



Emil Marinov, Bakk.techn.

**Betrachtung und Erarbeitung risikotheorthischer Modelle
um Fragen der Armutsfalle zu beantworten**

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Priv.-Doz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Thonhauser

Institut für Analysis und Zahlentheorie
der Technischen Universität Graz

und

A.o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

Graz, August 2017

Statutory Declaration

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Wien, _____
Date Signature

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am _____
Datum Unterschrift

Kurzfassung

In dieser Masterarbeit wird die Frage der Armutsfalle aus dem Blickwinkel risikotheorietischer Modelle untersucht. Die Armutsfalle ist dabei eine Zustandsbeschreibung, in der eine ökonomische Einheit stets höhere Ausgaben als Einnahmen verzeichnet. Dadurch kann die ökonomische Einheit überhaupt keine Ersparnisse bilden. In diesem Kontext wird die Armutswahrscheinlichkeit - als jene Wahrscheinlichkeit, in die Armutsfalle zu geraten - definiert und im Zusammenhang einer Versicherung mit Selbstbeteiligungsquote studiert. Hierbei wird noch das wechselseitige Verhältnis zwischen dem Vermögensstand eines Haushaltes und der Verlustminderung im Versicherungsfall untersucht.

Abstract

In this master thesis the question of the poverty trap is examined from the perspective of risk-theoretic models. The poverty trap is a description of the state in which an economic unit always records higher expenses than revenue. As a result the observed economic unit cannot form any savings at all. In this context the trapping probability - as the probability of falling into poverty - is defined and studied in connection with the effect of a proportional insurance. In this case the mutual relationship between the assets of a household and the loss reduction in the insurance case is examined.

Danksagung

Diese Masterarbeit wäre ohne die unzähligen Hilfestellungen und die tatkräftige Unterstützung vieler Personen nicht möglich gewesen.

An dieser Stelle möchte ich meinem hervorragenden Betreuer Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek für die außerordentlich großartige Betreuung herzlichst danken. Seine Begleitung war stets durch herausragende Hilfsbereitschaft, Unterstützung bei der Lösungsfindung diverser mathematischer Probleme sowie der Bereitstellung vieler nützlicher Materialien gekennzeichnet. Ein besonders großes Dankeschön geht auch an meinen Erst-Betreuer Priv.-Doz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Thonhauser, der mir die Möglichkeit und Flexibilität gegeben hat, die Masterarbeit in Wien zu schreiben.

Des Weiteren danke ich meinen zahlreichen Kommilitonen. Im Besonderen aber Hannes Weissenbacher, Johannes Edelsbrunner und Herbert Bauer. Als nächstes möchte ich mich bei Jonathan Danubio und Gerhard Pawlowsky dafür bedanken, dass sie mir bei meiner Masterarbeit mit manchem hilfreichen Tipp geholfen und diese korrekturgelesen haben.

Zudem möchte ich einen großen Dank an meine Eltern und an meine liebe Lebensgefährtin Cornelia, die mir stets mit Rat und Tat zu Seite gestanden sind, aussprechen.

Emil Marinov

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einführung und Motivation	1
1.2	Die klassische Theorie des Cramér-Lundberg Modells	5
1.2.1	Die Cramér-Lundberg Schranken und die Approximation	8
1.3	Der stückweise deterministische Markov-Prozess	16
2	Vorstellung der Wachstumsmodelle	17
2.1	Ein einfaches Wachstumsmodell	17
2.2	Das exponentielle Wachstumsmodell	21
2.3	Das stochastische Wachstumsmodell	28
2.3.1	Bestimmung des Generators	31
3	Kalkül der Armutswahrscheinlichkeit	34
3.1	Die Armutswahrscheinlichkeit	34
3.2	Die Übergangsdichte	38
3.3	Die Integralgleichung	56
3.3.1	Die Armutswahrscheinlichkeit für ein deterministisches Verlustereignis	57
3.3.2	Die Armutswahrscheinlichkeit für diskret verteilte Verlustereignisse	59
3.4	Interpretation als Cramér-Lundberg-Modell	65
3.4.1	Die Nettoprofitbedingung	68
3.4.2	Anwendung der Cramér-Lundberg-Approximation	72
3.5	Die Lösung der Integralgleichung	76
3.5.1	Die Lösung der Integralgleichung über eine iterative Methode	76
3.5.2	Die Lösung der Integralgleichung über ein System von Differentialgleichungen	83

4	Der Einfluss einer proportionalen Versicherung	86
4.1	Die Beschreibung der Versicherung und der Modellstruktur .	86
4.2	Die Übergangsdichte mit Versicherung	90
4.2.1	Die Übergangsdichte mit Versicherung im deterministischen Fall	92
4.2.2	Die Übergangsdichte mit Versicherung wenn der Schadensanteil Beta verteilt ist	94
4.3	Die Armutswahrscheinlichkeit mit Versicherung für ein deterministisches Verlustereignis	99
4.4	Die Illustration der Armutswahrscheinlichkeit mit der Beta-Verteilung	102
5	Konklusion und Ausblick	105
	Literatur	109

Abbildungsverzeichnis

2.1	Lineare Konsumfunktion als Funktion des Einkommens	19
2.2	Phasenportrait des exponentiellen Wachstumsmodells	23
2.3	Einige Trajektorien des stochastischen Wachstumsmodells . .	25
3.1	Dichtefunktion im deterministischen Fall mit $q = 0.1$	41
3.2	Querschnitt im deterministischen Fall mit $q = 0.5$	42
3.3	Potenz-Dichtefunktion mit $\alpha = 7$ und $\gamma = 5$	45
3.4	Querschnitt der Potenz-Dichtefunktion	46
3.5	Konturplot der Potenz-Dichtefunktion	47
3.6	Beta-Dichtefunktion mit $\alpha = 5$, $\beta = 2$ und $\gamma = 5$	52
3.7	Konturplot der Beta-Dichtefunktion	53
3.8	Querschnitt der Beta-Dichtefunktion	54
3.9	Konturplot der Dichtefunktion der Betafunktion	55
3.10	Aufspaltung des Definitionsbereiches der Armutswahrscheinlichkeit	63
3.11	Numerisches Lösungsverfahren für die Armutswahrscheinlichkeit mit 50 Iterationen	79
3.12	Iterative numerische Lösung für das erste Verlustereignis . .	80
3.13	Veranschaulichung der Abstände	81
3.14	Iteratives numerisches Lösungsverfahren für mehrere Verlustereignisse	82
4.1	Illustration Iteratives Verfahren für die Armutswahrscheinlichkeit mit und ohne einer Versicherung	103
4.2	Armutswahrscheinlichkeit mit und ohne einer Versicherung .	104

1 Einleitung

1.1 Einführung und Motivation

Die Antwort auf die Frage „Wer sind die Armen?“ erfordert die Erforschung und eine nähere Erläuterung der besonderen Charakteristika von Armut. Hierbei kommt insbesondere der Beschreibung des Zustands der andauernden Armut (sog. *Armutsfalle*) eine besondere Rolle zu, kann sie doch eine Schlüsselantwort zum besseren Verständnis der Armutsumstände sowie deren Einflussgrößen geben. Im Jahre 2014 meldete sich der Regisseur Michael Matheson Miller mit seinem 41-fach preisgekrönten Dokumentarfilm „Poverty, Inc.“ zu Wort. Er leistete damit einen wesentlichen Beitrag zur Aufklärung der Bedingungen der Armutüberwindung aus Sicht der Menschen in den Entwicklungsländern. Es braucht hier sicher nicht ausführlicher begründet werden, warum der Nobelpreisträger Joseph Stiglitz noch im selben Jahre 2014 mit seinem veröffentlichten Werk „Reich und Arm. Die wachsende Ungleichheit in unserer Gesellschaft“ angeführt werden muss, wenn es um eine explizit ökonomische Kritik an der quantitativ messbaren Ungleichheit in der Welt geht. Wenngleich viele seiner Gedanken aus volkswirtschaftlicher Sicht keine neuen bislang nicht vorhandenen Ausformungen sind, ist seine umfassende Arbeit bemerkenswert. Die quantitative Erforschung dieser Einflussgrößen ist vom menschlichen Wunsch getrieben, die Dynamik der Armutsspirale zu erfassen, sie besser zu verstehen und einen Lösungsansatz zu finden.

Letzten Endes ist es aber eine Vielzahl von theoretischen Entwicklungen, die einen Handlungsbedarf begründen und die Ideen deshalb früher oder später, mittelbar bzw. unmittelbar, zur Anwendung bringen, was wiederum Veränderungen der Denkweise mit sich bringt.

Nach der jüngsten Publikation der World Bank Group „Poverty and shared prosperity 2016“ [22] liegt die internationale Maßgröße der absoluten Armutsgrenze - in der 3. Welt - bei einem Einkommen von \$ 1.90 pro Tag und Kopf. Die anderen Facetten der Armut, die gemäßigte und die relative, sind bereits mit höheren Einkommen verknüpft. Im Jahre 2013 lebten geschätzte 767 Millionen Menschen unter der absoluten Armutsgrenze. Über 50% dieser Menschen leben heute in Afrika, knapp 45% davon in Asien und über 4% in Lateinamerika.

Nach den Richtlinien der World Bank Group kann die Armut als ein Zustand der „pronounced deprivation in well-being“, also als ein „ausgeprägter Mangel an Wohlergehen“ aufgefasst werden. Diese kasuistische Definition stellt eine ausreichend solide Grundlage der Interpretationsmöglichkeit dar, um auf jeden Einzelfall *richtig* abzustellen.

Geht es nach den Wirtschaftswissenschaftlern Paul A. Samuelson und William D. Nordhaus [34], ist Armut definiert als die unzureichende Mittelausstattung zur Befriedigung der lebenswichtigen Grundbedürfnisse. Dieser Armutzustand wird dabei häufig durch ein Einkommen unterhalb der Armutsgrenze verursacht, das den Erwerb aller lebensnotwendigen Ressourcen nicht mehr zulässt.

Die Ökonomen Samuel Bowles, Steven N. Durlauf und Karla Hoff [8] beschreiben in drei neuen Theorien die Mechanismen, die andauernde Armut (sprich: *Armutsfalle*) verursachen. Nach ihrer Auffassung haben diese neuen Theorien sowohl für ganze Wirtschaftsräume (z.B. Staaten) als auch für einzelne Haushalte Gültigkeit. Durch starke Vereinfachungen der soziokulturellen und politischen Konstellationen konnten die Wirtschaftswissenschaftler folgende drei verschiedene, neuartige Theorien zur Erklärung der Armut entwickeln:

- dysfunktionale Institutionen (*engl. „dysfunctional institutions“*)
- Nachbarschaftseffekte (*engl. „neighborhood effects“*)
- kritische Schwellenwerte (*engl. „critical thresholds“*)

Zu dysfunktionalen Institutionen kommt es durch eine schlechte Regierungsführung und eine Politik, die durch einseitige Regulierungen der Märkte eine monopolisierte Marktmacht-Ökonomie hervorbringt. Dadurch wird der rechtsstaatliche Rahmen ausgehebelt und die Eigentumsrechte

sowie die Rechtssicherheit der Einwohner sind nur noch eingeschränkt gegeben. Die Investitionsbereitschaft im ganzen Wirtschaftsraum nimmt ab und die Einkommen bleiben aus. Überschuldung, schlechte Förderung von öffentlicher Bildung und öffentlichen Gütern sind oft die Folgeerscheinungen.

Der Begriff des „Nachbarschaftseffekts“ soll eine Art Metapher darstellen, nämlich für die Einflussmöglichkeit, die eine Person innerhalb einer Gruppe auf andere Gruppenmitglieder hat. Hierbei kann die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Gruppe vorgegeben sein. Die Gruppenmitgliedschaft kann von vielen Faktoren abhängen: Zum Beispiel von der Hautfarbe, dem kulturellen Hintergrund oder sie ergibt sich aus der Biografie des Individuums selbst, wie etwa durch den Bildungsweg oder etwaige Interessensverbände. Zur Verdeutlichung kann folgendes Beispiel behilflich sein: Angenommen in einem Wohngebiet existiert ein Anwohner, der seinen Grundbesitz verkommen lässt. Diese Art der Vernachlässigung wirkt sich negativ auf den Wert der anliegenden Grundstücke aus. Verhalten sich andere Anwohner ebenfalls vernachlässigend, dann führt dies zu einem Wertverlust des gesamten Geländes.

Das Modell des kritischen Schwellenwertes ist durch das Vorhandensein eines bestimmten Wertes als symbolischem Grenzwert charakterisiert. Wird dieser Grenzwert unterschritten, dann bedeutet dies, dass sich der Haushalt in der Armutsfalle befindet. Dieser kritischer Schwellenwert wird aus dem jeweiligen Modell berechnet oder von vornherein festgelegt.

Wenn wir nun unseren Blick von der Herausforderung eines anscheinend in Richtung einer „einheitlichen“ Armutdefinition gehenden Diskurses erweitern, erkennen wir, dass zumindest in der westlichen Welt gesetzliche relative Schwellenwerte des Einkommens zur Bestimmung von Armut und Armutgefährdung (bereits) vorhanden sind.

Wir definieren in der vorliegenden Arbeit die Armutsfalle als einen Zustand, indem sich ein Haushalt unterhalb einer bestimmten Grenze des Einkommens- und dadurch der Vermögensgenerierung befindet. Unterhalb dieser Grenze entsteht nämlich ein Bereich, in dem der Haushalt alle Einnahmen stets konsumieren muss. In dieser Falle hat der Haushalt überhaupt

keine Möglichkeiten mehr, selbstständig und unabhängig über den kritischen Schwellenwert (auch „Armutsgrenze“) zu kommen. Damit deckt sich unsere Definition der Armutsfalle mit [22], [34] und sowie [8], weil die betrachteten Modelle in die Kategorie der kritischen Schwellenwerte gehören.

Im *Risikomodell* von Raimund M. Kovacevic und Georg Ch. Pflug [31] werden zuerst einige quantitative Methoden der Armutsfalle ohne den Einfluss einer Versicherung betrachtet. Dann wird der Einfluss von einer Versicherung auf diese Armutsfalle aufgezeigt. Damit soll ein Modell für die zukünftige kritische Auseinandersetzung mit der Rolle einer Versicherung zur Reduktion des Armutsrisikos angeregt werden.

Ziel der Masterarbeit ist es, das relativ umfassende Risikomodell von Kovacevic und Pflug [31] ausführlich zu studieren, d.h. die analytische Vorgehensweise zu begründen und die numerischen Ruinwahrscheinlichkeiten als resultierende Armutswahrscheinlichkeit mit Hilfe eines iterativen numerischen Lösungsverfahrens zu berechnen.

1.2 Die klassische Theorie des Cramér-Lundberg Modells

In diesem Abschnitt wird eine kleine Einführung in das klassische Risiko-modell dargelegt. Es wird auch *Cramér-Lundberg Modell* genannt, weil es 1903 von Filip Lundberg eingeführt und von Harald Cramér ausführlicher studiert wurde. Detailliert wird dieses Modell u.a. im Buch von Rolski, Schmidli, Schmidt und Teugels [23] oder Asmussen und Albrecher [3], Hans U. Gerber [18] und R. Gatto [17] behandelt.

Der **diskrete Risikoprozess** R_n nach n Jahren der freien Reservenbildung kann durch

$$R_n = u + \beta n - \sum_{i=1}^n U_i \quad (1.1)$$

dargestellt werden. Hierbei ist $u \geq 0$ die Anfangsreserve und $\beta > 0$ die eingezogene konstante Prämie pro Zeiteinheit. Die endliche Anzahl der Schadenshöhen U_i sind dabei eine Folge unabhängiger und identisch verteilter positiver Zufallsvariablen.

Da die Prämieeinnahmen über das ganze Jahr ($\hat{=}$ Zeiteinheit) aufgeteilt sind, wird nun angenommen, dass die Prämieeinnahmen über die Zeit stetig erfolgen und für jedes Zeitintervall proportional zur Intervalllänge sind. Das führt uns auf den **zeitstetigen Risikoprozess** R_t zur Zeit t

$$R_t = u + \beta t - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i. \quad (1.2)$$

Hierbei wird wieder angenommen, dass die Prämien zu einer bestimmten, konstanten Rate $\beta > 0$ erhoben werden und, dass die Anfangsreserve der Versicherungsgesellschaft mit $u \geq 0$ gegeben ist. Die Anzahl der Schäden in $(0, t]$ ist ein homogener Poisson-Prozess $N = (N(t))_{t \geq 0}$ mit dem Parameter λ . Die Schadenshöhen U_i sind dabei eine Folge unabhängiger und identisch verteilter positiver Zufallsvariablen, die zudem unabhängig von N sind.

Bemerkung: Man spricht vom (**technischen**) **Ruin** der Versicherungsgesellschaft, falls die freie Reserve negativ wird. Hierbei ist es offensichtlich,

dass $\mathbb{P}(\exists t : R_t < 0) > 0$, falls

$$:\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} U_i > u + \beta t \text{ für ein } t \in (0, \infty)\right) > 0.$$

Bemerkung: Man kann sich die Unausweichlichkeit der bestimmten Reservenhaltung unter einer bestimmten Schranke auf Grund der rechtlichen Vorgaben für eine Versicherungsgesellschaft leicht vorstellen. Für unsere Modellbildung können wir o.B.d.A. die Anfangsreserve u so anpassen, dass diese Schranke bei 0 liegt.

Die **Ruinzeit** führen wir durch die Zufallsvariable

$$\tau(u) = \min\{t \geq 0 : \text{mit } R_t < 0 \text{ und } R_0 = u\} \quad (1.3)$$

ein. Mit dieser Notation soll die Abhängigkeit der Ruinzeit von der Anfangsreserve u betont werden. Zudem ist $\tau(u)$ eine $(\mathcal{F}_t^R)_{t \geq 0}$ **Stopzeit**, mit $\mathcal{F}_t^R = \sigma\{R_u \mid 0 \leq u \leq t\}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ruin (sprich: **Ruinwahrscheinlichkeit**) ist auf zwei unterschiedliche Arten definiert:

- Die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u; T)$ in endlicher Zeit, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ruin im Zeitintervall $(0, T]$ auftritt:

$$\psi(u; T) = \mathbb{P}(R_t < 0 \text{ für ein } t \leq T) = \mathbb{P}(\tau(u) \leq T) \quad \text{für } u, T \geq 0.$$

- Die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ mit unendlichem Zeithorizont ist:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \psi(u; T) = \psi(u; \infty) := \psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \quad \text{für } u \geq 0.$$

Bemerkung: Als Funktionen von u werden die oben definierten Ruinwahrscheinlichkeiten auch als **Ruinfunktionen** bezeichnet.

Hier bezeichnen wir mit $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ die **Schadensankunftszeiten**. Die **Zwischenankunftszeiten** $T_i := \tau_i - \tau_{i-1}$ sind dabei exponentialverteilt mit endlichem Erwartungswert $\mathbb{E}(\tau_i - \tau_{i-1}) = \frac{1}{\lambda}$ für $\forall i \geq 1$ und die $\tau_i - \tau_{i-1}$

sind unabhängig von $\tau_j - \tau_{j-1}$ für $i \neq j$. Mit $Z_i := \beta(\tau_i - \tau_{i-1}) - U_i$ erhalten wir den Risikoprozess zur Schadensankunftszeit τ_n :

$$R_{\tau_n} = u + \sum_{i=1}^n Z_i. \quad (1.4)$$

Der Ruin kann nur zu den Zeitpunkten T_i eintreten. Des weiteren gilt, dass der Ruin f.s. mit Wahrscheinlichkeit 1 nur dann eintritt wenn $\mathbb{E}(Z_i) \leq 0$. Wenn $\mathbb{E}(Z_i) > 0$, dann liegt die Ruinwahrscheinlichkeit in $(0, 1)$. Siehe hierzu Theorem 6.3.1 von Rolski et al. [23] auf der Seite 233. Infolgedessen fordern wir die **Nettoprofitbedingung**:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(\beta(\tau_i - \tau_{i-1})) - \underbrace{\mathbb{E}(U_i)}_{=: \mu} &= \beta \frac{1}{\lambda} - \mu > 0 \\ &\Leftrightarrow \beta > \lambda \cdot \mu \\ &\stackrel{\text{bzw.}}{\Leftrightarrow} \rho := \frac{\beta}{\lambda \mu} - 1 > 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

was bedeutet, dass die zu erwartenden Prämieineahmen zu jedem Zeitpunkt größer zu sein haben, als die zu erwartenden Schadenszahlungen. Hier wird ρ **Sicherheitszuschlag** genannt.

Bemerkung: Unter der Nettoprofitbedingung ist die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ monoton fallend in u und für $u \rightarrow \infty$ gilt $\psi(u) \rightarrow 0$.

Bemerkung: Trotz dieses relativ einfachen Modellaufbaues ist es nicht sehr einfach eine analytische Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit anzugeben. Eine explizite Auswertung existiert für den Fall $u = 0$ und zum Beispiel für exponentialverteilte Schadenshöhen (*allg. Phasentyp-Verteilungen*). Man behilft sich daher mit Abschätzungen und Approximationen.

Bemerkung: Die Ruinwahrscheinlichkeit genügt der Integralgleichung

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\beta} \left(\int_u^\infty \bar{F}_U(x) dx + \int_0^u \psi(u-x) \bar{F}_U(x) dx \right), \quad (1.6)$$

wobei die Funktion $\bar{F}_U(x) = 1 - F_U(x)$ die Tail-Funktion der Schadenshöhenverteilung F_U ist. Später werden wir die Ähnlichkeit dieser Gleichung mit der Integralgleichung aus dem Artikel von Kovacevic und Pflug [31] sehen.

Bemerkung: Manchmal wird die komplementäre Wahrscheinlichkeit, dass kein Ruin auftritt (sprich: **Überlebenswahrscheinlichkeit**) $\bar{\psi}(u)$ mit $\mathbb{P}(\tau(u) = \infty) = 1 - \psi(u)$ betrachtet. Diese Überlebenswahrscheinlichkeit kann mit Hilfe der Erneuerungsgleichung

$$\bar{\psi}(u) = \bar{\psi}(0) + \frac{\lambda}{\beta} \int_0^u (1 - F_U(x)) \bar{\psi}(u - x) dx \quad (1.7)$$

numerisch berechnet werden. Dabei ist $F_U(x)$ die Verteilungsfunktion der Schadenshöhen U_i .

Wegen (1.7) und $\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{\psi}(u) = 1$ ist, gilt $\bar{\psi}(0) = 1 - \frac{\lambda}{\beta} \mathbb{E}(U)$.

Die Überlebenswahrscheinlichkeit bei Null ist also nur vom Erwartungswert der Schäden U_i , nicht aber von der Schadensverteilung selbst abhängig.

1.2.1 Die Cramér-Lundberg Schranken und die Approximation

In diesem Abschnitt gehen wir vom Cramér-Lundberg Modell (siehe Definition im Abschnitt 1.2) aus. Für die Abschätzung bzw. für das asymptotische Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit wird die Cramér-Lundberg Bedingung als eine notwendige Voraussetzung eingeführt. Im Buch von Asmussen und Albrecher [3], auf der Seite 91ff, wird gezeigt, dass durch die Cramér-Lundberg Bedingung Schäden mit heavy tailed Verteilungen - wie der Log-Normalverteilung oder der Paretoverteilung - ausgeschlossen werden müssen.

Um die **Cramér-Lundberg Schranken** zu erhalten gehen wir vom Theorem 5.4.1 aus Rolski et al. [23], der Seite 170 aus. In diesem wird gezeigt, dass

$$a_- e^{-\gamma u} \leq \psi(u) \leq a_+ e^{-\gamma u}$$

für jeweils positive Konstanten a_- und a_+ ist.

Dies impliziert des weiteren

$$-\gamma u + \log a_- \leq \log \psi(u) \leq -\gamma u + \log a_+.$$

Hieraus kann man folgern, dass

$$\gamma = - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log \psi(u)}{u}. \quad (1.8)$$

Dennoch werden wir im nächsten Absatz sehen, dass ein viel stärkeres Resultat existiert. Und zwar

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) e^{\gamma u} = C \quad (1.9)$$

für eine Konstante $C > 0$.

Bemerkung: Aus (1.9) \Rightarrow (1.8). Aber Vorsicht bei (1.8) \Rightarrow (1.9), weil dies notwendigerweise nicht gilt.

Zur Herleitung der **Lundberg Approximation** folgen wir wieder Rolski et al. [23] aus Abschnitt 5.4.2 auf der Seite 172ff.

Wir beginnen mit der Gleichung (1.6)

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\beta} \int_u^\infty \bar{F}_U(x) dx + \int_0^u \psi(u-x) \bar{F}_U(x) dx. \quad (1.10)$$

Bemerkung: Hierbei gilt auf Grund der Nettoprofitbedingung

$$\frac{\lambda}{\beta} \int_0^\infty \bar{F}_U(x) dx = \frac{\lambda \mu}{\beta} < 1.$$

Bemerkung: Die Gleichung (1.10) ist eine unvollständige Erneuerungsgleichung (*engl.* „defective renewal equation“).

Nach Multiplikation der Gleichung (1.10) mit $e^{\gamma u}$, erhalten wir

$$e^{\gamma u} \psi(u) = e^{\gamma u} \frac{\lambda}{\beta} \int_u^\infty \bar{F}_U(x) dx + \frac{\lambda}{\beta} \int_0^u \psi(u-x) e^{\gamma(u-x)} e^{\gamma x} \bar{F}_U(x) dx. \quad (1.11)$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} g(u) &:= e^{\gamma u} \psi(u) \\ f(x) &:= \frac{\lambda}{\beta} e^{\gamma x} \bar{F}_U(x) \\ z(u) &:= \frac{\lambda}{\beta} e^{\gamma u} \int_u^\infty \bar{F}_U(x) dx \end{aligned}$$

und erhalten für die Gleichung (1.11)

$$g(u) = z(u) + \int_0^u g(u-x) f(x) dx. \quad (1.12)$$

Wenn wir ein $\gamma > 0$ finden, sodass

$$\int_0^\infty f(x) dx = 1 \quad (1.13)$$

ist, dann ist (1.12) eine richtige Erneuerungsgleichung.

$$\int_{x=0}^\infty f(x) dx = \int_{x=0}^\infty \frac{\lambda}{\beta} e^{\gamma x} \bar{F}_U(x) dx = \int_{x=0}^\infty \int_{y=x}^\infty \frac{\lambda}{\beta} dF_U(y) e^{\gamma x} dx$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{y=0}^\infty \int_{x=0}^y \frac{\lambda}{\beta} e^{\gamma x} dx dF_U(y) = \int_{y=0}^\infty \frac{\lambda}{\beta} \frac{e^{\gamma y} - 1}{\gamma} \Big|_{x=0}^y dF_U(y) \\ &= \int_{y=0}^\infty \frac{\lambda}{\beta} \cdot \frac{e^{\gamma y} - 1}{\gamma} dF_U(y) = \frac{\lambda}{\beta \gamma} \left[\int_{y=0}^\infty e^{\gamma y} dF_U(y) - \int_{y=0}^\infty dF_U(y) \right] \\ &= \frac{\lambda}{\beta \gamma} \left[\hat{m}_U(\gamma) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Da f eine Dichte sein soll, müssen wir offenbar

$$\frac{\lambda}{\beta\gamma} \left[\widehat{m}_U(\gamma) - 1 \right] = 1, \quad (1.15)$$

bzw. umgeformt

$$\widehat{m}_U(\gamma) \stackrel{!}{=} 1 + \frac{\beta\gamma}{\lambda}, \quad (1.16)$$

fordern.

Bemerkung: Die Gleichung (1.16) ist die Lundberg-Gleichung.

Wenn wir (1.14) nach γ ableiten, bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\beta} e^{\gamma x} \bar{F}_U(x) dx &= \int_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\beta} \bar{F}_U(x) \left(\frac{\partial e^{\gamma x}}{\partial \gamma} \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\beta} \bar{F}_U(x) x e^{\gamma x} dx \\ &\stackrel{(1.14)}{=} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{\lambda}{\beta\gamma} (\widehat{m}_U(\gamma) - 1) \right] \\ &= -\frac{\lambda}{\beta\gamma^2} (\widehat{m}_U(\gamma) - 1) + \frac{\lambda}{\beta\gamma} \widehat{m}'_U(\gamma) \\ &= -\frac{1}{\gamma} + \frac{\lambda}{\beta\gamma} \widehat{m}'_U(\gamma) = \int_0^{\infty} x f(x) dx =: \mu_F. \end{aligned}$$

Wenn wir nun eine Variante des Schlüssel-Erneuerungssatzes anwenden, erhalten wir, dass (1.12) eine eindeutige Lösung besitzt, welche

$$\lim_{u \rightarrow \infty} g(u) = \frac{1}{\mu_F} \int_0^{\infty} z(u) du.$$

erfüllt.

Bemerkung: Für nähere Details siehe etwa im Buch von Rolski et al. [23] im Lemma 5.4.2 auf der Seite 172.

Damit können wir weiter rechnen und erhalten

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty z(u)du &= \int_0^\infty \frac{\lambda}{\beta} e^{\gamma u} \int_{x=u}^\infty \bar{F}_U(x) dx du \\
 &= \int_{x=0}^\infty \int_{u=0}^x \frac{\lambda}{\beta} e^{\gamma u} \bar{F}_U(x) du dx \\
 &= \int_{x=0}^\infty \frac{\lambda}{\beta} \bar{F}_U(x) \frac{e^{\gamma u}}{\gamma} \Big|_{u=0}^x dx \\
 &= \int_{x=0}^\infty \frac{\lambda}{\beta} \bar{F}_U(x) \frac{e^{\gamma x} - 1}{\gamma} dx \\
 &= \frac{1}{\gamma} \left[\underbrace{\int_{x=0}^\infty \frac{\lambda}{\beta} \frac{e^{\gamma x}}{\gamma} \bar{F}_U(x) dx}_{=1} - \frac{\lambda}{\beta} \underbrace{\int_0^\infty \bar{F}_U(x) dx}_{=\mu} \right] \\
 &= \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta} \mu \right) = \frac{\beta - \lambda \mu}{\beta \gamma}.
 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \frac{\frac{\beta - \lambda \mu}{\beta \gamma}}{\frac{\lambda}{\beta \gamma} \widehat{m}'_U(\gamma) - \frac{1}{\gamma}} = \frac{\beta - \lambda \mu}{\lambda \widehat{m}'_U(\gamma) - \beta}.$$

Das bringt uns die **Cramér-Lundberg Approximationsgleichung**

$$\psi(u) \approx \underbrace{\frac{\beta - \lambda \mu}{\lambda \widehat{m}'_U(\gamma) - \beta}}_{=: C} e^{-\gamma u}. \tag{1.17}$$

Definition: Eine positive Lösung von (1.15) bzw. (1.16) wird **Anpassungskoeffizient** R genannt.

Theorem: Falls ein Anpassungskoeffizient $R > 0$ existiert, so gilt

$$\psi(u) < e^{-Ru} \quad (1.18)$$

für $\forall u \geq 0$.

Den Beweis hierfür findet man etwa im Buch von Rolski et al. [23].

Bemerkung: Der Anpassungskoeffizient R ist die zentrale Größe der klassischen Ruintheorie. Seine große Bedeutung resultiert aus dem Zusammenhang mit der Ruinwahrscheinlichkeit. Zudem ist sie abhängig von der Gesamtschadenshöhe und der Höhe der Prämienraten.

Bemerkung: In der Literatur findet man den Zugang zur Definition des Anpassungskoeffizienten R , statt der Gleichung (1.15), auch über die eindeutig positive Lösung der folgenden Gleichung

$$\lambda - r\beta = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma z} dF(z), \quad (1.19)$$

falls diese existiert.

Bemerkung: Falls ein Anpassungskoeffizient $R > 0$ existiert, so gilt auch

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-R R_\tau} | \tau < \infty]} \quad \text{für } \forall u \geq 0. \quad (1.20)$$

Daraus folgt auch sofort (1.18). Für $\tau < \infty$ ist nämlich $R_\tau < 0$ und dadurch ist der Nenner immer größer als 1. Dadurch kann eine obere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit angegeben werden.

Falls für die Schadensverteilung F_U kein Anpassungskoeffizient $R > 0$ existiert (falls also $1 - F_U$ langsamer als exponentiell fällt), dann gilt folgende Approximation für x groß genug

$$\psi(x) \approx \frac{\rho}{1 - \rho} \left[1 - \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_U(z)) dz \right]. \quad (1.21)$$

Bemerkung: Für den Fall falls $\frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_U(z)) dz =: F_U^s$ eine subexponentielle Verteilung ist, siehe etwa im Buch Rolski et al. [23] im Theorem 5.4.3 auf der Seite 175.

Beispiel: Das folgende Beispiel orientiert sich nach dem Beispiel aus Rolski et al. [23], Seite 166.

Angenommen die Verteilung der Schadenshöhen U sei exponentialverteilt mit $\mathbb{E}(U) = \frac{1}{\delta} = \mu$. Dann gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(u) = c \cdot e^{-Ru},$$

wobei $c = \frac{\lambda}{\beta\delta}$ und $R = \delta - \frac{\lambda}{\beta}$.

Wir vergleichen nun dieses Resultat mit dem allgemeinen asymptotischen Ergebnis (1.17):

Die Momenterzeugende Funktion der exponentialverteilten Schäden ist durch

$$\widehat{m}_U(r) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{rx} e^{-\frac{x}{\mu}} dz = \frac{1}{1 - \mu r}$$

gegeben.

Mit der ersten Ableitung der Momenterzeugenden Funktion

$$\widehat{m}'_U(r) = \mu(1 - \mu r)^{-2}$$

und der Nettoprofitbedingung (1.5) mit $1 + \rho = \frac{\beta}{\lambda\mu} \Leftrightarrow \mu(1 + \rho) = \frac{\beta}{\lambda} \Leftrightarrow \rho\mu = \frac{\beta}{\lambda} - \mu = \frac{\beta}{\lambda} - \frac{1}{\delta}$ können wir zeigen, dass die allgemeine Theorie mit unserem Spezialfall übereinstimmt.

Für die erste Ableitung bekommen wir nach wenigen Umformungen

$$\begin{aligned} \widehat{m}'_U(R) &= \frac{\mu}{(1 - \mu R)^2} = \frac{\mu}{(1 - \mu(\delta - \frac{\lambda}{\beta}))^2} = \frac{\frac{1}{\delta}}{(1 - \frac{1}{\delta}(\delta - \frac{\lambda}{\beta}))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\delta}}{(1 - 1 + \frac{\lambda}{\beta\delta})^2} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\beta\delta}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 \delta. \end{aligned}$$

Für das asymptotische Ergebnis (1.17) bekommen wir mit der folgenden Rechnung die exakte Übereinstimmung

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \psi(u) &= \frac{\rho \mu}{\widehat{m}'_{\mathcal{U}}(R) - \mu(1 + \rho)} = \frac{\frac{\beta}{\lambda} - \frac{1}{\delta}}{\frac{\beta^2}{\lambda^2} \delta - \frac{\beta}{\lambda}} \\ &= \frac{\frac{\beta}{\lambda} - \frac{1}{\delta}}{\frac{\beta}{\lambda} \delta \left[\frac{\beta}{\lambda} - \frac{1}{\delta} \right]} = \frac{\lambda}{\beta \delta}.\end{aligned}$$

1.3 Der stückweise deterministische Markov-Prozess

Im Allgemeinen kann der stückweise deterministische Markov-Prozess (*engl.* „Piecewise-Deterministic Markov-Processes“ (PDMP)) als ein Prozess über einen endlich-dimensionalen Zustandsraum $E \subset \mathbb{R}^d$ mit endlich vielen Sprüngen in endlichen Zeitintervallen aufgefasst werden, wo das deterministische Verhalten zwischen den Sprüngen ausschließlich durch den Zeitpunkt und Zustand des Letztsprunges bestimmt wird. Siehe hierzu auch das Buch von Mark Davis [14].

Die Eigenschaften eines stückweise deterministischen Markov-Prozesses sind

- τ_n sind die Zeitpunkte der Sprünge,
- Y_n beschreibt die Höhe der Sprünge $Y_n = X_{\tau_n}$,
- Für $\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}$, $X_t = \phi_{\tau_n, t}(Y_n)$ wobei $\phi_{s, t}(x)$ jene deterministische Funktion ist welche die Entwicklung des Prozesses zwischen den Sprüngen darstellt,
- $\phi_{s, t} : E \rightarrow E$ erfüllt die deterministische Markov Eigenschaft $\phi_{s, u}(y) = \phi_{t, u}(\phi_{s, t}(y))$, $0 \leq s \leq t \leq u$, $y \in E$ und Grenzbedingung $\phi_{t, t}(y) = y$, $t \in \mathbb{R}_0$,
- für zeithomogene PDMP, $\phi_{s, t} = \phi_{t-s}$ ist abhängig von s und t nur durch die Differenz $t - s$ mit der Grenzbedingung $\phi_0(x) = x$.

Bemerkung: Der Cramér-Lundbergprozess ist ein PDMP mit $\phi_{s, t}(y) = y + \beta(t - s)$. Hierbei sind die Zwischenankunftszeiten $\tau_n - \tau_{n-1}$ iid und exponentialverteilt mit Parameter λ . $\tau_0 \equiv 0$ und $X_{\tau_n} = X_{\tau_{n-1}} - Y_n$, wobei $Y_n \stackrel{iid}{\sim} F_U$.

2 Vorstellung der Wachstumsmodelle

In diesem Kapitel wird das Modell in Anlehnung an die Arbeit von Kovacevic und Pflug [31] beschrieben. Hierbei werden die Notationen und die benötigten Berechnungen des Artikels erläutert, und detailliert ausgearbeitet.

2.1 Ein einfaches Wachstumsmodell

Zu allererst wird der private Haushalt betrachtet. Der Begriff des „Haushalts“ wird dabei weit gefasst. Hierbei handelt es sich um ein Wirtschaftssubjekt, auch eine ökonomische Einheit genannt, wie eine Familie, aber auch eine geschlossene Anzahl an Familien vergleichsweise einer Dorfgemeinschaft. Zu diesem kleinsten wirtschaftenden Grundelement (z.B. ein bestimmter Privathaushalt oder ein bestimmtes Unternehmen) der gesamtwirtschaftlichen Betrachtung zählen alle nichtöffentlichen Verbrauchswirtschaftseinheiten. Die Bezeichnungen Haushalt, Nachfrager, Verbraucher und Konsument werden zumeist synonym verwendet, vgl. mit [1].

Es wird angenommen, dass das Einkommen I_t des privaten Haushaltes zur Zeit t in Konsum C_t und Ersparnisse S_t geteilt wird:

$$I_t = C_t + S_t \text{ für } \forall t \geq 0. \quad (2.1)$$

Hierbei wird unter „Einkommen“ der Fluss von Löhnen, Gehältern, Zins- und Dividendenzahlungen sowie alle sonstigen Einnahmen, die als Zahlungsmittel oder Hilfsmittel beim Warenaustausch benutzt werden, verstanden, siehe [34].

Unter „Konsum“ werden die Gesamtausgaben des Haushaltes für diverse Güter gesehen. Die persönlichen „Ersparnisse“ sind dabei der Teil des verfügbaren Einkommens, welches nicht konsumiert wurde, vgl. [34].

Des weiteren wird die Konsumfunktion C_t als eine wachsende Funktion in Abhängigkeit vom Einkommen durch

$$C_t = \begin{cases} I_t & \text{für } I_t \leq I^* \\ a(I_t - I^*) + I^* & \text{für } I_t > I^* \end{cases} \quad (2.2)$$

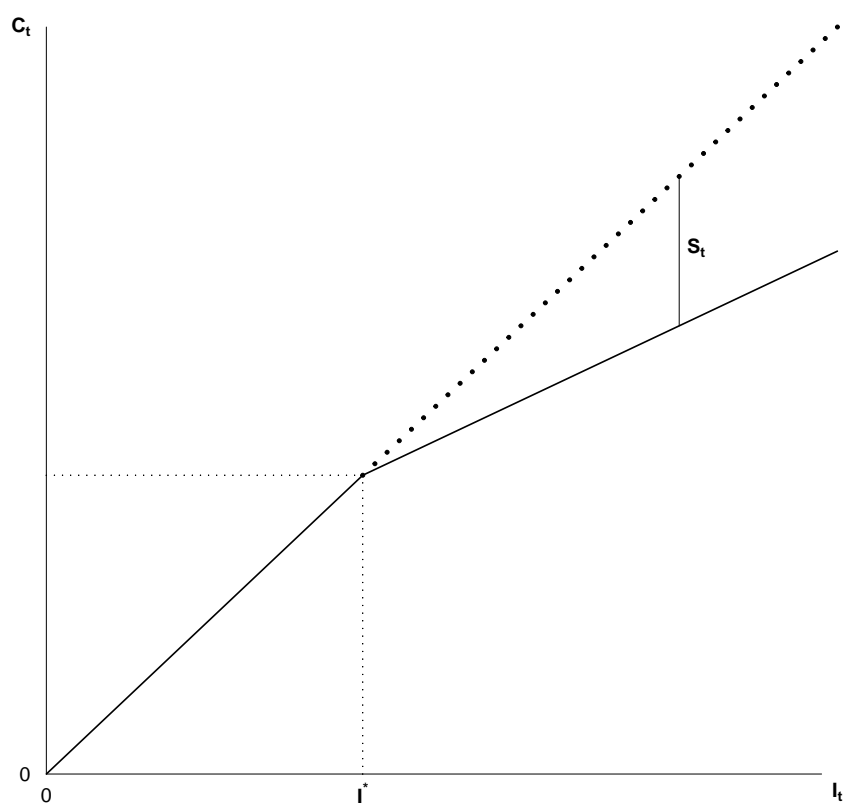
dargestellt.

Die Konstante a ist dabei aus dem offenen Intervall $(0, 1)$ gewählt. I^* wird als das „kritische Einkommen“ oder als die „Sparschwelle (Gleichgewichtspunkt)“ bezeichnet.

Bemerkung: Die von John M. Keynes eingeführte Definition der Konsumfunktion stellt einen der wichtigsten Begriffe der Volkswirtschaftslehre dar. Ein wesentlicher Kritik- und Schwachpunkt dieser Definition ist die Hypothese, dass es eine stabile empirische Beziehung zwischen Konsum und Einkommen gibt. Siehe auch im Buch von [34].

Die folgende Abbildung illustriert den Sachverhalt der deterministischen Gleichung (2.2):

Abbildung 2.1: Lineare Konsumfunktion als Funktion des Einkommens



Interpretation: Ist das Einkommen I_t kleiner als I^* , muss das Einkommen I_t zur Gänze konsumiert werden. Bei einem stetigen Einkommen von $I_t \leq I^*$ sind alle nötigen Fixausgaben höher und jegliche Ansparungen sind nicht möglich. Da ein dauerhaftes Einkommen unter I^* keine Ersparnisse zulässt, führt dies zu einer nachhaltigen Belastung der Gesundheit, was wiederum das Einkommen I_t belastet. Die Vertikale durch I^* schneidet die 45°-Linie und markiert deshalb jenes verfügbare Einkommen, das gerade zur Deckung der Konsumausgaben ausreicht. Bis zum Schnittpunkt ist es nicht möglich die Situation aus eigener Anstrengung entsprechend zu beeinflussen. Ist das Einkommen I_t jedoch größer als I^* , dann kann der Betrag von $(1 - a)(I_t - I^*)$ angespart werden. Da Sparen gleichzeitig Nicht-Konsum bedeutet, verhalten sich die Spar- und Konsumfunktion spiegelbildlich zueinander.

Bemerkung: $I_t = \underbrace{I^* + a(I_t - I^*)}_{=C_t} + \underbrace{(1 - a)(I_t - I^*)}_{=S_t}$ für $I_t > I^*$.

Bemerkung: Wir werden in dieser Arbeit für die Ersparnisse den Begriff des „Vermögens“ heranziehen. Damit soll nicht nur dem Geldbegriff alleine Geltung gegeben werden, sondern auch für jegliches Privateigentum und das Humankapital gleichermaßen. Dabei werden wir den Nettowertbesitz von Sach- und Finanzanlagen als angesammelte Einkommensteile, die in früheren Perioden nicht für Konsumzwecke verwendet wurden, auffassen. Hierbei sei noch darauf hingewiesen, dass der Vermögensstock Auswirkungen auf die Präferenzordnung und - über Vermögenserträge oder Vermögensauflösungen - auf das Einkommen des Haushaltes hat, vgl. mit [1].

2.2 Das exponentielle Wachstumsmodell

Der Wachstumsprozess vom kumulierten Vermögen X_t zur Zeit t kann mit

$$\frac{dX_t}{dt} = c \cdot S_t, \quad (2.3)$$

und $0 < c < 1$ beschrieben werden.

Der Zusammenhang zwischen Einkommen I_t und Vermögen X_t wird mit Hilfe des Parameters $b > 0$, durch

$$I_t = b \cdot X_t \quad \text{für } \forall t \geq 0 \quad (2.4)$$

definiert.

Mit den obigen Annahmen und Definitionen folgern wir nun

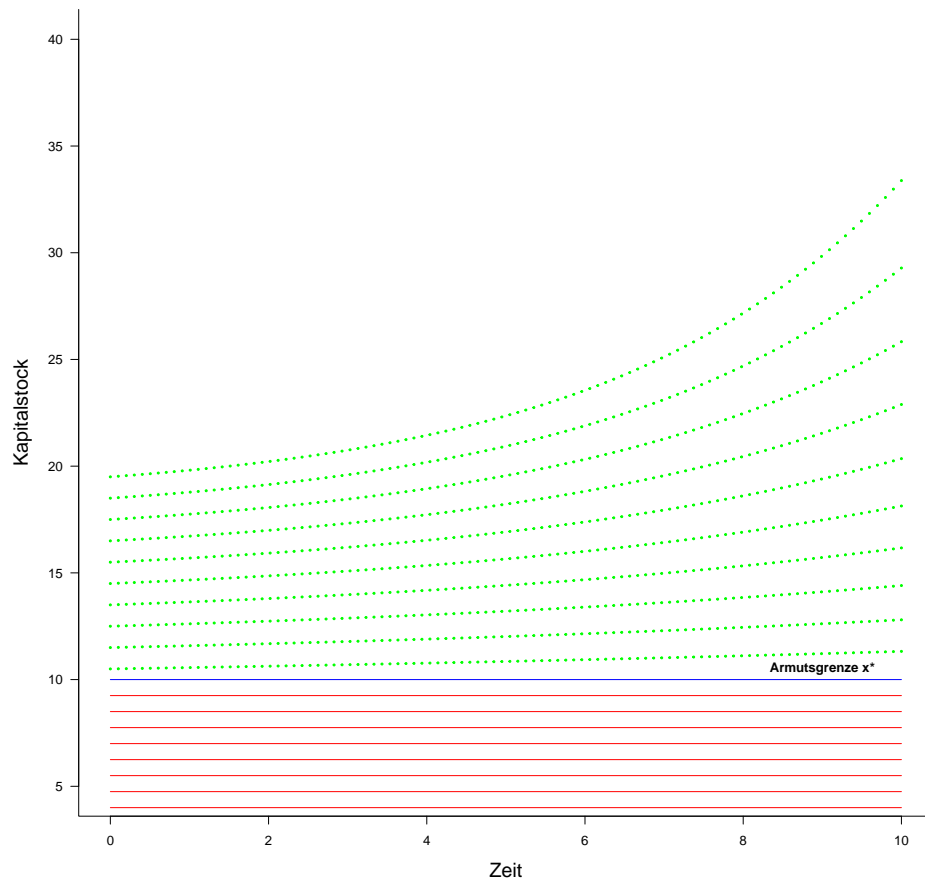
$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{dt} &= c \cdot S_t = c \cdot (I_t - C_t) \\ &= c \cdot I_t - c \cdot \begin{cases} I_t & \text{für } I_t \leq I^* \\ a(I_t - I^*) + I^* & \text{für } I_t > I^* \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } I_t \leq I^* \\ c(I_t - I^*) - a c(I_t - I^*) & \text{für } I_t > I^* \end{cases} \\ &= c \cdot [I_t - I^*]^+ - a c \cdot [I_t - I^*]^+ \\ &= c \cdot (1 - a)[I_t - I^*]^+ \\ &= (1 - a) \cdot c \cdot [bX_t - bx^*]^+ \\ &= \underbrace{(1 - a) \cdot c \cdot b}_{=: r} \cdot [X_t - x^*]^+ \\ &= r \cdot [X_t - x^*]^+, \end{aligned} \quad (2.5)$$

mit $[x]^+ = \max(x, 0)$.

Das „kritische Vermögen“ $x^* > 0$ wird auch als die „Armutsgrenze“ bezeichnet. Dabei wird $x^* = \frac{I^*}{b}$, als die Summe des Vermögens, das gebraucht wird, um eine lebenslängliche Rente mit dem kritischen Einkommen zu erhalten, interpretiert. In anderen Worten: x^* kann als die stetig abgezinste Annuität von periodischen Zahlungen (I^*) zu bestimmten Zeitpunkten des Intervalles interpretiert werden.

Ein Phasenportrait mit $x^* = 10$ der gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung (2.5) ist in der folgenden Abbildung illustriert:

Abbildung 2.2: Phasenportrait des exponentiellen Wachstumsmodells

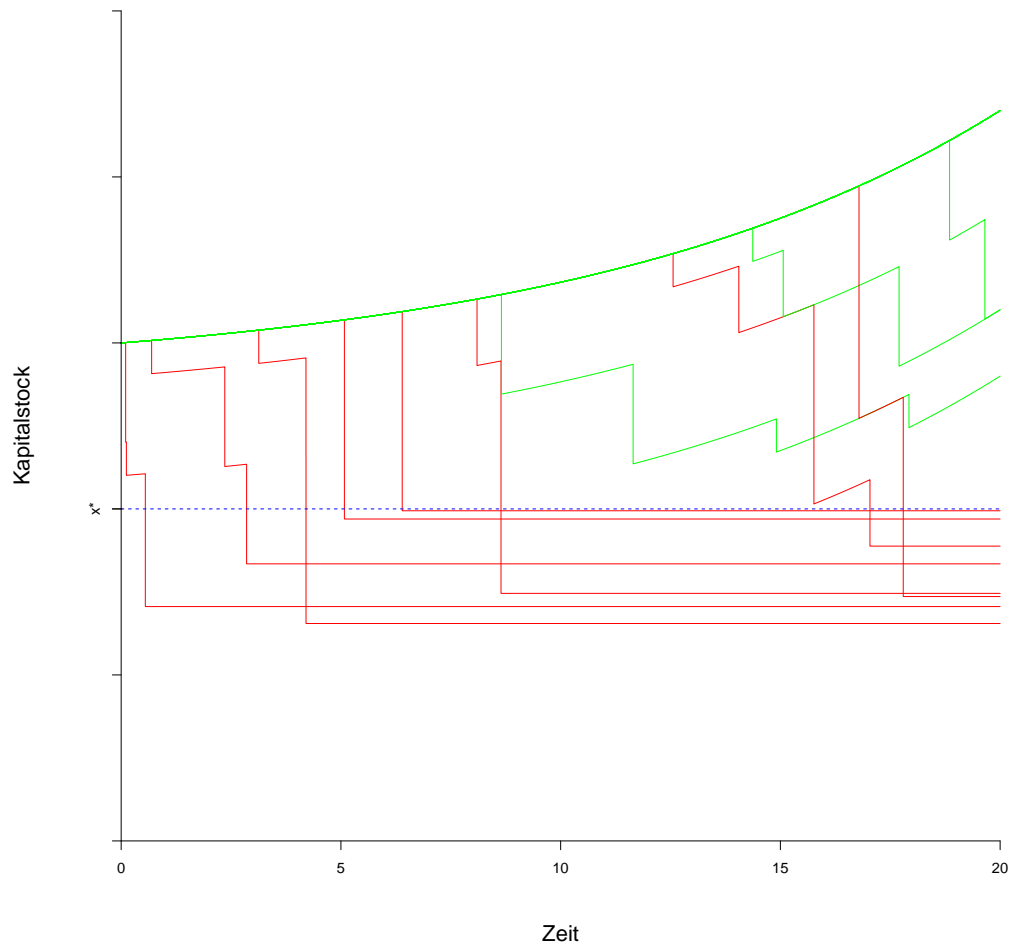


Beobachtung: Die Trajektorien des deterministischen Prozesses sind einfacher Natur. Wenn das Anfangsvermögen größer ist als das kritische Vermögen x^* , wächst das Vermögen exponentiell mit der Rate r . Unterhalb dieser kritischen Vermögensgrenze x^* , bleibt das Vermögen jedoch konstant. D.h., dass kein Vermögenszuwachs möglich ist. Das abgegrenzte Gebiet unterhalb der Grenze x^* wird deshalb auch als die „Armutsfalle“ bezeichnet. Umgekehrt ist es bei diesem Modell somit auch nicht möglich, mit einem Anfangsvermögen größer als das kritische Vermögen x^* , in die Armutsfalle hineingezogen zu werden.

Um die ausgewählte Modellidee mit einer konkludenten Schlussfolgerung zu erweitern, wird nun eine gewisse Eintrittsmöglichkeit von schwerwiegenden Katastrophenereignissen (Verlusterereignisse wie die von Erdbeben, Hurrikan, Überschwemmungen, Dürren, ...) in das deterministische Modell eingebaut. Zur Anpassung des Modells wird der Poisson-Prozess (N_t) mit Intensität λ herangezogen. Der Poisson-Prozess kommt bekanntlich nur dann zur Anwendung, wenn es um die Modellierung einer Eintrittshäufigkeit innerhalb eines vordefinierten Zeitintervalles geht.

Der Anteil des noch zur Verfügung stehenden Vermögens eines privaten Haushalts nach einem Katastrophenereignis zur Zeit τ_i des i -ten Sprunges von (N_t) soll mit der Variable Z_i , wobei $0 \leq Z_i \leq 1$ ist, eingeführt werden. Der tatsächliche Verlust für das i -te Ereignis ist demnach $(1 - Z_i)X_{\tau_i^-}$. Die Folge (Z_i) ist unabhängig vom Poisson-Prozess (N_t) . Die Variablen Z_i sind unabhängig und identisch verteilt mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion G . Zwischen den Ereigniszeiten gilt die gewöhnliche Differentialgleichung (2.5). Hierbei ist $X = (X_t)$ wieder ein PDMP. Einige Trajektorien des zufälligen Verlaufs des beschriebenen stochastischen Prozesses, sind in der folgenden Abbildung illustriert:

Abbildung 2.3: Einige Trajektorien des stochastischen Wachstumsmodells



Beobachtung: Die Trajektorien des stochastischen Prozesses sind im Vergleich zu den vorherigen Abbildungen filigraner. Zum Zeitpunkt des Ereignisses wird das Vermögen um den Faktor $1 - Z_i$ sprunghaft reduziert. Zwischen den Ereigniszeiten wächst das Vermögen exponentiell nach der Gleichung (2.5). Allerdings kann man in diesem Modell unter die Armutsgrenze x^* fallen, falls das Vermögen X_{T_i-} nicht ausreichend groß genug ist um das Verlustereignis $X_{T_i-}(1 - Z_i)$ aufzufangen. Ist die Armutsfalle einmal erreicht, dann bleibt man in dieser gefangen und kommt nicht mehr über das kritische Vermögen x^* hinaus. Eine besondere Bedeutung kommt dem Anfangsvermögen zu: Je höher der Ausgangskapitalstock ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, innerhalb einer gewissen Zeit unter die Armutsgrenze x^* zu fallen.

Im Abschnitt 2.3 wird der vorweg demonstrierte stochastische Wachstumsprozess von Neuem aufgegriffen und streng formalisiert. Ziel wird die Einführung einer klaren Definition der sog. „Eintrittswahrscheinlichkeit“, der Wahrscheinlichkeit in die Armutsfalle verwickelt zu werden, sein. Diese Eintrittswahrscheinlichkeit wird dann als die „Armutswahrscheinlichkeit“ deklariert.

Es bestehen viele Ähnlichkeiten zwischen dem Modell der Arbeit von Kovacevic und Pflug [31] und der klassischen Ruinthorie von Cramér-Lundberg. Die Parallelitäten dabei sind

- Die Zeitskala wird mit Hilfe des Poisson-Prozesses (N_t) dargestellt.
- Durch den Poisson-Prozess werden die Verlustereignisse erzeugt.
- In beiden Modellen kann der Vermögensstock unter eine bestimmte Grenze fallen. Weshalb auch oft von „Ruin“ gesprochen wird, wenn ein privater Haushalt unter die Armutsgrenze x^* fällt.

Es gibt aber auch zwei deutliche Unterschiede zwischen dem oben präsentierten Modell und der klassischen Ruin-Theorie:

- Der uneingeschränkte exponentielle Vermögenszuwachs zwischen den zufälligen Verlustereignissen gilt nur für Prozesse, die über der kritischen Vermögensgrenze x^* liegen.

- Im beschriebenen Modell sind die Verluste als proportionaler Anteil des bestehenden kumulierten Vermögens definiert. Somit sind die Verluste untereinander korreliert (abhängig) und auch abhängig vom Zeitpunkt des Verlustes.

Die aufgezählten zwei Unterschiede erschweren die mathematische Analyse deutlich. Trotzdem können die bisherigen Ergebnisse und Konzepte der Ruintheorie herangezogen werden um das Verhalten des obigen Modelles zu studieren.

2.3 Das stochastische Wachstumsmodell

In diesem Abschnitt wird das stochastische Modell von oben anschaulicher formalisiert. Um das weitere Studium zu vereinfachen, wird eine Normierung von Zeit und Raum vorgenommen. Wir setzen o.B.d.A. $x^* = 1$. Dadurch erreichen wir, dass die Geldmaßeinheit von 1 dem Eigenbedarfsniveau der Lebenserhaltungskosten entspricht. Die Maßeinheit für die Zeit wird mit der Festlegung von $\lambda = 1$ vorgenommen und zudem wird $\gamma := \frac{1}{r}$ definiert.

Von oben wissen wir bereits:

(i) Zwischen den Ereigniszeiten $\tau_{i-1} < t < \tau_i$ gilt die gewöhnliche Differentialgleichung (2.5)

$$\frac{dX_t}{dt} = r \cdot [X_t - x^*]^+.$$

(ii) Zu den Ereigniszeiten τ_i wird das Vermögen um den Faktor $1 - Z_i$ sprungartig reduziert, so dass $X_{\tau_i} = Z_i X_{\tau_i^-}$.

Bemerkung: Mit $r > 0$ und $[X_t - 1]^+ \geq 0 \Rightarrow \frac{dX_t}{dt} \geq 0 \Rightarrow$ Vermögen X_t ist wachsend und weil $X_0 = x > 1 \Rightarrow X_t > 1$. Damit kann man die Bedingung $[\cdot]^+$ weglassen, zumindest vor dem ersten Sprung.

Wir schreiben X' für $\frac{dX_t}{dt}$ und $X(t)$ für X_t um die Notation zu vereinfachen und erhalten durch einige Umformungen für $X(t) \geq 1$:

$$\begin{aligned} X'(t) = r \cdot [X(t) - 1] &\Leftrightarrow \frac{X'(t)}{X(t) - 1} = r \\ &\Leftrightarrow \log(X(t) - 1)' = r \\ &\Leftrightarrow \log(X(t) - 1) = rt + c \\ &\Leftrightarrow X(t) - 1 = e^{rt+c} \\ &\Leftrightarrow X(t) = 1 + e^{rt} e^c. \end{aligned}$$

Mit der Anfangswertbedingung $t = 0$ erhält man $X(0) = x = 1 + e^c$.
Daraus folgt $e^c = x - 1$ und damit gilt $X(t) = 1 + (x - 1)e^{rt}$, für $0 < t < \tau_1$.

Für die allgemeine Differentialgleichung zwischen $\tau_{i-1} \leq t < \tau_i$, ergibt sich im Einzelnen:

Für $i = 1$: $\tau_{i-1} = \tau_0 = 0$ und $X_{\tau_{i-1}} = X_0 = x$.

Für $X_{\tau_{i-1}}$: Können zwei Fallunterscheidungen durchgeführt werden:

1. Fall: Wenn $X_{\tau_{i-1}} > 1$, dann kann [...] ⁺ weggelassen werden und wir schreiben dafür $X'(t) = r \cdot [X(t) - 1]$.

$X(\tau_{i-1})$ ist gegeben und mit Hilfe der Lösung von oben $X(t) = 1 + e^{rt}e^c$ kann $X(\tau_{i-1}) = 1 + e^{r\tau_{i-1}}e^c$ festgehalten werden und wir folgern damit $\Rightarrow e^c = (X(\tau_{i-1}) - 1) e^{-r\tau_{i-1}}$.

Daraus ergibt sich letzten Endes

$$X(t) = 1 + e^{rt} \cdot (X_{\tau_{i-1}} - 1)e^{-r\tau_{i-1}} = 1 + (X_{\tau_{i-1}} - 1)e^{r(t-\tau_{i-1})}.$$

2. Fall: $X_{\tau_{i-1}} \leq 1 \Rightarrow X' = 0 \Rightarrow$ konstant.

Die entsprechenden Überlegungen der obigen Ausführung verdienen eine Definition.

Definition: Sei τ_i der Zeitpunkt des i 'ten Verlustereignisses des Poisson-Prozesses (N_t) mit $\lambda = 1$ und $\tau_0 = 0$. Die Folge (Z_i) mit $0 < Z_i \leq 1$ sei eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion G . Die Zufallsvariablen Z_i seien zudem unabhängig vom Prozess (N_t) . Dann ist der stochastische Wachstumsprozess X_t mit Anfangsvermögen $X_0 = x$ für $\tau_{i-1} \leq t < \tau_i$ gegeben durch

$$X_t = \begin{cases} (X_{\tau_{i-1}} - 1) \cdot e^{r(t-\tau_{i-1})} + 1 & \text{für } X_{\tau_{i-1}} > 1, \\ X_{\tau_{i-1}} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Zu den Verlustereigniszeitpunkten $t = \tau_i$ ist der stochastische Wachstumsprozess X_t durch

$$X_{\tau_i} = \begin{cases} Z_i \cdot [(X_{\tau_{i-1}} - 1) \cdot e^{r(\tau_i - \tau_{i-1})} + 1] & \text{für } X_{\tau_{i-1}} > 1, \\ Z_i \cdot X_{\tau_{i-1}} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.7)$$

gegeben.

Bemerkung: Unser stochastischer Wachstumsprozess erfüllt die gleichen Bedingungen wie die Eigenschaften des stückweise deterministischen Markov-Prozesses aus Abschnitt 1.3

- τ_n sind die Zeitpunkte der Sprünge bzw. der Verluste,
- Verluste sind von zufälliger Höhe mit der Verteilungsfunktion G ,
- in der Herabbildung von $\frac{dX_t}{dt}$ in der Gleichung (2.5) wird die Vermögensentwicklung zwischen den Sprüngen bzw. Verlustereignissen - die mit der Definition der stückweise deterministischen Markov-Prozesse übereinstimmen - beschrieben.

2.3.1 Bestimmung des Generators

Das zuerst 1973 von Gerber [19] vorgestellte wichtige Hilfsmittel der Martingalmethoden zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeiten von Risikoprozessen, wurde seitdem von zahlreichen Autoren aufgegriffen und angewendet. Von einer noch größeren Bedeutung ist dabei eine andere Methode zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit; nämlich das abstrakte Konzept des infinitesimalen Generators. Wir haben im letzten Abschnitt festgestellt, dass der Risikoprozess X_t ein Markov-Prozess ist. Die Übergangswahrscheinlichkeiten können demnach in manchen Risikomodellen direkt durch den infinitesimalen Generator ausgedrückt werden.

Die folgende Definition ist aus Rolski et al. [23], Seite 440, entnommen und bildet die Grundlage nachstehender Überlegungen.

Mit der Verwendung der Definition der Übergangshalbgruppe aus Rolski et al. [23] oder bzw. der Definition 1.7. der Diplomarbeit von Daniela Gius [20], können wir die Formel für den (infinitesimalen) Generator A eines Markov-Prozesses X_t in der Terminologie des Prozesses darstellen.

Betrachten wir eine Kontraktionshalbgruppe $\{T(h)\}$ und definieren

$$Ag = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T(h)g - g) \quad (2.8)$$

für alle Funktionen $g \in M_b(E)$ für die der Grenzwert in der Supremumsnorm existiert und zu $M_b(E)$ gehört. In unserem Fall ist $T(h)$ für Markovprozess X wie folgt definiert: $T(h)f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_h)]$ für $f \in M_b(E)$. Hierbei bezeichnet $M_b(E)$ die beschränkten und messbaren Funktionen von E nach \mathbb{R} .

Sei $\mathcal{D}(A) \subset M_b(E)$ die Menge aller Funktionen aus $M_b(E)$, die diese zwei Eigenschaften erfüllen. Dann heißt die Abbildung $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow M_b(E)$ gegeben durch (2.8), der **infinitesimalen Generator** von $\{T(h)\}$.

Hierbei heißt die Menge $\mathcal{D}(A)$ **Domain von A**.

Bemerkung: Wir wissen, dass X_t zur Klasse der stückweise deterministischen Markov-Prozesse gehört. Der entsprechende infinitesimale Generator

ist wie auf der Seite 1008 von Kovacevic und Pflug [31] angemerkt, mit

$$(\mathcal{A}f)(x) = r(x-1)f'(x) - \lambda f(x) + \lambda \int_0^1 f(xz)dG(z)$$

gegeben.

Wir können diesen Generator nach Theorem 11.1.3 der Seite 442 im Buch von Rolski et al. [23], bzw. mit Theorem 1.3. der Diplomarbeit von Daniela Gius [20], praktisch bestimmen.

Es ist möglich, die externen Zustände „reich“ und „arm“ zu betrachten. Da wir aber dem Artikel von Kovacevic und Pflug [31] folgen, arbeiten wir mit dem einfachen Zustandsraum $E = (0, \infty)$.

Das Verhalten zwischen den Sprüngen wird durch die Funktion

$$c(x) = r[x-1]^+ \text{ für } x \in (0, \infty)$$

beschrieben. Somit ist unser Differential-Operator

$$\mathcal{X}f(x) = r[x-1]^+ f'(x).$$

Der Sprungmechanismus wird wie folgt beschrieben:

Bei einem Sprung springt der Prozess von x nach xZ , wobei Z nach G verteilt ist. Die Sprungintensität ist bei uns konstant λ .

Mit der Zuordnungsvorschrift bei einem Sprung $x \mapsto xZ =: y$, können wir den Übergangskern $Q(x, dy)$ berechnen. Hierbei lebt $Q(x, dy)$ auf $[0, x]$.

Für die Verteilung gilt somit

$$\mathbb{P}[xZ \leq y] = \mathbb{P}\left[Z \leq \frac{y}{x}\right] = G\left(\frac{y}{x}\right),$$

und weiter

$$\int_0^\infty f(y)Q(x, dy) = \int_{y=0}^x f(y)G\left(\frac{dy}{x}\right).$$

Mit den Substitutionen $y = xz$ für $y = 0, \dots, x$, $dy = xdz$ für $z = 0, \dots, 1$ und $Z = \frac{y}{x}$ bekommen wir

$$\int_{y=0}^x f(y)G\left(\frac{dy}{x}\right) = \int_{z=0}^1 f(xz)G(dz).$$

Zuletzt beachten wir

$$\int_0^\infty f(x)Q(x, dy) = f(x) \underbrace{\int_0^\infty Q(x, dy)}_{=1} = f(x)$$

und erhalten

$$(\mathcal{A}f)(x) = r[x-1]^+ f'(x) - \lambda f(x) + \lambda \underbrace{\int_0^1 f(xz)G(dz)}_{< \infty}.$$

Zur Beschreibung des Generators gehört auch seine Domain $\mathcal{D}(A)$. In unserem Fall besteht die $\mathcal{D}(A)$ aus absolut stetigen Funktionen, für die $\int_0^1 f(xz)dG(z)$ endlich ist. Zur Bestimmung des Domains $\mathcal{D}(A)$ verweisen wir auf die Bedingungen von Theorem 11.2.2 im Buch von Rolski et al. [23], auf der Seite 449, bzw. auf das Theorem 1.5. der Diplomarbeit von Daniela Gius [20].

3 Kalkül der Armutswahrscheinlichkeit

Die weitere Untersuchung benötigt eine essenziell eindeutige und unmissverständlich klare Entscheidung des zugrundeliegenden Prozesses. Nur so wird die Einführung und Entwicklung eines brauchbaren und wirkungsvollen Konzeptes wie die Lösung der Armutswahrscheinlichkeit prägnant und fassbar vereinfacht.

3.1 Die Armutswahrscheinlichkeit

In der Sprache der Markov-Prozesse korrespondiert das Intervall $\Gamma = [0, 1]$ mit der sog. „absorbierenden Menge“. Damit ist die absorbierende Eigenschaft des Intervallbereiches gemeint, aus der es keine weitere Entkommensmöglichkeit gibt. Intuitiv spricht man deshalb auch vom „Armutsbereich des Intervalles $[0, 1]$ “, und meint damit die korrespondierende Armutsfalle.

Für $x > 1$ wird die Armutswahrscheinlichkeit vom Vermögensprozess X_t mit

$$Q(x) := \mathbb{P}(X_t \in \Gamma \text{ für mindestens ein } t > 0 \mid X_0 = x) \quad (3.1)$$

definiert.

Bemerkung: Bei $x \leq 1$ kann das Vermögen nach (2.6) und (2.7) nicht mehr wachsen. Weshalb also $Q(x) = 1$ für alle $0 \leq x \leq 1$ gilt, und die Forderung $x > 1$ begründet.

Die auf diese Weise neu eingeführte (infinite Zeit-) Armutswahrscheinlichkeit des Vermögensprozesses X_t , kann auch durch einfache Umformulierungen auf folgende Weise

$$Q(x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{t>0} \{X_t \in \Gamma\} \mid X_0 = x\right)$$

bzw. auch mit

$$Q(x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \geq 0} \{X_{\tau_i} \in \Gamma\} \mid X_0 = x\right)$$

geschrieben werden. Die letzte Gleichheit ergibt sich, weil Eintritt in Γ immer bei einem Sprung passiert. Weshalb es ausreichend ist, nur die Zeitpunkte τ_i zu betrachten.

Bemerkung: Es sei hier noch einmal betont, dass die Unterschreitung der Armutsgrenze x^* nicht einem Lebensende der ökonomischen Einheit gleich kommt. Die Armutsfalle ist eine Zustandsbezeichnung, in der die ökonomische Einheit überhaupt keine Möglichkeit zur Ersparnisbildung hat, weil alle Einnahmen konsumiert werden. Wie sich eine ökonomische Einheit aus der Armutsfalle befreit, ob mit Schulden oder einer anderen Rettung wie etwa durch mögliche Spendengelder, ist definitiv nicht Teil dieser Modellbildung. Der einzige Sinn und Zweck der Modellbildung ist die Quantifizierung des Risikos in die Armutsfalle zu schlittern. Auch wenn der Charakter der Aufgaben- bzw. Fragestellung vergleichbar mit der Situation der klassischen Ruintheorie für eine Versicherung ist, bezogen auf die Möglichkeit der externen Kapitalzuführung einer Versicherung im Ruinzustand, gehört die Fülle der Zuhilfenahmemöglichkeiten einer externen Kapitalbeimischung (innerhalb der Armutsfalle) nicht zum Bestandteil der Modellbildung dieser Masterarbeit.

Bemerkung: In dieser Arbeit fokussieren wir uns auf das individuelle Armutrisiko eines Haushaltes. Es ist aber möglich, die Armutswahrscheinlichkeit als eine Basismaßzahl für soziale Wohlfahrtsaktivitäten heranzuziehen. Die einfachste Konstruktion dieser Basismaßzahl ist die Berechnung des arithmetischen Mittelwertes der Ruinwahrscheinlichkeiten einer Grundgesamtheit, die über der Armutsgrenze x^* liegen. Gegeben eine Untersuchungsgrundgesamtheit von N ökonomischen Einheiten, in denen die i -te

Einheit das Vermögen x_i besitzt und die Ruinwahrscheinlichkeit $Q_i(\cdot)$, kann das arithmetische Mittel als Index für das Armutsrisiko wie folgt definiert werden

$$\psi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i(x_i). \quad (3.2)$$

In diesem Kontext bezeichnet $Q_i(x_i)$ die Armutswahrscheinlichkeit für die i -te Einheit mit dazugehörigem Ausgangsvermögen x_i .

Bemerkung: Der Index ψ ist ein verallgemeinertes Zählen von Armen und solche die arm werden.

Der Summenausdruck $\sum_{i=1}^N Q_i(x_i)$ gibt die Anzahl der Armen und die Wahrscheinlichkeit, arm zu werden, mit der gewichteten Anzahl von noch nicht Armen wieder.

Ang. $x_i \leq x^* \Rightarrow Q_i(x_i) = 1$ zu Beginn arm; zählt 1

Ang. $x_i > x^* \Rightarrow Q_i(x_i) < 1$ Wahrscheinlichkeit, dass i arm wird; zählt weniger als 1

Interpretation: Wenn $\psi = 1$, dann sind alle arm. Wenn $\psi = 0,9$, dann gibt es viele Arme oder viele werden arm. Wenn $\psi = 0,01$, dann sind wenige arm oder wenige werden arm sein.

Bemerkung: Christopher Barrett, Michael Cartner und Munenobu Ikegami zeigen im Artikel [5] den Zusammenhang zwischen der Linderung bzw. sogar der Vermeidung von Armut durch einem vorab eingerichteten Sicherheitsnetzes im Rahmen eines ertragreichen Sozialschutzes auf. Hier wird durch ein stochastisch-dynamisches Modell die individuelle Vermögenskumulierung in Abhängigkeit von „angeborenen“ immanenten Vermögensunterschieden, heterogenen Vermögensdotierungen sowie multiplen Produktionstechnologien und etwaigen Risiken berechnet. In der Ausarbeitung von Armando Barrientos und David Hulme [6] werden hingegen die bestimmenden zukünftigen Kursfaktoren des Sozialschutzes

untersucht und die weitere dringend benötigte Analyse betont.

Zwecks der Auswertung der Armutswahrscheinlichkeit $Q(x)$, ist es hinreichend, die eingebettete Markov-Kette

$$Y_n = X_{\tau_n} \quad (3.3)$$

zu betrachten. Dabei bezeichnet X_{τ_n} den ursprünglichen Vermögensprozess X_t zu den Ereigniszeiten $(\tau_n)_{n \geq 0}$. Um Y_n näher zu studieren, wird im nächsten Abschnitt die Übergangsdichte $p_G(y_1|y_0)$ eingeführt.

Infolge dessen kann eine wahrscheinlichkeitstheoretische Aussage, nach einem Verlustereignis bzw. mehreren Verlustereignissen bei vorausgehendem Vermögensniveau von y_0 auf das Vermögensniveau von y_1 zu fallen, geeignet ausgegeben werden.

3.2 Die Übergangsdichte

Theorem 1: Sei $y_0 \in (1, \infty)$ und $y_1 > 0$. Dann ist die Dichtefunktion $p_G(\cdot|\cdot)$ beim Übergang von $Y_n = y_0$ zu $Y_{n+1} = y_1$, durch

$$\begin{aligned} p_G(y_1|y_0) &= \int_0^1 f_Y(y_1, y_0; v) dG(v) \\ &= \gamma \cdot (y_0 - 1)^\gamma \cdot \int_0^{\min(\frac{y_1}{y_0}, 1)} (y_1 - v)^{-\gamma-1} \cdot v^\gamma dG(v) \end{aligned}$$

gegeben.

Bemerkung: Aufgrund der Homogenität in der Zeit, ist die Übergangsdichte $P(X_{\tau_{n+1}} = y_1 | X_{\tau_n} = y_0) = p_G(Y_{n+1} = y_1 | Y_n = y_0) = p_G(y_1|y_0)$ unabhängig von n .

Beweis. Sei die Wartezeit W bis zum ersten Verlustereignis exponential verteilt und o.B.d.A. sei $\lambda = 1$ und $x^* = 1$ gesetzt. Die dazugehörige Dichtefunktion ist demnach mit

$$f_W(\tau) = \exp(-\tau) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > 0\}}$$

gegeben.

Mit Hilfe der Gleichung (2.7) $X_{\tau_i} = Z_i \cdot [(X_{\tau_{i-1}} - 1)e^{r(\tau_i - \tau_{i-1})} + 1]$ für $X_{\tau_{i-1}} > 1$, wird die Notation der eingebetteten Markovkette adaptiert zu

$$Y_1 = v [(y_0 - 1) \cdot \exp(r \cdot \tau) + 1].$$

Wenn $Y_1 \leq y_1$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} v [(y_0 - 1) \cdot \exp(r \cdot \tau) + 1] &\leq y_1 \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{y_1}{v} - 1 &\geq (y_0 - 1) \cdot \exp(r \cdot \tau) \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{\frac{y_1 - v}{v}}{(y_0 - 1)} &\geq \exp(r \cdot \tau); \end{aligned}$$

und nach τ ausgedrückt

$$\tau \leq \frac{1}{r} \cdot \ln \left(\frac{y_1 - v}{v \cdot (y_0 - 1)} \right).$$

Damit gilt für die Verteilungsfunktion der Wartezeit W

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_W \left[\tau \leq \frac{1}{r} \cdot \ln \left(\frac{y_1 - v}{v \cdot (y_0 - 1)} \right) \right] &= 1 - \exp \left(-\frac{1}{r} \cdot \ln \left(\frac{y_1 - v}{v \cdot (y_0 - 1)} \right) \right) \\ &= 1 - \left(\frac{y_1 - v}{v \cdot (y_0 - 1)} \right)^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Durch Umformungen für $\tau > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \tau = \frac{1}{r} \cdot \ln \left(\frac{y_1 - v}{v \cdot (y_0 - 1)} \right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \ln (y_1 - v) - \ln (v \cdot (y_0 - 1)) &> 0 \\ \Leftrightarrow \ln (y_1 - v) &> \ln (v \cdot (y_0 - 1)) \\ \Leftrightarrow y_1 - v &> v \cdot y_0 - v \\ \Leftrightarrow \frac{y_1}{y_0} &> v. \end{aligned}$$

Für die erste Ableitung bekommen wir

$$d\tau = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{y_1 - v} dy_1 = \gamma (y_1 - v)^{-1} dy_1.$$

Mit diesen neu gewonnenen Ergebnissen erhalten wir die Dichtefunktion

$$f_Y(y_1, y_0; v) = \gamma \cdot (y_0 - 1)^\gamma \cdot (y_1 - v)^{-\gamma-1} \cdot v^\gamma \cdot \mathbb{1}_{\{v < \frac{y_1}{y_0}\}},$$

mit $y_0 \in (1, \infty)$, $y_1 > 0$ und $\gamma = \frac{1}{r}$.

Die Übergangsdichte p_G ist demnach gegeben durch

$$p_G(y_1|y_0) = \gamma \cdot (y_0 - 1)^\gamma \cdot \int_0^{\min(\frac{y_1}{y_0}, 1)} (y_1 - v)^{-\gamma-1} \cdot v^\gamma dG(v).$$

□

Bemerkung: Die Verteilungsfunktion P_G der Übergangsdichte kann für $0 \leq y_0 \leq 1$ mit $P_G(y_1|y_0) = G\left(\frac{\min(y_1, y_0)}{y_0}\right)$ ausgerechnet werden.

Beispiel 1: Angenommen die Wartezeit für das nächste Verlustereignis sei exponential verteilt mit $\lambda = 1$. Die dazugehörige Verlustgröße sei deterministisch durch den Faktor $1 - Z_i =: q$ gegeben. Damit ist der verbleibende Restvermögen $v := Z_i$ und die Übergangsdichte lautet demnach

$$p_G(y_1|y_0) = p_q(y_1|y_0) = \gamma \cdot (y_0 - 1)^\gamma \cdot (y_1 - (1 - q))^{-\gamma-1} \cdot (1 - q)^\gamma \cdot \mathbb{1}_{\{1 - q \leq \frac{y_1}{y_0}\}}.$$

Bemerkung: G ist die Verteilungsfunktion von Z . Da $1 - Z_i =: q \Leftrightarrow Z_i = 1 - q$. D. h. die Verteilungsfunktion G springt bei $1 - q$ und bei einem Sprung gilt $X_{\tau_n} = (1 - q)X_{\tau_n^-}$.

Abbildung 3.1: Dichtefunktion im deterministischen Fall mit $q = 0.1$

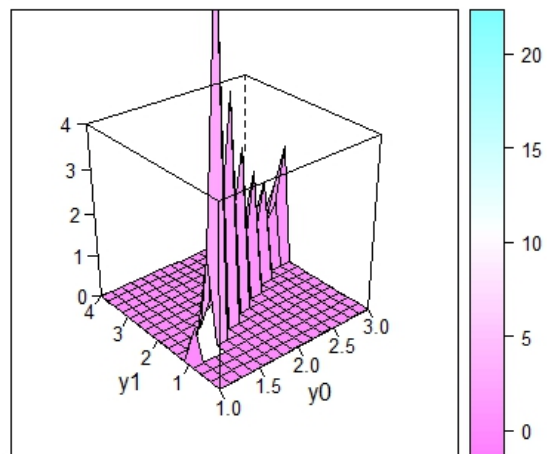
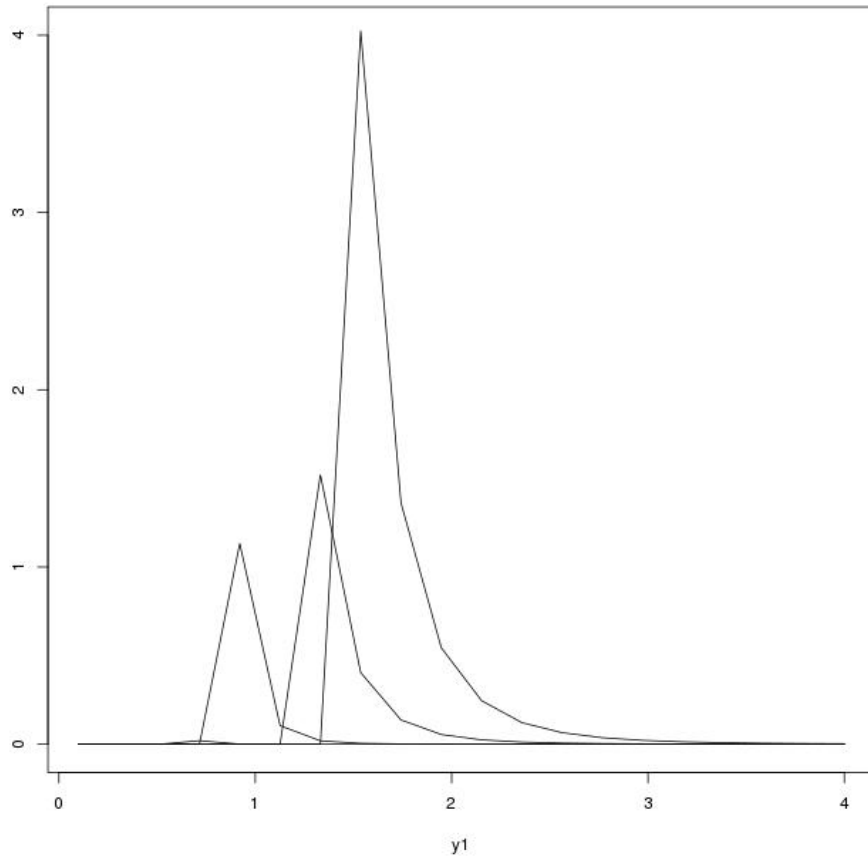


Abbildung 3.2: Querschnitt im deterministischen Fall mit $q = 0.5$



Beispiel 2: Sei G die Verteilungsfunktion einer beliebigen Potenzfunktion, welcher durch $G_{Power(\alpha)}(u) = u^{\alpha+1} \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq u \leq 1\}}$ gegeben sei. Die Übergangsdichte $p_{Power(\alpha)}$ ist demnach durch

$$p_{Power(\alpha)}(y_1|y_0) = \gamma \cdot \frac{(\alpha + 1)}{\alpha + \gamma + 1} \cdot (y_0 - 1)^\gamma \times \begin{cases} \frac{y_1^\alpha}{y_0^{\alpha+\gamma+1}} \cdot {}_2F_1(\gamma + 1, \alpha + \gamma + 1; \alpha + \gamma + 2; \frac{1}{y_0}) & \text{für } y_1 \leq y_0 \\ y_1^{-\gamma-1} \cdot {}_2F_1(\gamma + 1, \alpha + \gamma + 1; \alpha + \gamma + 2; \frac{1}{y_1}) & \text{für } y_1 \geq y_0 \end{cases}$$

gegeben.

Beweis. Durch die Anwendung der Definition der Übergangsdichte erhält man für die Potenzfunktion

$$p_{Power(\alpha)}(y_1|y_0) = \gamma \cdot (\alpha + 1) \cdot (y_0 - 1)^\gamma \cdot \int_0^{\min(y_1/y_0, 1)} (y_1 - v)^{-\gamma-1} v^{\gamma+\alpha} dv.$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch die Termdarstellung der hypergeometrischen Funktion

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$$

vereinfachen.

Als Startpunkt kann die Euler'sche Formel von Hazewinkel [24] herangezogen werden

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} \cdot (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt,$$

wobei per Definition $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ und für die Betafunktion mit $m, n > 0$ $B(m, n) := \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ gilt.

Jetzt wird für die obige Gleichungsdarstellung die Substitution $s = t \cdot u$ genutzt um

$$\begin{aligned} \int_0^u s^{b-1} \cdot (u-s)^{c-b-1} \cdot (u-s \cdot z)^{-\alpha} &= u^{c-a-1} \int_0^1 t^{b-1} \cdot (1-t)^{c-b-1} (1-t \cdot z)^{-\alpha} dt \\ &= B(b, c-b) \cdot u^{c-a-1} \cdot {}_2F_1(a, b; c; z), \end{aligned}$$

zu erhalten.

Für den Spezialfall $c = b + 1$ gilt

$$\int_0^u t^{b-1} \cdot (u-t \cdot z)^{-a} dt = \frac{1}{b} \cdot u^{b-a} \cdot {}_2F_1(a, b; b+1; z);$$

und mit der Zusatzsubstitution von $z = u \cdot r$ erhält man

$$\int_0^u t^{b-1} \cdot (1-t \cdot r)^{-a} dt = \frac{1}{b} \cdot u^b \cdot {}_2F_1(a, b; b+1; u \cdot r).$$

Damit lässt sich der ursprüngliche Integralausdruck schreiben als

$$\begin{aligned} \int_0^z (y_1 - v)^{-\gamma-1} v^{\gamma+\alpha} dv &= y^{-\gamma-1} \int_0^z \left(1 - v \cdot \frac{1}{y_1}\right)^{-\gamma-1} v^{\gamma+\alpha} dv \\ &= \frac{1}{\alpha + \gamma + 1} \cdot z^{\alpha+\gamma+1} \cdot y_1^{-\gamma-1} {}_2F_1\left(\gamma+1, \alpha + \gamma + 1; \alpha + \gamma + 2; \frac{z}{y_1}\right). \end{aligned}$$

Mit der Integralgrenze von $z = \min(y_1/y_0, 1)$ erhält man die Übergangsdichte der Potenzfunktion $p_{Power(\alpha)}(y_1|y_0)$. \square

Abbildung 3.3: Potenz-Dichtefunktion mit $\alpha = 7$ und $\gamma = 5$

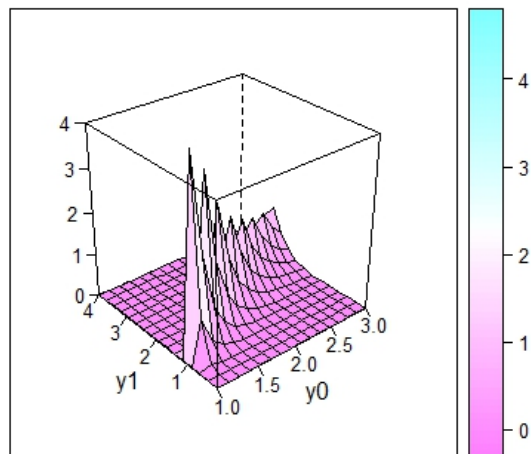


Abbildung 3.4: Querschnitt der Potenz-Dichtefunktion

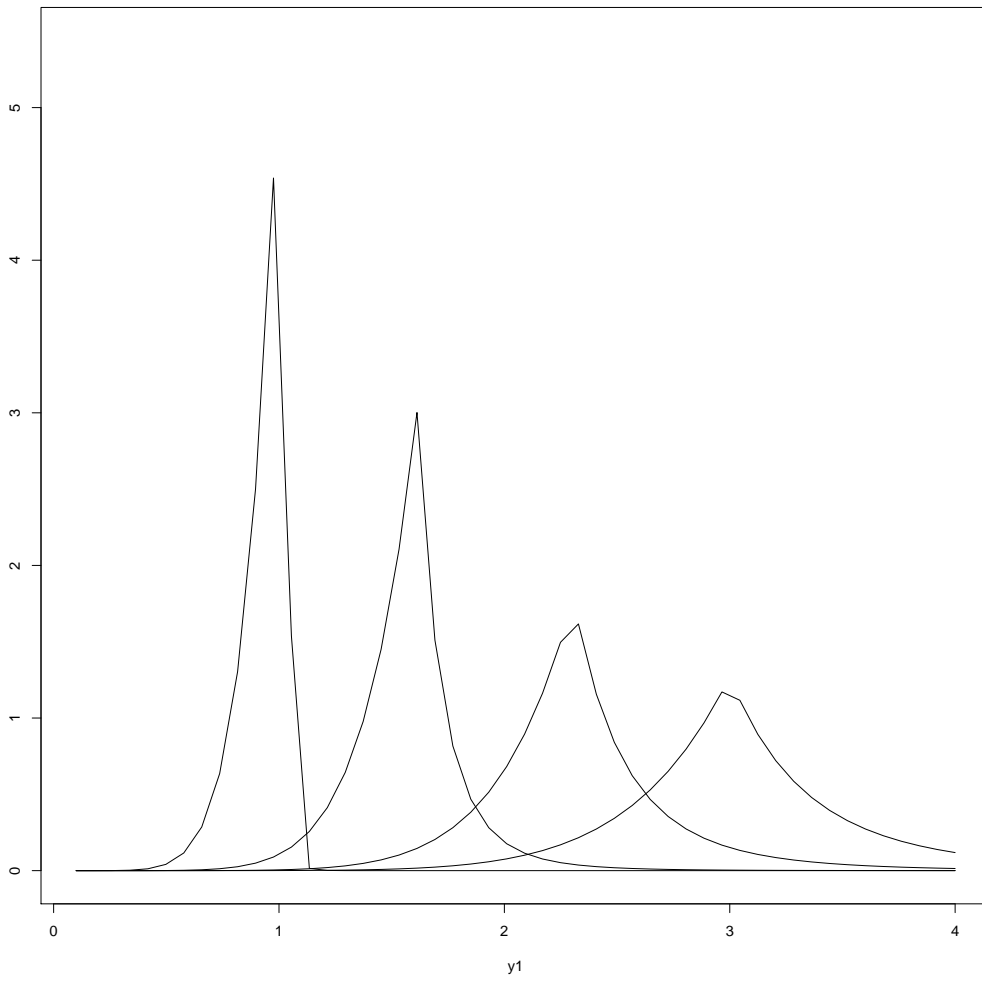
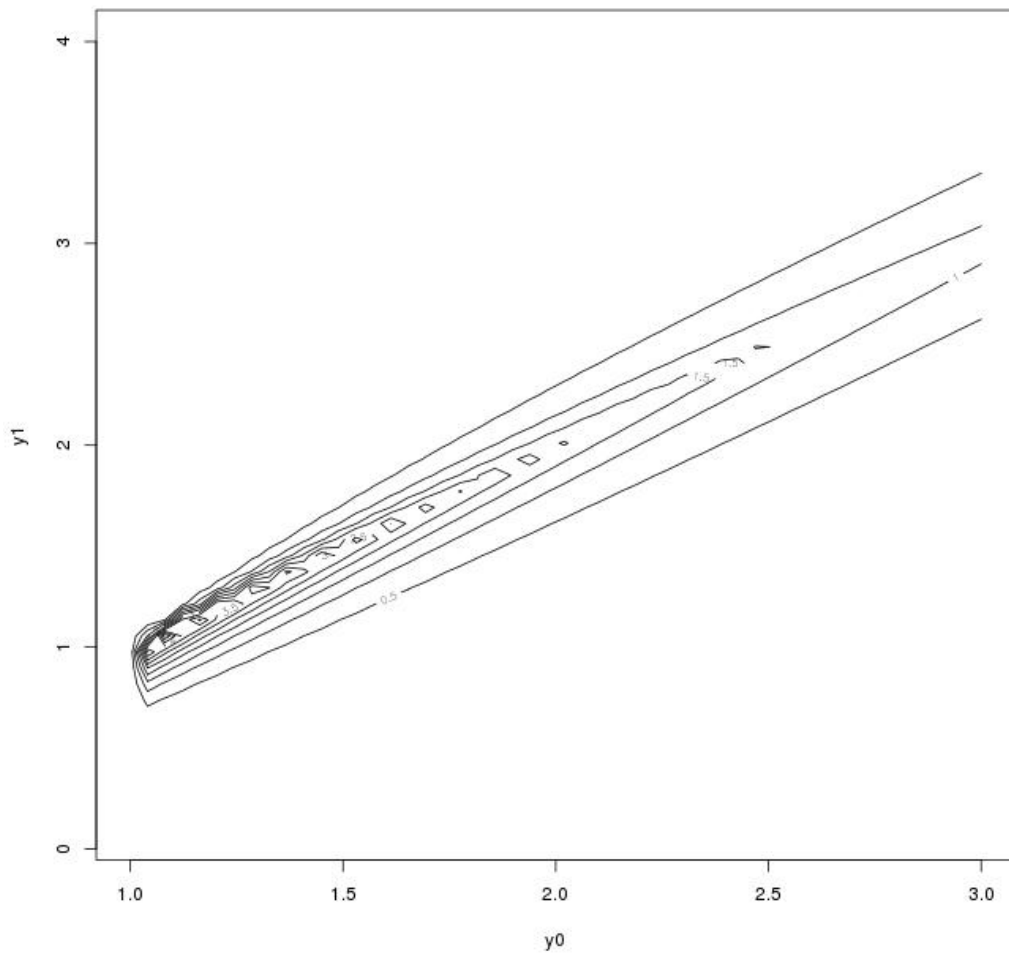


Abbildung 3.5: Konturplot der Potenz-Dichtefunktion



Beispiel 3: Sei G die Verteilungsfunktion einer Beta-Verteilung $B(\alpha, \beta)$.
Damit ist die Übergangsdichte durch

$$p_{Beta(\alpha, \beta)}(y_1|y_0) = \frac{\gamma}{B(\alpha, \beta)} \cdot (y_0 - 1)^\gamma \cdot \int_0^{\min(\frac{y_1}{y_0}, 1)} (y_1 - v)^{-\gamma-1} \cdot v^{\gamma+\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} dv$$

gegeben.

Bemerkung: Hierbei kann das Integral durch folgende Termdarstellung der Appellhypergeometrischen Funktion dargestellt werden

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F_1(a; b_1, b_2; c; x, y) = \int_0^1 t^{a-1} \cdot (1-t)^{c-a-1} (1-tx)^{-b_1} (1-ty)^{-b_2} dt.$$

Bemerkung: Die Auswertung des Integralausdruckes ist mit einer anderen Darstellungsweise in Wirklichkeit viel einfacher.

Theorem 2: Sei $Z \sim B(\alpha, \beta)$. Dann kann die Übergangsdichte mit Hilfe der Appellfunktion F_1 und der Gaußfunktion ${}_2F_1$ durch

$$p_G(y_1|y_0) = \frac{\gamma}{B(\alpha, \beta)} \cdot (y_0 - 1)^\gamma \times \begin{cases} \frac{y_1^{\alpha-1} y_0^{-\gamma-\alpha}}{\alpha+\gamma} \cdot F_1(\gamma+\alpha; \gamma+1, 1-\beta; \gamma+\alpha+1; \frac{1}{y_0}, \frac{y_1}{y_0}) & \text{für } y_1 \leq y_0 \\ y_1^{-\gamma-1} \cdot B(\gamma+\alpha, \beta) {}_2F_1(\gamma+1, \alpha+\gamma; \alpha+\beta+\gamma; \frac{1}{y_1}) & \text{für } y_1 \geq y_0 \end{cases}$$

ausgewertet werden.

Bemerkung: Für $\beta \in \mathbb{N}$ sind einfachere Ausdrücke möglich.

Beweis. Angenommen $y_1 < y_0$; dann folgt daraus $\min(\frac{y_1}{y_0}, 1) = \frac{y_1}{y_0}$. Wir setzen $u := \frac{y_1}{y_0}$ und wollen damit den Integralausdruck

$$\int_{v=0}^u (y_1 - v)^{-\gamma-1} \cdot v^{\gamma+\alpha-1} \cdot (1-v)^{\beta-1} dv,$$

auswerten.

Durch folgende Eingriffe transformieren wir die Integralgrenzen zu $[0, 1]$:
 $v = u \cdot s \Rightarrow dv = u \cdot ds$ und $s = \frac{v}{u}, v = 0, \dots, u \Rightarrow s = 0, \dots, 1$.

Im ersten Schritt erhalten wir somit

$$\begin{aligned} & \int_{v=0}^u (y_1 - v)^{-\gamma-1} \cdot v^{\gamma+\alpha-1} \cdot (1 - v)^{\beta-1} dv = \\ &= \int_{s=0}^1 (y_1 - us)^{-\gamma-1} \cdot (us)^{\gamma+\alpha-1} \cdot (1 - us)^{\beta-1} \cdot u \cdot ds \\ &= \int_{s=0}^1 y_1^{-\gamma-1} \cdot \left(1 - \frac{u}{y_1}s\right)^{-\gamma-1} \cdot u^{\gamma+\alpha-1} \cdot s^{\gamma+\alpha-1} \cdot (1 - us)^{\beta-1} \cdot u \cdot ds \\ &= y_1^{-\gamma-1} \cdot u^{\gamma+\alpha} \int_{s=0}^1 \left(1 - \frac{u}{y_1}s\right)^{-\gamma-1} \cdot s^{\gamma+\alpha-1} \cdot (1 - us)^{\beta-1} \cdot ds. \end{aligned}$$

Mit den folgenden Zuweisungsvorschriften

$$\begin{aligned} a & \mapsto \gamma + \alpha \\ c & \mapsto \gamma + \alpha + 1 \\ b_1 & \mapsto \gamma + 1 \\ b_2 & \mapsto -\beta + 1 \\ x & \mapsto \frac{u}{y_1} = \frac{1}{y_0} \\ y & \mapsto u = \frac{y_1}{y_0} \end{aligned}$$

verändern wir unsere Sichtweise und erhalten weiter

$$\begin{aligned}
&= y_1^{-\gamma-1} \cdot u^{\gamma+\alpha} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \cdot F_1(a, b_1, b_2; c; x, y) \\
&= y_1^{-\gamma-1} \cdot \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\gamma+\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\Gamma(\gamma+\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)}}_{=\frac{1}{\gamma+\alpha}} \cdot F_1(\gamma+\alpha, \gamma+1, 1-\beta; \gamma+\alpha+1; \frac{1}{y_0}, \frac{y_1}{y_0}) \\
&= \frac{y_1^{\alpha-1} y_0^{-\gamma-\alpha}}{\gamma+\alpha} \cdot F_1(\gamma+\alpha, \gamma+1, 1-\beta; \gamma+\alpha+1; \frac{1}{y_0}, \frac{y_1}{y_0}).
\end{aligned}$$

Dadurch haben wir für $y_1 \leq y_0$

$$p_{\text{Beta}(\alpha, \beta)}(y_1|y_0) = \frac{\gamma \cdot (y_0 - 1)^\gamma}{B(\alpha, \beta)} \cdot \frac{y_1^{\alpha-1} y_0^{-\gamma-\alpha}}{\gamma+\alpha} \cdot F_1(\gamma+\alpha, \gamma+1, 1-\beta; \gamma+\alpha+1; \frac{1}{y_0}, \frac{y_1}{y_0}),$$

gezeigt.

Sei jetzt $y_1 \geq y_0$; daraus folgt $\min(\frac{y_1}{y_0}, 1) = 1$, und

$$\int_{v=0}^1 (y_1 - v)^{-\gamma-1} \cdot v^{\gamma+\alpha-1} \cdot (1-v)^{\beta-1} dv = y_1^{-\gamma-1} \int_{v=0}^1 \frac{v^{\gamma+\alpha-1}}{(1-\frac{v}{y_1})^{\gamma+1}} \cdot (1-v)^{\beta-1} dv.$$

Durch folgende Zuordnungsvorschriften

$$\begin{aligned}
b &\mapsto \gamma + \alpha \\
c &\mapsto \gamma + \alpha + \beta \\
z &\mapsto \frac{1}{y_1} \\
a &\mapsto \gamma + 1
\end{aligned}$$

erhalten wir $c - b - 1 = \beta - 1 \Rightarrow c = \beta - 1 + \gamma + \alpha - 1$.

Damit gilt

$$B(b, c - b) {}_2F_1\left(a, b, c; \frac{1}{y_1}\right) = B(\gamma + \alpha, \beta) {}_2F_1\left(\gamma + 1, \gamma + \alpha, \beta + \gamma + \alpha; \frac{1}{y_1}\right).$$

Dadurch haben wir für $y_1 \geq y_0$

$$p(y_1|y_0) = \frac{\gamma \cdot (y_0 - 1)^\gamma}{B(\alpha, \beta)} \cdot B(\gamma + \alpha, \beta) \cdot {}_2F_1\left(\gamma + 1, \gamma + \alpha, \beta + \gamma + \alpha; \frac{1}{y_1}\right)$$

gezeigt. □

Die Übergangsdichte mit den Parametern $\gamma = 5$, $\alpha = 5$ und $\beta = 2$ ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

Abbildung 3.6: Beta-Dichtefunktion mit $\alpha = 5$, $\beta = 2$ und $\gamma = 5$

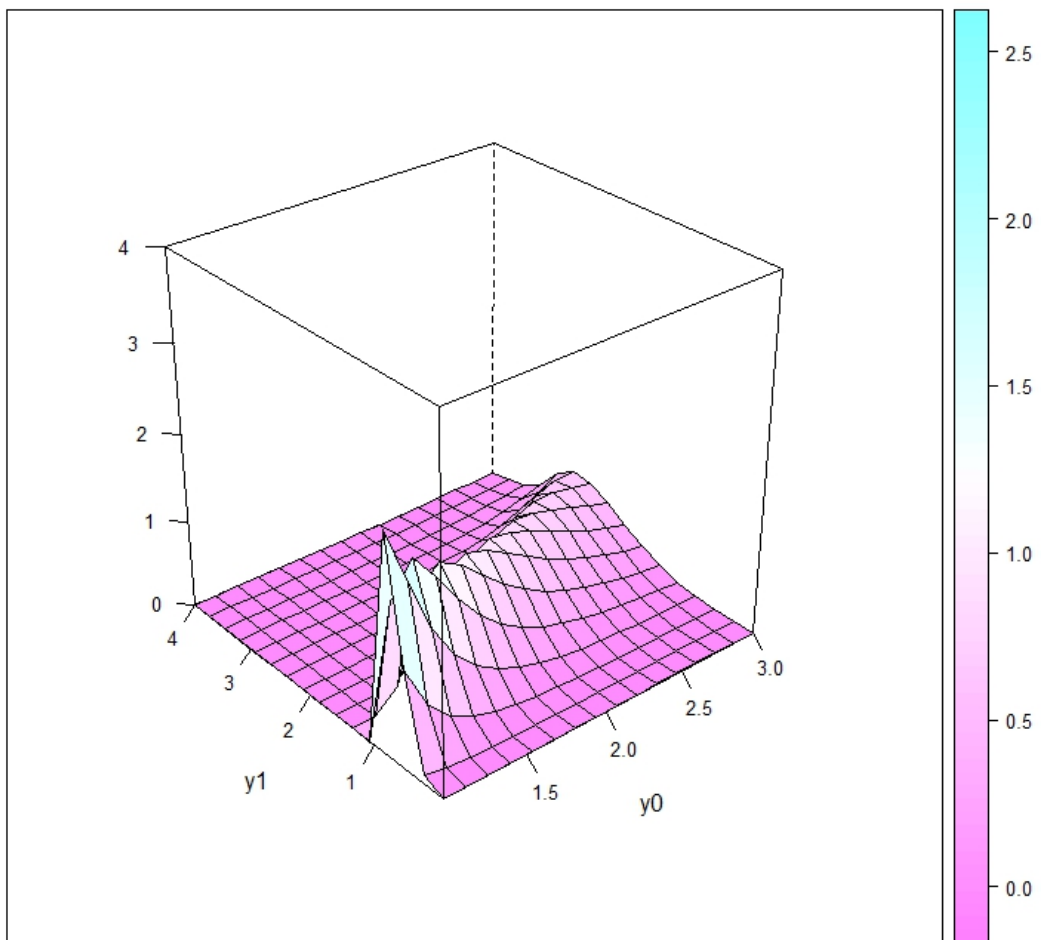


Abbildung 3.7: Konturplot der Beta-Dichtefunktion

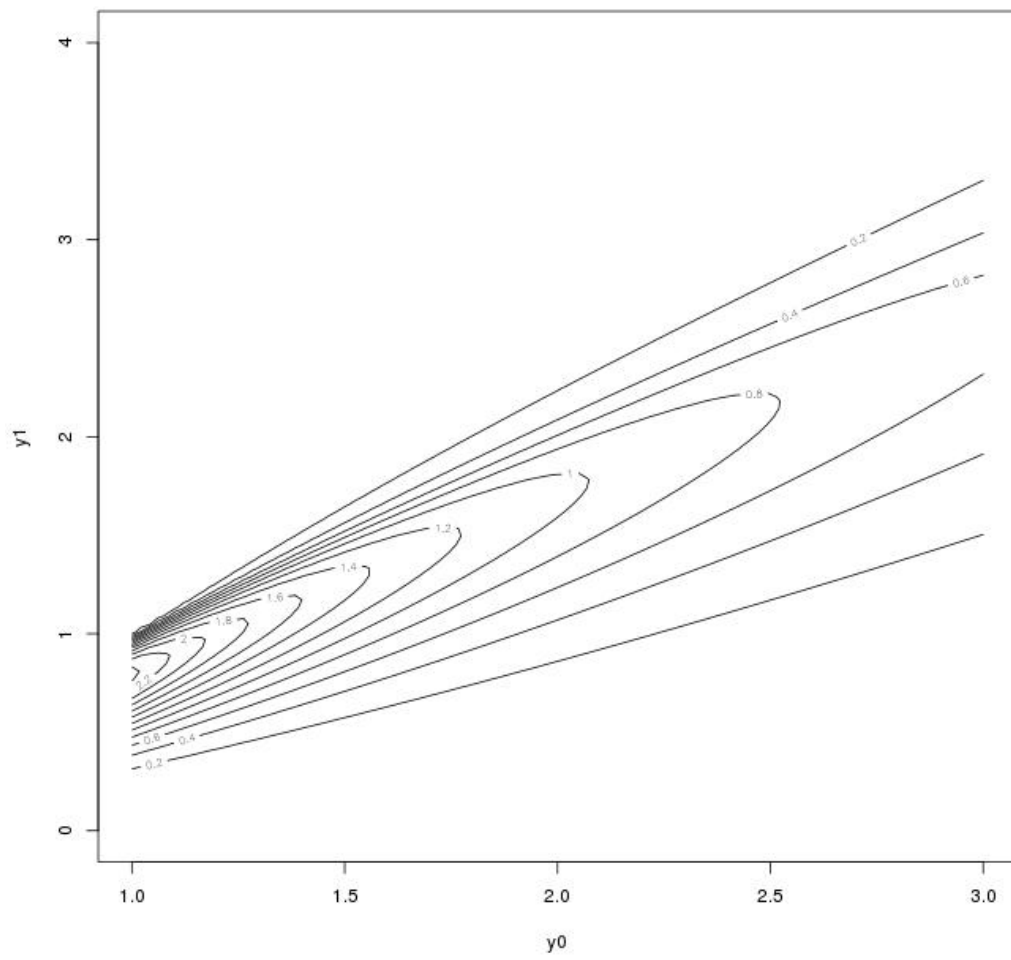


Abbildung 3.8: Querschnitt der Beta-Dichtefunktion

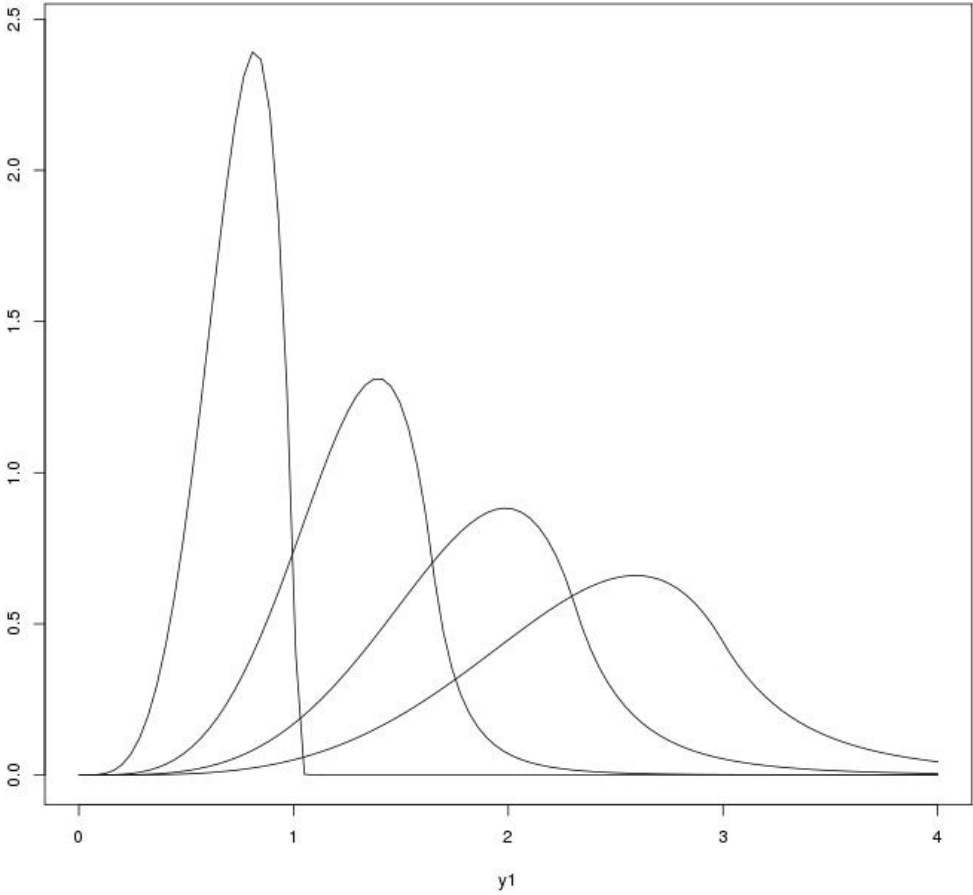
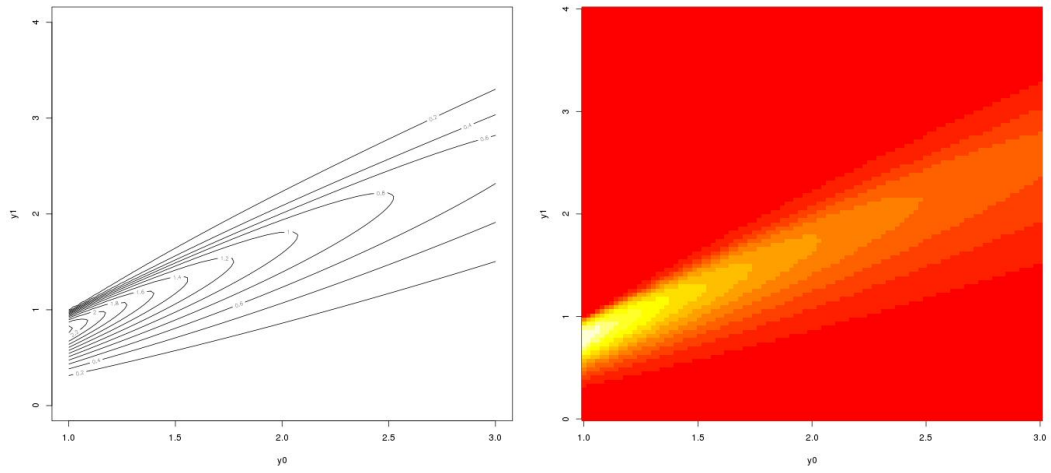


Abbildung 3.9: Konturplot der Dichtefunktion der Betafunktion



3.3 Die Integralgleichung

Mit der Einführung der eingebetteten Markovkette Y_n und der Bedingung, dass der Ruin mit Sicherheit nur dann eintritt, wenn der Vermögensprozess X_t einen Wert unterhalb des Eigenbedarfsniveaus von $x^* = 1$ unterschreitet, wird rückgeschlossen, dass die Armutswahrscheinlichkeit für einen Anfangswert $x > 1$ die Lösung folgender Integralgleichung ist:

$$Q(x) = \int_0^1 p_G(y|x)dy + \int_1^\infty Q(y)p_G(y|x)dy. \quad (3.4)$$

Die Aussagekraft dieser Integralgleichung kann mit folgenden Überlegungen verifiziert werden: Der Vermögensprozess entwickelt sich vom Ausgangsvermögen x nach dem ersten Verlustereignis zum Vermögen y nach der Übergangsdichte $p_G(y|x)$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit schon beim ersten Verlustereignis in die Armutsfalle hineingezogen zu werden mit $\int_0^1 p_G(y|x)dy$ gegeben. Wenn der Vermögensprozess nicht beim ersten Verlustereignis in der Armutsfalle verwickelt wird, dann beginnt der Prozess mit einem Ausgangsniveau von y auf Grund der Markov-Eigenschaft von Neuem. Die Wahrscheinlichkeit in einem der darauffolgenden Verlustereignisse in die Armutsfalle hineingezogen zu werden ist mit $\int_1^\infty Q(y)p_G(y|x)dy$ ausgedrückt. Die dazugehörige Armutswahrscheinlichkeit mit Ausgangsniveau y ist mit $Q(y)$ reflektiert. Die aufsummierten Wahrscheinlichkeiten zum und bzw. nach dem ersten Verlustereignis in die Armutsfalle zu schlittern, ist somit mit der Integralgleichung (3.4) gegeben.

Offensichtlich ist $Q(x) \equiv 1$ immer eine Lösung der Integralgleichung (3.4). Im Kapitel „Interpretation als Cramér-Lundberg-Modell“ wird gezeigt, dass unter ganz geringen Annahmeveraussetzungen eine Lösung existiert. Hierbei muss die Armutswahrscheinlichkeit der Bedingung vom Grenzwertverhalten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0, \quad (3.5)$$

genügen. Die weitere Bedingung für eine Lösung der Integralgleichung ist das Grenzwertverhalten

$$\lim_{x \searrow 1} Q(x) = 1. \quad (3.6)$$

Im Allgemeinen ist die Lösung der Integralgleichung nicht eindeutig und es wird nach der kleinstmöglichen Funktion $Q(\cdot)$ gesucht, in der die richtige Lösung den zwei Bedingungen (3.5) und (3.6) genügt.

3.3.1 Die Armutswahrscheinlichkeit für ein deterministisches Verlustereignis

Im Falle nur eines einzigen Ereignisses (äquivalent zum Erst- und Letztereignis), beschreibt die Funktion der Armutswahrscheinlichkeit den Übergang vom Vermögen y_0 zu y_1 , durch

$$Q(y_0) = \int_0^1 p_G(y_1|y_0) dy_1$$

unter die Armutsgrenze von $x^* = 1$ zu fallen.

Bemerkung: D.h. bei diesem Subproblem gibt es nur einen einzigen Sprung.

Hierbei ist die Übergangsdichte für den deterministischen Fall mit

$$p_q(y_1|y_0) = \gamma \cdot (y_0 - 1)^\gamma \cdot (y_1 - (1 - q))^{-\gamma-1} \cdot (1 - q)^\gamma \cdot \mathbb{1}_{\{1-q \leq \frac{y_1}{y_0}\}}$$

gegeben. Die Armutswahrscheinlichkeit für $y_0 \in (1, \infty)$ kann dann wie folgt

ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
Q_q(y_0) &= \int_0^1 \gamma(y_0 - 1)^\gamma (y_1 - (1 - q))^{-\gamma-1} (1 - q)^\gamma \mathbb{1}_{\{\frac{y_1}{y_0} \geq 1 - q\}} dy_1 \\
&= \gamma(y_0 - 1)^\gamma (1 - q)^\gamma \int_0^1 (y_1 - (1 - q))^{-\gamma-1} \mathbb{1}_{\{\frac{y_1}{y_0} \geq 1 - q\}} dy_1 \\
&= \gamma(y_0 - 1)^\gamma (1 - q)^\gamma \int_0^1 (y_1 - (1 - q))^{-\gamma-1} \mathbb{1}_{\{y_1 \geq y_0(1 - q)\}} dy_1 \\
&= \gamma(y_0 - 1)^\gamma (1 - q)^\gamma \int_{y_0(1 - q)}^1 (y_1 - (1 - q))^{-\gamma-1} dy_1 \\
&= \gamma(y_0 - 1)^\gamma (1 - q)^\gamma \left(-\frac{1}{\gamma} \right) \left[q^{-\gamma} - (y_0(1 - q) - (1 - q))^{-\gamma} \right] \\
&= (-1) \cdot \frac{(1 - q)^\gamma (y_0 - 1)^\gamma - q^\gamma}{q^\gamma} \\
&= 1 - \left(\frac{1 - q}{q} (y_0 - 1) \right)^\gamma.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Klarerweise ist für $(1 - q)y_0 > 1$, $Q_q(y_0) = 0$.

Im folgenden Abschnitt werden wir unsere Betrachtung für den deterministischen Fall verallgemeinern.

3.3.2 Die Armutswahrscheinlichkeit für diskret verteilte Verlustereignisse

Beispiel 4: Wenn wir die Integralgleichung (3.4) für allgemein diskret verteilte Ereignisse $dG = d\delta_q$ betrachten, erhalten wir die Gleichung

$$Q(x) = 1 - \left(\frac{q}{1-q} (x-1) \right)^{\frac{\lambda}{r}} + \frac{\lambda}{r} \int_{\max(1, qx)}^{\infty} (q(x-1))^{\frac{\lambda}{r}} Q(y) (y-q)^{-\left(\frac{\lambda}{r}+1\right)} dy.$$

Achtung: Hier entspricht q dem $1 - q$!

Bemerkung: Hier ist $\lambda \neq 1$. Unser λ ist nicht notwendigerweise immer gleich 1.

Die Lösungsdarstellung hat folgende Gestalt:

Sei nämlich $Q_i(x) := Q(x) \cdot \mathbb{1}_{\{q^{-i} \leq x \leq q^{-i-1}\}}$ für $i \in \mathbb{N}$, und

$$C_i := \sum_{j=i}^{\infty} \int_{q^{-j}}^{q^{-j-1}} Q_j(y) \cdot (y-q)^{-\left(\frac{\lambda}{r}+1\right)} dy \text{ für } i \in \mathbb{N}.$$

Für $1 < x \leq \frac{1}{q}$ ist des weiteren folgendes erfüllt:

$$Q_0(x) = 1 - \left(\frac{q}{1-q} \right)^{\frac{\lambda}{r}} \cdot (x-1)^{\frac{\lambda}{r}}.$$

Für $i \geq 1$ und $q^{-i} < x \leq q^{-i-1}$ gilt die folgende Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} Q_i(x) &= 1 - \left(\frac{q}{1-q} (x-1) \right)^{\frac{\lambda}{r}} + \frac{\lambda}{r} \cdot (q(x-1))^{\frac{\lambda}{r}} \cdot C_i \\ &\quad + \frac{\lambda}{r} (q(x-1))^{\frac{\lambda}{r}} \int_{qx}^{q^{-i}} Q_{i-1}(y) (y-q)^{\frac{\lambda}{r}} dy. \end{aligned}$$

Beweis. Die **bedingte Übergangswahrscheinlichkeit** für unsere Ausgangsgleichung $Y_1 = Z_1 [(X_0 - 1) e^{rT_1} + 1]$ für $X_0 > 1$ heißt:

$$\begin{aligned}
F_Y(y_1, x, v) &= \mathbb{P}[Y_1 \leq y_1 | X_0 = x, Z_1 = v] \\
&= \mathbb{P}[v ((x - 1) e^{rT_1} + 1) \leq y_1] \\
&= \mathbb{P}[(x - 1) e^{rT_1} \leq \frac{y_1}{v} - 1] \\
&= \mathbb{P}[e^{rT_1} \leq \frac{y_1 - v}{v(x - 1)}] \\
&= \mathbb{P}[T_1 \leq \frac{1}{r} \ln(\frac{y_1 - v}{v(x - 1)})] \\
&= \left[1 - e^{-\frac{\lambda}{r} \cdot \ln(\frac{y_1 - v}{v(x - 1)})} \right] \cdot \mathbb{1}_{\{\frac{y_1}{x} \geq v\}} \\
&= \left[1 - (y_1 - v)^{-\frac{\lambda}{r}} v^{\frac{\lambda}{r}} (x - 1)^{\frac{\lambda}{r}} \right] \cdot \mathbb{1}_{\{\frac{y_1}{x} \geq v\}}.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Hierbei wird in der obigen Darstellung die Nebenrechnung

$$\frac{y_1 - v}{v(x - 1)} \geq 1 \Leftrightarrow y_1 - v \geq vx - v \Leftrightarrow \frac{y_1}{x} \geq v$$

benutzt.

Damit erhalten wir unsere **bedingte Übergangsdichte** mit $x > 1$ und $y_1 > 0$

$$\begin{aligned}
f_Y(y_1, x, v) &= \frac{\partial}{\partial y_1} \mathbb{P}[Y_1 \leq y_1 | X_0 = x, Z_1 = v] \\
&= \frac{\lambda}{r} (x - 1)^{\frac{\lambda}{r}} (y_1 - v)^{-\frac{\lambda}{r} - 1} v^{\frac{\lambda}{r}} \mathbb{1}_{\{y_1 > vx\}}.
\end{aligned}$$

Speziell für $\lambda = 1$ lautet unsere bedingte Übergangsdichte für $x > 1$ und $y_1 > 0$ mit $dG(v) = d\delta(v)$ und $v = q$

$$p_G(y_1 | x) = \gamma (x - 1)^\gamma (y_1 - q)^{-\gamma - 1} q^\gamma \mathbb{1}_{\{y_1 \geq qx\}}.$$

Für die **bedingte Übergangswahrscheinlichkeit** bekommen wir im Allgemeinen demnach

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 \leq y | X_1 = x) &= P_G(y|x) = \int_0^1 F_Y(y, x, v) dG(v) \\ &= \int_0^{\min(\frac{y}{x}, 1)} [1 - (y-v)^{-\frac{\lambda}{r}} v^{\frac{\lambda}{r}} (x-1)^{\frac{\lambda}{r}}] dG(v).\end{aligned}$$

Und für die **bedingte Übergangsdichte** bekommen wir im Allgemeinen somit

$$p_G(y|x) = \int_0^1 f_Y(y, x, v) dG(v) = \frac{\lambda}{r} (x-1)^{\frac{\lambda}{r}} \int_0^{\min(\frac{y}{x}, 1)} (y-v)^{-\frac{\lambda}{r}-1} v^{\frac{\lambda}{r}} dG(v).$$

Speziell für den deterministischen Fall $G(v) = \delta_q$ erhalten wir für die Verteilungsfunktion der Übergangswahrscheinlichkeit

$$P_G(y|x) = [1 - (y-q)^{-\frac{\lambda}{r}} q^{\frac{\lambda}{r}} (x-1)^{\frac{\lambda}{r}}] \mathbb{1}_{\{y > qx\}} \text{ für } x > 1 \text{ und } y > 0.$$

Speziell mit $\gamma = \lambda/r$ gilt für $y = 1$ und $x > 1$

$$\begin{aligned}P_G(1|x) &= [1 - (1-q)^{-\gamma} q^\gamma (x-1)^\gamma] \mathbb{1}_{\{x < \frac{1}{q}\}} \\ &= [1 - (\frac{q}{1-q})^\gamma (x-1)^\gamma] \mathbb{1}_{\{x < \frac{1}{q}\}}.\end{aligned}$$

Und mit $\lambda = 1$ gilt

$$P_G(y|x) = [1 - (y-q)^{-\gamma} q^\gamma (x-1)^\gamma] \mathbb{1}_{\{y > qx\}}.$$

Nach dieser Vorarbeit können wir uns nun die Armutswahrscheinlichkeit $Q(x)$ herleiten:

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= \underbrace{\int_0^1 p_G(y|x) dy}_{= P_G(1|x)} + \int_1^\infty Q(y) \underbrace{p_G(y|x)}_{= \text{von oben}} dy, \text{ für } x > 1 \\
 &= \underbrace{\left[1 - \left(\frac{q}{1-q} \right)^{\lambda/r} (x-1)^{\lambda/r} \right]}_{= A(x)} \cdot \mathbb{1}_{\{x < 1/q\}} + \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\lambda}{r} (x-1)^{\lambda/r} q^{\lambda/r}}_{B(x)} \int_{\max(1, qx)}^\infty Q(y) \underbrace{(y-q)^{-\lambda/r-1}}_{H(y)} dy, \text{ für } x > 1.
 \end{aligned}$$

Wir schreiben vereinfachend für die Armutswahrscheinlichkeit

$$Q(x) = A(x) + B(x) \int_{\max(1, qx)}^\infty Q(y) H(y) dy.$$

Mit der Annahme von $0 < qx < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{q} \Leftrightarrow \max\{1, qx\} = 1$, folgt

$$Q(x) = A(x) + B(x) \cdot \underbrace{\int_1^\infty Q(y) H(y) dy}_{\text{ist unbekannt, unabhängig von } x \text{ und konstant}}$$

Bemerkung: $\int_1^\infty Q(y) H(y) dy = \sum_{j \geq 0} \int_{q^{-j}}^{q^{-j-1}} Q_j(y) H(y) dy =: C_0.$

Damit kennen wir nun $Q(x) = Q_0(x) = A(x) + B(x) \cdot C_0$ für $x \in [1, \frac{1}{q}]$.

Mit der Annahme von $\frac{1}{q} < x < \frac{1}{q^2} \Leftrightarrow 1 < qx < \frac{1}{q} \Leftrightarrow \max\{1, qx\} = qx$,
 folgern wir

$$Q(x) = Q_1(x) = A(x) + B(x) \cdot \left[\int_{qx}^{1/q} Q_0(y) H(y) dy + \underbrace{\int_{1/q}^{\infty} Q(y) H(y) dy}_{\text{ist unbekannt, unabhängig von } x \text{ und konstant}} \right]$$

Bemerkung: $\int_{1/q}^{\infty} Q(y) H(y) dy =: C_1$.

Mit Hilfe der Induktion über i , bekommen wir $Q_i(x)$ für $i \geq 0$.

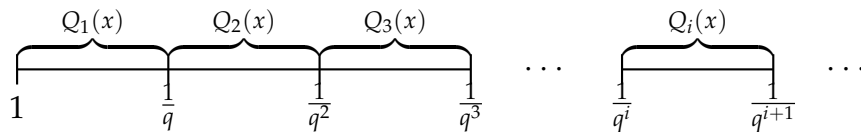


Abbildung 3.10: Aufspaltung des Definitionsbereiches der Armutswahrscheinlichkeit

Für $q^{-i} \leq x \leq q^{-i-1} \Leftrightarrow q^{-i+1} \leq qx \leq q^{-i}$ gilt für die Armutswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
Q_i(x) &= A(x) + B(x) \int_{qx}^{\infty} Q(y) H(y) dy \\
&= A(x) + B(x) \left[\int_{qx}^{q^{-i}} Q_{i-1}(y) H(y) dy + \underbrace{\int_{q^{-i}}^{\infty} Q(y) H(y) dy}_{\sum_{j=i}^{\infty} \int_{q^{-j}}^{q^{-j-1}} Q_j(y) H(y) dy =: C_i} \right].
\end{aligned}$$

Hierbei wird für $i \geq 0$ die Konstante

$$C_i := \sum_{j=i}^{\infty} \int_{q^{-j}}^{q^{-j-1}} Q_j(y) \cdot (y - q)^{-\left(\frac{\lambda}{r} + 1\right)} dy,$$

definiert.

Damit können wir die Armutswahrscheinlichkeit für $i \geq 0$ für alle Teilintervalle $q^{-i} \leq x \leq q^{-i-1}$ allgemein mit

$$\begin{aligned}
Q_i(x) &= 1 - \left(\frac{q}{1-q} (x-1) \right)^{\frac{\lambda}{r}} \mathbb{1}_{\{0 < x \leq \frac{1}{q}\}} + \frac{\lambda}{r} \cdot \left(q (x-1) \right)^{\frac{\lambda}{r}} \cdot C_i \\
&\quad + \frac{\lambda}{r} \left(q (x-1) \right)^{\frac{\lambda}{r}} \int_{qx}^{q^{-i}} Q_{i-1}(y) (y - q)^{\frac{\lambda}{r}} dy
\end{aligned}$$

darstellen.

Bzw. gilt: $Q_i(x) = Q(x) \mathbb{1}_{\{q^{-i} < x \leq q^{-i-1}\}}$ für $i \geq 0$.

□

3.4 Interpretation als Cramér-Lundberg-Modell

Da analytische Lösungen der Integralgleichung selbst für einfache Fälle unbekannt sind, existieren zwei Ansätze um mit der Situation umzugehen:

- Analyse vom Grenzverhalten großer Vermögenswerte
- Auffindung einer numerischen Lösung

Zuerst wollen wir uns mit der ersten Fragestellung auseinandersetzen. Obwohl uns die tatsächliche Vermögenshöhe der sog. Reichen nicht vorrangig interessiert, bleibt die Analyse der Asymptotik der Armutswahrscheinlichkeit $Q(x)$ für $x \rightarrow \infty$ essenziell wichtig. Es führt uns nämlich zur Berechnung des Cramér-Lundberg-Koeffizienten, welcher die Basiskennzahl der Risikotheorie ist. Wenn ein solcher Koeffizient für den stochastischen Vermögensprozess tatsächlich existiert, dann klingt die Armutswahrscheinlichkeit $Q(x)$ wie eine Potenz ab;

$$Q(x) \approx c \cdot e^{-w \log x} = c \cdot x^{-w} \text{ für großes } x, c \text{ und } w \text{ konstant.}$$

Die Konstante w ist dabei der Cramér-Lundberg-Koeffizient. **Unter welchen Bedingungen ist es erfüllt?** Das exponentielle Abklingen ist nur dann gegeben, wenn die exponentiellen Momente existieren. D.h. in unserem Fall muss

$$M_{[-\log Z_n]}(r) < \infty \quad \text{zumindest für ein } r > 0,$$

gelten.

Bemerkung: Die exponentiellen Momente sind bei der Pareto-Verteilung nicht gegeben. Zum Beispiel gilt es nicht wenn der $\log Z_n$ einer Pareto-Verteilung folgt.

Jetzt wird gezeigt: Ausgehend vom obigen Resultat folgt, dass die Grenzwerteigenschaft $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0$ gegeben ist und dadurch eine nicht-triviale Armutswahrscheinlichkeit für die Integralgleichung zu suchen ist.

Diese Aufgabenstellung wird nun mit Hilfe einer anderen Markovkette untersucht. Hierzu wird

$$Y_n^{(1)} = Y_{n-1}^{(1)} \cdot e^{r \cdot T_n} \cdot Z_n \tag{3.7}$$

mit Zwischenankunftszeiten $T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ gesetzt.

Beobachtung: $Y_n^{(1)}$ ist eng verwandt mit der eingebetteten Markovkette (Y_n) mit $x^* = 0$ statt $x^* = 1$.

Dieser Prozess kann für einen Grenzfall interpretiert werden, wenn das kritische Vermögen x^* vernachlässigbar zum Startvermögen ist.

Mit $V_n := \log Y_n^{(1)}$ bekommen wir den neuen Prozess

$$V_n = V_{n-1} + r \cdot T_n + \log Z_n. \quad (3.8)$$

Bemerkung: $\log Z_n \leq 0$ stimmt wegen der Annahme $0 < Z_n \leq 1$.

Bemerkung: Der Prozess V_n stimmt mit der Darstellung des klassischen Ruinprozesses überein. Hierbei ist $U_n = \log Z_n$ und $\beta = r$. Interessanterweise ist das genau jener Punkt, der es ermöglicht eine Obergrenze für die Armutswahrscheinlichkeit vom Prozess $Y_n^{(1)}$ bzw. darausfolgernd für den ursprünglichen Prozess X_t zu geben.

Sei

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \mathbb{P}[Y_n^{(1)} \leq 1 \text{ für ein } n | Y_0^{(1)} = x] \\ &= \mathbb{P}[V_n \leq 0 \text{ für ein } n | V_0 = \log x]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Mit der Voraussetzung, dass der Grenzwert existiert und ebenso (3.9) gilt, muss der Cramér-Lundberg-Koeffizient wie folgt definiert werden

$$w = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\log Q_1(x)}{\log x}. \quad (3.10)$$

Bemerkung: Beachte im Original Cramér-Lundberg-Modell ist w definiert als

$$w = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\log Q_1(x)}{x} \quad (3.11)$$

wegen (3.9). Hier in unserem Modell benötigen wir aber unbedingt das logarithmierte x , wegen

$$\mathbb{E}(e^{-(\log Z_1) \cdot \alpha}) < \infty \quad (3.12)$$

für ein $\alpha > 0$. Der positive Drift entspricht dabei der Nettoprofitbedingung.

Durch die Ergebnisse der klassischen Theorie des Cramér-Lundberg-Modells wissen wir, dass der Cramér-Lundberg Koeffizient w vom Prozess (3.8) die positive Lösung in u der Gleichung

$$\mathbb{E}[\exp(-u \cdot (rT_1 + \log Z_1))] = 1 \quad (3.13)$$

mit der Nettoprofitbedingung $\mathbb{E}[rT_1 + \log Z_1] > 0$ ist. Hierbei beschreibt \mathbb{E} den Erwartungswert der gemeinsamen Verteilung der Wartezeit T_1 und des verbleibenden Vermögens Z_1 und besagt, dass die zu erwartenden Prämieinnahmen zu jedem Zeitpunkt größer zu sein haben, als die zu erwartenden Schadenszahlungen. Wenn nämlich die Nettoprofitbedingung nicht gilt, dann ist die Armutswahrscheinlichkeit immer 1.

Überraschenderweise kann mit Theorem 3 gezeigt werden, dass der Cramér-Lundberg-Koeffizient vom Prozess (3.8) mit jenem Koeffizienten vom Prozess (3.3) identisch ist, welcher wiederum dem Koeffizienten vom ursprünglichen Prozess X_t entspricht.

Bemerkung: Der Koeffizient w ist unabhängig vom kritischen Vermögen x^* . Obwohl in der klassischen Ruintheorie nur dann vom Ruin gesprochen wird, wenn das Vermögen gleich Null ist, ist das in unserem Modell nur dann der Fall, wenn das kritische Vermögen x^* unterschritten wird. Deshalb macht die asymptotische Betrachtung dieser Differenzen keinen Unterschied.

3.4.1 Die Nettoprofitbedingung

In diesem Abschnitt wollen wir die Nettoprofitbedingung an Hand von einigen Beispielen berechnen.

Zuerst betrachten wir die Nettoprofitbedingung von oben allgemein:

$$\mathbb{E}[rT_1 + \log Z_1] > 0.$$

Hierbei ist $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$, weshalb für den Erwartungswert $\mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{\lambda}$ folgt. Die allgemeine Nettoprofitbedingung heißt nun

$$\frac{r}{\lambda} + \mathbb{E}[\log Z_1] > 0.$$

Für den Fall $\lambda = 1$, gilt

$$r + \mathbb{E}[\log Z_1] > 0.$$

Beispiel a.) Im deterministischen Fall, also wenn die Zufallsvariable $Z \sim \text{Dirac}(q)$ Dirac verteilt ist, bekommen wir für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[\log Z_1] = \log q.$$

Für die Nettoprofitbedingung mit $\lambda = 1$ gilt demnach

$$\begin{aligned} r + \log q > 0 &\Leftrightarrow r > -\log q \\ &\Leftrightarrow -r < \log q \\ &\Leftrightarrow q > e^{-r}. \end{aligned}$$

Beispiel b.) Bei der Potenzverteilung heißt unsere Verteilungsfunktion $G(u) = u^{\alpha+1}$ für $0 < u < 1$. Die Dichtefunktion $g(u) = (\alpha + 1)u^\alpha$ ergibt sich hierbei als die erste Ableitung der Verteilungsfunktion $G(u)$. Somit können wir für die Dichte

$$\int_0^1 g(u) du = \int_0^1 (\alpha + 1)u^\alpha du = 1$$

schreiben. Durch eine einfach Umformung ergibt sich

$$\int_0^1 u^\alpha du = \frac{1}{\alpha + 1},$$

und nach α differenziert erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^1 u^\alpha du &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{\alpha + 1} \\ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{\alpha \log u} du &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot (\alpha + 1)^{-1} \\ \int_0^1 \log u \cdot e^{\alpha \log u} du &= -(\alpha + 1)^{-2} \\ \int_0^1 \log u \cdot u^\alpha du &= \frac{-1}{(\alpha + 1)^2}. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert bekommen wir somit

$$\mathbb{E}[\log Z_1] = \int_0^1 \log u (\alpha + 1) u^\alpha du = \frac{-1}{(\alpha + 1)}.$$

Für die Nettoprofitbedingung mit $\lambda = 1$ gilt

$$r - \frac{1}{(\alpha + 1)} > 0 \Leftrightarrow r > \frac{1}{(\alpha + 1)} \Leftrightarrow \alpha + 1 > \frac{1}{r} \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{r} - 1.$$

Beispiel c.) Für $Z \sim B(\alpha, \beta)$ bekommen wir für die Dichtefunktion

$$g(u) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1},$$

und daher bekommen wir natürlich auch

$$\Rightarrow \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du = B(\alpha, \beta).$$

Der Erwartungswert ist

$$\mathbb{E}[\log Z_1] = \int_0^1 \log u \cdot g(u) du.$$

Mit dieser Darstellung gelingt uns die Differenzierung nach α sehr leicht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot B(\alpha, \beta) \\ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \\ \int_0^1 \log u \cdot u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Digammafunktion ist wie folgt definiert¹

$$\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = (\log \Gamma(x))'.$$

¹Hier bezeichnet ψ die Digammafunktion und nicht die Ruinwahrscheinlichkeit. Um Verwechslungen zu vermeiden, könnte man die Digammafunktion mit dem vorklassischen, altgriechischen Buchstaben F benennen.

Damit können wir

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} B(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} &\stackrel{(\log. \text{ Abl.})}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\log B(\alpha, \beta) \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\log \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\log \Gamma(\alpha) + \log \Gamma(\beta) - \log \Gamma(\alpha + \beta) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \Gamma(\alpha) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \Gamma(\beta) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \Gamma(\alpha + \beta) \\
 &\stackrel{(\text{Def. Digamma})}{=} \psi(\alpha) + 0 - \psi(\alpha + \beta),
 \end{aligned}$$

schreiben.

Mit Berücksichtigung der obigen Bemerkungen erhalten wir letzten Endes

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathbb{E}[\log Z_1] &= \int_0^1 \log u \cdot \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du \\
 &= \psi(\alpha) - \psi(\alpha + \beta).
 \end{aligned}$$

Für die Nettoprofitbedingung mit $\lambda = 1$ gilt somit

$$r + \psi(\alpha) - \psi(\alpha + \beta) > 0.$$

3.4.2 Anwendung der Cramér-Lundberg-Approximation

Unsere Cramér-Lundberg-Gleichung von oben ist durch

$$\mathbb{E}[e^{-u(rT_1 + \log Z_1)}] = 1$$

gegeben.

Auf Grund der Unabhängigkeit von T_1 und Z_1 können wir den Erwartungswert aufsplitten:

$$\mathbb{E}[e^{-urT_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{-u \log Z_1}] = 1.$$

Weil hier eine Momenterzeugende Funktion vorliegt und weil $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda + ur} \cdot \mathbb{E}[Z_1^{-u}] &= 1 \\ &\Leftrightarrow \\ \lambda \cdot \mathbb{E}[Z_1^{-u}] &= \lambda + ur \\ &\Leftrightarrow \\ f(u) := \lambda + ur - \lambda \cdot \mathbb{E}[Z_1^{-u}] &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Beispiele dafür:

Beispiel a.) Für $Z \sim \text{Dirac}(q)$ erhalten wir für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[Z_1^{-u}] = q^{-u}.$$

Und für die Lundberggleichung erhalten wir

$$f(u) = \lambda + ur - \lambda \cdot q^{-u} \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit $\lambda = 1$ gilt demnach

$$f(u) = 1 + ur - q^{-u} = 0.$$

Beispiel b.) Für die Potenzfunktion erhalten wir für den Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_1^{-u}] &= \int_0^1 z^{-u} \cdot (\alpha + 1) \cdot z^\alpha dz = (\alpha + 1) \int_0^1 z^{\alpha-u} dz \\ &= (\alpha + 1) \frac{z^{\alpha-u+1}}{\alpha - u + 1} \Big|_{z=0}^1 = \frac{\alpha + 1}{\alpha - u + 1},\end{aligned}$$

mit $\alpha - u + 1 > 1$ und $u < \alpha + 1$.

Die Lundberggleichung für $\lambda = 1$ heißt

$$1 + ur - \frac{\alpha + 1}{\alpha - u + 1} = 0.$$

Wenn hierbei die Nettoprofitbedingung erfüllt ist, dann existiert eine explizite positive Lösung

$$u = \alpha + 1 - \frac{1}{r}.$$

Bemerkung: Die Lösung entspricht der Ruinwahrscheinlichkeit für exponentialverteilte Schäden.

Beispiel c.) Für $Z \sim B(\alpha, \beta)$ erhalten wir für den Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_1^{-u}] &= \int_0^1 z^{-u} \cdot \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot z^{\alpha-1} \cdot (1-z)^{\beta-1} dz \\ &= \frac{B(\alpha-u, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{B(\alpha-u, \beta)} \cdot z^{\alpha-u-1} \cdot (1-z)^{\beta-1} dz}_{= 1 \text{ wenn } \alpha-u-1 > 0 \text{ und } u < \alpha-1}.\end{aligned}$$

Die Lundberggleichung mit $\lambda = 1$ heißt

$$1 + ur - \frac{B(\alpha - u, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = 0.$$

Bemerkung: Die obige Lundberggleichung lässt sich numerisch lösen. Hinweis: Zum Beispiel kann man mit Softwarepaket R den Befehl *uniroot* verwenden.

Theorem 3 :

Wenn $\mathbb{E}[rT_1 + \log Z_1] > 0$ gilt, dann besitzt (Y_n) einen identischen Cramér-Lundberg-Koeffizienten zu $(Y_n^{(1)})$, mit

$$Q(x) \approx c \cdot e^{-w \log x} = c \cdot x^{-w},$$

wobei w die positive Lösung der Gleichung $\mathbb{E}[e^{(-u \cdot (rT_1 + \log Z_1))}] = 1$ ist.

Beweis. Durch die Ungleichung

$$(x - 1)e^{rt} + 1 \leq x e^{rt} \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } x > 1,$$

und den Gleichungen (2.7), (3.3) sowie (3.7) können wir durch vollständige Induktion zeigen, dass

$$Y_n \leq Y_n^{(1)} \quad \text{für } \forall n \geq 0,$$

Pfadweise gilt.

Damit schließen wir auf

$$\mathbb{P}[Y_n^{(1)} < 1 \text{ für ein } n] \leq \mathbb{P}[Y_n < 1 \text{ für ein } n].$$

Mit $\forall x > 1$ damit $\log x > 0$

$$-\frac{1}{\log x} \log \mathbb{P}[Y_n < 1 \text{ für ein } n] \leq -\frac{1}{\log x} \log \mathbb{P}[Y_n^{(1)} < 1 \text{ für ein } n]$$

folgern wir

$$-\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \log \mathbb{P}[Y_n < 1 \text{ für ein } n] \leq -\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{P}[Y_n^{(1)} < 1 \text{ für ein } n]}{\log x}.$$

Mit der Annahme, dass $(Y_n^{(1)})$ einen Cramér-Lundberg-Koeffizienten besitzt, und der Gleichung (3.10) erhalten wir

$$\begin{aligned} -\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \log \mathbb{P}[Y_n^{(1)} < 1 \text{ für ein } n] &= -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \log \mathbb{P}[Y_n^{(1)} < 1 \text{ für ein } n] \\ &= w(r), \end{aligned}$$

wobei $w(r)$ der Lundberg-Koeffizient von $(Y_n^{(1)})$ ist.

Damit haben wir

$$-\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \log \mathbb{P}[Y_n < 1 \text{ für ein } n] \leq w(r),$$

gezeigt.

Für den Beweis des zweiten Teils verweisen wir auf [31].

□

3.5 Die Lösung der Integralgleichung

Die obigen Ausführungen zeigen, dass sich das Verhalten der Armutswahrscheinlichkeit $Q(x)$ für x groß genug und für gewisse Koeffizienten w durch den Ausdruck $e^{w \cdot \log x} = x^{-w}$ gut beschreiben lässt. Dieses Ergebnis sichert die positive Überlebenswahrscheinlichkeit über der kritischen Vermögensgrenze - zumindest unter den obigen aufgezählten Bedingungen. Um die Armutswahrscheinlichkeit $Q(x)$ berechnen zu können, ist es notwendig die kleinst mögliche Lösung der Integralgleichung (3.4) unter den Grenzwerteigenschaften (3.5) und (3.6) zu finden. Weil es aber keine analytische Lösung gibt, werden zwei numerische Lösungsmethoden präsentiert. Die erste Methode wird eine einfache iterative Methode sein, welche die Armutswahrscheinlichkeit $Q(x)$ von unten annähert. Die zweite Methode transformiert das Problem in ein System von Differentialgleichungen, sodass nach den bekannten Lösungsverfahren die Armutswahrscheinlichkeit $Q(x)$ numerisch ausgerechnet werden kann.

3.5.1 Die Lösung der Integralgleichung über eine iterative Methode

Algorithmus 1: Sei die Dichte mit $p_G(\cdot|\cdot)$ und die Punkte $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$ gegeben.

1. Setze $x_0 = 1$ und $p_0 = 1$
2. Starte mit $Q_0(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq 1\}}$
3. Beginne mit $n = 0$
4. Wiederhole
 - a. $n = n + 1$
 - b. Berechne für alle $i = 1, \dots, N$

$$p_i = \int_0^1 p_G(y|x_i) dy + \int_1^\infty Q_{n-1}(y) p_G(y|x_i) dy$$

- c. Konstruiere eine lineare Interpolation $Q_n(x) = \text{Interp}(\{x_i\}, \{p_i\})$
5. Nutze das letzte Q_n als Näherung für Q .

Bemerkung: Man könnte beim Algorithmus 1 meinen, dass er iterativ versucht die Neumann Reihe der Integralgleichung nachzukonstruieren. Diese Vorgehensweise kann aber nicht funktionieren, weil der Anspruch der eindeutigen Lösung (wie oben gefordert) unmöglich einzuhalten ist. Hingegen funktioniert aber der Algorithmus 1. Man möge hier festhalten, dass die Armutswahrscheinlichkeit die (einheitlich) kleinste Lösung der Integralgleichung ist.

Theorem 4: Die Iteration in Algorithmus 1 konvergiert gegen die Armutswahrscheinlichkeit $Q(x)$, wenn anstatt der Interpolationen die Funktionen $Q_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ verwendet werden.

Beweis. Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $Q_{n+1}(x) \geq Q_n(x) \geq 0$ gilt.

Für $n = 0$:

$$\int_0^1 p_G(y|x)dy + \int_1^\infty Q_0(y)p_G(y|x)dy = \int_0^1 p_G(y|x)dy \geq 0,$$

weil $Q_0(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq 1\}}$ und weil p_G eine Dichtefunktion für ein fixes x ist, gilt infolgedessen $p_G(y|x) \geq 0$ und daraus $\int_0^1 p_G(y|x)dy \geq 0$.

Angenommen $Q_n(x) \geq Q_{n-1}(x)$ für $\forall k \leq n$:

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= \int_0^1 p_G(y|x)dy + \int_1^\infty Q_n(y)p_G(y|x)dy \\ &\geq \int_0^1 p_G(y|x)dy + \int_1^\infty Q_{n-1}(y)p_G(y|x)dy = Q_n(x). \end{aligned}$$

Hierbei erscheint die Lösung diametral, da zusätzliches Vermögen die Armutswahrscheinlichkeit nicht erhöht. Da nur jene Lösungen in Frage kommen die (3.6) $\lim_{x \searrow 1} Q_n(x) = 1$ erfüllen, sind infolgedessen alle Q_n nach oben hin beschränkt. Zusammen mit der Monotonieeigenschaft schließen wir, dass $Q_n(x)$ konvergieren muss. Da ja die Lösungsauffindung von der kleinst möglichen Lösung beginnt, muss die Grenze, welche von unten angenähert wird, die kleinst mögliche Lösung der Integralgleichung sein die (3.6) erfüllt. \square

In den folgenden Abbildungen sind die Ergebnisse des iterativen numerischen Lösungsverfahrens präsentiert. Für nähere Details z.B. bzgl. Code und Implementierung siehe in der Projekt-Ausarbeitung von „Projekt TM“ [\[32\]](#).

Abbildung 3.11: Numerisches Lösungsverfahren für die Armutswahrscheinlichkeit mit 50 Iterationen

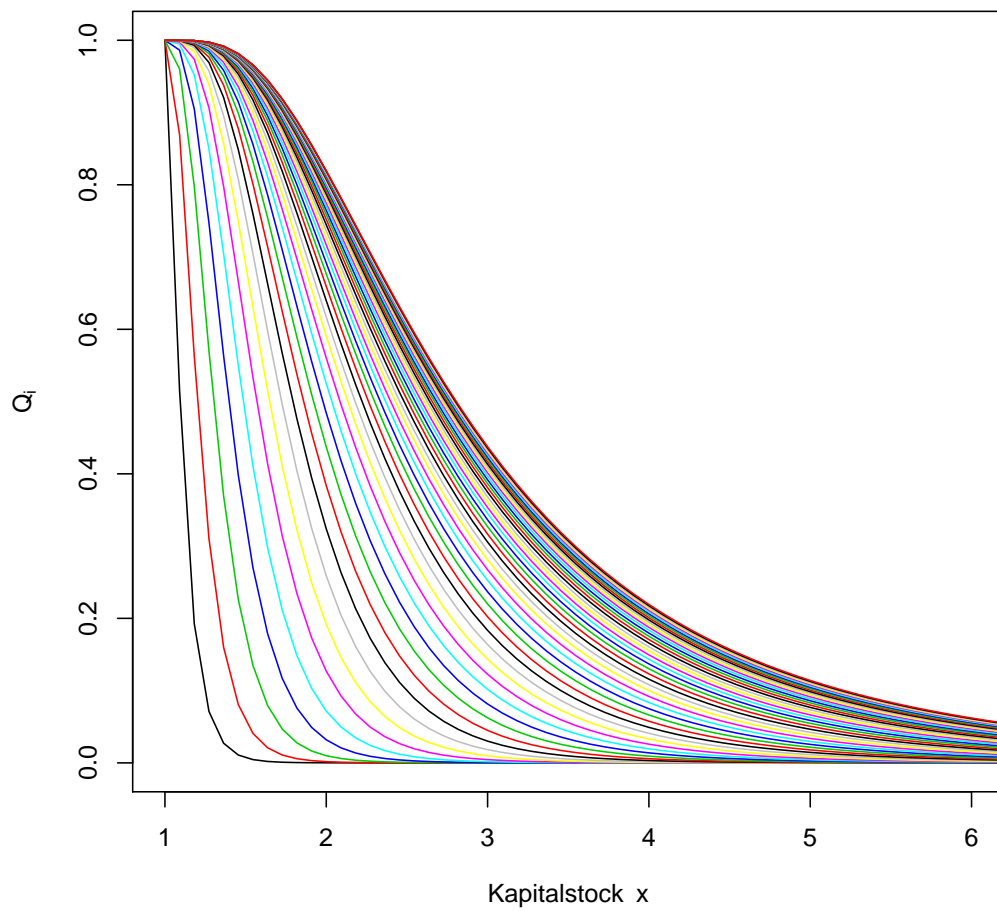


Abbildung 3.12: Iterative numerische Lösung für das erste Verlustereignis

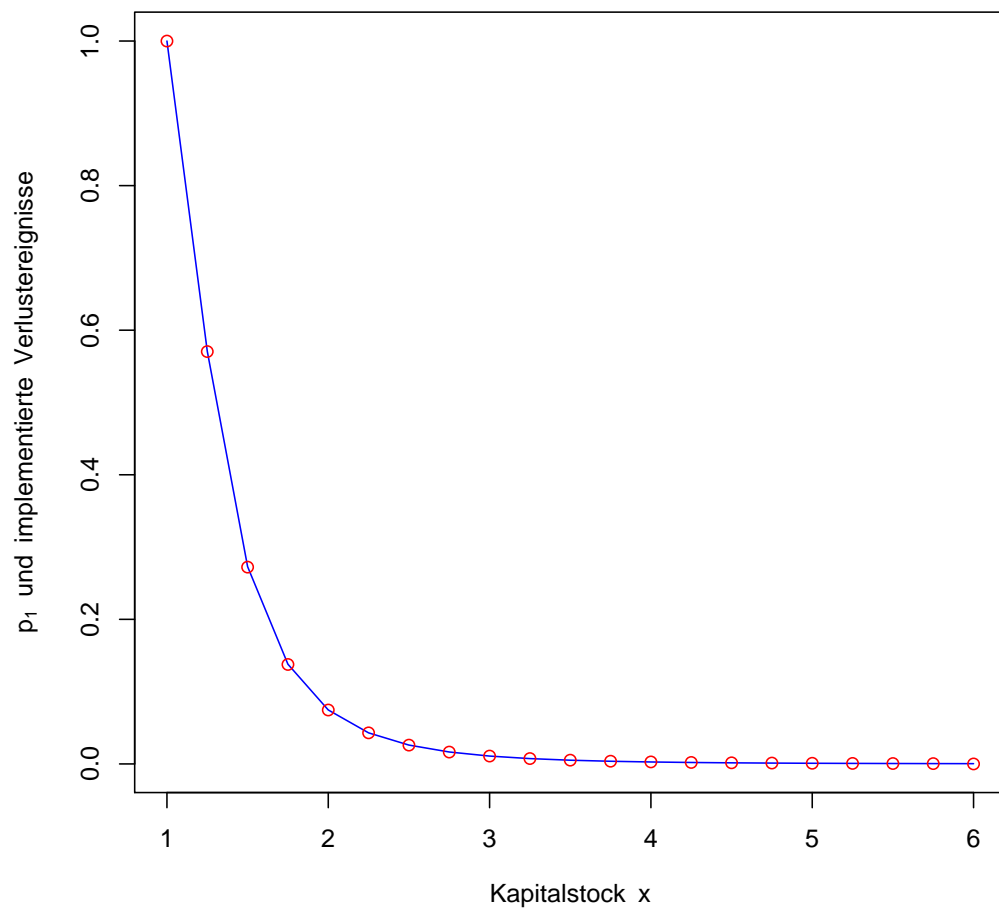


Abbildung 3.13: Veranschaulichung der Abstände

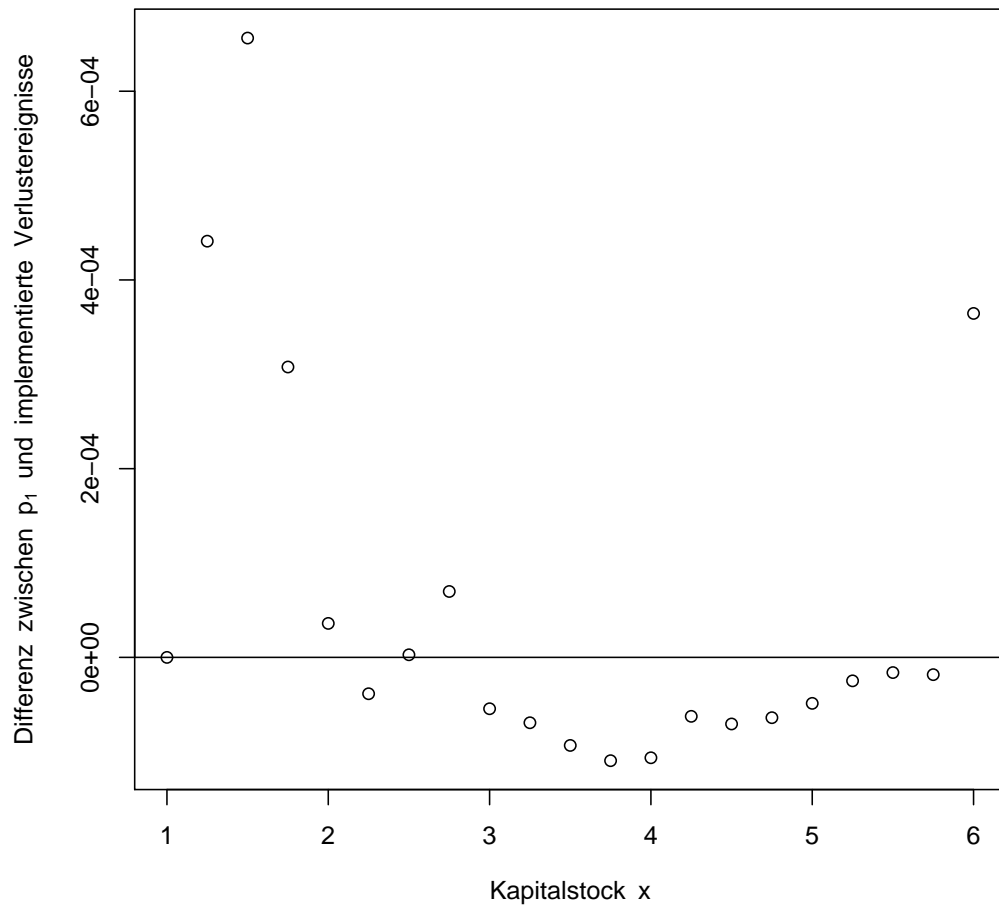
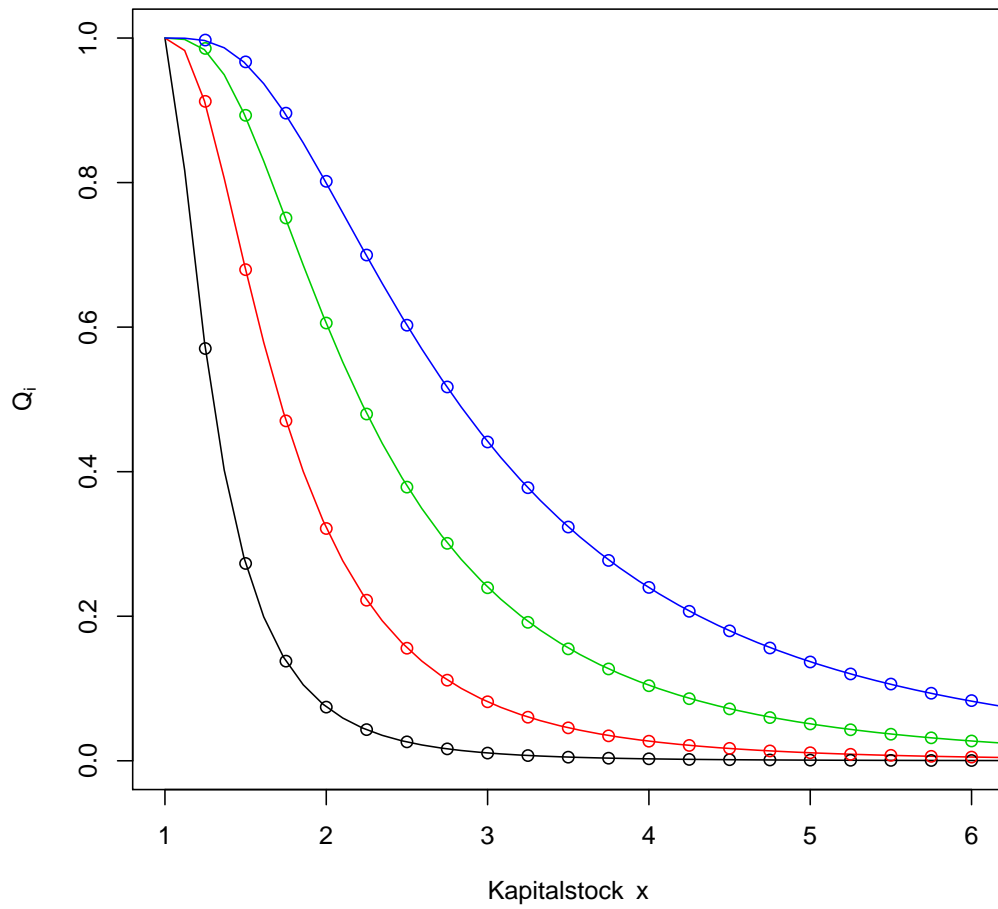


Abbildung 3.14: Iteratives numerisches Lösungsverfahren für mehrere Verlustereignisse



Wir haben gesehen, dass die Findung der Armutswahrscheinlichkeit gleichzeitig die Lösung der Integralgleichung bedeutet. Überraschenderweise zeigt sich in bestimmten Fällen, dass es möglich ist die Integralgleichung über ein System von Differentialgleichungen zu lösen.

3.5.2 Die Lösung der Integralgleichung über ein System von Differentialgleichungen

Wegen der oberen Integralgrenze $\min(\frac{y_1}{y_0}, 1)$ der Gleichung $p_G(y|x)$ von Theorem 1, kann man den Kern $p_G(y|x)$ der Integralgleichung immer als eine stückweise Funktion $p_{G_1}(x, y) \cdot \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} + p_{G_2}(x, y) \cdot \mathbb{1}_{\{y > x\}}$ schreiben. Dieser Tatsache entsprechend kann Theorem 5 formuliert werden:

Theorem 5: Sei $Q(x)$ definiert über die Integralgleichung und angenommen der $\mathbb{E}[rT_1 + \log Z_1] > 0$ und $k(x) = \int_0^1 p_G(y|x) dy$.

Wenn der Kern p_G der Art

$$p_G(y|x) = g_1(x) \cdot h_1(y) \cdot \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} + g_2(x) \cdot h_2(y) \cdot \mathbb{1}_{\{y > x\}} \quad (3.14)$$

ist, dann existieren Funktionen $w_1(\cdot)$ und $w_2(\cdot)$, so dass

$$Q(x) = \frac{w_1'(x)}{h_1(x)} = -\frac{w_2'(x)}{h_2(x)}, \quad (3.15)$$

für $i \in \{1, 2\}$ und w_i als Lösungen der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$w_1'(x) = h_1(x) \cdot [g_1(x) \cdot w_1(x) + g_2(x) \cdot w_2(x) + k(x)], \quad (3.16)$$

$$w_2'(x) = -h_2(x) \cdot [g_1(x) \cdot w_1(x) + g_2(x) \cdot w_2(x) + k(x)], \quad (3.17)$$

unter der Bedingung der Rand- bzw. Grenzwerteigenschaften

$$w_2(1) = 0, \quad (3.18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w_1(x) = 0. \quad (3.19)$$

Beweis. Wenn der Kern die Form (3.14) hat, kann die Integralgleichung geschrieben werden als

$$Q(x) = k(x) + g_1(x) \underbrace{\int_1^x Q(y)h_1(y)dy}_{=: w_1(x)} + g_2(x) \underbrace{\int_x^\infty Q(y)h_2(y)dy}_{=: w_2(x)}. \quad (3.20)$$

Mit der Ableitung von $w_1(x)$ und $w_2(x)$ erhalten wir (3.15) und weiter die gewöhnlichen Differentialgleichungen (3.16) sowie (3.17). Die Randwertbedingung (3.18) berücksichtigt die Tatsache, dass w_1 als ein Integralausdruck definiert ist. Wenn $\mathbb{E}[rT_n + \log Z_n] > 0$ gilt, dann wissen wir aus Theorem 3, dass die Armutswahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert für ein Vermögen groß genug. Diese Lösung ist die kleinst mögliche Lösung, der mit der Gleichung (3.20) gegeben ist, und (3.19) gültig ist. \square

Bemerkung: Für praktische Anwendungsbeispiele kann es hilfreich sein, die Integralgleichung (3.4) auf folgende Art und Weise umzuformen: Führe die Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktion $S(x) = 1 - Q(x)$ ein. S genügt der homogenen Gleichung

$$S(x) = \int_1^\infty S(y)p_G(y|x)dy; \quad x \geq 1,$$

mit der Zusatzbedingung $S(\infty) = 1$. Vorzugsweise betrachtet man die Gleichung $W(u) := S(1/u)$, wobei u zwischen 0 und 1 variiert. Durch einen

erneuten Blick auf die Übergangsdichte erkennt man, dass es sogar noch einfacher wird wenn wir y mit $1/z$ ersetzen. Demzufolge erhalten wir

$$W(u) = \int_0^1 W(z)(-z^{-2})p_G(z^{-1}|u^{-1})dz.$$

Der Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass wir jetzt das dazugehörige System von linearen Differentialgleichungen leichter, mit den Randpunkten $W(0) = 1, W(1) = 0$, wiedergeben können.

Beispiel 6: Der Kern für die Potenzfunktion aus Beispiel 2 besitzt die besondere Eigenschaft (3.14) aus Theorem 5. In so einem Falle erhalten wir

$$g_1(x) = \gamma \cdot \frac{(\alpha + 1)}{\alpha + \gamma + 1} \cdot \frac{(x - 1)^\gamma}{x^{\alpha + \gamma + 1}} \cdot {}_2F_1(\gamma + 1, \alpha + \gamma + 1; \alpha + \gamma + 2; \frac{1}{x}),$$

$$h_1(y) = y^\alpha,$$

$$g_2(x) = \gamma \cdot \frac{(\alpha + 1)}{\alpha + \gamma + 1} \cdot (x - 1)^\gamma,$$

$$h_2(y) = y^{-\gamma - 1} \cdot {}_2F_1(\gamma + 1, \alpha + \gamma + 1; \alpha + \gamma + 2; \frac{1}{y}).$$

4 Der Einfluss einer proportionalen Versicherung

In dem nun folgenden Kapitel erweitern wir das Modell aus Abschnitt 2.3 um eine Versicherung.

4.1 Die Beschreibung der Versicherung und der Modellstruktur

Betrachten wir das Modell von einem einfachen Versicherungsschema: Angenommen beim Vertragstyp handle es sich um eine Quotenversicherung mit einer Versicherungsquote von $1 - \eta$. Hierbei ist $\eta \in [0, 1]$. Das bedeutet, dass nur $100 \cdot (1 - \eta)$ Prozent vom Schaden gedeckt sind. Die volle Versicherung ist damit nur bei $\eta = 0$ bzw. keine Versicherung nur bei $\eta = 1$ gegeben. Die Prämienrate wird nach der Erwartungswertmethode

$$p(\eta) = (1 + \delta) \cdot (1 - \eta) \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}(1 - Z), \quad (4.1)$$

mit $\delta > 0$ als Sicherheitsaufschlag, berechnet. Eine derartige Versicherung könnte zum Beispiel seitens der Regierung gewünscht werden. Es wird angenommen, dass die Basisparameter vom Modell - insbesondere die Eigenkapitalquote (*engl.* „return on capital“) c , sowie das kritische Einkommensniveau I^* - selbst bei der Einführung einer Versicherung - unverändert bleiben. Wir schreiben für den versicherten Prozess $X_t^{(\eta)}$.

Wenn wir die Gleichung (2.4) erneut aufgreifen, und mit der Versicherungsprämie p verbinden, erhalten wir

$$I_t^{(\eta)} = (b - p) X_t^{(\eta)}, \quad (4.2)$$

wobei $p = p(\eta)$ aus (4.1).

Bemerkung: Die Versicherungsprämie p wird vom Einkommen bezahlt.

Ausgehend von (2.5) bekommen wir mit der obigen Beziehung die neue Wachstumsrate mit $r^{(\eta)} = (1 - a) \cdot (b - p) \cdot c$. Offensichtlich ist $r^{(\eta)}$ kleiner als die Wachstumsrate r vom nicht versicherten Modell, sofern $\eta < 1$ ist. Nur Prämienraten mit

$$b > p, \quad (4.3)$$

sind für unsere Zwecke sinnvoll, da nur diese Bedingung die notwendige Voraussetzung zum Überleben des Haushaltes darstellt. Andernfalls ist kein Überleben möglich.

Mit $x^{(\eta)*} = \frac{I^*}{b-p}$ verändert sich das System aus (2.6) bzw. (2.7) zu

$$X_{\tau_i^-}^{(\eta)} = \begin{cases} [X_{\tau_{i-1}}^{(\eta)} - x^{(\eta)*}] \cdot e^{r^{(\eta)}(\tau_i - \tau_{i-1})} + x^{(\eta)*} & \text{für } X_{\tau_{i-1}} > x^{(\eta)*}, \\ X_{\tau_{i-1}}^{(\eta)} & \text{sonst,} \end{cases}$$

bzw.

$$X_{\tau_i} = \begin{cases} X_{\tau_i^-}^{(\eta)} [1 - \eta + \eta Z_i] & \text{für } X_{\tau_i^-} > x^*, \\ X_{\tau_i^-}^{(\eta)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung: Die Herleitung von $X_{\tau_i^-}^{(\eta)}$ ist wie im vorigen Abschnitt 2.3, nur wird b mit $b - p$ ersetzt.

Definition: Die Armutswahrscheinlichkeit vom Vermögensprozess $X_t^{(\eta)}$ wird mit $Q^{(\eta)}(x) := \mathbb{P}(X_t^{(\eta)} < x^* \text{ für ein } x \geq 0)$ definiert.

Tabelle 4.1: Parameterliste vom versicherten und nicht versicherten Prozess

	ohne Versicherung	mit Versicherung
Wachstumsrate	r	$r - (1 - a) \cdot c \cdot p(\eta)$
Verlustanteil	$1 - Z$	$\eta \cdot (1 - Z)$
Verlustdichte	$g(1 - u)$	$\frac{1}{\eta} \cdot g\left(\frac{1-u}{\eta}\right)$
kritisches Vermögen	$\frac{I^*}{b}$	$\frac{I^*}{b - p(\eta)}$

Die Schadenshöhe im versicherten Fall wird auf $\eta \cdot (1 - Z_i)$ reduziert, und das neue kritische Vermögen $x^{(\eta)*}$ ist höher als der ursprüngliche kritische Vermögen x^* . Für nicht versicherte Haushalte oder aber auch für Haushalte mit einem Vermögensstock zwischen x^* und $x^{(\eta)*}$, gilt das Modell aus (2.6) bzw. (2.7).

Bemerkung: Die Einführung einer Quotenversicherung verändert nur die Parameter vom Prozess, und nicht die Struktur selbst. Dies bedeutet, dass der deterministische Teil vom Prozess (2.5) durch

$$\frac{dX_t}{dt} = r^{(\eta)} \cdot [X_t^{(\eta)} - x^{(\eta)*}]^+,$$

gegeben ist.

Der Vergleich der Parameter vom versicherten und nicht versicherten Prozess sind in der Tabelle 4.1 gegenüber gestellt.

Mit den bisherigen Ergebnissen, können wir die Existenz des Cramér-Lundberg-Koeffizienten für den versicherten Prozess folgern. Zudem wird Ruin nicht mit Wahrscheinlichkeit 1 eintreten, falls folgende Bedingung erfüllt ist

$$\mathbb{E}[r^{(\eta)} T_1 + \log(1 - \eta(1 - Z_i))] > 0. \quad (4.4)$$

Damit wird die Bedingung von (4.3) verschärft. In diesem Fall ist der Cramér-Lundberg-Koeffizient durch die Lösung von

$$\mathbb{E} \left[e^{-u \cdot [r^{(\eta)} T_1 + \log(1 - \eta(1 - Z_i))]} \right] = 1, \quad (4.5)$$

gegeben.

Die Voraussetzungen (4.3) und (4.4) zeigen, dass ein gewisser Armutszustand auch für arbiträr große Ausgangsvermögen eintreten kann, wenn die Versicherungsprämie die Wachstumsrate (der Ersparnisbildung) entsprechend belastet.

Andererseits wenn die Bedingungen (4.3) sowie (4.4) erfüllt sind, können wohlhabendere Haushalte durch eine volle Versicherung ihren gesamten Vermögensstock (also wenn $\eta = 0$ ist) das Armutsrisiko vollständig außer Kraft setzten. Dieser Ansatz ist realisierbar wenn das Grundvermögen die bestimmte Grenze von $x^{(0)*}$, gegeben mit

$$x^{(0)*} = \frac{I^*}{b - (1 + \delta) \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}(1 - Z)}, \quad (4.6)$$

übersteigt.

Weil der versicherte Prozess auch als ein unversicherter Prozess mit modifizierter Wachstumsrate sowie modifizierter Verteilungsfunktion interpretiert werden kann, ist es möglich, das entwickelte numerische Verfahren im Abschnitt 3.5 erneut aufzugreifen.

Bemerkung: Typischerweise wird die Versicherung nur für den Punkt $x > x^{(\eta)}$ nützlich sein. Hierbei ist der Punkt $x^{(\eta)}$ durch die Lösung von

$$Q(x) = Q^{(\eta)}(x)$$

in Abhängigkeit vom Vermögen x , gegeben.

In Abhängigkeit von der Wahl der Parameter kann es möglich sein, dass der Übergangspunkt sehr weit rechts liegt. Der Übergangspunkt kennzeichnet die Grenze zwischen jenen Personen die von der Versicherung profitieren und jenen Personen die keinen Mehrwert daraus erziehen.

Nur jene Personen die jenseits der $x^{(\eta)}$ Grenze sind, haben einen Vorteil durch die Versicherung.

4.2 Die Übergangsdichte mit Versicherung

Um die Übergangsdichte mit Versicherung zu berechnen, betrachten wir wieder die eingebettete Markovkette zu den Verlustereigniszeitpunkten τ_n mit

$$Y_n^\eta = X_{\tau_n}^{(\eta)}.$$

Hierbei genügt die Übergangsdichte, für den zu erreichenden Wert y_1 nach einem Sprung, der folgenden Gleichung

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - \eta + \eta v) [(y_0 - x^{(\eta)*})e^{r^{(\eta)}\tau} + x^{(\eta)*}] \\ &\Leftrightarrow \\ y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*} &= (1 - \eta + \eta v)(y_0 - x^{(\eta)*})e^{r^{(\eta)}\tau} \\ &\Leftrightarrow \\ e^{r^{(\eta)}\tau} &= \frac{y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*}}{(1 - \eta + \eta v)(y_0 - x^{(\eta)*})}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Nach Voraussetzung ist $\tau > 0$, und deshalb ist auch $e^{r^{(\eta)}\tau} > 1$. Wir werden im folgenden Absatz sehen, dass $e^{r^{(\eta)}\tau} > 0$ für $v < \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}$ auch gilt.

Nach logarithmieren der Gleichung bekommen wir

$$\tau = \frac{1}{r^{(\eta)}} \ln \left(\frac{y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*}}{(1 - \eta + \eta v)(y_0 - x^{(\eta)*})} \right).$$

Schließlich ergibt sich durch die Ableitung

$$d\tau = \frac{1}{r^{(\eta)}} \cdot \frac{1}{y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*}} dy_1.$$

Damit können wir nun die Dichtefunktion $f_W(\tau) = e^{-\tau} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > 0\}}$ berechnen:

$$\begin{aligned} f_W(\tau) = f_Y(y_1, v) &= \exp\left(-\frac{1}{r^{(\eta)}} \ln\left(\frac{y_1 - (1 - \eta + \eta \cdot v)x^{(\eta)*}}{(1 - \eta + \eta \cdot v)(y_0 - x^{(\eta)*})}\right)\right) \mathbb{1}_{\{\tau > 0\}} \\ &= \left(e^{\ln\left(\frac{y_1 - (1 - \eta + \eta \cdot v)x^{(\eta)*}}{(1 - \eta + \eta \cdot v)(y_0 - x^{(\eta)*})}\right)}\right)^{-\frac{1}{r^{(\eta)}}} d\tau \mathbb{1}_{\{\tau > 0\}}, \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{r^{(\eta)}} \ln\left(\frac{y_1 - (1 - \eta + \eta \cdot v)x^{(\eta)*}}{(1 - \eta + \eta \cdot v)(y_0 - x^{(\eta)*})}\right) > 0$.

Die Ungleichung aufgelöst unter der Voraussetzung dass $r^{(\eta)} > 0$, ergibt $v < \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}$; und in die Gleichung eingesetzt

$$f_W(\tau) = \left(\frac{y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*}}{(1 - \eta + \eta v)(y_0 - x^{(\eta)*})}\right)^{-\frac{1}{r^{(\eta)}}} \cdot \frac{1}{r^{(\eta)}} \cdot \frac{\mathbb{1}_{\{v < \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}\}}}{y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*}}.$$

Und mit $\frac{1}{r^{(\eta)}} = \gamma^{(\eta)}$ folgt

$$\begin{aligned} f_W(\tau) &= \left(\frac{(1 - \eta + \eta v)(y_0 - x^{(\eta)*})}{y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*}}\right)^{\gamma^{(\eta)}} \cdot \gamma^{(\eta)} \cdot \frac{\mathbb{1}_{\{v < \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}\}}}{(y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*})} \\ &= ((1 - \eta + \eta v)(y_0 - x^{(\eta)*}))^{\gamma^{(\eta)}} \gamma^{(\eta)} \frac{\mathbb{1}_{\{v < \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}\}}}{(y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*})^{1 + \gamma^{(\eta)}}}. \end{aligned}$$

Damit lautet die neue Übergangsdichte mit Versicherung

$$\begin{aligned} p_G(y_1|y_0) &= \int_0^1 f_Y(y_1, v) dG(v) \\ &= \gamma^{(\eta)} (y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}} \cdot \int_0^{\min(\frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}, 1)} \frac{(1 - \eta + \eta v)^{\gamma^{(\eta)}} dG(v)}{(y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*})^{1 + \gamma^{(\eta)}}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2.1 Die Übergangsdichte mit Versicherung im deterministischen Fall

Für den deterministischen Fall hatten wir als die Übergangsdichte ohne Versicherung

$$p_G(y_1|y_0) = p_q(y_1|y_0) = \gamma \cdot (y_0 - 1)^\gamma \cdot (y_1 - (1 - q))^{-1-\gamma} \cdot (1 - q)^\gamma \cdot \mathbb{1}_{\{1-q \leq \frac{y_1}{y_0}\}}.$$

Jetzt lautet die Übergangsdichte mit Versicherung

$$\begin{aligned} p_q^{(\eta)}(y_1|y_0) &= \gamma^{(\eta)} \cdot \frac{((1 - \eta + \eta v)(y_0 - x^{(\eta)*}))^{\gamma^{(\eta)}}}{(y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*})^{1+\gamma^{(\eta)}}} \cdot \mathbb{1}_{\{v < \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{\eta y_0}\}} \\ &= \frac{\gamma^{(\eta)} \cdot (1 - \eta + \eta(1 - q))^{\gamma^{(\eta)}} \cdot (y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}}}{\left(y_1 - (1 - \eta + \eta(1 - q))x^{(\eta)*}\right)^{1+\gamma^{(\eta)}}} \cdot \mathbb{1}_{\{1-q \leq \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{\eta y_0}\}}, \end{aligned}$$

wobei $1 - Z_i = q$.

Wenn wir keine Versicherung für unseren Modell nutzen möchten, dann setzen wir $\eta = 1$, und können gleich eine Kontrolle machen:

$$x^* = \frac{I^*}{b} = 1, \gamma^{(\eta)} = \frac{1}{r^{(\eta)}} = \frac{1}{r - c(1-a)p^{(\eta)}} \text{ und}$$

$$x^{(\eta)*} = \frac{I^*}{b - p^{(\eta)}} = \frac{I^*}{I^* - (1+\delta)(1-\eta)\lambda \mathbb{E}(1-Z)} \text{ mit } \mathbb{E}(1-Z) = q$$

$$\begin{aligned}
p_q^{(\eta)}(y_1|y_0) &= \frac{\left(y_0 - \frac{I^*}{I^* - (1+\delta)(1-\eta)\lambda q}\right)^{\gamma(\eta)}}{r - c(1-a)(1+\delta)(1-\eta)\lambda q} \cdot \frac{\left(1 - \eta + \eta(1-q)\right)^{\gamma(\eta)} \cdot \mathbb{1}_{\{1-q \leq \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}\}}}{\left(y_1 - (1 - \eta + \eta(1-q))x^{(\eta)*}\right)^{1+\gamma(\eta)}} \\
&= \frac{1}{r} \cdot (y_0 - 1)^{\frac{1}{r}} \cdot (y_1 - (1-q))^{-1-\frac{1}{r}} \cdot (1-q)^{\frac{1}{r}} \cdot \mathbb{1}_{\{1-q \leq \frac{y_1}{y_0}\}} \\
&= \gamma \cdot (y_0 - 1)^\gamma \cdot (y_1 - (1-q))^{-1-\gamma} \cdot (1-q)^\gamma \cdot \mathbb{1}_{\{1-q \leq \frac{y_1}{y_0}\}}.
\end{aligned}$$

4.2.2 Die Übergangsdichte mit Versicherung wenn der Schadensanteil Beta verteilt ist

Beginnen wir mit (4.7). Um die Schreibweise zu vereinfachen wählen wir

$$\begin{aligned}\gamma^{(\eta)} &\mapsto \gamma \\ y_0 &\mapsto x \\ x^{(\eta)*} &\mapsto w \\ y_1 &\mapsto y\end{aligned}$$

und schreiben die Gleichung (4.7) für $y \geq (1 - \eta)x$ und $x > w$ neu

$$\begin{aligned}p_G(y|x) &= \gamma(x-w)^\gamma \int_0^u \frac{(1-\eta+\eta v)^\gamma}{(y-(1-\eta)w+\eta wv)^{1+\gamma}} \frac{v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} dv \\ &= \frac{\gamma(x-w)^\gamma}{B(\alpha,\beta)} \int_0^u \frac{(y-(1-\eta)w+\eta wv)^{1+\gamma}}{(1-\eta+\eta v)^\gamma} v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1} dv,\end{aligned}\tag{4.8}$$

mit $u = \min\left(\frac{y-x+\eta x}{x\eta}, 1\right)$.

Fall 1 : $u = \frac{y-x+\eta x}{x\eta} < 1 \Leftrightarrow y < x$

Nun ersetzen wir $v = su \Rightarrow dv = u ds$

$v = 0, \dots, u \Rightarrow s = 0, \dots, 1$ und schreiben für die Übergangsdichte $p_G(y|x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma(x-w)^\gamma}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 \frac{(1-\eta+\eta us)^\gamma}{(y-(1-\eta)w+\eta wus)^{1+\gamma}} (su)^{\alpha-1} (1-us)^{\beta-1} u ds \\
&= \frac{\gamma(x-w)^\gamma}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 (y-(1-\eta)w)^{-\gamma-1} \cdot \left[1 + \underbrace{\frac{\eta wus}{y-(1-\eta)w}}_{=-x_1} \right]^{-\gamma-1} \\
&\quad \cdot (1-\eta)^\gamma \left[1 + \underbrace{\frac{\eta us}{1-\eta}}_{=-x_2} \right]^\gamma u^\alpha s^{\alpha-1} (1-\underbrace{u}_{=-x_3} s)^{-\beta-1} ds \\
&= \frac{\gamma(x-w)^\gamma}{B(\alpha, \beta)} (y-(1-\eta)w)^{-\gamma-1} \cdot (1-\eta)^\gamma u^\alpha \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^1 s^{\alpha-1} [1-x_1s]^{-\gamma-1} [1-x_2s]^\gamma [1-x_3s]^{-\beta-1} ds.
\end{aligned}$$

Mit den folgenden Zuordnungsvorschriften

$$\begin{aligned}
b_1 &\mapsto \gamma + 1 \\
b_2 &\mapsto -\gamma \\
b_3 &\mapsto -(\beta - 1) \\
a &\mapsto \alpha \\
c &\mapsto \alpha + 1
\end{aligned}$$

verändern wir unsere Notation und erhalten weiter

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma(x-w)^\gamma}{B(\alpha, \beta)} (y - (1-\eta)w)^{-\gamma-1} \cdot (1-\eta)^\gamma u^\alpha \cdot \underbrace{\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}}_{=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}} \cdot \\
&\quad \cdot \underbrace{\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} [1-x_1s]^{-b_1} [1-x_2s]^{-b_2} [1-x_3s]^{-b_3} ds}_{=\text{Lauricella-Funktion } F_D^{(3)}(a, b_1, b_2, b_3, c, x_1, x_2, x_3)} \\
&= \frac{\gamma(x-w)^\gamma}{\alpha B(\alpha, \beta)} (y - (1-\eta)w)^{-\gamma-1} (1-\eta)^\gamma \left(\frac{y - (1-\eta)x}{\eta x} \right)^\alpha \cdot \\
&\quad \cdot F_D^{(3)}\left(\alpha, \gamma + 1, -\gamma, -(\beta - 1), \alpha + 1, \frac{-\eta w u}{y - (1-\eta)w}, \frac{-\eta u}{1-\eta}, u\right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Bemerkung: Im Allgemeinen erklärt man für Z mit Beta-Verteilung die eine Übergangsdichte, die sich nicht mehr mit Appell F_1 -Funktion ausdrücken lässt, aber mit einer Lauricella-Funktion. Da wir keine Software dafür kennen - für kein System - kann eine Lösung für das entsprechende Integral mit Appell F_1 -Funktionen für ganzzahlige α und ganzzahlige β gefunden werden. Siehe hierzu etwa die Arbeit von J. Blümlein und C. Schneider [7].

Ausgehend von (4.7) erhalten wir für $\alpha = 5$ und $\beta = 2$

$$p_G(y_1|y_0) = \frac{\gamma^{(\eta)}(y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}}}{B(5,2)} \cdot \int_0^{\min(\frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}, 1)} \frac{(1 - \eta + \eta v)^{\gamma^{(\eta)}} v^4 dv}{(y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*})^{1 + \gamma^{(\eta)}}} \quad (4.10)$$

$$-\gamma^{(\eta)}(y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}} \frac{1}{B(5,2)} \cdot \int_0^{\min(\frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}, 1)} \frac{(1 - \eta + \eta v)^{\gamma^{(\eta)}} v^5 dv}{(y_1 - (1 - \eta + \eta v)x^{(\eta)*})^{1 + \gamma^{(\eta)}}}. \quad (4.11)$$

Für $y_1 < y_0$ erhalten wir mit $\min(\frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}, 1) = \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta} = u$, sowie den Substitutionen von oben für den ersten Teilausdruck (4.10)

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (us)^4 (1 - \eta + \eta us)^\gamma (y_1 - (1 - \eta)x^* - \eta usx^*)^{-\gamma-1} u \, dv \\ &= u^5 (1 - \eta)^\gamma (y_1 - (1 - \eta)x^*)^{-\gamma-1} \int_0^1 s^4 \left(1 + \frac{\eta u}{1 - \eta} s\right)^\gamma \left(1 - \frac{\eta ux^*}{y_1 - (1 - \eta)x^*} s\right)^{-\gamma-1} ds. \end{aligned}$$

Damit bekommen wir mit der gleichen Vorgehensweise von oben für (4.10)

$$= u^5 (1 - \eta)^\gamma (y_1 - (1 - \eta)x^*)^{-\gamma-1} F_1\left(5, -\gamma, 1 + \gamma, 6, \frac{-\eta u}{1 - \eta}, \frac{ux^*}{y_1 - (1 - \eta)x^*}\right).$$

Und analog für den zweiten Ausdruck (4.11) erhalten wir

$$\frac{1}{\alpha} u^6 (1 - \eta)^\gamma (y_1 - (1 - \eta)x^*)^{-\gamma-1} F_1\left(6, -\gamma, 1 + \gamma, 7, \frac{-\eta u}{1 - \eta}, \frac{ux^*}{y_1 - (1 - \eta)x^*}\right).$$

Für $y_1 \geq y_0$ erhalten wir mit $\min\left(\frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}, 1\right) = 1$, sowie den gleichen Substitutionen von oben

$$\frac{1}{\alpha(\alpha + 1)} (1 - \eta)^\gamma (y_1 - (1 - \eta)x^*)^{-\gamma - 1} F_1\left(5, -\gamma, 1 + \gamma, 7, \frac{-\eta u}{1 - \eta}, \frac{ux^*}{y_1 - (1 - \eta)x^*}\right).$$

Damit können wir unsere Ergebnisse in Theorem 6 festhalten.

Theorem 6: Sei $Z \sim B(\alpha = 5, \beta = 2)$. Dann kann die Übergangsdichte mit Versicherung mit Hilfe der Appellfunktion F_1 und $u = \min\left(\frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}, 1\right)$, $\eta \in [0, 1]$ sowie $1 \leq x^* \leq x^{(\eta)*}$ durch folgende Ausdruck ausgewertet werden:

Für $y_1 \leq y_0$ lautet die Dichtefunktion $p_G(y_1|y_0) =$

$$\frac{\gamma^{(\eta)}}{B(5, 2)} \cdot \left(y_0 - x^{(\eta)*}\right)^{\gamma^{(\eta)}} \cdot \left(\frac{u^5 \cdot (1 - \eta)^{\gamma^{(\eta)}} \cdot F_1\left(5; -\gamma^{(\eta)}, 1 + \gamma^{(\eta)}; 6; \frac{-\eta u}{1 - \eta}, \frac{ux^{(\eta)*}}{y_1 - (1 - \eta)x^{(\eta)*}}\right)}{5 (y_1 - (1 - \eta)x^{(\eta)*})^{1 + \gamma^{(\eta)}}} - \frac{u^6 \cdot (1 - \eta)^{\gamma^{(\eta)}} \cdot F_1\left(6; -\gamma^{(\eta)}, 1 + \gamma^{(\eta)}; 7; \frac{-\eta u}{1 - \eta}, \frac{ux^{(\eta)*}}{y_1 - (1 - \eta)x^{(\eta)*}}\right)}{5 (y_1 - (1 - \eta)x^{(\eta)*})^{1 + \gamma^{(\eta)}}} \right).$$

Für $y_1 \geq y_0$ lautet die Dichtefunktion $p_G(y_1|y_0) =$

$$\frac{1}{30 (y_1 - (1 - \eta)x^*)^{1 + \gamma}} \cdot (1 - \eta)^\gamma \cdot F_1\left(5, -\gamma, 1 + \gamma, 7, \frac{-\eta u}{1 - \eta}, \frac{ux^*}{y_1 - (1 - \eta)x^*}\right).$$

4.3 Die Armutswahrscheinlichkeit mit Versicherung für ein deterministisches Verlustereignis

Die Armutswahrscheinlichkeit für den deterministischen Fall mit nur einem Verlustereignis lautet

$$Q_q(x) = \int_0^1 p_q(y|x) dy.$$

Die Einführung einer Versicherung in das Modell verändert die Übergangsdichte und wir erhalten dafür

$$p_q^{(\eta)}(y_1|y_0) = \frac{\gamma^{(\eta)} \cdot (1 - \eta + \eta(1 - q))^{\gamma^{(\eta)}} \cdot (y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}}}{\left(y_1 - (1 - \eta + \eta(1 - q))x^{(\eta)*}\right)^{1+\gamma^{(\eta)}}} \cdot \mathbb{1}_{\left\{1-q \leq \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0^\eta}\right\}}.$$

Mit der Einführung einer Versicherung verändert sich die Formel für die Berechnung der Armutswahrscheinlichkeit für $1 < y_0 < \infty$ und $\eta \in [0, 1]$ nicht:

$$\begin{aligned}
Q_q^{(\eta)}(y_0) &= \int_0^1 p_q^{(\eta)}(y_1|y_0) dy_1 \\
&= \int_0^1 \frac{\gamma^{(\eta)} \cdot (1 - \eta + \eta(1 - q))^{\gamma^{(\eta)}} \cdot (y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}}}{\left(y_1 - (1 - \eta + \eta(1 - q))x^{(\eta)*}\right)^{1+\gamma^{(\eta)}}} \cdot \mathbb{1}_{\{1-q \leq \frac{y_1 - y_0 + \eta y_0}{y_0 \eta}\}} dy_1 \\
&= \gamma^{(\eta)} (1 - \eta q)^{\gamma^{(\eta)}} (y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}} \int_0^1 \frac{\mathbb{1}_{\{(1-q)y_0 \eta + y_0 - \eta y_0 \leq y_1\}} dy_1}{\left(y_1 - (1 - \eta q)x^{(\eta)*}\right)^{1+\gamma^{(\eta)}}} \\
&= \gamma^{(\eta)} (1 - \eta q)^{\gamma^{(\eta)}} (y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}} \int_0^1 \frac{\mathbb{1}_{\{(-q\eta+1)y_0 \leq y_1\}} dy_1}{\left(y_1 - (1 - \eta q)x^{(\eta)*}\right)^{1+\gamma^{(\eta)}}} \\
&= \gamma^{(\eta)} (1 - \eta q)^{\gamma^{(\eta)}} (y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}} \int_{(-q\eta+1)y_0}^1 \left(y_1 - (1 - \eta q)x^{(\eta)*}\right)^{-1-\gamma^{(\eta)}} dy_1 \\
&= \gamma^{(\eta)} (1 - \eta q)^{\gamma^{(\eta)}} (y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}} \frac{\left(y_1 - (1 - \eta q)x^{(\eta)*}\right)^{-\gamma^{(\eta)}}}{(-\gamma^{(\eta)})} \Bigg|_{y_1=y_0(1-q\eta)}^{y_1=1} \\
&= (-1)(1 - \eta q)^{\gamma^{(\eta)}} (y_0 - x^{(\eta)*})^{\gamma^{(\eta)}} \left[\left(1 - (1 - \eta q)x^{(\eta)*}\right)^{-\gamma^{(\eta)}} - \right. \\
&\quad \left. - \left((1 - \eta q)(y_0 - x^{(\eta)*})\right)^{-\gamma^{(\eta)}} \right] \\
&= \frac{-\left((1 - \eta q)(y_0 - x^{(\eta)*})\right)^{\gamma^{(\eta)}}}{\left(1 - (1 - \eta q)x^{(\eta)*}\right)^{\gamma^{(\eta)}}} - \frac{-\left((1 - \eta q)(y_0 - x^{(\eta)*})\right)^{\gamma^{(\eta)}}}{\left((1 - \eta q)(y_0 - x^{(\eta)*})\right)^{\gamma^{(\eta)}}}.
\end{aligned}$$

Damit heißt die Lösung

$$Q_q^{(\eta)}(y_0) = 1 - \left(\frac{(1 - \eta q)(y_0 - x^{(\eta)*})}{1 - (1 - \eta q)x^{(\eta)*}} \right)^{\gamma^{(\eta)}}.$$

Mit $\eta = 1$

$$\begin{aligned} Q_q^{(\eta)}(y_0) &= 1 - \left(\frac{(1 - q)(y_0 - x^{(\eta)*})}{1 - (1 - q)x^{(\eta)*}} \right)^{\gamma^{(\eta)}} \\ &= 1 - \left(\frac{(1 - q)(y_0 - 1)}{q} \right)^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

weil $x^{(\eta)*} = 1$ und $\gamma^{(\eta)} = \frac{1}{r^{(\eta)}} = \frac{1}{r - (1-a)c(1+\delta)(1-\eta)\lambda q} = \frac{1}{r}$.

Bemerkung: Als Fazit von diesem Abschnitt lässt sich festhalten, dass alle Berechnungen für die Armutswahrscheinlichkeit mit Versicherung $Q^{(\eta)}$ analog gehen, nur eben mit einer anderen Dichte.

4.4 Die Illustration der Armutswahrscheinlichkeit mit der Beta-Verteilung

In den folgenden Abbildungen sind die Ergebnisse der iterativen numerischen Lösungsverfahren präsentiert. Für nähere Details z.B. bzgl. Code und Implementierung siehe in der Projekt-Ausarbeitung von „Projekt TM“ [32].

Für die Implementierung der Modelle und die Generierung der Graphiken wurde das Statistikprogramm „R.3.3.3“ verwendet.

Die folgende Graphik 4.1 bzw. auch der Grenzfall 4.2 zeigt den Verlauf der Armutswahrscheinlichkeit einmal mit einer Versicherung und einmal ohne einer Versicherung.

Die schwarze(n) Linie(n) illustriert/illustrieren die Armutswahrscheinlichkeit ohne einer Versicherung, und die rote(n) Linie(n) die Armutswahrscheinlichkeit mit einer Versicherung. Die Parameter hierfür sind, $\alpha = 15, \beta = 2, \lambda = 1, a = 0.5, b = 1, c = 0.4, I^* = 1, \eta = 0.5$ und $\delta = 4$.

Bemerkung: Der Sicherheitsaufschlag δ hat in dieser Illustration einen grotesk hohen Wert von 400%. Allerdings schaffen wir es nur mit diesen Parametern die Abbildung *Figure 5, Seite 1019* aus der Arbeit [31] nachzubilden.

Abbildung 4.1: Illustration Iteratives Verfahren für die Armutswahrscheinlichkeit mit und ohne einer Versicherung

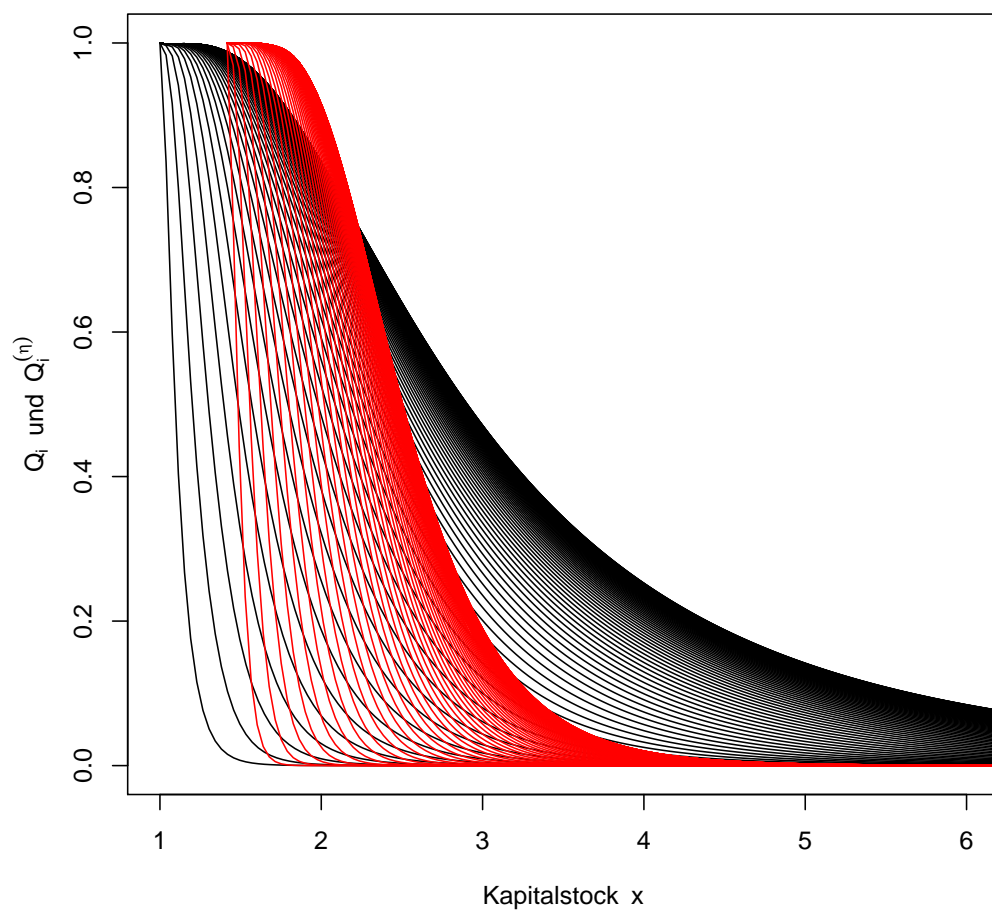
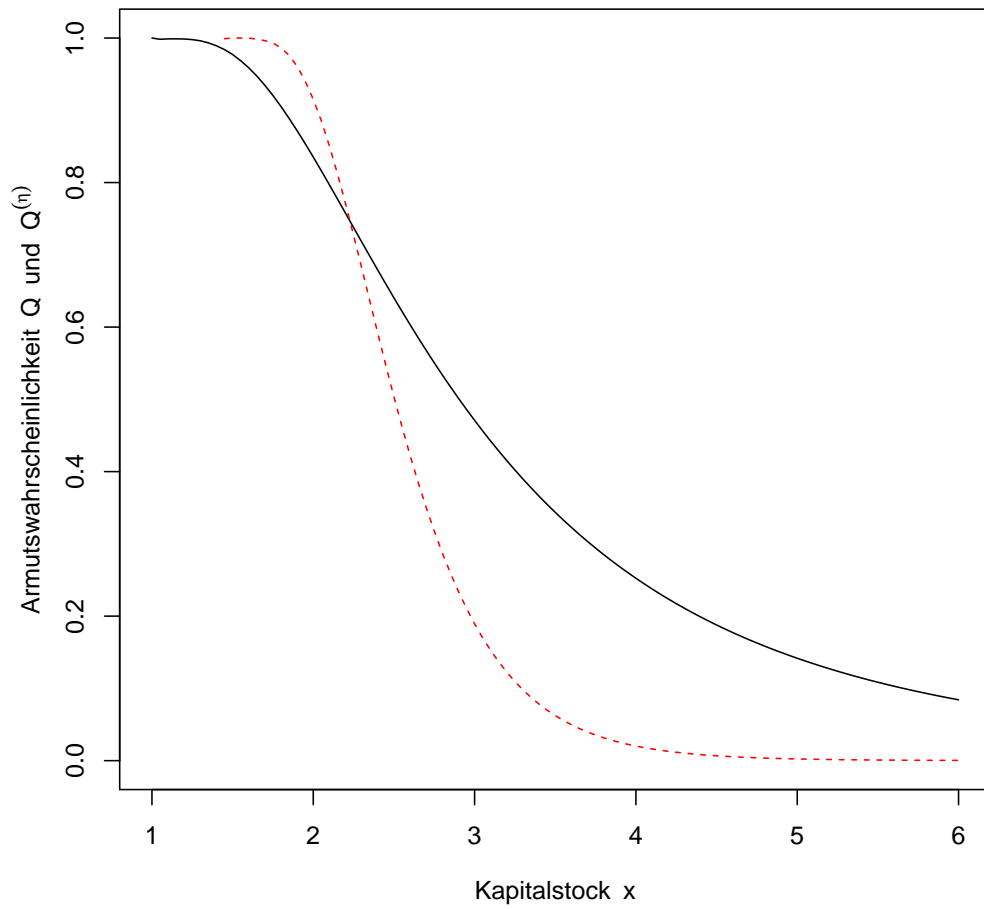


Abbildung 4.2: Armutswahrscheinlichkeit mit und ohne einer Versicherung



5 Konklusion und Ausblick

Abschließend soll eine kritische Würdigung des in dieser Masterarbeit besprochenen Risikomodells und der erhaltenen Ergebnisse erfolgen.

Eine der großen Stärken des Modells liegt darin, dass dieses relativ umfassend ist und insbesondere das *klassische Risikomodell* in die Überlegungen einbezieht, sowie die Möglichkeit schafft, exponentiellen Vermögenszuwachs zwischen zwei Ereignissen zu modellieren. Neu ist im Vergleich zu vielen konkurrierenden Modellen vor allem, dass den betrachteten Haushalten ermöglicht wird eine Versicherung zu erwerben.

Die Gestalt des Risikomodells erlaubt eine ausführliche Behandlung der Theorie und der analytischen Darstellungen der Armutswahrscheinlichkeiten in Spezialfällen. Des Weiteren ist über die für die Praxis des Versicherungsalltags wichtigen Ruinwahrscheinlichkeiten in endlicher Zeit noch gar nichts bekannt. Damit stellt das Modell eine idealisierte Sichtweise dar.

Als Quintessenz aller Überlegungen lässt sich festhalten, dass das in dieser Masterarbeit betrachtete Risikomodell sowohl aus theoretischer als auch aus praktischer Sicht von großem Interesse ist. Wenn ein Verfahren gefunden wird, mit dem die Armutswahrscheinlichkeiten in endlicher Zeit berechnet werden können, so lässt sich seine Bedeutung für die Praxis deutlich steigern. Außerdem wird in diesem Modell versucht, Trends bei den Prämieinnahmen sowie bei der Vermögenshortung mit zu berücksichtigen.

Unsere stochastischen Modelle zeigen, dass jeder Haushalt mit einer bestimmten positiven Wahrscheinlichkeit arm werden kann. Besondere Bedeutung kommt hierbei dem Anfangsvermögen zu: Je höher dieses ist, desto geringer ist die Armutswahrscheinlichkeit, innerhalb einer gewissen Zeit in die Armutsfalle zu schlittern.

Gegen Ende der Arbeit wird noch die Möglichkeit einer Versicherung mit Selbstbeteiligung studiert. Bei unserem Modell stellt sich heraus, dass die Armutswahrscheinlichkeit durch die Einführung einer Versicherung unter bestimmten Umständen reduziert wird. Sie kann allerdings auch dazu führen, dass alle Haushalte mit Wahrscheinlichkeit 1 in die Armutsfalle geraten. Eine Versicherung wirkt sich demnach nicht zwangsläufig vorteilhaft auf einen Haushalt aus. Alle diese Ergebnisse haben auch ihre Gültigkeit für eine Vollversicherung (einer Versicherung ohne Selbstbeteiligung).

Im folgenden Abschnitt gebe ich einige ausgewählte Quellen für jene Arbeiten an, die nach dem Artikel [31] im Jahre 2011 zu dem Thema der Armutsfalle veröffentlicht wurden. Informationen über Literaturverzeichnisse vor der Veröffentlichung der Arbeit [31] finden sich im Artikel selbst.

Aus dem Jahre 2012 hat sich eine Master-Thesis [15] von Azra Dedic gefunden, in der ausgehend von der Arbeit [31] der deterministische Fall mit nur einem Verlustereignis studiert wird. In dieser Arbeit wird untersucht, ab welchem Vermögensstock sich eine Versicherung für einen Haushalt rentiert.

Eine ausführlichere Studie zu diesem Thema findet sich etwa in der Dissertation [28] von Sarah Janzen. Die Autorin entwickelt ein dynamisches stochastisches Modell eines Haushaltes mit einer möglichen Armutsfalle. Dabei geht sie der Frage nach, wie durch eine Versicherung ein Haushalt in Kenia nicht in die Armutsfalle hineingezogen wird.

In einem weiteren Artikel [11] von Michael Carter, Sarah Janzen und Quentin Stoeffler wird ausgeführt, dass Versicherungen keine einfachen Standard-Lösungen für die Auswirkungen der Klimaänderung und der mangelnden Versorgung bieten. Abweichend dazu ergibt die Untersuchung jedoch, dass mit viel technischer und institutioneller Kreativität eine Versicherung für Haushalte mit einem Kapitalstock nahe der Armutsgrenze trotzdem angeboten werden kann.

Im Artikel [27] von Sarah Janzen, Michael Carter und Munenobu Ikegami wird gezeigt, wie staatlich subventionierte Versicherungen mittellose Haushalte unterstützen kann, um der Armutsfalle zu entkommen.

In einer weiteren Studie [10] untersuchen die Autoren Michael Carter, Munenobu Ikegami und Sarah Janzen die Haushalte im nördlichen Teil Kenias, die von Dürre betroffen sind und deren Lebensgrundlage die Tierhaltung ist. Hier versprechen Index-basierte Versicherungsprodukte im Verhältnis der Wetter-Kausalität große Abhilfe zu schaffen. Ihr Ansatz liefert eine theoretische und dynamische Bedarfsanalyse einer Index-basierten Tier-Bestandsversicherung. Im Speziellen zeigen die Autoren, wie durch die Existenz einer Versicherung für Haushalte mit einem Kapitalstock nahe der Armutsgrenze ein sichereres Entscheidungsverhalten erreicht wird. Hierbei kommen sie auf die Nicht-Berücksichtigung von individuellen Möglichkeiten der Verhaltensentscheidung im Modell von [31] zurück. Zudem wird untersucht, wie durch die formale Existenz eines Versicherungsmarktes, die Investitionsfreude und Risikobereitschaft von gefährdeten Haushalten positiv beeinflusst und dadurch die Armutsgefahr (auf Dauer) verringert wird.

Eine andere Herangehensweise findet sich im Artikel [13] von Jennifer Denno Cisse und Munenobu Ikegami. In diesem evaluieren die Autoren im nördlichen Kenia die Wechselwirkung zwischen einer Index-basierten Tierbestandsversicherung und der bestehenden Herdengröße sowie der Gesundheit der Kinder per Haushalt. Sie finden heraus, dass Index-basierte Tierbestandsversicherungen die Resilienz der Haushalte in den Trockenperioden deutlich erhöhen.

Im Rahmen der Forschungsarbeit [35] von Helen Stevens-Benefo wird eine multiple Fallstudie in Ghana geschildert. Die Ergebnisse zeigen, welche Informationen für das Funktionieren einer Versicherung benötigt werden. Die Autorin plädiert insbesondere für den Start eines Ausbildungsprogramms zur Sensibilisierung der ghanesischen Bevölkerung für die Notwendigkeit und Vorteile einer Versicherung. Zudem ist die Autorin überzeugt, dass für die Einführung einer Versicherung ein Eingriff der Regierung und strenge Regulierungen nötig sind.

Die Autoren Sommarat Chantarat et al. beschreiben im Artikel [12] die Vertragsauspreisung und die potenziellen Risikogefahren des Prämienfestsetzers. Hierbei werden mögliche Schwierigkeiten diskutiert und Anregungen gegeben bzgl. der Implementierung von Index-basierten Tierbestandsversicherungen.

In der Arbeit [2] von G. Apostolakis, G. van Dijk und P. Drakis wird eine Literaturübersicht zu den aktuellen Forschungsergebnissen der Mikroversicherung in Zusammenhang mit der Armutsfalle gegeben.

In der Ausarbeitung von R. Azais und A. Genadot [4] wird ein statistischer Zugang zur Bestimmung der absorbierenden Wachstums-Fragmentierung vorgestellt. Ausgehend von der Prozessbeobachtung über eine sehr lange Zeit, zeigen sie wie durch eine Semi-Parametrische Methode die Armutswahrscheinlichkeit sowie die Verteilung des Eintrittszeitpunktes in die Armutsfalle zu schlitern, geschätzt werden kann.

Literatur

- [1] Hans-Jürgen Albers und Gabriele Albers-Wodsak. *Volkswirtschaftslehre*. Europa-Fachbuchreihe für wirtschaftliche Bildung. Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel, 2015 (siehe S. 17, 20).
- [2] George Apostolakis, Gert van Dijk und Periklis Drakos. „Microinsurance performance—a systematic narrative literature review“. In: *Corporate Governance* 15.1 (2015), S. 146–170 (siehe S. 108).
- [3] Søren Asmussen und Hansjörg Albrecher. *Ruin probabilities*. 2. Aufl. Bd. 14. Advanced series on statistical science & applied probability. Singapore, Hackensack; NJ: World scientific, 2010 (siehe S. 5, 8).
- [4] Romain Azaïs und Alexandre Genadot. „Semi-parametric inference for the absorption features of a growth-fragmentation model“. In: *TEST* (2015), S. 341–360 (siehe S. 108).
- [5] Christopher B. Barrett, Michael R. Carter und Munenobu Ikegami. *Poverty traps and social protection*. Preprint, available at http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1141881. 2008 (siehe S. 36).
- [6] Armando Barrientos und David Hulme. *Social protection for the poor and poorest: Concepts, policies and politics*. Springer Verlag, 2016 (siehe S. 36).
- [7] J. Blümlein und C. Schneider. „Multiple hypergeometric series: Appell series and beyond“. In: *Computer Algebra in Quantum Field Theory*. Springer, 2013, S. 305–324 (siehe S. 96).
- [8] Samuel Bowles, Steven N. Durlauf und Karla Hoff. *Poverty traps*. Princeton University Press, 2006 (siehe S. 2, 4).

- [9] Lukas Breiteneder. „Summe von Schäden mit heavy tailed Verteilungen unter Berücksichtigung von Abhängigkeitsstrukturen“. Diplomarbeit. Technische Universität Wien: Institut für Wirtschaftsmathematik, 2011. 88 Bl.
- [10] Michael R. Carter, Munenobu Ikegami und Sarah A. Janzen. *Dynamic demand for index-based asset insurance in the presence of poverty traps*. Preprint, available at http://www.munichrefundation.com/de/dms/MRS/Documents/Microinsurance/2011_IMC/S13_MIC2011_Paper_Jansen.pdf. 2011 (siehe S. 107).
- [11] Michael R. Carter, Sarah A. Janzen und Quentin Stoeffler. *Can Insurance Help Manage Climate Risk and Food Insecurity? Evidence from the Pastoral Regions of East Africa*. Preprint, available at www.montana.edu/sjanzen/caninsuancehelpmanageclimateriskfoodinsecurity.pdf. 2016 (siehe S. 106).
- [12] Sommarat Chantarat u. a. „Designing index-based livestock insurance for managing asset risk in northern Kenya“. In: *Journal of Risk and Insurance* 80.1 (2013), S. 205–237 (siehe S. 108).
- [13] Jennifer Denno Cissé und Munenobu Ikegami. *Does insurance improve resilience?* Preprint, available at <http://publications.dyson.cornell.edu/grad/candidates/2016/Dyson-JenCisse-Paper.pdf>. 2016 (siehe S. 107).
- [14] Mark H.A. Davis. *Markov Models & Optimization*. Bd. 49. Monographs on statistics and applied probability. Boca Raton, Fla. [u.a.]: Chapman & Hall/CRC Press, 1993 (siehe S. 16).
- [15] Azra Dedic. „Optimal insurance under poverty traps“. Master-Thesis. Wirtschaftsuniversität Wien: Institut für Betriebswirtschaftslehre, 2012. 46 Bl. (Siehe S. 106).
- [16] Anton Frantzke. *Grundlagen der Volkswirtschaftslehre; mikroökonomische Theorie und Aufgaben des Staates in der Marktwirtschaft*. 2., überarb. Auflage. Praxisnahes Wirtschaftstudium. Stuttgart: Schäffer-Poeschel, 2004.
- [17] Riccardo Gatto. *Stochastische Modelle der aktuariellen Risikotheorie: Eine mathematische Einführung*. Springer-Lehrbuch Masterclass. 2014 (siehe S. 5).

- [18] Hans U. Gerber. *An introduction to mathematical risk theory*. Bd. 8. S. S. Huebner Foundation monograph series. Homewood, Ill.: Irwin, 1979 (siehe S. 5).
- [19] Hans U. Gerber. „Martingales in Risk Theory“. In: *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker* 73 (1973), S. 205–216 (siehe S. 31).
- [20] Daniela Gius. „Actuarial Risk Models and Piecewise Deterministic Markov-Processes“. Diploma-Thesis. Technische Universität Graz: Institut für Analysis und Zahlentheorie, 2005. 92 Bl. (Siehe S. 31–33).
- [21] Jan Grandell. *Aspects of risk theory*. Corr. 2. print. Springer series in statistics : Probability and its applications. New York, NY [u.a.]: Springer, 1992.
- [22] World Bank Group. *Poverty and shared prosperity 2016: Taking on Inequality*. Washington DC: World Bank, 2016 (siehe S. 2, 4).
- [23] Tomasz Rolski und Hanspeter Schmidli und Volker Schmidt und Jozef Teugels. *Stochastic processes for insurance and finance*. Bd. 505. Wiley series in probability and statistics. John Wiley & Sons, 2009 (siehe S. 5, 7–9, 11, 13, 14, 31–33).
- [24] Michiel Hazewinkel, Hrsg. *Encyclopaedia of mathematics; an updated and annot. transl. of the Soviet "Mathematical encyclopaedia"*. [Library ed. in 10 vol.] Verlag Reidel, Dordrecht; Aus d. Russ. übers. Dordrecht [u.a.]: Kluwer Academic Publishers, 2000 (siehe S. 43).
- [25] Christian Hipp und Reinhard Michel. *Risikotheorie; stochastische Modelle und statistische Methoden*. Bd. 24. Schriftenreihe angewandte Versicherungsmathematik. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1990.
- [26] Christian Pieter Hoffmann und Pierre Bessard. *Das Ende der Armut: Chancen einer globalen Marktwirtschaft*. Edition Liberales Institut, 2012, S. 219.
- [27] Sarah A. Janzen, Michael R. Carter und Munenobu Ikegami. *Asset insurance markets and chronic poverty*. Preprint, available at http://arefiles.ucdavis.edu/uploads/filer_public/8e/38/8e383815-e603-4987-bd46-cfdac180cf2e/asset_insurance_markets_and_chronic_poverty_jde.pdf. 2016 (siehe S. 107).

- [28] Sarah Ann Janzen. „Insuring Against a Poverty Trap“. Dissertation. University of California, 2013 (siehe S. 106).
- [29] Richard Kiener. „Die ökonomische Dynamik der Armutsfalle als Markov’sches Entscheidungsproblem (stationäre Verteilungen und Stoppzeiten)“. Magisterarbeit. Universität Wien: Institut für Volkswirtschaftslehre, 2010. 47 Bl.
- [30] Richard Kiener. „Stochastisch-dynamische Modellierung am Beispiel der Armutsfalle“. Diplomarbeit. Universität Wien: Institut für Volkswirtschaftslehre, 2010. 156 Bl.
- [31] Raimund M. Kovacevic und Georg Ch. Pflug. „Does Insurance Help to Escape the Poverty Trap?—A Ruin Theoretic Approach“. In: *Journal of Risk and Insurance* 78.4 (2011), S. 1003–1028 (siehe S. 4, 7, 17, 26, 32, 75, 102, 106, 107).
- [32] Emil Marinov. „Projekt TM (Finanz- und Versicherungsmathematik): Modell-Implementierung um Fragen der Armutsfalle zu beantworten“. Projektarbeit. Technische Universität Graz: Institut für Analysis und Zahlentheorie, 2017 (siehe S. 78, 102).
- [33] Jeffrey Sachs. *Das Ende der Armut; Ein ökonomisches Programm für eine gerechtere Welt*. Übers. von Udo Rennert und Thorsten Schmidt. Lizenzausgabe. Bd. 511. Schriftenreihe der Bundeszentrale für politische Bildung. 2006.
- [34] Paul Anthony Samuelson und William D. Nordhaus. *Volkswirtschaftslehre: das internationale Standardwerk der Makro- und Mikroökonomie*. 3., aktualisierte Auflage. mi-Fachverlag, Redline, 2007 (siehe S. 2, 4, 17, 18).
- [35] Helen Stevens-Benefo. „Perceptions of Home and Small Business Owners on Insurance in Accra, Ghana“. Dissertation. Walden University, 2015 (siehe S. 107).
- [36] Florent Etienne de Vylder. *Advanced risk theory; a self-contained introduction*. Collection “Actuariat”. Bruxelles: Editions de l’Université de Bruxelles, 1997.