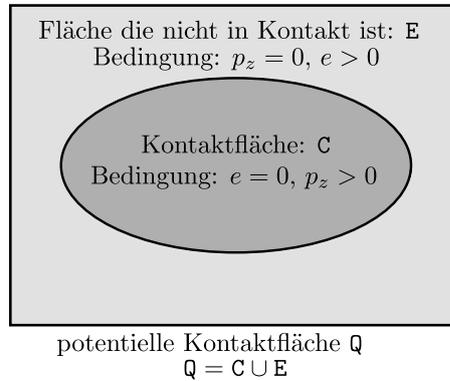


Abbildung 3.1: Aufteilung der potentiellen Kontaktfläche

Tangentialproblem:

Außerhalb der Kontaktfläche gilt

$$\mathbf{w}_\tau = \text{frei}, \quad p_\tau = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 0 \quad (3.6)$$

In der Haftzone **H** gilt

$$|\mathbf{w}_\tau| = 0, \quad |p_\tau| \leq g \quad (3.7)$$

In der Gleitzone **G** gilt

$$|\mathbf{w}_\tau| > 0, \quad |p_\tau| = g \quad (3.8)$$

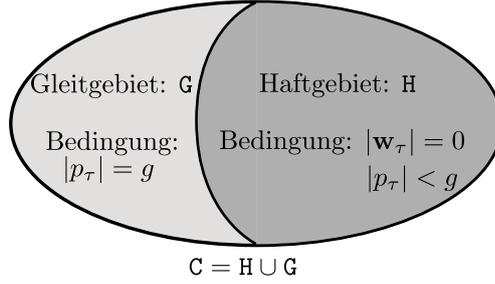


Abbildung 3.2: Aufteilung der Kontaktfläche

Wobei g der traction bound ist. Bei der Berechnung wird ein einzelnes Teilchen von der Einlaufkante bis zur Auslaufkante beobachtet, was dem Lagrange Ansatz entspricht. Deshalb benötigt man bei der Berechnung neben der Zeitinstanz t auch eine frühere Zeitinstanz t' , mit dem Zeitschritt $\delta t = t - t'$. Handelt es sich um ein stationäres Problem so ist es egal ob das Teilchen mit Hilfe der Zeit oder des Ortes beschrieben wird. Eine bezogene Größe ist der pro Zeiteinheit zurückgelegte Weg $\delta q = V \cdot \delta t$, der bei der Simulation gleich dem Diskretisierungsabstand in Rollrichtung sein sollte. Wobei V die Referenzgeschwindigkeit ist. [20, S. 10f]

3.1.2 Diskretisierung des Problems

Die potentielle Kontaktfläche ist ein Rechteck, an der Oberfläche des Halbraumes, dessen Seiten parallel zu der x - und y -Achse sind. Die potentielle Kontaktfläche wird in N gleiche Elemente unterteilt. Diese sind von 1 bis N durchnummeriert sind, vergleiche Abbildung 3.3. Das Element ist $2\Delta x$ lang, $2\Delta y$ breit und hat den Mittelpunkt: $\mathbf{x}_I = (x_I, y_I, 0)$. Das Zentrum der tatsächlichen Kontaktfläche muss nicht zwingend in der Mitte der potentiellen Kontaktfläche liegen. [8, S. 60]

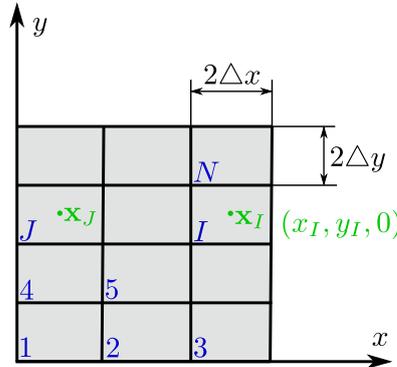


Abbildung 3.3: Die Diskretisierung der potentiellen Kontaktfläche (in Anlehnung an [8, S. 60])

Nach der Diskretisierung des Problems wird Gleichung (3.1) zur Beziehung:

$$u_i(\mathbf{x}_I) = \sum_{j=1}^3 \sum_{J=1}^N A_{IiJj}(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J) p_j(\mathbf{x}_J). \quad (3.9)$$

Die Koordinaten der Elemente I und J werden mit \mathbf{x}_I und \mathbf{x}_J gekennzeichnet. A_{IiJj} steht für die Einflusskoeffizienten. Diese erhält man durch Integration von (3.1) über ein

einzelnes Element J . Die Spannung $\mathbf{p} = (p_j)$ ist stückweise konstant in jedem Element. Die Schreibweise in der Form (p_j) entspricht einem Vektor mit den Komponenten j . Der Zeitpunkt t wird mit (p_{Jj}) , und der Zeitpunkt t' wird mit (p'_{Jj}) gekennzeichnet. Das Ziel ist es die Verschiebungsdifferenzen $\mathbf{u}(x, y, 0)$ an der Stelle $\mathbf{x}(x, y, 0)$ beschreiben zu können. Deshalb werden die Gleichungen von Boussinesq und Cerruti integriert. Folgende Notation wird verwendet: B_{iJj} ist ein dreidimensionaler Array, i korrespondiert zu der Komponente der Verschiebungsdifferenz $u_i(x, y)$, und Jj zu der Komponente der Spannung p_{Jj} . An der Stelle $(x, y, 0)$ wird die Verschiebungsdifferenz berechnet. [8, S. 60f]

Die Einflussfunktion B_{iJj} ,

$$B_{iJj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi G} \int_{x_J - \Delta x}^{x_J + \Delta x} dx' \int_{y_J - \Delta y}^{y_J + \Delta y} dy' \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{\mathcal{R}} + \frac{\nu(x'-x)^2}{\mathcal{R}^3} & \frac{\nu(x'-x)(y'-y)}{\mathcal{R}^3} & \frac{K(x'-x)}{\mathcal{R}^2} \\ \frac{\nu(x'-x)(y'-y)}{\mathcal{R}^3} & \frac{1-\nu}{\mathcal{R}} + \frac{\nu(y'-y)^2}{\mathcal{R}^3} & \frac{K(y'-y)}{\mathcal{R}^2} \\ -\frac{K(x'-x)}{\mathcal{R}^2} & -\frac{K(y'-y)}{\mathcal{R}^2} & \frac{1-\nu}{\mathcal{R}} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

kann dank Boussinesq und Cerruti mit Hilfe der Gleichungen (2.25), (2.26) (2.27) bestimmt werden. Wobei an der Position $\mathbf{y} = (x', y')^T$ die Belastung $p_j(\mathbf{y})$ wirkt und die Verschiebungsdifferenz $u_i(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x} = (x, y)^T$ bestimmt wird. Der Abstand \mathcal{R} zwischen den Positionen \mathbf{x} und \mathbf{y} kann über den Satz von Pythagoras,

$$\mathcal{R} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}, \quad (3.11)$$

berechnet werden. Es sind sechs verschiedene Integranden in der Formel, wobei durch Ausnutzung von Symmetrie nur drei ausgewertet werden müssen. Unter Verwendung folgender Notation,

$$[[f(x, y)]] = \left[[f(x, y)]_{x-x_J+\Delta x}^{x-x_J-\Delta x} \right]_{y-y_J-\Delta y}^{y-y_J+\Delta y}, \quad (3.12)$$

lautet das Ergebnis:

$$(\pi G)B_{1J1}(x, y) = [[y \ln(x + \mathfrak{r}) + (1 - \nu)x \ln(y + \mathfrak{r})]] \quad (3.13)$$

$$(\pi G)B_{1J2}(x, y) = (\pi G)B_{2J1} = [[-\nu \mathfrak{r}]] \quad (3.14)$$

$$(\pi G)B_{1J3}(x, y) = -(\pi G)B_{3J1} = [[K(y \ln(\mathfrak{r}) + x \arctan(y/x))]] \quad (3.15)$$

$$(\pi G)B_{2J2}(x, y) = [[x \ln(y + \mathfrak{r}) + (1 - \nu)y \ln(x + \mathfrak{r})]] \quad (3.16)$$

$$(\pi G)B_{2J3}(x, y) = -(\pi G)B_{3J2} = [[K(x \ln(\mathfrak{r}) + y \arctan(x/y))]] \quad (3.17)$$

$$(\pi G)B_{3J3}(x, y) = [[(1 - \nu)(x \ln(y + \mathfrak{r}) + y \ln(x + \mathfrak{r}))]] . \quad (3.18)$$

Dabei gelten folgende Substitutionen:

$$\mathfrak{r} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G^R} + \frac{1}{G^S} \right) \quad (3.20)$$

$$\frac{\nu}{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu^R}{G^R} + \frac{\nu^S}{G^S} \right) \quad (3.21)$$

$$K = \frac{G}{4} \left(\frac{1 - 2\nu^R}{G^R} - \frac{1 - 2\nu^S}{G^S} \right). \quad (3.22)$$

Die Verschiebungsdifferenz $\mathbf{u}_I = (u_{Ii})$ wird an der Stelle (\mathbf{x}_I, t) , und die Verschiebungsdifferenz $\mathbf{u}'_I = (u'_{Ii})$ wird an der Stelle $(\mathbf{x}_I + \mathbf{V}(t - t'), t')$ bestimmt.

Zum Schluss wird noch definiert:

$$A_{IiJj} = B_{iJj}(\mathbf{x}_I) \quad (3.23)$$

$$C_{IiJj} = B_{iJj}(\mathbf{x}_I + \mathbf{V}(t - t')) \quad (3.24)$$

$$\mathbf{p} = (p_{Jj}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_J, t) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{p}' = (p'_{Jj}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_J, t') . \quad (3.26)$$

Man beachte, dass bei einem instationären Problem gilt, dass $p'_{Jj} \neq p_{Jj}$, wobei p'_{Jj} bekannt ist. Bei einem stationären Problem gilt, dass $p'_{Jj} = p_{Jj}$, wobei p'_{Jj} unbekannt ist. Für die Verschiebungsdifferenzen gelten schlussendlich folgende Beziehungen: [8, S. 61f]

$$u_{Ii} = \sum_{J=1}^N \sum_{j=1}^3 A_{IiJj} p_{Jj} \quad (3.27)$$

$$u'_{Ii} = \sum_{J=1}^N \sum_{j=1}^3 C_{IiJj} p'_{Jj} . \quad (3.28)$$

3.1.3 Diskretisierung des Schlupfes

Für die wahre Schlupfgeschwindigkeit \mathbf{w}_τ , vergleiche Beziehung (3.3), ergibt sich nach der Ausformulierung von \mathbf{u}_τ der Zusammenhang

$$\mathbf{w}_\tau = \mathbf{s}_\tau - \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t} . \quad (3.29)$$

Die Verschiebung $\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x} + \delta t \mathbf{V}, t - \delta t)$ zu einem früheren Zeitpunkt $t' = t - \delta t$ erhält man durch eine Taylorreihenentwicklung an der Stelle $\delta t = 0$,

$$\mathbf{u}'_\tau = \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x} + \delta t \mathbf{V}, t - \delta t) = \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}, t) + \delta t \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{V} - \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t} \right) + O(\delta t^2) . \quad (3.30)$$

Bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung kann die Beziehung umgeformt werden auf

$$\frac{\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}'_\tau}{\delta t} = -\frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t} . \quad (3.31)$$

Eingesetzt in die Gleichung (3.29) gilt für die wahre Schlupfgeschwindigkeit \mathbf{w}_τ im diskretisierten Fall, für stationäre und instationäre Probleme, die Beziehung

$$\mathbf{w}_\tau = \mathbf{s}_\tau + \frac{\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}'_\tau}{t - t'} . \quad (3.32)$$

Im Allgemeinen ist bei einem instationären Problem \mathbf{u}'_τ bekannt und \mathbf{u}_τ unbekannt. Für stationäres Rollen sind \mathbf{u}_τ und \mathbf{u}'_τ unabhängig von der Zeit,

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}) , \quad \mathbf{u}'_\tau = \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x} + \delta t \mathbf{V}) , \quad (3.33)$$

und beide unbekannt. [8, S. 34f]

3.1.4 Die Lösung des Normalproblems mit Hilfe des NORM-Algorithmus

Es wird angenommen, dass die Tangentialspannung $p_{J\tau}$ mit $\tau = 1, 2$ als Funktion der Position \mathbf{x}_J und der undeformierte Abstand h bekannt sind. Die Normalspannung $p_{Jz} = p_z(\mathbf{x}_J)$ wirkt auf Körper 1. Der Abstand im deformierten Zustand e_I an der Stelle \mathbf{x}_I ist der skalare Abstand vom Körper 1 (Rad) zum Körper 2 (Schiene), gemessen vom Körper 2 zum Körper 1. Dieser setzt sich, wie bereits erwähnt, aus dem Abstand im undeformierten Zustand und der Verschiebungsdifferenz zusammen, vergleiche Beziehung (3.2). Der Algorithmus ist in Abbildung 3.4 als Flussdiagramm dargestellt.

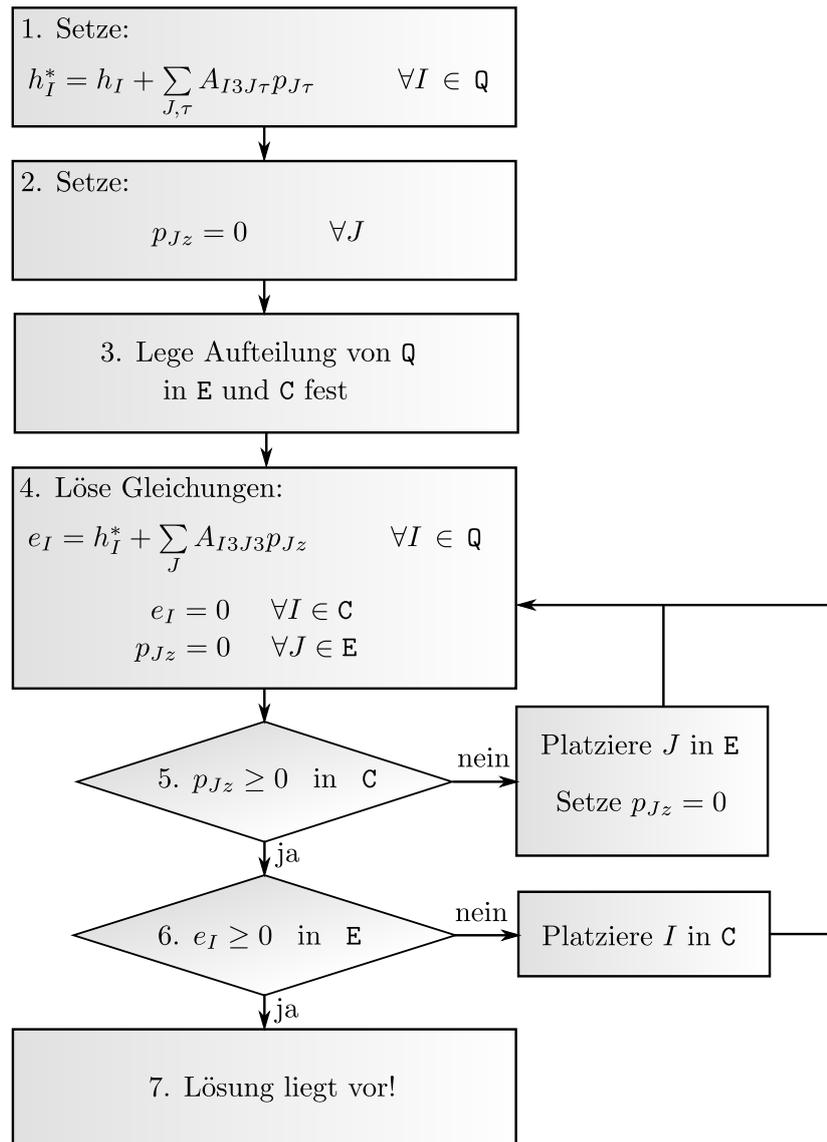


Abbildung 3.4: NORM-Algorithmus

Die gegebene Tangentialspannung $p_{J\tau}$ wird durch Modifikation des undeformierten Abstandes h berücksichtigt. Anschließend wird die Normalspannung in allen Elementen gelöscht. Im 3. Schritt wird die Aufteilung der potentiellen Kontaktfläche Q in die Kontaktfläche C und die Fläche die nicht in Kontakt ist E festgelegt. Während des Lösungsprozesses

werden \mathbf{E} und \mathbf{C} verändert, bis sie sich mit der Lösung decken. Nach der Festlegung der Elementaufteilung wird die Gleichung

$$e_I = h_I^* + \sum_J A_{I3J3} p_{Jz} \quad (3.34)$$

gelöst. Für Elemente der Kontaktfläche \mathbf{C} gilt für den deformierte Abstand die Beziehung $e_I = 0$. Ist ein Teilchen außerhalb der Kontaktfläche \mathbf{C} , so lautet die Bedingung, dass die Normalspannung gleich null sein muss. Das ergibt N Gleichungen für die N unbekanntes p_{Jz} .

Im folgenden iterativen Prozess werden die Randbedingungen überprüft. Zunächst muss gelten, dass die Normalspannungen p_{Jz} in allen Elementen der Kontaktfläche \mathbf{C} größer als null ist. Wenn dies nicht der Fall ist, so werden die Elemente mit einer negativen Normalspannung außerhalb der Kontaktfläche platziert und die Normalspannung im Element auf null gesetzt. Der Algorithmus setzt mit Punkt 4 fort. Ist die Normalspannung in allen Elementen der Kontaktfläche \mathbf{C} größer als null so wird weiters abgefragt, ob in allen Elementen außerhalb der Kontaktfläche der deformierte Abstand e größer als null ist. Trifft dies zu, so liegt die Lösung vor. Ist in einem Element außerhalb der Kontaktfläche \mathbf{C} der deformierte Abstand e kleiner als null, so wird dieses Element in der Kontaktfläche \mathbf{C} platziert und wieder mit Punkt 4 fortgefahren. [8, S. 62f]

3.1.5 Die Lösung des Normalproblems bei vorgegebener Normalkraft - adaptierter NORM-Algorithmus

Es gibt eine wichtige Variante des NORM-Algorithmus, der im Folgenden beschrieben wird. Im gewöhnlichen NORM-Algorithmus ist d vorgegeben. Wenn aber die Normalkraft F_z vorgeschrieben ist, muss die Eindringung d bestimmt werden. Der NORM-Algorithmus muss adaptiert werden. Für die Normalkraft gilt:

$$F_z = 4\Delta x \Delta y \sum_{J \in \mathbf{Q}} p_{Jz} \quad (3.35)$$

Beim adaptierten NORM-Algorithmus, vergleiche Abbildung 3.5, wird zunächst die Eindringung d null gesetzt und das Minimum I' des modifizierten undeformierten Abstandes h^* bestimmt. Anschließend wird die Eindringung d so gesetzt, dass beim Element I' der modifizierte undeformierte Abstand $h_{I'}^*$ gleich null ist. In dem Element I' wird nun die gesamte Normalkraft aufgebracht. Die Kontaktfläche \mathbf{C} ist zunächst das Element I' . Die Fläche die nicht in Kontakt ist \mathbf{E} , setzt sich aus allen anderen Elementen der potentiellen Kontaktfläche \mathbf{Q} zusammen. \mathbf{E} und \mathbf{C} werden modifiziert, bis sie sich mit der Lösung decken. Bei jedem Versuch wird die Aufteilung der potentiellen Kontaktfläche \mathbf{Q} in \mathbf{C} und \mathbf{E} neu festgesetzt und die Gleichung,

$$e_I = h_I^* + \sum_J A_{I3J3} p_{Jz} \quad (3.36)$$

gelöst. Dabei gelten folgende Bedingungen:

In der Kontaktfläche \mathbf{C} muss der deformierte Abstand e gleich null sein. Außerhalb der Kontaktfläche muss in jedem Element die Normalspannung p_{Jz} gleich null sein. Da im Gleichungssystem neben den N unbekanntes p_{Jz} noch die unbekanntes Eindringung d vorkommt bedarf es einer zusätzlichen Gleichung. Diese ergibt sich aus der Bedingung, dass die Summe der Normalspannungen p_{Jz} mal der Elementgröße gleich der Normalkraft F_z sein muss. Anschließend folgt der gewöhnliche NORM-Algorithmus. [8, S. 64]

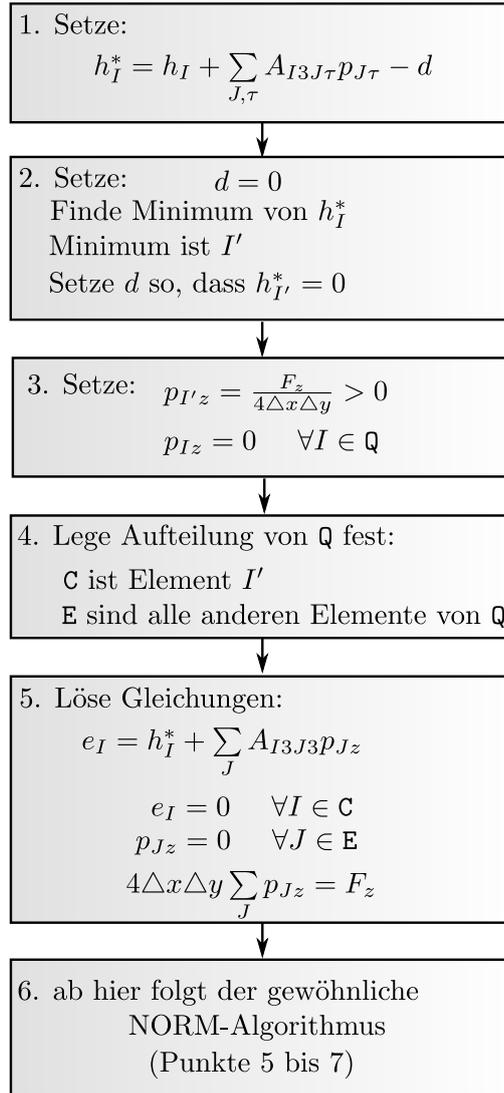


Abbildung 3.5: Adaptierter NORM-Algorithmus

3.1.6 Die Lösung des Tangentialproblems mit Hilfe des TANG-Algorithmus

Es wird angenommen, dass die Normalspannung $p_{Jz} = p_z(\mathbf{x}_J)$ und die Starrkörperschlupfgeschwindigkeit $\mathbf{s}_{I\tau} = \mathbf{s}_\tau(\mathbf{x}_I)$ bekannt sind. Die Verschiebungsdifferenzen u_I und v_I können an der Stelle (\mathbf{x}_I, t) über

$$u_I = \sum_J \sum_j A_{I1Jj} p_{Jj}, \quad v_I = \sum_J \sum_j A_{I2Jj} p_{Jj}, \quad (3.37)$$

beziehungsweise die Verschiebungsdifferenzen u'_I und v'_I an der Stelle $(\mathbf{x}_I + \mathbf{V}(t - t'), t')$ über

$$u'_I = \sum_J \sum_j C_{I1Jj} p'_{Jj}, \quad v'_I = \sum_J \sum_j C_{I2Jj} p'_{Jj}, \quad (3.38)$$

bestimmt werden. Die wahre Schlupfgeschwindigkeit $\mathbf{w}_{I\tau}$ im diskretisierten Fall ist definiert über die Beziehung (3.32),

$$\mathbf{w}_{I\tau} = \mathbf{s}_{I\tau} + \frac{\mathbf{u}_{I\tau} - \mathbf{u}'_{I\tau}}{t - t'}. \quad (3.39)$$

Bei der Lösung des Problems gilt das Coulombsche Gesetz, $|(p_{I1}, p_{I2})| \leq g_I$:

- Im Haftgebiet \mathbf{H} ist die wahre Schlupfgeschwindigkeit gleich null.
- Im Gleitgebiet \mathbf{G} gilt, $\mathbf{w}_{I\tau} = -|\mathbf{w}_{I\tau}|(p_{I1}, p_{I2})/g_I$.

Wobei der traction bound durch die Normalspannung mit, $g_I = \mu p_{Iz}$, vorgegeben ist.

Der Ablauf des TANG-Algorithmus ist in Abbildung 3.6 dargestellt.

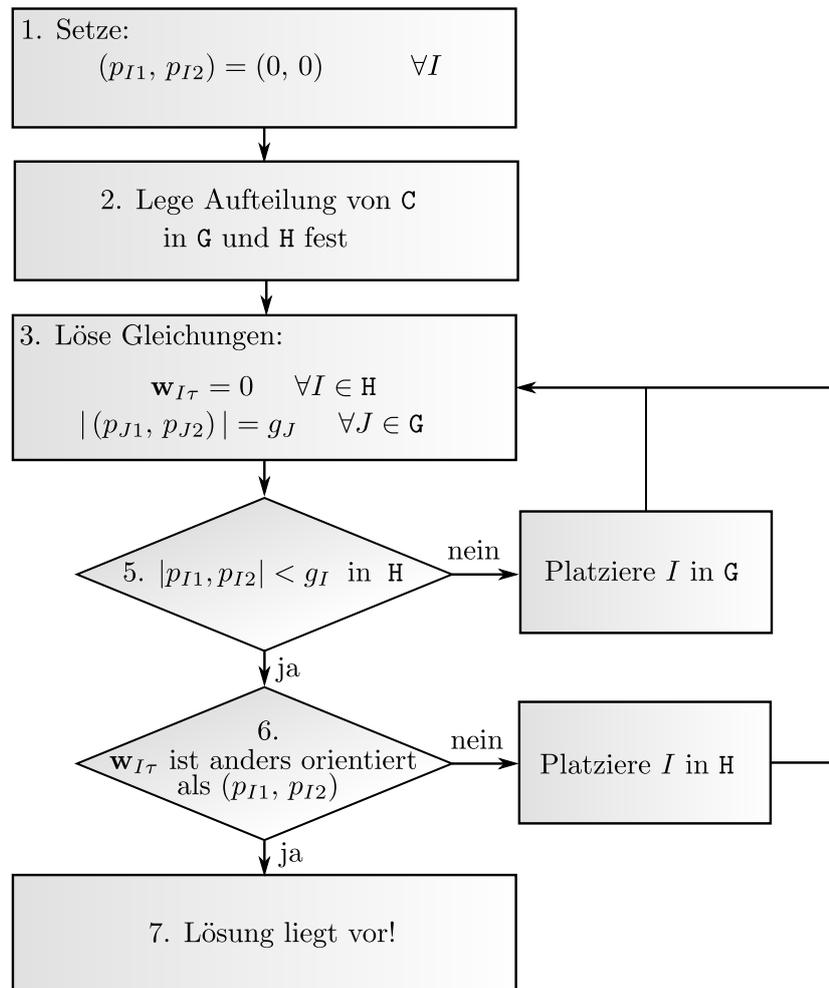


Abbildung 3.6: TANG-Algorithmus

Zunächst werden alle Tangentialspannungen gelöscht. Anschließend wird die Aufteilung der Kontaktfläche \mathbf{C} in das Haftgebiet \mathbf{H} und das Gleitgebiet \mathbf{G} festgelegt. Diese wird während des Lösungsprozesses modifiziert bis sich die Aufteilung mit der Lösung deckt. Im dritten Schritt werden die zugrunde liegenden Gleichungen für das Haftgebiet \mathbf{H} und das Gleitgebiet \mathbf{G} gelöst. Dabei gilt im Haftgebiet \mathbf{H} die linearen Gleichung, $\mathbf{w}_{I\tau} = 0$. Im Gleitgebiet \mathbf{G} muss die nichtlineare Bedingung erfüllt sein, dass der Betrag der Tangentialspannung

den traction bound g_I nicht übersteigen darf. Trifft für ein Element des Haftgebietes H diese Bedingung nicht zu, so wird es im Gleitgebiet G platziert und die Gleichungen des 3. Schrittes erneut gelöst. Der Algorithmus kontrolliert außerdem ob das Vorzeichen der Schlupfgeschwindigkeit $\mathbf{w}_{I\tau}$ im Gleitgebiet G entgegengesetzt dem Vorzeichen der Tangentialspannung ist. Hat ein Element I bei der Schlupfgeschwindigkeit $\mathbf{w}_{I\tau}$ und bei der Tangentialspannung dasselbe Vorzeichen, so wird es im Haftgebiet H platziert. Erfüllen alle Elemente auch diese Randbedingung so ist das Problem gelöst und es liegt eine Lösung vor. [8, S.64f]

3.1.7 Lösungsprozesse

Das diskretisierte Problem wird gelöst durch die Verwendung von fünf verschachtelten Lösungsprozessen. [20, S.12f]

1. Die äußere Iteration

- a) Zwei Körper sind quasiident, wenn sie dieselben Materialeigenschaften haben. Das erlaubt eine Entkopplung des Normalproblems vom Tangentialproblem. Das Normalproblem kann zuerst gelöst werden und damit (und dem resultierenden traction bound g) kann dann das Tangentialproblem berechnet werden. Diese äußere ein-Schritt Iteration wird „Johnson Prozess“ genannt.
- b) Sind allerdings die Materialeigenschaften unterschiedlich, so beeinflusst das Normalproblem das Tangentialproblem und vice versa. In einem solchen Fall kommt der sogenannte „Panagiotopoulos Prozess“, der Normal- und Tangentialproblem abwechselnd löst, bis die Aktualisierung der aufeinanderfolgenden Gleichungen eine Toleranz unterschreitet, zum Einsatz.

2. Die DUVOROL Iteration

- a) Die Tangentialproblem Formulierung beinhaltet die Verschiebungsdifferenzen u der derzeitigen und u' der vorigen Zeitinstanz, verursacht durch die Spannungen p und p' . Bei einem stationären Problem sind sowohl p , als auch p' unbekannt und es gilt $p = p'$. Im DUVOROL Ansatz für stationäres Rollen, wird das durch eine transiente Simulation gelöst. Das ist eine Sequenz von Zeitschritten unter stationären Zuständen, die fortgesetzt werden, bis der stationäre Zustand eintritt. Diese zweite Schleife wird bis zur Unterschreitung einer bestimmten Toleranz fortgesetzt.
- b) Alternativ gibt es noch die sogenannte „direkte Methode“ für stationäre Rollprobleme, die in der Regel schneller ist als der DUVOROL Ansatz. Die DUVOROL Iteration ist auch nicht relevant bei instationären Problemen, bei denen p' vorab bekannt ist, und beim Normalproblem, das nicht von einer vorigen Spannung p' abhängt.

3. Der NORM- und TANG-Algorithmus

- a) Das Normalproblem wird durch den NORM-Algorithmus gelöst. Die Hauptschleife des Algorithmus setzt die Aufteilung der Elemente der potentialen Kontaktfläche in die Kontaktfläche und die nicht Kontaktfläche fest. Dann werden die korrespondierenden Gleichungen gelöst und anschließend geprüft, ob die Randbedingungen erfüllt sind. Der Algorithmus iteriert bis die korrekte Elementaufteilung gefunden ist.
- b) Das Tangentialproblem wird durch den TANG-Algorithmus gelöst. In diesem Fall wird ebenfalls die Aufteilung der Kontaktfläche in das Haft- und Gleitge-

biet festgesetzt. Bei jedem Versuch wird der Algorithmus neu gestartet und die Aufteilung der Kontaktfläche adaptiert. Wenn der Algorithmus eine Lösung gefunden hat, führt der TANG-Algorithmus noch eine zusätzliche Überprüfung der Randbedingungen durch. Dabei wird die Aufteilung der Kontaktfläche erneut adjustiert.

4. Die Newton-Raphson Schleifen für die totalen Kräfte

- a) Die Eindringung d muss berechnet werden, wenn die Normalkraft F_z gegeben ist. Bei einer definierten Kontaktfläche ist das Problem einfach, weil die Kraft linear mit der Eindringung in Zusammenhang steht. Die zugrunde liegenden Gleichungen können jedoch aufgrund des verwendeten Lösungsalgorithmus nicht verwendet werden. Dieser benötigt nämlich ein symmetrisches positiv definites System von Gleichungen. Deshalb wird eine kleine iterative Prozedur verwendet, welche die Ableitung der totalen Normalkraft nach der Eindringung berechnet und folglich die Eindringung bestimmt.
- b) Eine ähnliche Prozedur wird verwendet, wenn eine oder beide Komponenten der Tangentialkraft vorgegeben ist. In diesem Fall ist die Newton-Raphson Prozedur aufgrund von zwei Gründen etwas komplizierter:
 - Der Zusammenhang zwischen totaler Kraft und Schlupf ist nicht-linear, wegen der nicht-linearen Gleichungen und die Adjustierung der Elementaufteilung in der inneren iterativen Prozedur.
 - Das Problem könnte nun zweidimensional sein.

Deshalb ist die Robustheit des gesamten Lösungsprozesses nicht zu 100% gewährleistet, wenn die Tangentialkräfte vorgegeben sind. Vor allem ist dies der Fall, wenn beide Schlupfkomponenten unbekannt sind und wenn die Tangentialkraft sehr nahe am Maximum ist.

5. Die innere iterative Lösungsprozedur

- a) Nachdem festgelegt wird, wie die potentielle Kontaktfläche in Kontaktgebiet und nicht-Kontaktgebiet aufgeteilt ist, und die Eindringung d fixiert wird, führt das Normalproblem zu einem linearen Gleichungssystem für die Normalspannung p_z :

$$e_I = h_I^* + \sum_J A_{IzJz} p_{Jz}$$

Der Ausdruck h_I^* beinhaltet optional auch einen Term der Tangentialspannungen. Dieses lineare Gleichungssystem ist symmetrisch und positiv definit. Es kann mit Hilfe des Gradientenverfahren gelöst werden. Derzeit ist noch kein Vorkonditionierer¹ im Einsatz. Die zugrunde liegende Systemmatrix ist dicht besetzt, hat aber konstante Diagonalen. Sie wird nicht explizit gebildet, stattdessen wird eine Matrix-freie Implementation verwendet

- b) Das Tangentialproblem mit vorgegebenen Schlüpfen ist nichtlinear, wenn Elemente im Gleitgebiet sind. Die Gleichungen werden mit Hilfe eines speziellen dafür entwickelten Gaus-Seidel Verfahrens, namens „ConvexGS“ gelöst. Dieser Ansatz betrachtet Element für Element und löst das Problem lokal unter Berücksichtigung des lokalen traction bounds. Die Unterteilung in Haft- und Gleitgebiet

¹Durch Vorkonditionierung wird in der Numerik versucht, durch Umformungen eines Gleichungssystems ein äquivalentes System zu erhalten, das man schneller und stabiler lösen kann [15, S. 26]

wird dabei ständig angepasst. Relaxation² wird angewandt um die Stabilität des Ansatzes zu erhöhen. Die Methode ist als ein Matrix-freier Mechanismus implementiert, um Speicherprobleme zu vermeiden und um dadurch große Probleme lösen zu können.

3.1.8 Spezifizierung eines Falles

Mit den genannten Formulierungen, ist ein Kontaktproblem eindeutig definiert wenn folgende Größen bekannt sind: [20, S. 11]

- Es wird ein lokales Koordinatensystem verwendet, mit positiver z-Achse in das Rad, normal zur Kontaktfläche. Die Rollrichtung entspricht der x-Achse und die y-Achse vervollständigt das Rechtssystem. In Rollproblemen bewegt sich das Koordinatensystem mit der Kontaktfläche mit.
- Die potentielle Kontaktfläche ist ein Rechteck mit $m_x \cdot m_y$ Elementen, und einer Diskretisierung dx in Längsrichtung und dy in Querrichtung.
- In Rollproblemen muss der pro Zeitschritt zurückgelegte Weg $\delta q = V \delta t$ definiert werden. Dieser muss gleich dem Diskretisierungsabstand in Rollrichtung dx sein.
- Zur Spezifizierung bedarf es außerdem der Materialparameter G und ν .
- Die Geometrie des Szenarios wird über den undeformierten Abstand $h(\mathbf{x})$ der Körper bestimmt.
- Der Benutzer kann entweder die Eindringung d oder die Normalkraft F_z vorgeben.
- Ebenso kann der Benutzer entweder den Starrkörperschlupf oder die totalen Kräfte definieren. Bei einer gekrümmten Kontaktfläche besteht die Möglichkeit die lokalen Schlüpfte vorzugeben.
- Die Eingabe von Konfigurationsparametern für den Lösungsprozess, wie beispielsweise Toleranzen oder die Anzahl der Iterationen, ist ebenfalls erforderlich.

3.2 FASTSIM

Das Programm FASTSIM wurde von J.J. Kalker entwickelt und zeichnet sich dadurch aus, dass es, wie es der Name schon verrät, eine sehr kurze Rechenzeit aufweist. Das Programm ist in CONTACT implementiert, steht aber auch eigenständig zur Verfügung. Die zugrunde liegenden Gleichungen wurden im Abschnitt 2.4.5 angeschrieben. Das Programm kann wie folgt kurz zusammengefasst werden:

- Der FASTSIM Algorithmus rechnet aus numerischen Gründen mit einer Normalspannungsverteilung in Form eines elliptischen Paraboloides. Dieses hat das gleiche Volumen, wie der Halbellipsoid nach der Theorie von Hertz.
- Die Kontaktfläche wird in Längs- und Querrichtung diskretisiert.

²Bei Relaxation wird versucht die Konvergenzgeschwindigkeit der Methode durch geeignete Gewichtung zu verbessern [15, S. 23]

- Partikel werden streifenweise von der Einlaufkante bis zur Auslaufkante verfolgt. FASTSIM ist ein inkrementelles Verfahren. Es werden elementweise die Spannungen entsprechend den Gleichungen für Haftungen berechnet.
- Ist die berechnete Tangentialspannung größer als der traction bound, dann wird auf den traction bound zurückgesetzt.

Für den diskretisierten Fall kann die wahre Schlupfgeschwindigkeit \mathbf{w}_τ über,

$$\mathbf{w}_\tau = \mathbf{s}_\tau + \frac{\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}'_\tau}{\delta t}, \quad (3.40)$$

berechnet werden, vergleiche Beziehung (3.32). Bei einem linearen Zusammenhang zwischen Verschiebung und Spannung, mit der Proportionalität L , vergleiche Abschnitt 2.4.5, folgt:

$$\mathbf{w}_\tau = \mathbf{s}_\tau + \frac{L(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\delta t}. \quad (3.41)$$

Wobei $\mathbf{p} = (p_x(x, y, t), p_y(x, y, t))^T$ die Spannung zum Zeitpunkt t ist und \mathbf{p}' die Spannung zum Zeitpunkt $t' = t - \delta t$ ist. Gleich wie bei CONTACT wird ein Teilchen von der Einlaufkante bis zur Auslaufkante verfolgt. An der Einlaufkante $a(y, t)$ ist die Spannung $\mathbf{p} = 0$. Angenommen \mathbf{p}' ist bekannt, so kann man \mathbf{p} wie folgt berechnen:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + (\delta t/L) [\mathbf{w}_\tau - \mathbf{s}_\tau] \quad (3.42)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung ist nur die wahre Schlupfgeschwindigkeit \mathbf{w}_τ unbekannt, die erstmal null gesetzt wird. Es wird die Tangentialspannung im Haftgebiet \mathbf{p}_H definiert, für die gilt,

$$\mathbf{p}_H \doteq \mathbf{p}(\mathbf{x})_{\mathbf{w}_\tau=0} = \mathbf{p}' - (\delta t/L) \mathbf{s}_\tau. \quad (3.43)$$

$|\mathbf{p}_H|$ wird berechnet und mit dem bekannten traction bound g verglichen:

- Wenn gilt, dass $|\mathbf{p}_H| \leq g$, dann setze $\mathbf{p} = \mathbf{p}_H$. Das Coulombsche Gesetz ist erfüllt und die wahre Schlupfgeschwindigkeit $\mathbf{w}_\tau = 0$.
- Ist $|\mathbf{p}_H| > g$, dann setze $\mathbf{p} = \frac{g}{|\mathbf{p}_H|} \mathbf{p}_H$. Für den Betrag der Spannung gilt, dass $|\mathbf{p}| = g$, und die wahre Schlupfgeschwindigkeit kann berechnet werden zu:

$$\mathbf{w}_\tau = \mathbf{s}_\tau + (L/\delta t) (\mathbf{p} - \mathbf{p}') = (L/\delta t) (\mathbf{p} - \mathbf{p}_H) = - (L/\delta t) \mathbf{p}_H \left(1 - \frac{g}{|\mathbf{p}_H|} \right), \quad (3.44)$$

sodass \mathbf{w}_τ das gegenteilige Vorzeichen von \mathbf{p} hat, was dem Coulombschen Gesetz entspricht. [8, S. 42]

3.2.1 Der FASTSIM-Algorithmus

Der Algorithmus ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Er beginnt zunächst mit der Initialisierung der y-Schleife und x-Schleife. Im vierten Schritt wird mit Hilfe der zuvor berechneten Spannung \mathbf{p}' die Spannung \mathbf{p} über die Gleichung $\mathbf{p} = \mathbf{p}' - [q/VL] \mathbf{s}_\tau(x + q/2, y)$ bestimmt. Anschließend wird der Betrag der Spannung $|\mathbf{p}|$ mit dem traction bound g verglichen. Ist er kleiner als der traction bound so ist das Element im Haftgebiet. Überschreitet $|\mathbf{p}|$ den traction bound, so wird die Spannung auf den traction bound zurückgesetzt. Der Algorithmus geht nach diesem Schema die Elemente von der Einlaufkante bis zur Auslaufkante durch. Ist er an den Grenzen der Kontaktfläche angelangt, so liegt eine Lösung vor. [8, S. 43]

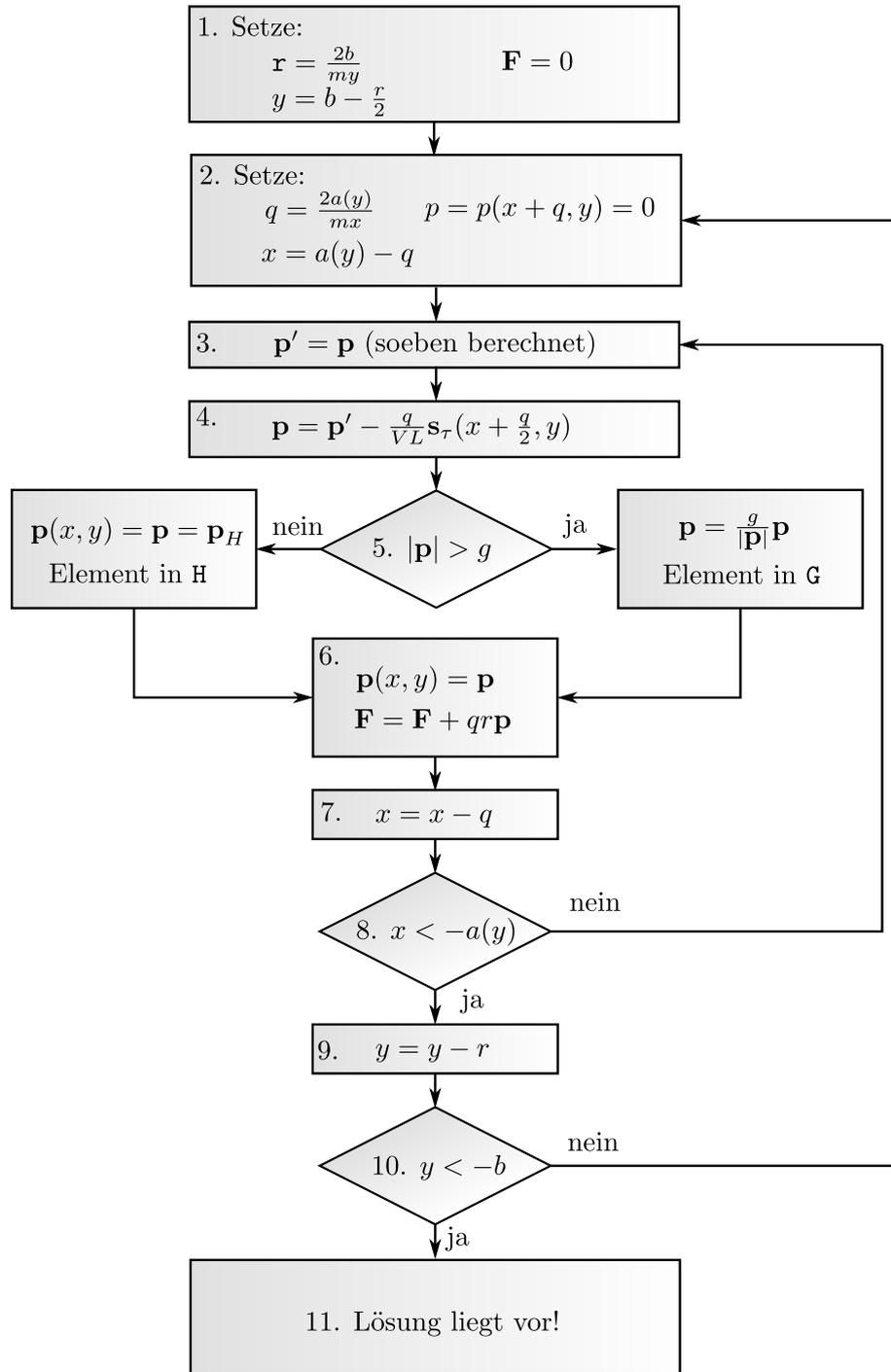


Abbildung 3.7: FASTSIM-Algorithmus

3.2.2 Spezifizierung eines Falles

Zur Spezifizierung eines Falles werden folgende Größen benötigt. [8, S. 42f]

- Das Rechteck in dem die Kontaktellipse liegt wird in $m \times n$ Elemente diskretisiert.
- Die Kontaktellipse wird durch ihre Halbachsen a , b vorgegeben.

- Um die Tangentialspannung berechnen zu können müssen die Referenzgeschwindigkeit V , die Nachgiebigkeit L , die Starrkörperschlupfgeschwindigkeit $s(x, y)$ und der traction bound $g = g(x, y)$ vordefiniert sein.

Dem Programm kann dabei vorgegeben werden, ob entweder ein elliptischer oder parabolischer traction bound gilt. FASTSIM weist zirka einen Fehler von 10 bis 15 Prozent auf und ist deshalb für viele Anwendungen genau genug [8, S. 48]. Es ist allerdings zirka 2000 mal so schnell wie CONTACT [8, S. 5].

4 Vergleich von Simulationsergebnissen

Beim Vergleich wurden neben den Programmen CONTACT und FASTSIM auch Simulationen mit dem Programm WheelsetContact vom Kompetenzzentrum durchgeführt. Dieses neu entwickelte Programm ist ein sogenanntes Streifenmodell. Das Normalproblem wird streifenweise nach Hertz gelöst, und das Tangentialproblem ist das sogenannte Bürstenmodell. Das Modell ist auch bei räumlichen, konformen Kontakt anwendbar und ist trotz Näherung ausreichend genau, bei gleichzeitig hoher Recheneffizienz. [14, S. 77]

Als dritte Methode wurde noch mit dem Programm Siemens Rollkontakt Simulation ein spezielles FEM Werkzeug zur Berechnung von Rollkontakten in den Vergleich eingebunden. In dieser Diplomarbeit steht ein Anwenden des Programmes im Vordergrund, um eine Referenz zu CONTACT zu haben. Eine genauere Beschäftigung mit der Thematik der finiten Element Modellierung eines Rollkontaktes würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen.

Die durchgeführte Analyse besteht im Wesentlichen aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden nur Hertz'sche Kontaktsituationen bei konformen ebenen, konformen gekrümmten und nicht konformen Kontakt betrachtet. Es wird speziell darauf geachtet, dass in allen Programmen dieselben Daten eingegeben werden. Deshalb wurden einfache Geometrien in Form von Kreisprofilen für die Simulationen gewählt. Dadurch kann das sichergestellt werden, dass ungewollte Effekte, wie Quer- oder Bohrschlupf, die die Ergebnisse verfälschen, nicht auftreten. Rein Hertz'sche Kontaktsituationen treten im realen Betrieb selten auf, sind allerdings als Plausibilitätsüberprüfung der Programme sehr gut geeignet. In diesen Szenarien steht zusätzlich die Theorie von Hertz zur Verfügung, mit Hilfe derer sehr einfach und schnell die Abmessungen der Kontaktellipse und der Wert der maximalen Normalspannung berechnet werden können.

Im zweiten Teil werden Berechnungen mit realen Rad-Schiene Profilen durchgeführt. Hier werden nicht Hertz'sche Kontaktsituationen betrachtet, die bei der Querverschiebung des Radsatzes entstehen.

4.1 Systematik des Vergleichs bei Hertz'schen Kontaktsituationen

Bevor mit dem Vergleich begonnen werden kann, müssen die Parameter, die konstant sind, und jene, die variiert werden, erläutert werden. Die Aufstandskraft, mit der das Rad auf die Schiene drückt, ist konstant mit $F_z = 50000 \text{ N}$. Die Materialeigenschaften sind mit dem Elastizitätsmodul $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ und der Querkontraktionszahl $\nu = 0,3$ bestimmt. Der Reibwert wurde auf $\mu = 0,55$ gesetzt. Zur Beschreibung der Geometrie benötigt man vier Parameter, also jeweils die Krümmung um die x-Achse und y-Achse für die zwei Körper. Dabei werden beim Vergleich die Krümmung der Schiene und des Rades in Rollrichtung nicht variiert. Es rollt also immer ein Rad mit konstantem Radius $R_x^R = 405 \text{ mm}$ auf einer geraden Schiene mit unendlichen Krümmungsradius $R_x^S = \infty$. Die Krümmungsradien von Rad und Schiene in Querrichtung, R_y^R und R_y^S werden variiert, vergleiche Abbildung 4.1.

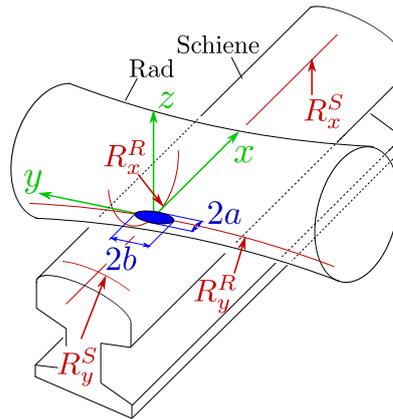


Abbildung 4.1: Krümmungen von Rad und Schiene in Roll- und Querrichtung

Beim Vergleich von CONTACT mit WheelsetContact und Siemens Rollkontakt Simulation werden sechs verschiedene Fälle bei Hertz'schen Kontaktsituationen betrachtet. Diese Fälle entstehen durch unterschiedliche Kombinationen der Krümmung von Rad und Schiene in Querrichtung, vergleiche Abbildung 4.2.

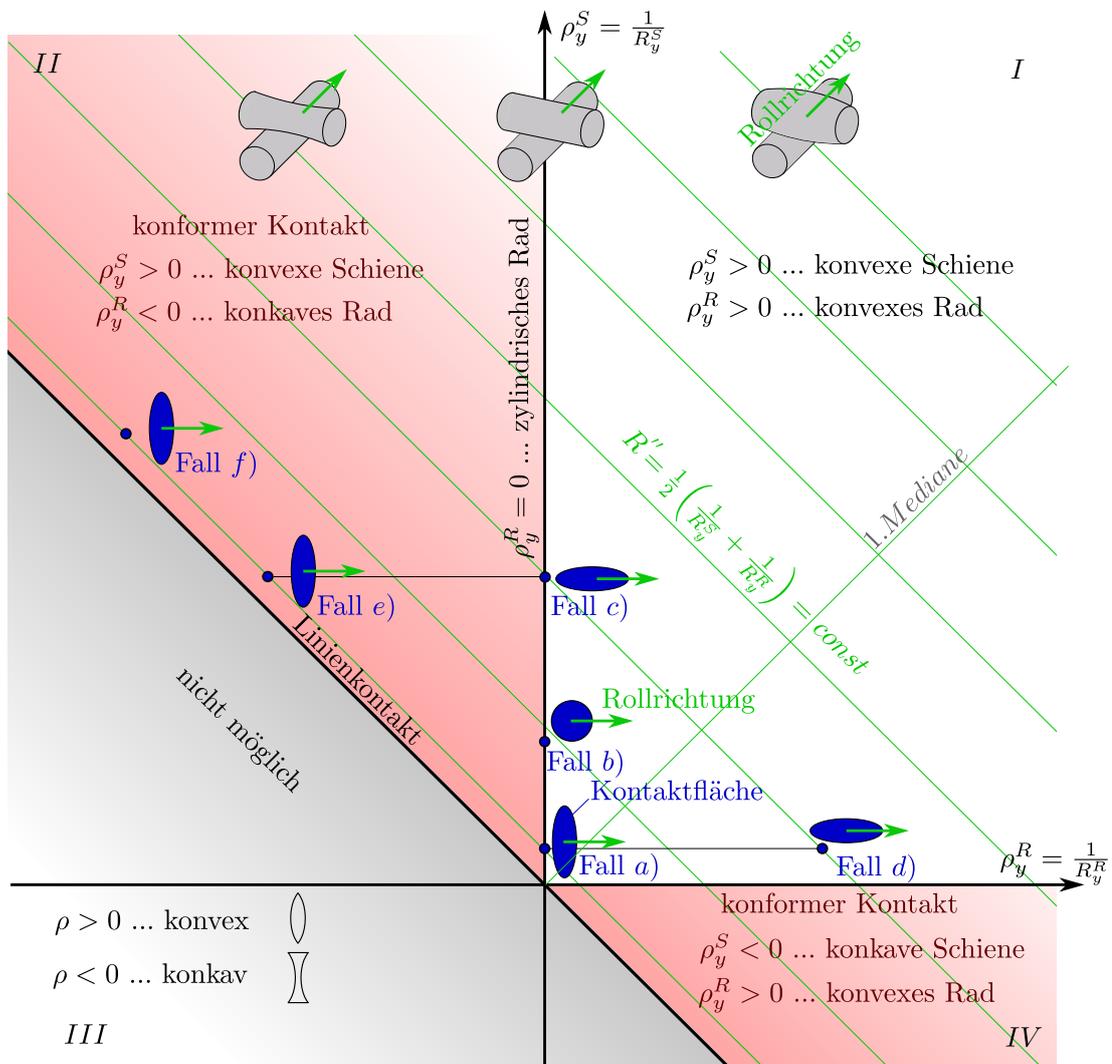


Abbildung 4.2: Übersichtsmatrix des Vergleichs von Hertz'schen Kontaktsituationen

Auf der Ordinate ist die Krümmung der Schiene und auf der Abszisse die Krümmung des Rades, jeweils in Querrichtung, aufgetragen. Der grau markierte Bereich zeigt jene Kombinationen von Rad und Schiene, die nicht möglich sind. Die Grenzlinie entspricht dem Fall des Linienkontaktes. Im Quadranten *I* sind sowohl Rad als auch Schiene konvex. In dem rötlich beschrifteten Bereich im Quadranten *II* ist die Schiene konvex und das Rad konkav beziehungsweise im Quadranten *IV* ist die Schiene konkav und das Rad konvex, sodass es konformen Kontakt gibt. Die grünen Linien mit 45° Steigung stellen jeweils die Isolinien der äquivalenten Krümmungsradien R'' nach Hertz dar, vergleiche Abschnitt 2.2. Nach der Theorie von Hertz sind bei gleicher äquivalenter Krümmung auch die Halbachsen der Kontaktellipsen gleich groß.

Die 1. Mediane stellt eine Spiegelebene dar, deshalb kann man die einzelnen Fälle der Analyse an der 1. Mediane spiegeln, da es grundsätzlich egal ist ob beispielsweise das Rad konkav und die Schiene konvex ist oder umgekehrt. Es entspricht einfach einer Vertauschung der Körper.

Für den Vergleich wurden sechs Fälle gewählt, Fall *a*) bis Fall *f*). Bei den drei Fällen die direkt auf der Ordinate liegen, rollt das Rad als reiner Zylinder ($\rho_y^R = 0$) auf einer rein zylindrischen Schiene ($\rho_x^S = 0$) ab. Die Krümmung der Schiene in Querrichtung wird dabei so variiert, dass eine kurze breite (Fall *a*)), eine kreisförmige (Fall *b*)) und eine längliche schmale (Fall *c*)) Kontaktellipse entstehen. Da WheelsetContact ein Streifenmodell ist, soll durch diese drei Varianten untersucht werden, ob es für Halbachsenverhältnisse, die sowohl kleiner als auch größer eins sind, ausreichend funktioniert.

Außerdem gibt es noch den Fall *d*) im Quadranten *I*, bei dem sowohl Rad als auch Schiene eine positive Krümmung haben. Dieser Fall hat dieselben relativen Krümmungsradius R'' wie Fall *c*) und somit hat die Kontaktfläche auch dieselben Abmessungen. Für die Analyse sind sicherlich die Fälle *e*) und *f*) im Quadranten *II* am interessantesten, da es sich hier um konforme gekrümmte Kontaktsituationen handelt. Auch hier haben die Fälle *e*), *f*) wieder dieselben relativen Krümmungsradius R'' wie Fall *a*).

Tabelle 4.1 stellt die Krümmungsradien von Rad R_y^R und Schiene R_y^S in Querrichtung, sowie die relative Krümmung R'' dar.

Tabelle 4.1: Krümmungsradien

Fall	R_y^S [mm]	R_y^R [mm]	R'' [1/mm]
a)	2000	∞	0,00025
b)	500	∞	0,001
c)	100	∞	0,005
d)	2000	105,263	0,005
e)	100	-105,263	0,00025
f)	50	-51,282	0,00025

Bei der Analyse wird CONTACT beziehungsweise FASTSIM den Programmen WheelsetContact und Siemens Rollkontakt Simulation gegenübergestellt. Bei der FEM-Rechnung werden aufgrund der langen Rechenzeit nicht alle Szenarien simuliert. Das Tool Siemens Rollkontakt Simulation ist für Kontaktsituationen bei denen die Halbraumtheorie, die CONTACT zugrunde liegt, nicht mehr gilt besonders geeignet.

4.2 Hertz'scher Kontakt

Dieser Abschnitt zeigt exemplarisch die Ergebnisse der Analyse von Hertz'schen Kontaktsituationen. Dabei soll auf einige Fälle genauer eingegangen werden, um die Unterschiede der Ergebnisse zu zeigen.

4.2.1 Beispiel zum konformen ebenen Kontakt

Begonnen wird an dieser Stelle mit den Ergebnissen des Falls *a*), siehe Abbildung 4.2. Zunächst werden die Ergebnisse der Simulation der Kontaktfläche gezeigt, anschließend wird der Verlauf des Kraftschlusses dargestellt. Da sich der Kraftschluss aus dem Quotienten der kummulierten Tangentialspannung und Normalspannung bildet, ist es auch nötig, eine Analyse dieser vorzunehmen.

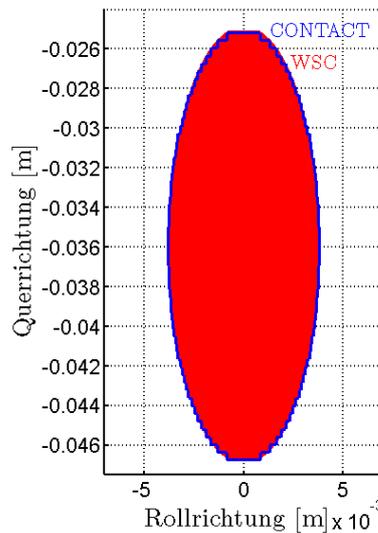


Abbildung 4.3: Kontaktfläche Fall *a*) von *CONTACT* (blaue Linie) und *WSC* (rote Fläche) in *xy*-Ebene

Abbildung 4.3 zeigt die Ergebnisse der Simulation der Kontaktfläche in der *xy*-Ebene. Die rote Fläche ist das Ergebnis von *WheelsetContact* und die blaue Umrandung stellt das Resultat von *CONTACT* dar. Das Ergebnis Halbachse in Rollrichtung, beträgt bei *CONTACT* $a_{CONTACT} = 3,81\text{ mm}$ und bei *WheelsetContact* $a_{WSC} = 3,78\text{ mm}$. In Querrichtung stimmt das Ergebnis der doppelten Halbachse $2b_{CONTACT} = 21,6\text{ mm}$ mit $2b_{WSC} = 21,7\text{ mm}$ auch sehr gut überein. In diesem Szenario kann der Effekt der Krümmung der Kontaktfläche vernachlässigt werden, da die Schiene nur eine sehr geringe Krümmung aufweist. Eine weitere Möglichkeit bietet die Bestimmung der Kontaktellipse nach der Theorie von Hertz. Das Ergebnis beträgt für die Halbachse in Rollrichtung $a_{Hertz} = 3,79\text{ mm}$, und für die doppelte Halbachse in Querrichtung $2b_{Hertz} = 21,85\text{ mm}$.

Abbildung 4.4 zeigt einen Screenshot der Kontaktflächensimulation von Marc/Mentat. Die Grenzen des FEM Programmes sind klar ersichtlich. Trotz der sehr feinen Diskretisierung von Rad und Schiene, ist die Diskretisierung für die Darstellung der Kontaktfläche zu groß und deshalb ist auch keine Ellipse erkennbar. Bei der FEM-Simulation eines Rad-Schiene Kontaktes benötigt man eine entsprechende Auflösung der Kontaktfläche. In Rollrichtung beträgt die Elementgröße zirka 1.2 mm und in Querrichtung 1.4 mm . Eine sehr feine Diskretisierung ist bei einer FEM Rechnung aber auch mit einer langen Rechenzeit verbunden. So beträgt die Simulationsdauer für eine solche FEM Rechnung zirka acht bis

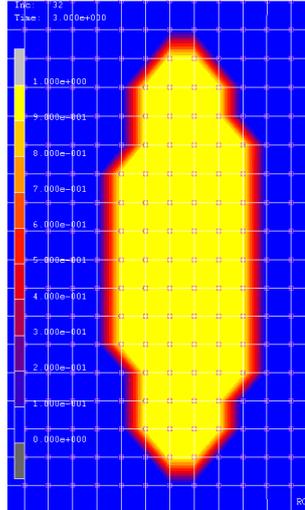


Abbildung 4.4: Kontaktfläche Fall a) von FEM in der xy-Ebene

zwölf Stunden. Die Diskretisierung von CONTACT und WheelsetContact ist zirka zehnmal so fein wie jene der FEM Simulation, die Rechenzeit liegt trotzdem im Minutenbereich. Die Bestimmung der Kontaktfläche erfolgt über das Auswerten eines path plots. So beträgt die Länge der Halbachse in Rollrichtung $a_{SRS} = 4,17 \text{ mm}$ und die doppelte Halbachse in Querrichtung $2b_{SRS} = 23,54 \text{ mm}$. In Tabelle 4.2 sind die Werte zusammengefasst dargestellt.

Tabelle 4.2: Fall a) - Halbachsen der Kontaktfläche

	Hertz	CONTACT	WSC	SRS
a [mm]	3,79	3,81	3,78	4,17
b [mm]	10,93	10,8	10,85	11,77

Das Ergebnis des Kraftschlussverlaufes ist in Abbildung 4.5 dargestellt.

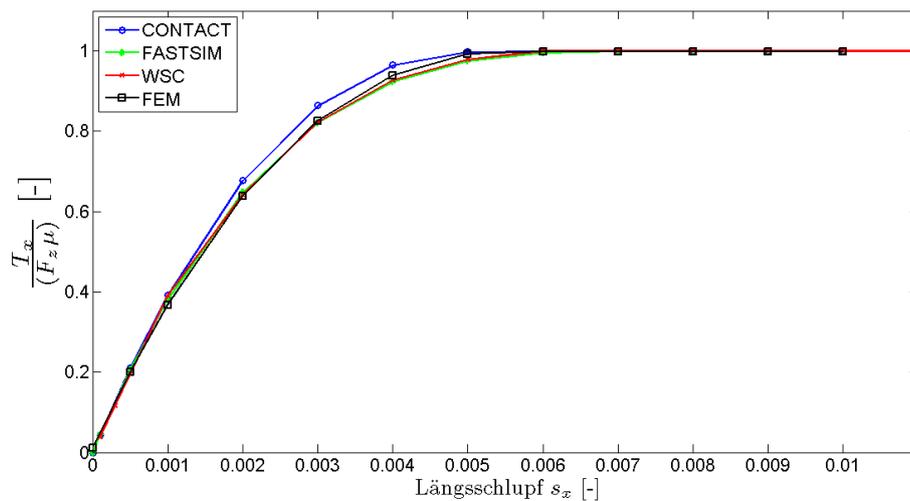


Abbildung 4.5: Kraftschlussverlauf Fall a)

Alle Programme haben dieselbe Anfangssteigung. Die Ergebnisse von FASTSIM und WheelsetContact stimmen in allen Simulationspunkten sehr gut überein. Der Kraftschlussverlauf der FEM-Rechnung stimmt überraschenderweise mehr mit demjenigen von WheelsetContact und FASTSIM besser als mit demjenigen von CONTACT überein. Wobei das Ergebnis der FEM-Rechnung sicherlich nur mit Vorsicht verglichen werden kann, da die Größe der Kontaktfläche bei $s_x = 0,2\%$, $s_x = 0,3\%$ und $s_x = 0,4\%$ einen um zirka 3 % größeren Wert annimmt und somit natürlich der Kraftschlusswert beeinflusst wird.

Ab zirka 0,1 % Längsschlupf ist der Kraftschlussverlauf von FASTSIM und WheelsetContact etwas niedriger als derjenige von CONTACT, hier liegt der maximale Fehler bei zirka 5 %. Ab 0,6 % Längsschlupf ist volles Gleiten eingetreten und die Kurven der vier Programme stimmen wieder überein.

Um ein besseres Verständnis für den Verlauf des Kraftschlusses zu bekommen, werden nun noch die Tangentialspannungen in der Kontaktfläche analysiert. Abbildung 4.6 bildet die Tangentialspannung in Rollrichtung von CONTACT, WheelsetContact und Siemens Rollkontakt Simulation ab. Die Auswertung der FEM Ergebnisse kann nur über path plots erfolgen, deshalb wird auch nur die Spannungen in der Halbachse der Ellipse ausgewertet.

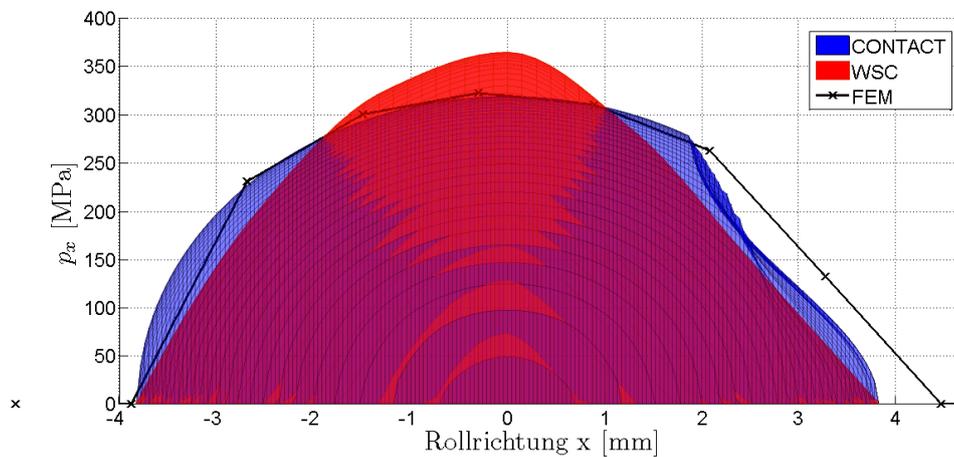


Abbildung 4.6: Tangentialspannungsverlauf Fall a) - Vergleich von *CONTACT* mit *WSC* und *SRS* in Rollrichtung

Während CONTACT im Haftgebiet den typischen S-Schlag sehr gut abbildet und im Gleitgebiet einen elliptischen traction bound hat, erkennt man, dass WheelsetContact im Haftgebiet einen linearen Tangentialspannungsverlauf aufweist und der traction bound in Rollrichtung parabolisch ist, was auf das Bürstenmodell zurückzuführen ist. Daraus resultiert auch ein Unterschied im Maximum der Tangentialspannung. CONTACT berechnet die maximale Tangentialspannung zu $p_{x0} = 317,6 \text{ MPa}$, WheelsetContact zu $p_{x0} = 364 \text{ MPa}$. Bei der FEM Simulation steht nur eine geringe Anzahl von Punkten zur Verfügung. Trotzdem ist klar zu erkennen, dass die Ergebnisse in einigen Punkten sehr gut mit CONTACT korrelieren. Die maximale Tangentialspannung wird zu $p_{x0} = 322 \text{ MPa}$ berechnet. Aufgrund der zu groben Diskretisierung kann Siemens Rollkontakt Simulation den S-Schlag im Haftgebiet nicht darstellen. Stattdessen ist der Verlauf der Tangentialspannung im Haftgebiet linear und hat dieselbe Anfangssteigung wie WheelsetContact.

Abbildung 4.7 stellt die Tangentialspannungen von WheelsetContact und FASTSIM bei 0,4 % Längsschlupf in Rollrichtung dar. Der qualitative Verlauf stimmt wieder überein, allerdings gibt beim Spannungsmaximum p_{x0} Unterschiede. Aus der Grafik ist gut ersichtlich dass die Kalker Steifigkeiten von FASTSIM mit denen von WheelsetContact sehr

gut übereinstimmen. Während FASTSIM bei der Grenze zwischen Haft- und Gleitzone bei der Tangentialspannung eine Kante ausbildet, gibt es bei WheelsetContact einen stetigen Übergang. Die maximale Tangentialspannung von FASTSIM beträgt $p_{x0} = 424,2 \text{ MPa}$ und ist somit um zirka 60 MPa höher als die maximale Spannung von WheelsetContact. Beide Programme haben in Längsrichtung einen parabolischen traction bound.

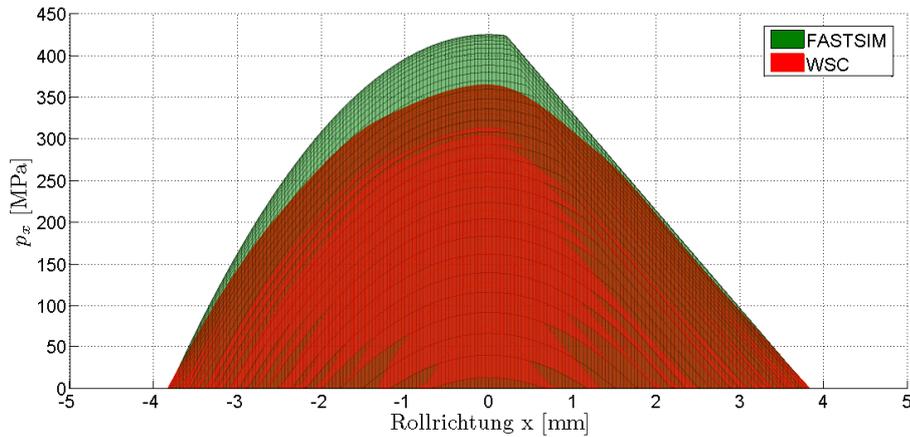


Abbildung 4.7: Tangentialspannungsverlauf Fall a) - Vergleich von *FASTSIM* mit *WSC* in Rollrichtung

Betrachtet man den Verlauf in Querrichtung, vergleiche Abbildung 4.8, so erkennt man, dass FASTSIM in Querrichtung ebenfalls einen parabolischen traction bound hat, während WheelsetContact den traction bound aus der Durchdringungsfunktion berechnet.

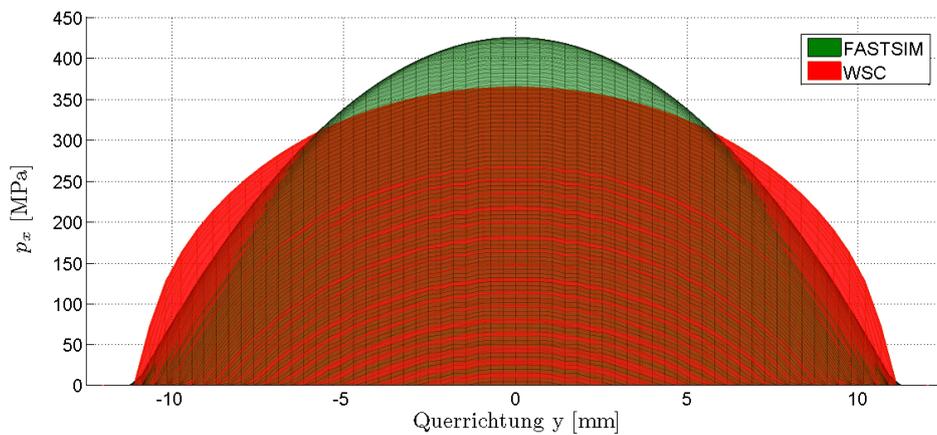


Abbildung 4.8: Tangentialspannungsverlauf Fall a) - Vergleich von *FASTSIM* mit *WSC* in Querrichtung

Anschließend werden noch in Abbildung 4.9 die Ergebnisse der Normalspannung in Rollrichtung von CONTACT mit denen von WheelsetContact und den Resultaten der FEM verglichen. Auch hier ist die Abweichung von WheelsetContact zu CONTACT gering. WheelsetContact berechnet die maximale Normalspannung auf $p_0 = 562,2 \text{ MPa}$ und CONTACT auf $p_0 = 578,9 \text{ MPa}$. Die Abweichung beträgt also weniger als 3%.

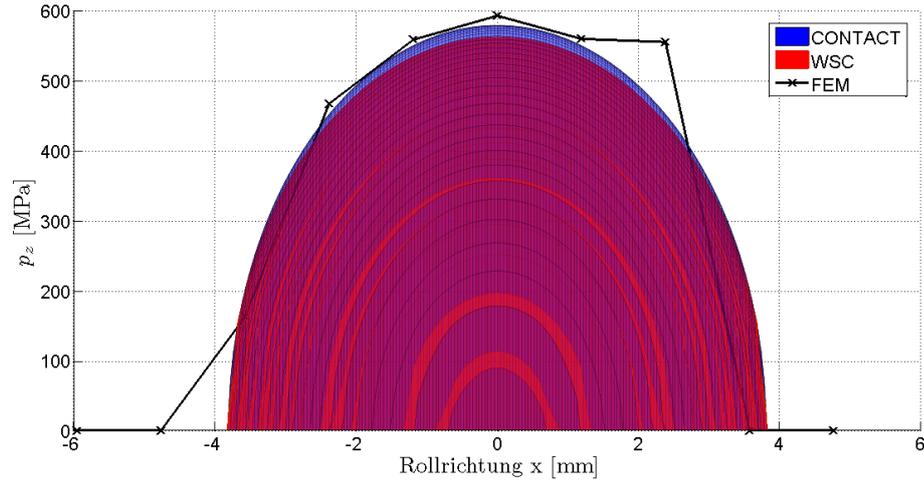


Abbildung 4.9: Normalspannungsverlauf Fall a) in Rollrichtung

Bei der FEM Simulation stehen in Längsrichtung nur sechs und in Querrichtung 15 Elemente mit Simulationswerten zur Verfügung. Deshalb ist der Normalspannungsverlauf in Rollrichtung sehr „eckig“. In Querrichtung wird die elliptische Spannungsverteilung recht gut abgebildet, vergleiche Abbildung 4.10. Das Maximum mit $p_0 = 586,1 \text{ MPa}$ liegt nur minimal über den anderen Resultaten. Weiters ist aus der FEM Rechnung ersichtlich, dass die Spannungen tatsächlich außerhalb der Kontaktfläche auf null zurück gehen. Die Kalkulation nach Hertz ergibt $p_0 = 575,8 \text{ MPa}$.

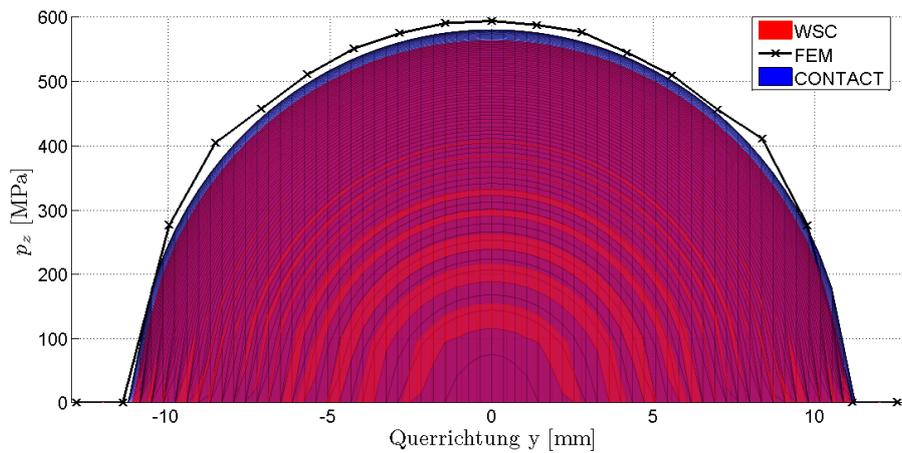


Abbildung 4.10: Normalspannungsverlauf Fall a) in Querrichtung

In Tabelle 4.3 sind die Spannungen zusammen gefasst aufgelistet.

Tabelle 4.3: Fall a) - maximale Spannungen

	Hertz	CONTACT	WSC	SRS
p_0 [MPa]	575,8	578,9	562,2	586,1
p_{x0} [MPa]	-	317,6	364	322

4.2.2 Beispiele zum konformen gekrümmten Kontakt

Von großem Interesse für diese Diplomarbeit ist die Abbildung des konformen gekrümmten Kontaktes. Da hier CONTACT mit der Annahme einer ebenen Kontaktfläche, nicht mehr in der Lage ist die Kontaktfläche korrekt darzustellen. In CONTACT besteht allerdings die Möglichkeit durch die Definition von lokalen Schlupf Termen, durch Anwenden der EXRHS („extra term of the rigid slip“) Funktion, die Krümmung der Kontaktfläche zu berücksichtigen. Dabei muss für jedes Element in x- und y-Richtung im sogenannten Input file der Schlupf aufgrund der Krümmung vorgegeben werden. Abbildung 4.11 zeigt die Ergebnisse der Kontaktfläche von CONTACT und WheelsetContact.

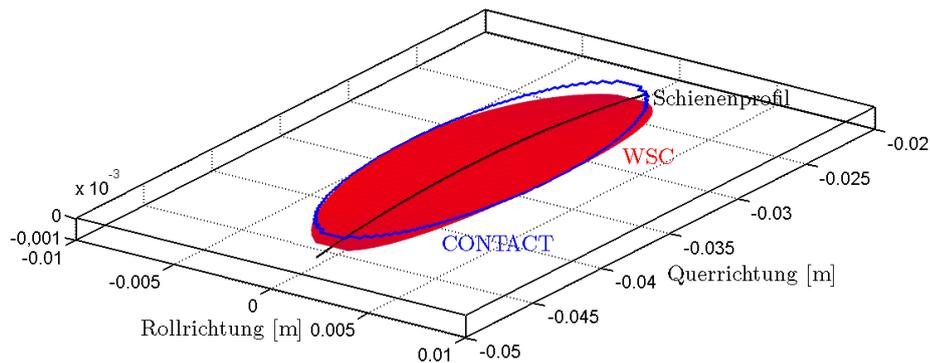


Abbildung 4.11: Kontaktfläche Fall e) von *CONTACT* (blau) und *WSC* (rot) im Schrägriss

Es ist klar zu erkennen, dass die Kontaktfläche eine entsprechende Krümmung aufweist und so eine Rollradiendifferenz von zirka 0.5 mm entsteht. Wie bereits zuvor erwähnt ist die Kontaktfläche von den geometrischen Abmessungen gleich wie jene des Falls *a*), siehe Abbildung 4.2. Beide Programme berechnen die Abmessung der Kontaktfläche korrekt. Das Resultat der Kontaktfläche der Siemens Rollkontakt Simulation ist in Abbildung 4.12 zu sehen. Vergleicht man Abbildung 4.12 mit Abbildung 4.3, so fällt auf, dass ein Element weniger in Kontakt ist. Das zeigt wie empfindlich die FEM-Rechnung auf kleine Veränderungen reagiert. Da die Kontaktfläche aber relativ groß ist und ausreichend Elemente im Eingriff sind, ist dieses Szenario relativ stabil.

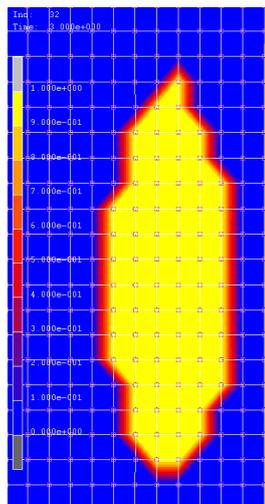


Abbildung 4.12: Kontaktfläche Fall e) von SRS in xy-Ebene

Die Auswertung des Kraftschlussverlaufes ist in Abbildung 4.13 dargestellt. Die Ergebnisse der drei Programme, CONTACT, WheelsetContact und Siemens Rollkontakt Simulation stimmen sehr gut überein. Es ist auch ersichtlich, dass die Rollradiendifferenz zu einem Versatz der Funktion führt. CONTACT bietet die Möglichkeit die lokalen Schlupfterme vorzudefinieren, um so den Versatz des Kraftschlusses darstellen zu können. Im Abschnitt 2.3.4 wurde die Kinematik bei gekrümmten Kontaktflächen bereits erläutert.

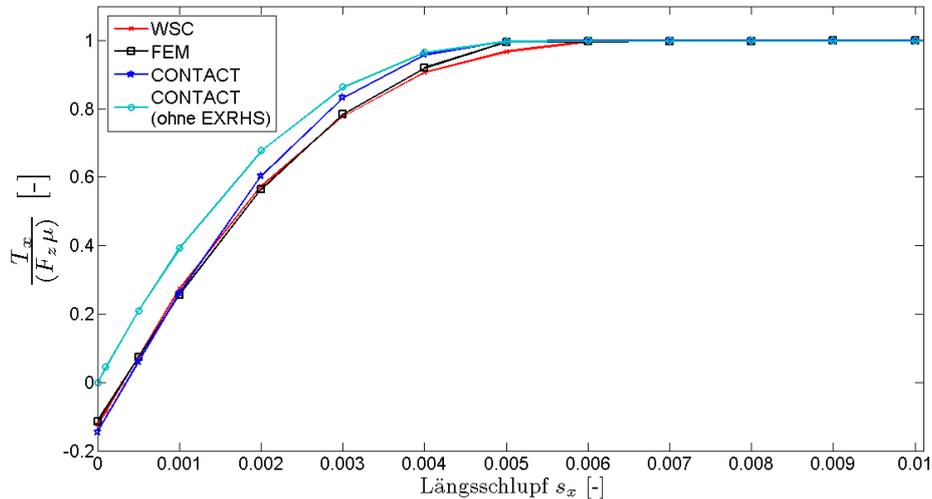


Abbildung 4.13: Kraftschlussverlauf Fall e)

Den Verlauf der Tangentialspannung von CONTACT, WheelsetContact und Siemens Rollkontakt Simulation bei einem Längsschlupf $s_x = 0\%$ zeigt Abbildung 4.14. Es entsteht in diesem Szenario links und rechts jeweils ein Höcker bei der Tangentialspannung. Der Grund, warum diese bei der FEM-Rechnung nicht exakt symmetrisch sind und nicht genau das gleiche Spannungsmaximum haben, ist, dass das Profil für Rad und Schiene über Punkte diskretisiert wird. Man hat so bei der Festlegung des Messkreisabstandes immer eine kleine Abweichung, da man oft die Radmitte nicht genau auf der Schienenmitte platzieren kann. WheelsetContact verschiebt bei der Lösungssuche den Radsatz leicht quer, sodass dadurch die Kontaktfläche ebenfalls nicht exakt mittig liegt.

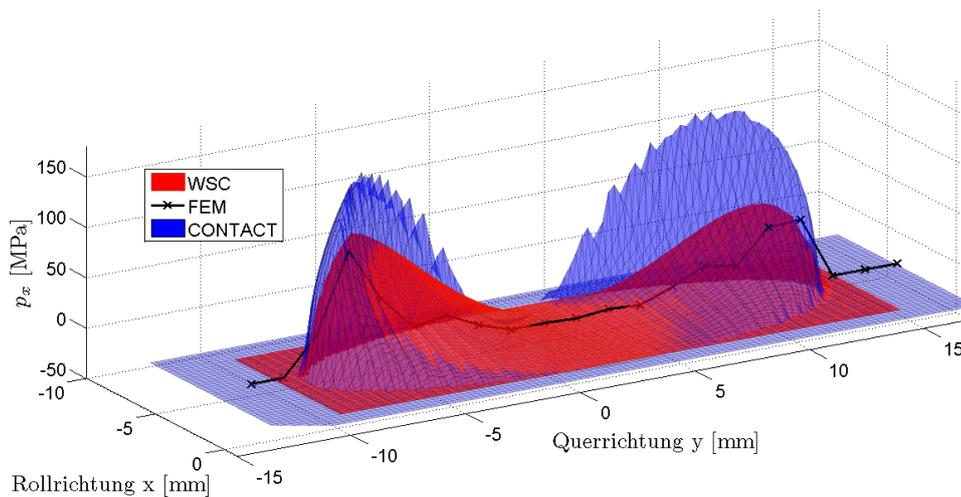


Abbildung 4.14: Verlauf der Tangentialspannung Fall e) bei $s_x = 0\%$

In Abbildung 4.15 ist der Verlauf der Tangentialspannung in Querrichtung dargestellt. Es ist gut zu erkennen dass die drei Kurven tendenziell gut übereinstimmen und dass auch die Maxima der Tangentialspannung der FEM- Simulation und der Berechnung von WheelsetContact in der selben Größenordnung liegen.

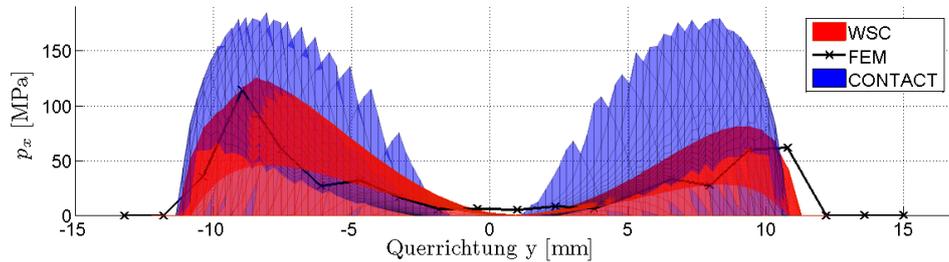


Abbildung 4.15: Verlauf der Tangentialspannung Fall e) bei $s_x = 0\%$ in Querrichtung

Im Fall f), siehe Abbildung 4.2, wurde der Effekt der Rollradiendifferenz noch weiter verstärkt. Der Schienenradius wurde dabei noch einmal halbiert, die relative Krümmung ist dieselbe wie zuvor. Abbildung 4.16 zeigt den Kraftschlussverlauf für Fall f). Die Ergebnisse der drei Programme korrelieren sehr gut. Die Anfangssteigung ist gleich und auch der Anfangswert der Simulationen stimmt gut überein.

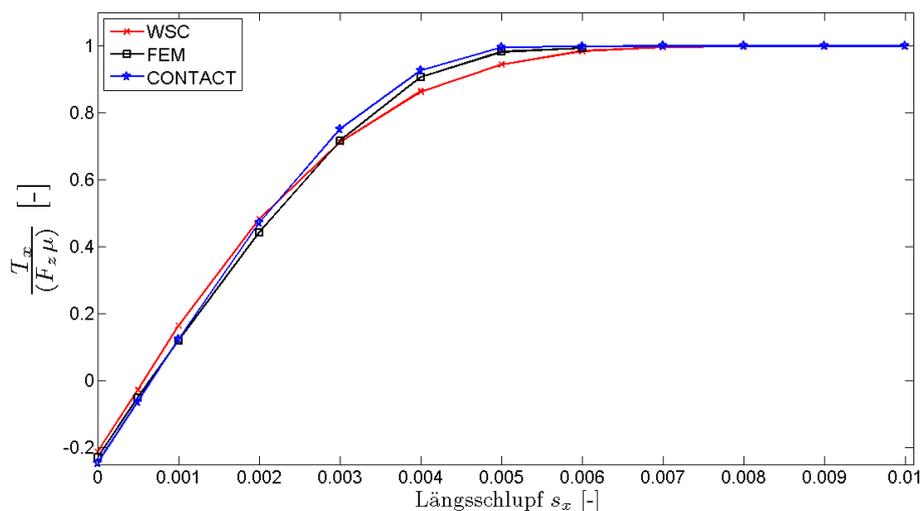


Abbildung 4.16: Kraftschlussverlauf Fall f)

4.2.3 Beispiel zum nicht-konformen Kontakt

An dieser Stelle soll mit Fall c), siehe Abbildung 4.2, noch ein Beispiel zu nicht-konformen Kontakt behandelt werden. Abbildung 4.17 zeigt die Simulation der Kontaktfläche von CONTACT und WheelsetContact. Diese Programme berechnen die Halbachse in Rollrichtung zu $a_{CONTACT} = 6,26 \text{ mm}$ und $a_{WSC} = 6,25 \text{ mm}$. Die Halbachse in Querrichtung beträgt $b_{CONTACT} = 2,5 \text{ mm}$ und $b_{WSC} = 2,45 \text{ mm}$. Die Ergebnisse der beiden Programme stimmen sehr gut mit der Berechnung nach der Theorie von Hertz, mit $a_{Hertz} = 6,27 \text{ mm}$ und $b_{Hertz} = 2,48 \text{ mm}$, überein.

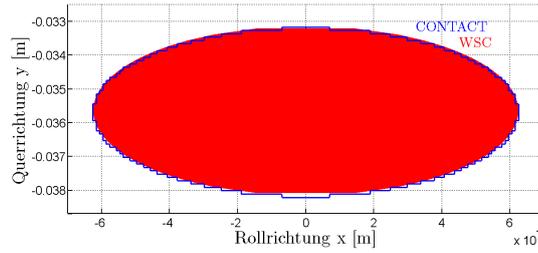


Abbildung 4.17: Kontaktfläche Fall c) von *CONTACT* (blaue Linie) und *WSC* (rote Fläche) in *xy*-Ebene

Abbildung 4.18 zeigt einen Screenshot der Kontaktfläche von Siemens Rollkontakt Simulation. Hier stößt man an die Grenze der Anwendbarkeit des FEM Programmes. Es ist klar ersichtlich, dass die dargestellte Kontaktfläche nicht der tatsächlichen entsprechen kann. Auch die Länge und Breite der Kontaktfläche, mit $a_{SRS} = 7,74\text{ mm}$ und $b_{SRS} = 3,53\text{ mm}$, weicht von den anderen Simulationen ab. Da nur eine sehr geringe Anzahl von Elementen in Eingriff sind, reagiert das Modell extrem sensibel auf kleinste Veränderungen.

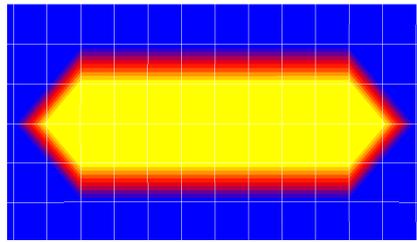


Abbildung 4.18: Kontaktfläche Fall c) von SRS in der *xy*-Ebene

Tabelle 4.4 stellt die Werte der Halbachsen der Ellipse dar.

Tabelle 4.4: Fall c) - Halbachsen der Kontaktfläche

	Hertz	CONTACT	WSC	SRS
a [mm]	6,27	6,26	6,25	7,74
b [mm]	2,48	2,5	2,45	3,53

So fällt bei Betrachtung des Kraftschlussverlaufes, vergleiche Abbildung 4.19, auf, dass bei einem Längsschlupf $s_x = 0,005$ der Kraftschlussverlauf der Siemens Rollkontakt Simulation einbricht. Das ist darauf zurückzuführen, dass zwei Elemente weniger in Kontakt sind und die Kontaktfläche dadurch um mehr als zehn Prozent kleiner wird.

Vergleicht man die Anfangssteigung des Kraftschlussverlaufes von Abbildung 4.19 und Abbildung 4.5 so erkennt man, dass eine lange schmale Kontaktfläche, wie jene des Falles c), eine deutlich kleinere Anfangssteigung hat als eine kurze breite Kontaktfläche, wie jene des Falles a).

Bei den Fällen b) und d) stimmen sowohl Kontaktfläche als auch Kraftschlussverlauf der drei Programme gut überein und es treten keine unvorhergesehenen Abweichungen auf. Die Ergebnisse werden an dieser Stelle deshalb nicht diskutiert und sind im Anhang zu finden.

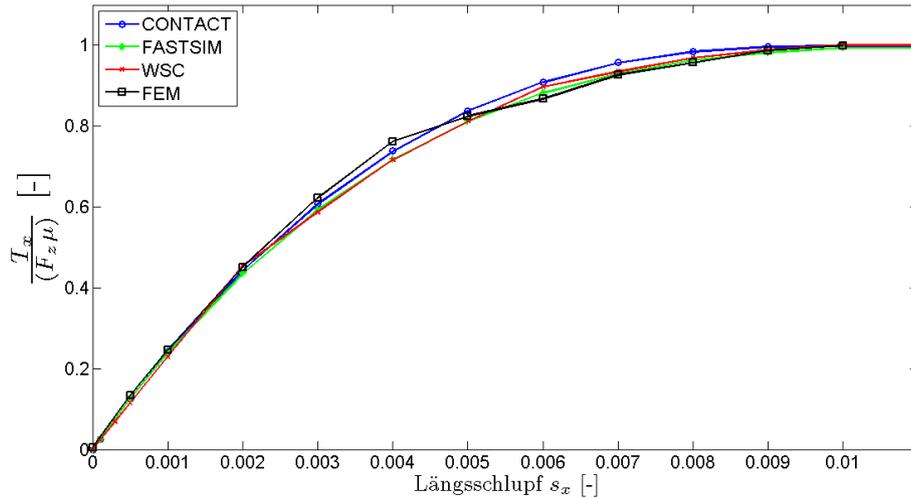


Abbildung 4.19: Kraftschlussverlauf Fall c)

4.3 Nicht Hertz'scher Kontakt - reale Profile

In dem folgenden Abschnitt soll das Abrollen eines Radsatzes mit einem S1002 Profil auf einer Schiene mit einem UIC60 Profil untersucht werden. Abbildung 4.20 zeigt die Profile.

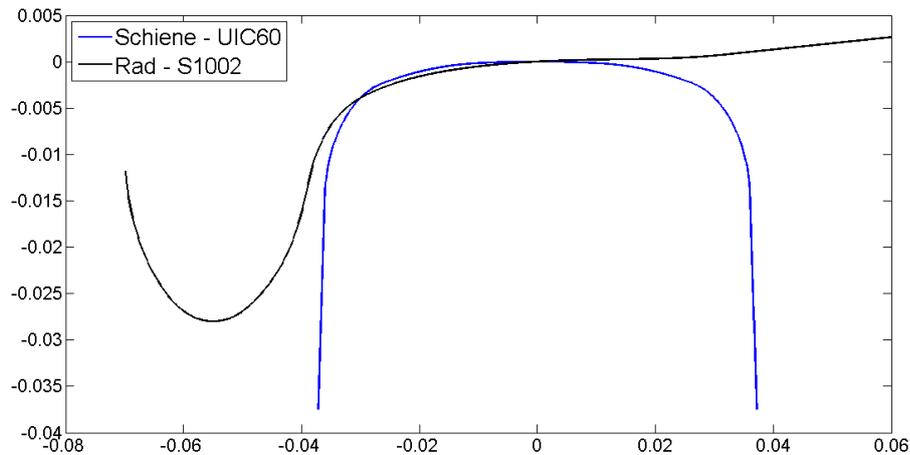


Abbildung 4.20: Rad- und Schienenprofil

Dabei werden einige Parameter leicht variiert. Die Normalkraft wird auf $F_z = 100000 \text{ N}$ erhöht um zu erreichen, dass in der FEM-Rechnung mehr Elemente im Kontakt sind. Weiters wird der Durchmesser des Rades auf $D_{Rad} = 900 \text{ mm}$ erhöht. Die restlichen Eingabeparameter entsprechen jenen des Hertz'schen Kontaktes, vergleiche Abschnitt 4.1.

Es wird nun der Fall betrachtet, bei dem der Radsatz quer verschoben ist. Diesen Zustand hat man beispielsweise beim Durchfahren eines Bogens. Da sich die Krümmung der Schiene im Bereich der Kontaktfläche verändert, tritt nicht-elliptischer Kontakt auf, und die Theorie von Hertz kann nicht mehr angewandt werden, da sich die Oberflächen der Körper im Bereich des Kontaktes nicht durch Funktionen zweiten Grades beschreiben lassen, vergleiche Abschnitt 2.2. Die Querverschiebung führt dazu, dass am Rad 1 und am Rad 2 unterschiedliche Kontaktflächen entstehen, vergleiche dazu Abbildung 4.21.

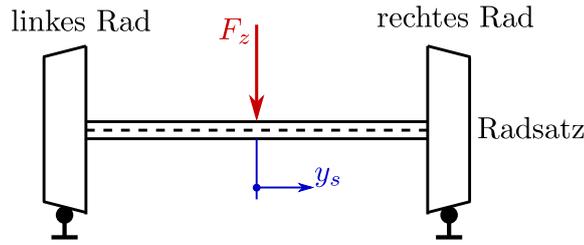


Abbildung 4.21: Querverschiebung des Radsatzes

Analog zum vorigen Abschnitt wird auch beim Vergleich von realen Profilen die Kontaktfläche und der Verlauf des Kraftschlusses, beziehungsweise die Normal- und Tangentialspannung analysiert. Abbildung 4.22 zeigt die Simulation der Kontaktfläche des linken Rades von CONTACT und WheelsetContact bei zwei Millimeter Querverschiebung.

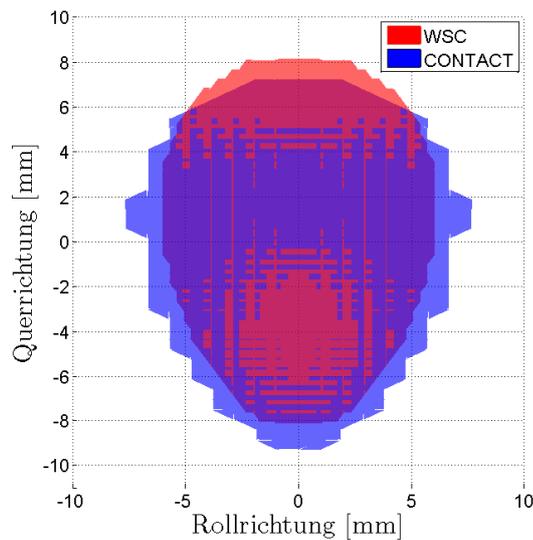


Abbildung 4.22: Kontaktfläche von *CONTACT* und *WSC* des linken Rades

Die Ergebnisse der Simulation der Kontaktfläche stimmen qualitativ und quantitativ gut überein. Bei der Länge der Kontaktfläche gibt es zwischen CONTACT und WheelsetContact eine Abweichung von zirka 3 mm . CONTACT berechnet die Länge auf $l_{CONTACT} = 15,3\text{ mm}$ und WheelsetContact auf $l_{WSC} = 12,1\text{ mm}$. Die Breite der Kontaktfläche stimmt zwischen CONTACT und WheelsetContact mit $b_{CONTACT} = 16,6\text{ mm}$ und $b_{WSC} = 16,2\text{ mm}$ gut überein. Die Kontaktflächen sind nicht-elliptisch, könnten aber noch relativ gut mit der Theorie von Hertz angenähert werden, ohne dabei zu einem großen Fehler zu führen.

Abbildung 4.23 zeigt das Ergebnis der Kontaktfläche der FEM-Rechnung. Die Abmessungen der Kontaktfläche nach der FEM-Berechnung ergeben für die Länge in Rollrichtung $l_{SRS} = 13,2\text{ mm}$ und für die Breite in Querrichtung $b_{SRS} = 16,7\text{ mm}$.

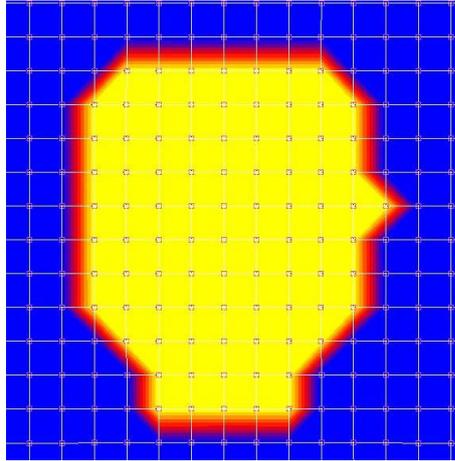


Abbildung 4.23: Kontaktfläche der *SRS* des linken Rades

Die qualitative Form der Kontaktfläche der FEM-Simulation stimmt mit derjenigen von CONTACT und WheelsetContact wenig überein, die Kontaktfläche wird wesentlich „eckiger“ berechnet. Auch die kleine Spitze, die nur an der rechten Seite auftritt, ist nicht plausibel. Tabelle 4.5 stellt die Ergebnisse der Länge und Breite der Kontaktfläche des linken Rades bei 2 mm Querverschiebung der drei Programme gegenüber.

Tabelle 4.5: Abmessungen der Kontaktfläche linkes Rad

	CONTACT	WSC	SRS
l [mm]	15,3	12,1	13,2
b [mm]	16,6	16,2	16,7

Der Kraftschlussverlauf des linken Rades wird in Abbildung 4.24 gezeigt. Die Ergebnisse von CONTACT stimmen sehr gut mit jenen von Siemens Rollkontakt Simulation überein. WheelsetContact berechnet denselben Startwert, allerdings ist die Anfangssteigung des Kraftschlussverlaufes etwas flacher. Die Abweichung von WheelsetContact gegenüber CONTACT entspricht in etwa jener bei Hertz'schen Kontakten.

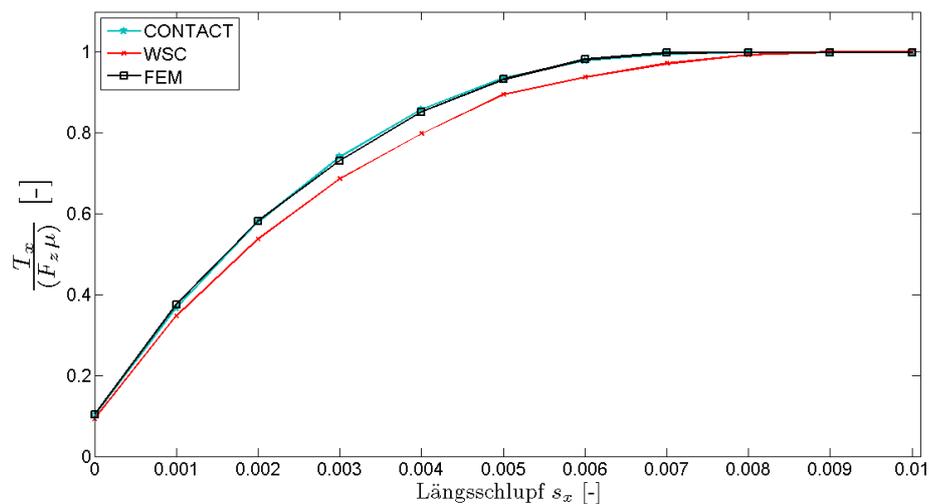


Abbildung 4.24: Kraftschluss linkes Rad

Der Verlauf der Normalspannung von CONTACT und Siemens Rollkontakt Simulation in Querrichtung des linken Rades ist in Abbildung 4.25 dargestellt. Der Verlauf und das Maximum der Normalspannung korrelieren sehr stark.

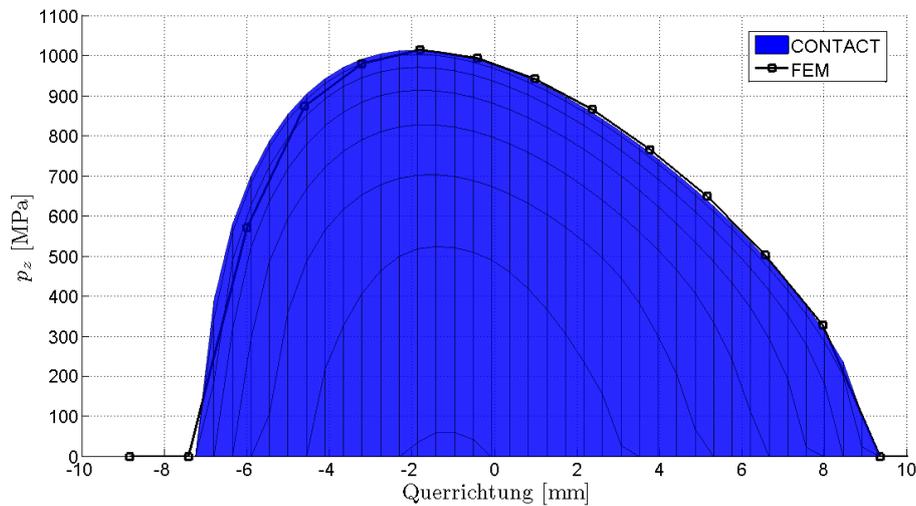


Abbildung 4.25: Normalspannung in Querrichtung links Rad - *CONTACT* und *SRS*

Beim Vergleich von CONTACT mit WheelsetContact in Abbildung 4.26 ist zu erkennen, dass der qualitative Verlauf der Normalspannung gut übereinstimmt. CONTACT berechnet die maximale Normalspannung auf $p_0 = 1013 \text{ MPa}$, WheelsetContact auf $p_0 = 987.2 \text{ MPa}$ und Siemens Rollkontakt Simulation auf $p_0 = 1012.4 \text{ MPa}$.

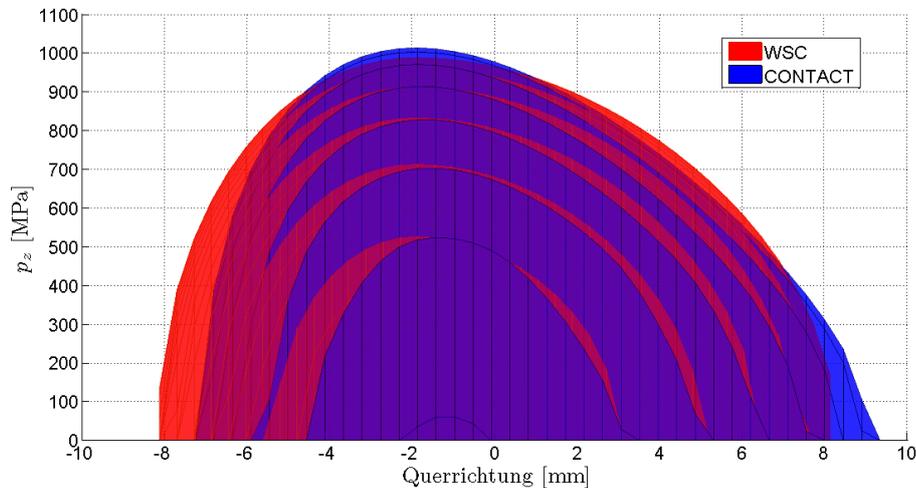


Abbildung 4.26: Normalspannung in Querrichtung links Rad - *CONTACT* und *WSC*

Die Tangentialspannung p_x bei 0,4 % Längsschlupf von WheelsetContact ist mit derjenigen von CONTACT in Abbildung 4.27 im Schrägriss gegenübergestellt. Die Unterschiede im Normalspannungsverlauf haben natürlich Einfluss auf den traction bound und somit auf den Tangentialspannungsverlauf.

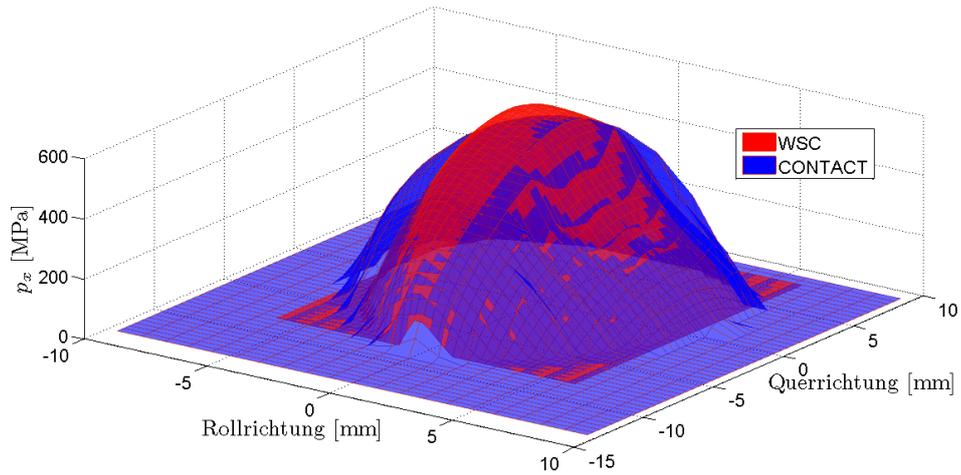


Abbildung 4.27: Tangentialspannung p_x des linken Rades im Schrägriss - *CONTACT* und *WSC*

Der Verlauf der Tangentialspannung p_x in Rollrichtung wird in Abbildung 4.28 gezeigt. Es gibt in diesem Szenario starke Analogien zu den Szenarien des Hertz'schen Kontaktes. WheelsetContact kann den charakteristischen S-Schlag nicht abbilden und hat in Rollrichtung aufgrund des, zugrunde liegenden Bürstenmodells, einen parabolischen traction bound. Trotz der stark unterschiedlichen mechanischen Modelle stimmt allerdings der Verlauf der Tangentialspannung gut überein.

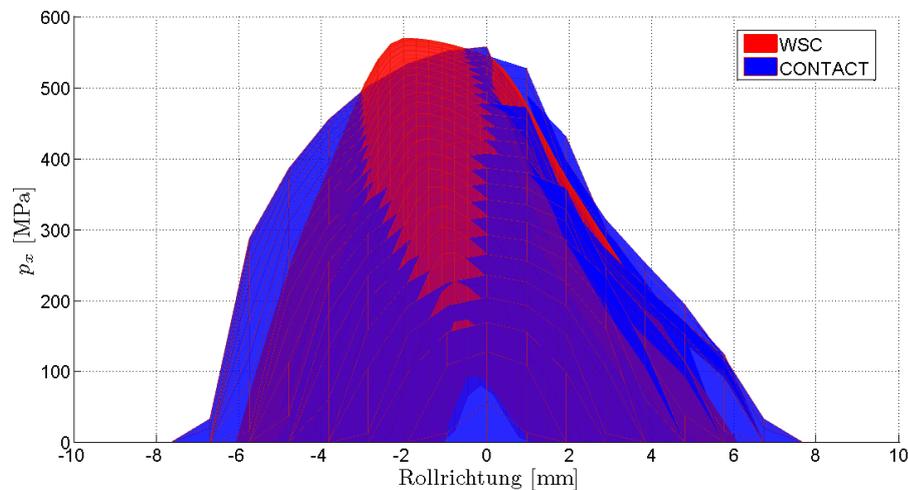


Abbildung 4.28: Tangentialspannung p_x des linken Rades in Rollrichtung - *CONTACT* und *WSC*

Am rechten Rad ist der Effekt der nicht-elliptischen Kontaktfläche stärker ausgeprägt. Abbildung 4.29 zeigt die Berechnung der Kontaktfläche von *CONTACT* in blau und *WheelsetContact* in rot.

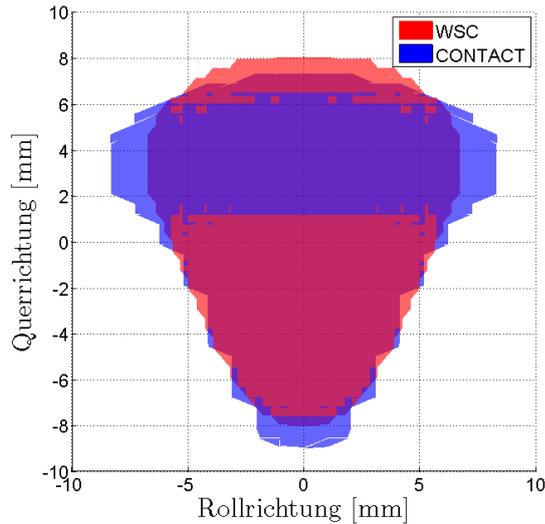


Abbildung 4.29: Kontaktfläche von *CONTACT* und *WSC* des rechten Rades

Auch hier stimmt die Kontaktfläche qualitativ gut überein. Das Ergebnis der Siemens Rollkontakt Simulation zeigt Abbildung 4.30.

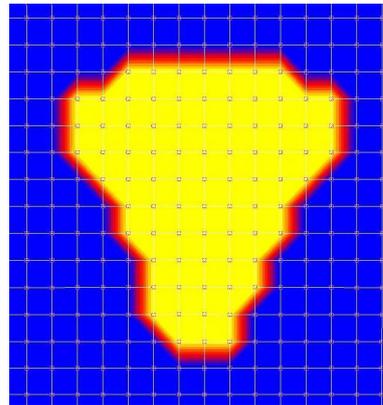


Abbildung 4.30: Kontaktfläche der *SRS* des rechten Rades

Die Auswertung der Abmessungen der Kontaktfläche in Längs- und Querrichtung bei der FEM-Simulation ergibt für die Länge $l_{SRS} = 15,9 \text{ mm}$ und für die Breite $b_{SRS} = 17 \text{ mm}$. *CONTACT* berechnet die Breite der Kontaktfläche in Querrichtung auf $b_{CONTACT} = 16,3 \text{ mm}$ und WheelsetContact auf $b_{WSC} = 16 \text{ mm}$. In Längsrichtung beträgt die Größe der Kontaktfläche bei *CONTACT* $l_{CONTACT} = 16,7 \text{ mm}$ und bei WheelsetContact $l_{WSC} = 13,6 \text{ mm}$. Die Ergebnisse der einzelnen Programme sind in Tabelle 4.6 übersichtlich dargestellt.

Tabelle 4.6: Abmessungen der Kontaktfläche rechtes Rad

	CONTACT	WSC	SRS
l [mm]	16,7	13,6	15,9
b [mm]	16,3	16	17

Abbildung 4.31 zeigt den Verlauf des Kraftschlusses des rechten Rades. Die Verläufe der FEM-Rechnung und der Simulation von *CONTACT* korrelieren im gesamten Bereich sehr gut. Der Startwert des Verlaufes ist von WheelsetContact leicht höher als jene von *CONTACT* und Siemens Rollkontakt Simulation. Auch die Anfangssteigung berechnet WheelsetContact verglichen zu *CONTACT* und Siemens Rollkontakt Simulation etwas flacher.

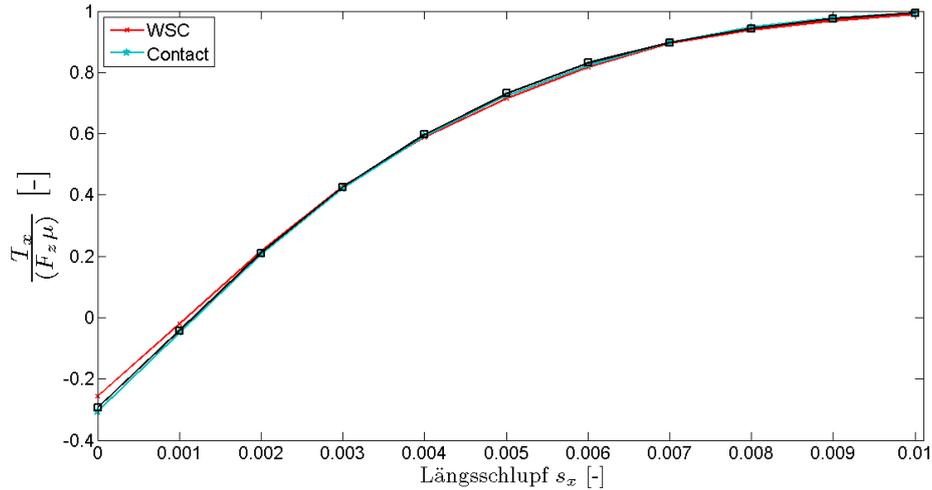


Abbildung 4.31: Kraftschlussverlauf rechtes Rad

Für das rechte Rad soll wieder die Tangentialspannung p_x bei 0,4 % Längsschlupf analysiert werden. Abbildung 4.35 zeigt den Verlauf der Tangentialspannung p_x im Schrägriss. Der maximale Wert der Tangentialspannung von WheelsetContact liegt mit $p_{x0} = 464,8 \text{ MPa}$, gegenüber CONTACT mit $p_{x0} = 706,4 \text{ MPa}$, um 241.6 MPa niedriger.

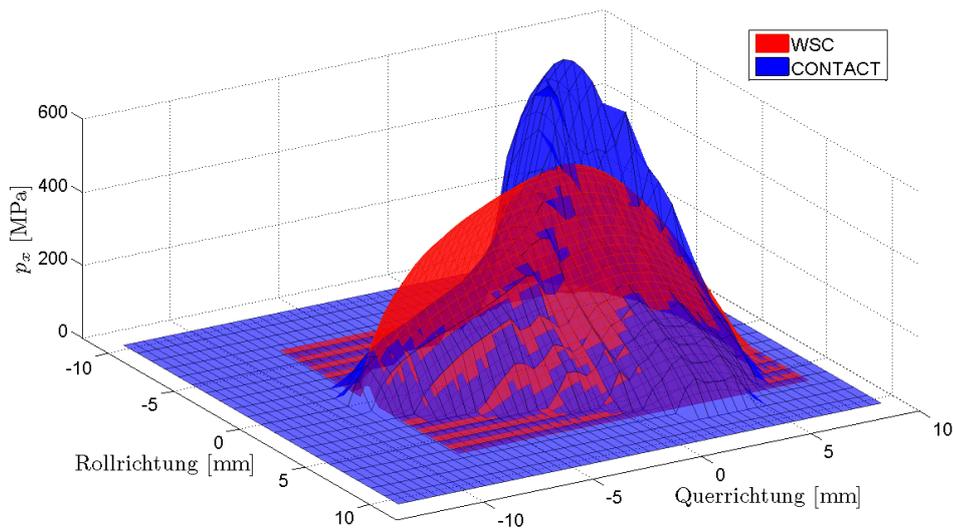


Abbildung 4.32: Tangentialspannung p_x des rechten Rades im Schrägriss - *CONTACT* und *WSC*

Bei genauerer Betrachtung der Tangentialspannung p_x in Rollrichtung wird auch der Einfluss der von WheelsetContact gegenüber CONTACT um fast 3 mm kleineren Länge der Kontaktfläche in Rollrichtung bemerkbar, und so ist es erstaunlich, dass die Unterschiede der Tangentialspannung in diesem Fall nicht zu einer größeren Abweichung des Kraftschlussverlaufes führen.

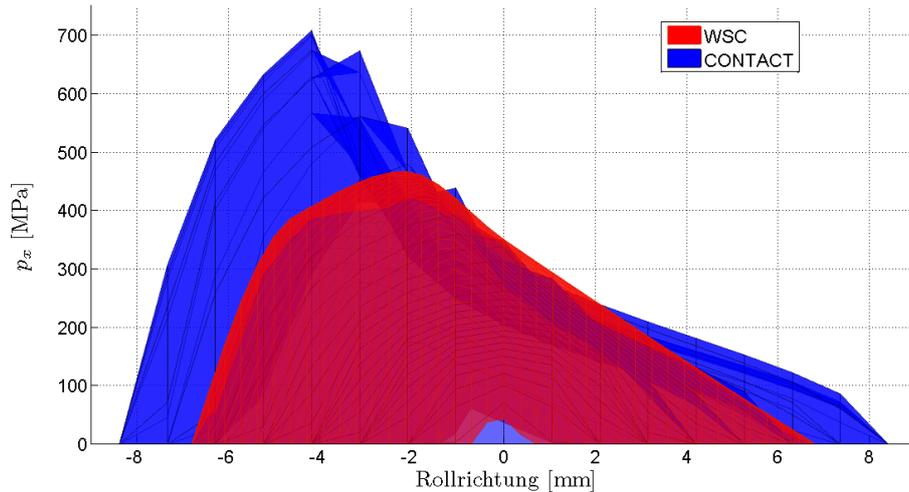


Abbildung 4.33: Tangentialspannung p_x des rechten Rades in Rollrichtung - *CONTACT* und *WSC*

Ein bessere Veranschaulichung der Kraft- beziehungsweise Spannungssituation zeigt Abbildung 4.34. Hier ist die Tangentialspannung p_x in Rollrichtung zu einer resultierenden Kraft je Diskretisierungsstreifen in Rollrichtung T_{Streifen_x} aufintegriert. WheelsetContact hat zwar ein geringeres Maximum, allerdings ist die resultierende Kraft je Streifen in Rollrichtung von Streifen 20 bis 43 um einiges höher als die berechnete Kraft von *CONTACT*.

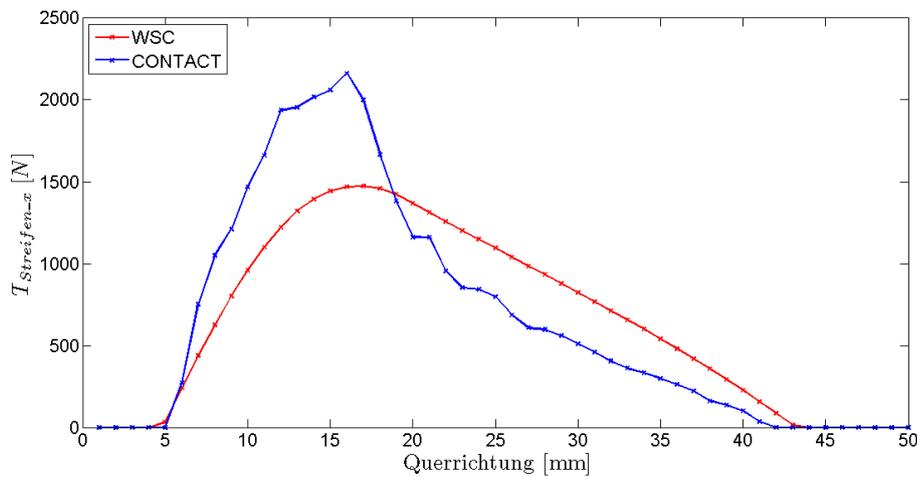


Abbildung 4.34: Kraft je Streifen T_{Streifen_x} des rechten Rades in Rollrichtung - *CONTACT* und *WSC*

Große qualitative als auch quantitative Übereinstimmung in dem Verlauf der Tangentialspannung p_x gibt es zwischen Siemens Rollkontakt Simulation und *CONTACT*. Siemens Rollkontakt Simulation berechnet die maximale Spannung auf $p_{x0} = 684,5 \text{ MPa}$ und bestätigt somit das Ergebnis von *CONTACT*.

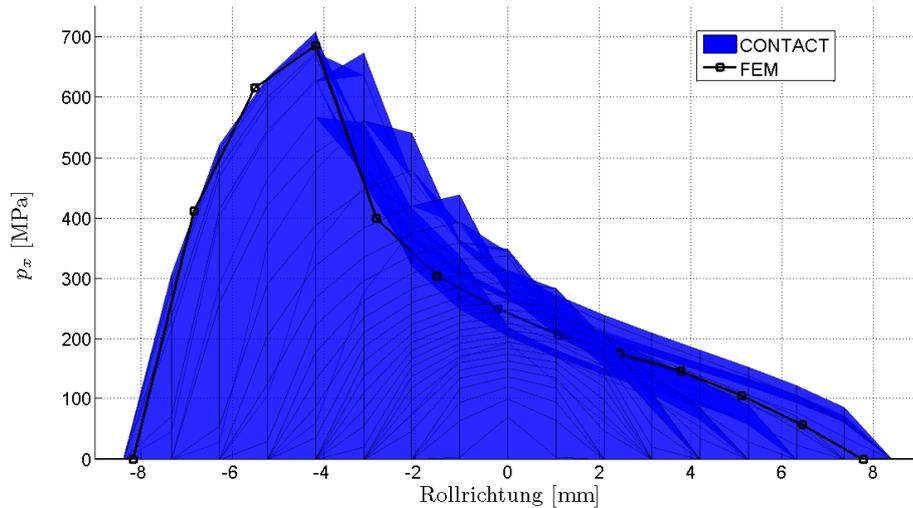


Abbildung 4.35: Tangentialspannung p_x des rechten Rades in Rollrichtung - *CONTACT* und *SRS*

Der Verlauf der Normalspannung des rechten Rades von *CONTACT* und *WheelsetContact* wird in Abbildung 4.36 im Schrägriss dargestellt.

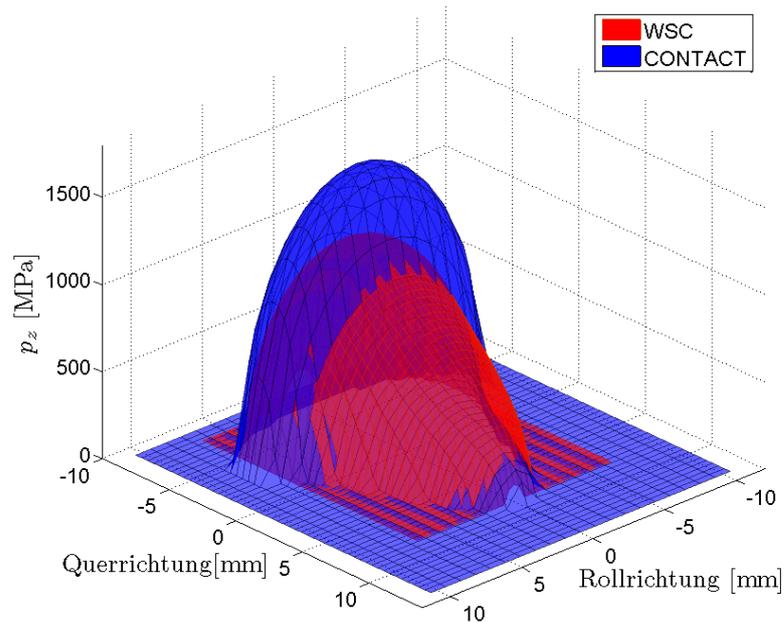


Abbildung 4.36: Normalspannungsverteilung im Schrägriss von *CONTACT* und *WSC* des rechten Rades

Beim Spannungsmaximum gibt es zwischen *CONTACT* und *WheelsetContact* deutliche Unterschiede, die maximale Normalspannung beträgt bei *CONTACT* $p_0 = 1526 \text{ MPa}$ und bei *WheelsetContact* $p_0 = 1082 \text{ MPa}$. Der qualitative Verlauf stimmt allerdings relativ gut überein.

Abbildung 4.37 stellt den Verlauf der Normalspannung in Querrichtung von *CONTACT*, *WheelsetContact* und von der *FEM*-Rechnung dar. Sowohl das Spannungsmaximum mit

$p_0 = 1448 \text{ MPa}$, als auch der Verlauf der Spannung der FEM-Rechnung korrelieren mit demjenigen von CONTACT.

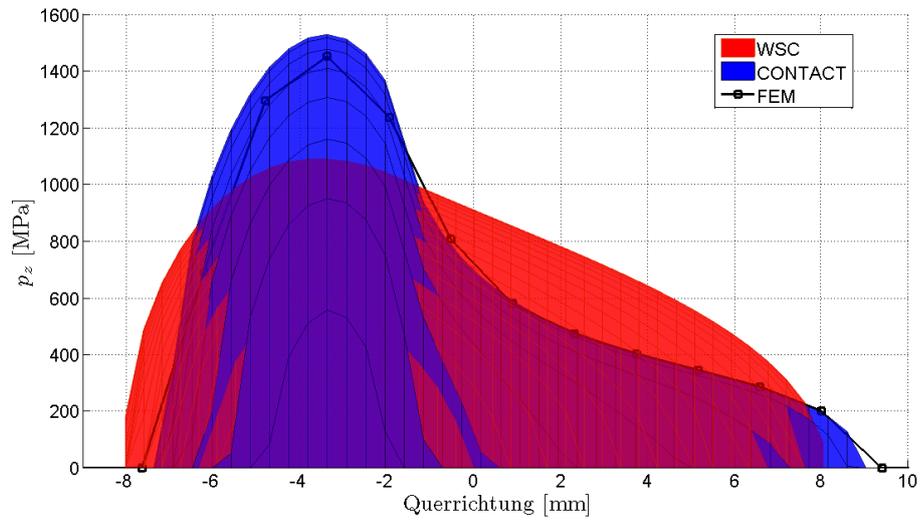


Abbildung 4.37: Normalspannungsverteilung in Querrichtung von *CONTACT*, *WSC* und *FEM* des rechten Rades

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die Rad-Schiene Kontaktmodelle CONTACT beziehungsweise FASTSIM von J.J. Kalker, WheelsetContact vom Kompetenzzentrum - Das virtuelle Fahrzeug - Forschungsgesellschaft mbH und Siemens Rollkontakt Simulation miteinander verglichen. Die Programme unterscheiden sich stark in den zugrunde liegenden mechanischen Modellen und hinsichtlich der Simulationsdauer.

Das Programm CONTACT stellt die Lösung der exakten Theorie dar und gilt als Referenz für Hertz'sche Kontakte. Der FASTSIM Algorithmus entspricht dem Bürstenmodell und ist eine schnelle Näherungslösung. Das FEM-Tool Siemens Rollkontakt Simulation und CONTACT können auch räumliche Probleme darstellen, und erlauben es den Spannungszustand von Rad und Schiene nicht nur an der Oberfläche zu betrachten. Der große Nachteil der Siemens Rollkontakt Simulation ist die enorme Rechenzeit in der Größenordnung von Stunden und so ist das Tool deshalb für bestimmte Problemstellungen ungeeignet. Das vom Kompetenzzentrum - Das virtuelle Fahrzeug - Forschungsgesellschaft mbH neu entwickelte Programm WheelsetContact stellt eine Näherungslösung dar und ist genau mit dem Ziel entwickelt worden einen guten Kompromiss zwischen Rechenzeit und Genauigkeit zu erzielen. Beim Vergleich wurden Hertz'sche und nicht Hertz'sche Kontaktsituationen analysiert und dabei der Zusammenhang zwischen Längsschlüpfen und Reibkräften ermittelt. Die im Kontakt auftretenden Spannungen und die Form der Kontaktflächen wurden ebenfalls verglichen.

Begonnen wurde mit einem Literaturüberblick der Kontaktmechanik und im Speziellen des Rad-Schiene Kontaktes. Im nächsten Schritt wurden die Programme beziehungsweise mechanischen Modelle von CONTACT und FASTSIM von J.J. Kalker genauer analysiert. Anschließend wurde das Vorgehen beim Vergleich erarbeitet. Die Analyse bestand im Wesentlichen aus zwei Teilen. Im ersten Teil wurden konforme ebene und konforme gekrümmte sowie nicht-konforme Hertz'sche Kontaktsituationen berechnet. Den zweiten Teil des Vergleichs bildete die Simulation von nicht-Hertz'schen Kontakten eines quer verschobenen realen Radsatzes mit Standard Rad-Schiene Profilen. Nach der Simulation wurden die Ergebnisse ausgewertet, gegenübergestellt und analysiert.

Die Ergebnisse der Kontaktfläche der Programme CONTACT und WheelsetContact stimmen sowohl bei Hertz'schen als auch bei nicht Hertz'schen Kontakten gut überein. Die Resultate der geometrischen Abmessungen der Kontaktfläche in Längs- und Querrichtung von Siemens Rollkontakt Simulation sind quantitativ zwar richtig, die FEM-Rechnung ist allerdings nicht in der Lage die Form der Kontaktfläche korrekt abzubilden. Trotz der hohen Rechenzeiten sind beim FEM-Tool, aufgrund der vorgegebenen Diskretisierung bei kleinen Normalkräften, nur sehr wenige Elemente im Einsatz.

Bei den Kraftschlussverläufen korrelieren sowohl Startwert als auch Anfangssteigung aller Programme bei allen durchgeführten Simulationen sehr gut. Das Ergebnis von WheelsetContact deckt sich dabei mit den Resultaten von FASTSIM bei konformen ebenen und nicht-konformen Hertz'schen Kontakten sehr gut. Das ist auch darauf zurückzuführen, dass die Kalker-Steifigkeiten der beiden Programme sehr gut übereinstimmen. Bei konformen gekrümmten Kontakt ist WheelsetContact genauso wie CONTACT unter Berücksichtigung des lokalen Schlupfes, in der Lage den Versatz des Kraftschlussverlaufes aufgrund der Rollradiendifferenz abzubilden.

Die maximale Normalspannung sowie der Normalspannungsverlauf wird bei Hertz'schen Kontakten ebenfalls von allen Programmen mit guter Übereinstimmung berechnet. Bei nicht Hertz'schen Kontakten ist die maximale Normalspannung von WheelsetContact etwas zu gering, der qualitative Verlauf stimmt aber gut mit jenen von CONTACT und Siemens Rollkontakt Simulation überein.

Zusammengefasst kann gesagt werden, dass die Ergebnisse aller Programmen bei den durchgeführten Simulationen sowohl bei der Kontaktfläche, als auch beim Kraftschlussverlauf gut übereinstimmen. Der wesentliche Unterschied der drei Programme besteht jedoch in der Rechenzeit. Das FE-Werkzeug Siemens Rollkontakt Simulation hat Simulationszeiten in der Größenordnung von Stunden und ist deshalb gegenüber CONTACT und WheelsetContact mit Rechenzeiten im Minutenbereich stark im Nachteil. Das vom Kompetenzzentrum entwickelte WheelsetContact schafft den Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit gut. Das Tangentialkontaktmodell weist gegenüber FASTSIM eine bis zu 40-mal so schnelle Rechenzeit auf.

Die Diplomarbeit wurde im Rahmen des Projektes „D03_T01 - Wear and RCF Phenomena in Metro Operation“ durchgeführt. Dafür gebührt dem „COMET K2 Forschungsförderungsprogramm“ des Österreichischen Bundesministeriums für Verkehr, Innovation und Technologie (BMVIT), des Österreichischen Bundesministeriums für Wirtschaft, Familie und Jugend (BMWFJ), der Österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft mbH (FFG), des Landes Steiermark sowie der Steirischen Wirtschaftsförderung (SFG) für die finanzielle Unterstützung Dank. Das Projekt „D03_T01 - Wear and RCF Phenomena in Metro Operation“ wurde in Kooperation mit Siemens AG Österreich, voestalpine Schienen GmbH, Wiener Linien GmbH & Co KG sowie der Technischen Universität Graz durchgeführt.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Funktionen des Rad-Schiene Kontaktes	12
2.2	Elastischer Halbraum - Streckenlast (in Anlehnung an [12, S.12])	14
2.3	Elastischer Halbraum - allgemeine Belastung (in Anlehnung an [12, S.46])	16
2.4	Elastischer Halbraum - konzentrische Kraft (in Anlehnung an [13, S.2.14])	17
2.5	Elastischer Halbraum - Normalspannungsverteilung (in Anlehnung an [13, S.2.15])	19
2.6	Normalspannung nach Hertz in Form eines Halbellipsoides	19
2.7	Hertz'sche Pressung - Beschreibung der Geometrie (in Anlehnung an [12, S.57])	20
2.8	Hauptkrümmungsradien der Oberfläche in x- und y-Richtung	22
2.9	Hertz - Integraldiagramm [12, S.97]	23
2.10	Geschwindigkeitsverteilung im starren Rad bei unterschiedlichen kinematischen Zuständen (in Anlehnung an [2, S.13])	25
2.11	Kombiniertes Rollen	26
2.12	Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit in Komponenten	26
2.13	Relativgeschwindigkeiten in der Kontaktfläche beim elastischen Rad (in Anlehnung an [13, S.2.34])	27
2.14	Darstellung der Rollradiendifferenz und Einfluss auf das Geschwindigkeitsprofil	28
2.15	Das Bürstenmodell (in Anlehnung [17])	30
2.16	Tangentialspannungsverteilung nach Carter (in Anlehnung an [18, S.65])	31
2.17	Verlauf des wahren Schlupfes nach Carter (in Anlehnung an [18, S.65])	32
2.18	Haft- und Gleitgebeit nach der Näherung von Vermeulen und Johnson	33
3.1	Aufteilung der potentiellen Kontaktfläche	36
3.2	Aufteilung der Kontaktfläche	37
3.3	Die Diskretisierung der potentiellen Kontaktfläche (in Anlehnung an [8, S.60])	37
3.4	NORM-Algorithmus	40
3.5	Adaptierter NORM-Algorithmus	42
3.6	TANG-Algorithmus	43
3.7	FASTSIM-Algorithmus	48
4.1	Krümmungen von Rad und Schiene in Roll- und Querrichtung	51
4.2	Übersichtsmatrix des Vergleichs von Hertz'schen Kotaktsituationen	51
4.3	Kontaktfläche Fall a) von <i>CONTACT</i> (blaue Linie) und <i>WSC</i> (rote Fläche) in xy-Ebene	53
4.4	Kontaktfläche Fall a) von FEM in der xy-Ebene	54
4.5	Kraftschlussverlauf Fall a)	54
4.6	Tangentialspannungsverlauf Fall a) - Vergleich von <i>CONTACT</i> mit <i>WSC</i> und <i>SRS</i> in Rollrichtung	55
4.7	Tangentialspannungsverlauf Fall a) - Vergleich von <i>FASTSIM</i> mit <i>WSC</i> in Rollrichtung	56

4.8	Tangentialspannungsverlauf Fall a) - Vergleich von <i>FASTSIM</i> mit <i>WSC</i> in Querrichtung	56
4.9	Normalspannungsverlauf Fall a) in Rollrichtung	57
4.10	Normalspannungsverlauf Fall a) in Querrichtung	57
4.11	Kontaktfläche Fall e) von <i>CONTACT</i> (blau) und <i>WSC</i> (rot) im Schrägriss	58
4.12	Kontaktfläche Fall e) von <i>SRS</i> in xy-Ebene	58
4.13	Kraftschlussverlauf Fall e)	59
4.14	Verlauf der Tangentialspannung Fall e) bei $s_x = 0\%$	59
4.15	Verlauf der Tangentialspannung Fall e) bei $s_x = 0\%$ in Querrichtung	60
4.16	Kraftschlussverlauf Fall f)	60
4.17	Kontaktfläche Fall c) von <i>CONTACT</i> (blaue Linie) und <i>WSC</i> (rote Fläche) in xy-Ebene	61
4.18	Kontaktfläche Fall c) von <i>SRS</i> in der xy-Ebene	61
4.19	Kraftschlussverlauf Fall c)	62
4.20	Rad- und Schienenprofil	62
4.21	Querverschiebung des Radsatzes	63
4.22	Kontaktfläche von <i>CONTACT</i> und <i>WSC</i> des linken Rades	63
4.23	Kontaktfläche der <i>SRS</i> des linken Rades	64
4.24	Kraftschluss linkes Rad	64
4.25	Normalspannung in Querrichtung linkes Rad - <i>CONTACT</i> und <i>SRS</i>	65
4.26	Normalspannung in Querrichtung linkes Rad - <i>CONTACT</i> und <i>WSC</i>	65
4.27	Tangentialspannung p_x des linken Rades im Schrägriss - <i>CONTACT</i> und <i>WSC</i>	66
4.28	Tangentialspannung p_x des linken Rades in Rollrichtung - <i>CONTACT</i> und <i>WSC</i>	66
4.29	Kontaktfläche von <i>CONTACT</i> und <i>WSC</i> des rechten Rades	67
4.30	Kontaktfläche der <i>SRS</i> des rechten Rades	67
4.31	Kraftschlussverlauf rechtes Rad	68
4.32	Tangentialspannung p_x des rechten Rades im Schrägriss - <i>CONTACT</i> und <i>WSC</i>	68
4.33	Tangentialspannung p_x des rechten Rades in Rollrichtung - <i>CONTACT</i> und <i>WSC</i>	69
4.34	Kraft je Streifen T_{Streifen_x} des rechten Rades in Rollrichtung - <i>CONTACT</i> und <i>WSC</i>	69
4.35	Tangentialspannung p_x des rechten Rades in Rollrichtung - <i>CONTACT</i> und <i>SRS</i>	70
4.36	Normalspannungsverteilung im Schrägriss von <i>CONTACT</i> und <i>WSC</i> des rechten Rades	70
4.37	Normalspannungsverteilung in Querrichtung von <i>CONTACT</i> , <i>WSC</i> und <i>FEM</i> des rechten Rades	71
A.1	Hertz'sche Theorie - ein einfaches Beispiel	79
B.1	Kontaktfläche c)	82
B.2	Normalspannung c)	82
B.3	Tangentialspannung c)	82
B.4	Tangentialspannung c)	82
B.5	Kraftschlussverlauf c)	82
B.6	Kontaktfläche d)	83
B.7	Normalspannung d)	83

B.8	Tangentialspannung d)	83
B.9	Tangentialspannung d)	83
B.10	Kraftschlussverlauf d)	83

Literaturverzeichnis

- [1] Torsten Berndt. Geschichte der Eisenbahn.
- [2] Sabine Damme. *Zur Finite-Element-Modellierung des stationären Rollkontakts von Rad und Schiene*. Dissertation, Technische Universität Dresden Fakultät Bauingenieurwesen Institut für Mechanik und Flächentragwerke Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd W. Zastrau, 2006.
- [3] F.W.Carter. The electronic locomotive. *Proc. Inst. Civil Engn.*, 201:253–289, 1916.
- [4] F.W.Carter. On the action of locomotive driving wheel. *Proc. R. Soc. London, A* 112:151–157, 1926.
- [5] Dr. Andreas Haigermoser. *Skriptum zur Vorlesung: Schienenfahrzeuge*. Technische Universität Graz, 2002.
- [6] Heinrich Hertz. Ueber die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 5:156–171, 1881.
- [7] H.Fromm. Berechnung des schlupfes beim rollen deformierbarer scheiben. *Z. Angew. Math. Mech. (zugleich Dissertation TH Berlin, 1926)*, 7:27–58, 1927.
- [8] J.J.Kalker. Rolling contact phenomena: Linear elasticity. *Department of Applied Mathematical Analysis, Delft Unisversity of Technology, The Netherlands*.
- [9] J.J.Kalker. Survey of wheel-rail rolling contact theory. *Vehicle System Dynamics*, 5:317–358, 1979.
- [10] J.Vermeulen and K.L.Johnson. Contact of nonsperical elastic bodies transmitting tangential forces. *Journal of Applied Mechanics*, 31:338–340, 1964.
- [11] K.L.Johnson. The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane. *Journal of Applied Mechanics*, 25:339–346, 1958.
- [12] K.L.Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [13] Arno Eichberger; Klaus Six; Martin Rosenberger; Bernd Lubert. *Skriptum zur Vorlesung: Fahrzeug-Fahrweg Interaktion bei Schienenfahrzeugen*. Technische Universität Graz, Kompetenzzentrum Das virtuelle Fahrzeug Forschungsgesellschaft mbH. (Vif), WS 2011/12.
- [14] C. Marte, K. Six, G. Trummer, P. Dietmaier, A. Kienberger, R. Stock, E. Fischmeister, A. Oberhauser, and M. Rosenberger. Application of a new wheel-rail contact model to wear simulations - validation with wear measurements. In *Proceedings of the IAVSD2011 - 22nd International Symposium on Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks*, 2011.

- [15] Dr. Günter Offner. *Skriptum zur Vorlesung: Numerische Methoden der angewandten Thermodynamik - Numerische Grundlage*. Technische Universität Graz, Institut für Verbrennungskraftmaschinen und Thermodynamik, SS 2010.
- [16] O.Reynolds. On rolling friction. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 166:155–174, 1876.
- [17] Karl Popp; Werner Schiehlen. *Fahrzeugdynamik eine Einführung in die Dynamik des Systems Fahrzeug-Fahrweg*. Teubner: Stuttgart, 1993.
- [18] Klaus Knothe; Sebastian Stichel. *Schienefahrzeugdynamik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.
- [19] Köninger u.a. *Schleife, Schlitten, Rad und Wagen, Schriftenreihe Hemmenhofener Skripte*. Janus-Verlag, 2001.
- [20] Dr.ir. E.A.H. Vollebregt. *user guide for CONTACT, J.J. Kalker 's variational contact model*. VORtech Computing, 2010.
- [21] Hans-Georg Wehling. *Mobilität*.

A Beispielanhang

A.1 Hertz'sche Theorie - ein einfaches Beispiel

Die Theorie von Hertz beziehungsweise das Anwenden der Formeln soll an einem einfachen Beispiel, vergleiche Abbildung A.1) gezeigt werden. Folgende Angaben sind bekannt:

- Zylindrisches Rad mit $R_x^{(R)} = 405 \text{ mm}$
- Zylindrische Schiene mit $R_y^{(S)} = 2000 \text{ mm}$
- beide Körper sind aus Stahl, $E = 210 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\nu = 0.3$
- Normalkraft $F_z = 50 \text{ kN}$
- Verdrehung der Koordinatensysteme $\theta = 0^\circ$

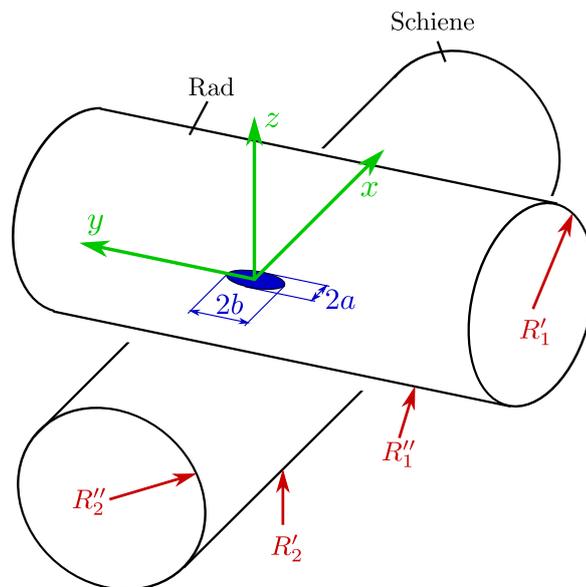


Abbildung A.1: Hertz'sche Theorie - ein einfaches Beispiel

Das Rad wird mit Index 1 versehen die Schiene mit Index 2 für das gegebene Beispiel sind also die Hauptkrümmungen:

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 = 0,405 \text{ m} & R_2' &= \infty \\ R_1'' &= \infty & R_2'' &= R_2 = 2 \text{ m} . \end{aligned}$$

Die Relativen Krümmungsradien sind also im gegebenen Beispiel:

$$R' = R_1 \qquad R'' = R_2 .$$

Somit könnte der Ablesewert des Diagramms $\left(\frac{R'}{R''}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$ bereits bestimmt werden. In diesem Beispiel soll aber der allgemeine Fall betrachtet werden in dem die beiden Faktoren **A** und **B** durch Auflösen der Gleichungen berechnet werden. Die Krümmung ist in *y*-Richtung größer ist als die Krümmung in *x*-Richtung. Es gilt also **A** > **B**. Der äquivalente Krümmungsradius ergibt sich aus der Wurzel der relativen Radien, mit

$$R_e = \sqrt{R'R''} = \sqrt{0,405 \cdot 2} = 0,9 \text{ m}.$$

Im folgenden können die Hertz Faktoren **A** und **B** berechnet werden. Wobei die komplexe Beziehung, (2.55) aufgrund der binomischen Formel zu einem einfacheren Ausdruck entwickelt:

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_2} \right) \\ |B - A| &= A - B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_2} \right). \end{aligned}$$

Dabei muss darauf geachtet werden dass die Differenz $\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_2}$ größer als null sein muss. Löst man die Gleichungen auf so folgt:

$$A = \frac{1}{2} \frac{1}{R_1} \qquad B = \frac{1}{2} \frac{1}{R_2}.$$

Der Ablesewert $\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$ des Diagramms wäre somit

$$\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,45.$$

Da dieser Wert auf der Abszisse nicht abgebildet ist, muss das Koordinatensystem um die *z*-Achse um 90° gedreht werden, also die beiden Faktoren bzw. Krümmungen vertauscht werden. Somit kann man aus dem Diagramm das für die weitere Rechnung wichtige Verhältnis $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ und F_1 , F_2 und F_3 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2,22 \\ \frac{b}{a} \left(\frac{R'}{R''}\right)^{\frac{1}{2}} &= 0,77 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,588 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,701 \\ F_1 &= 0,97 \qquad F_2 = 0,97 \qquad F_3 = F_1^{-2} = 1,06. \end{aligned}$$

Weiters benötigt man noch den äquivalenten Elastizitätsmodul,

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} = 2 \cdot \frac{1 - 0,3^2}{210 \cdot 10^9} = 1,15 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2.$$

Der mittlere Kontaktradius kann nun berechnet werden über

$$c = \left(\frac{3F_z R_e}{4E^*}\right)^{\frac{1}{3}} F_1 = \left(\frac{3 \cdot 50000 \cdot 0,9}{4 \cdot 1,15 \cdot 10^{11}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 0,97 = 6,44 \text{ mm}.$$

Die Halbachsen der Ellipse im verdrehten Koordinatensystem können nun durch einsetzen in

$$a = c \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 10,952 \text{ mm} \qquad b = c \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = 3,787 \text{ mm},$$

bestimmt werden. Daraus folgt für die Halbachsen a und b nach der Drehung um 90° in das ursprüngliche Koordinatensystem, (mit a in Richtung der x-Achse und b in Richtung der y-Achse),

$$b = 10,952 \text{ mm} \quad a = 3,376 \text{ mm} .$$

Nach Einsetzen ergibt das für den maximalen Normaldruck

$$p_0 = \frac{3F_z}{2\pi ab} = \frac{3 \cdot 50000}{2 \cdot \pi \cdot 0,01095 \cdot 0,003787} = 575,86 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 575,86 \text{ MPa} .$$

Der Vollständigkeit halber wird zum Schluss noch die Eindringung d bestimmt

$$d = \left(\frac{9F_z^2}{16E^*R_e} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot F_2 = \left(\frac{9 \cdot 50000^2}{16 \cdot (1,15 \cdot 10^{11})^2 \cdot 0,9} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 0,97 = 0,0475 \text{ mm} .$$

B Anhang

B.1 Fall c)

Die folgenden Abbildungen zeigen die Simulationsergebnisse des Falles c)

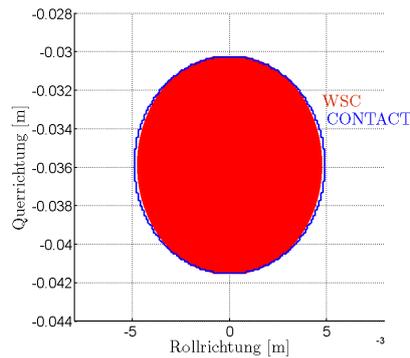


Abbildung B.1: Kontaktfläche c)

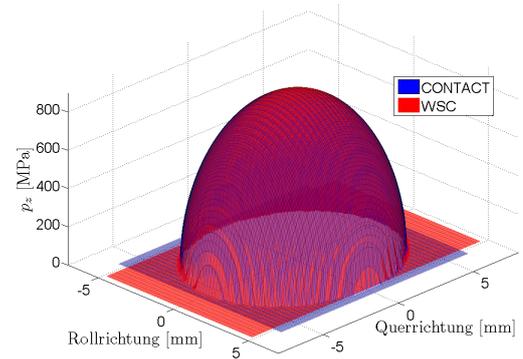


Abbildung B.2: Normalspannung c)

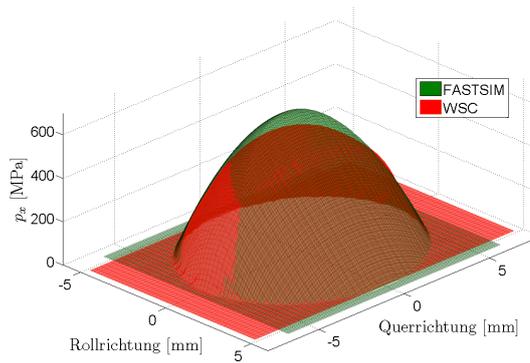


Abbildung B.3: Tangentialspannung c)

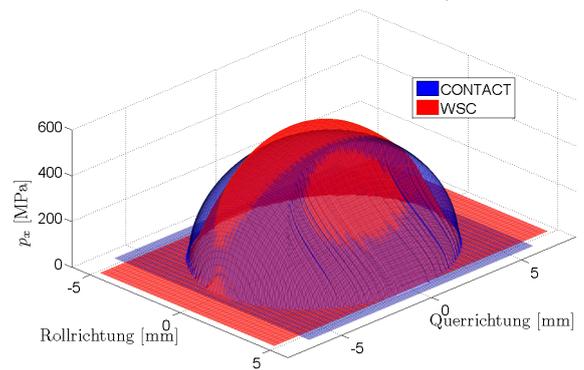


Abbildung B.4: Tangentialspannung c)

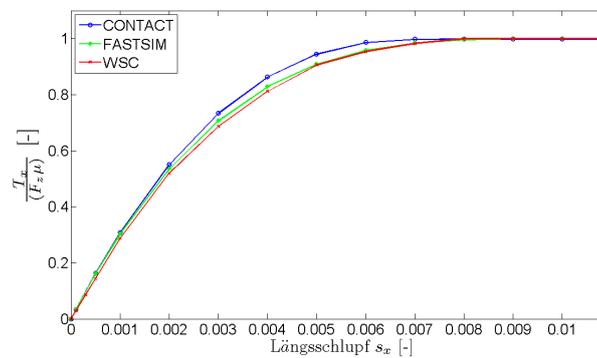


Abbildung B.5: Kraftschlussverlauf c)

B.2 Fall *d*)

Die folgenden Abbildungen zeigen die Simulationsergebnisse des Falles *d*)

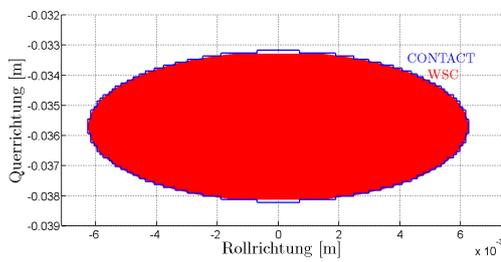


Abbildung B.6: Kontaktfläche *d*)

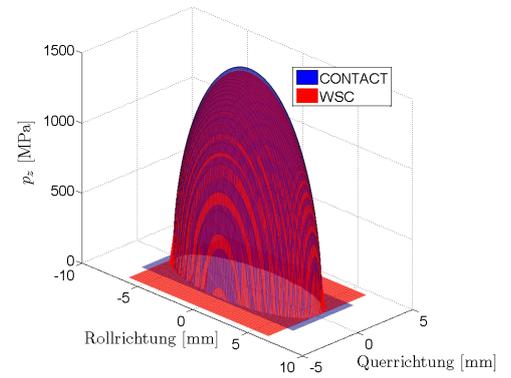


Abbildung B.7: Normalspannung *d*)

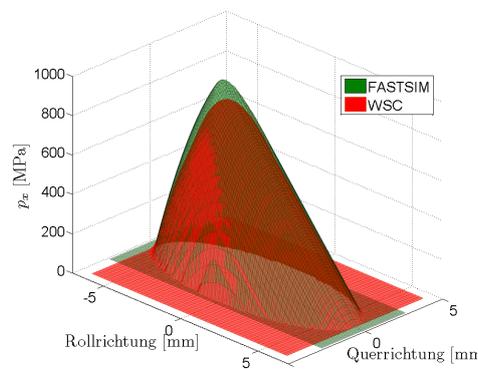


Abbildung B.8: Tangentialspannung *d*)

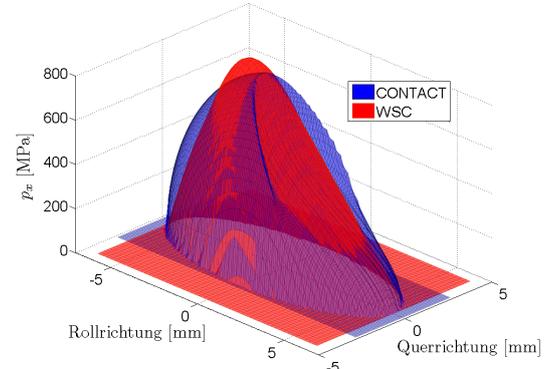


Abbildung B.9: Tangentialspannung *d*)

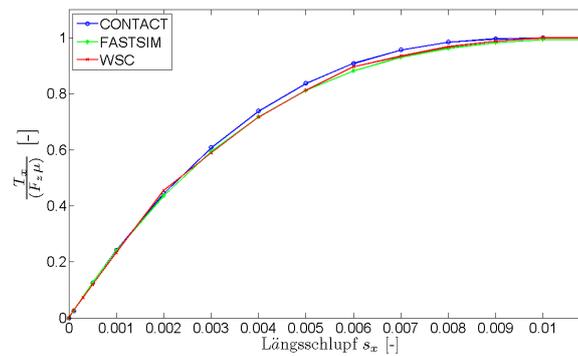


Abbildung B.10: Kraftschlussverlauf *d*)