



Sarina Haschek, BSc

**Finite Elemente Methoden
für inverse Probleme
zur Identifikation
der Streckenrauigkeit**

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieurin

Masterstudium Technomathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Prof. Dr. O. Steinbach

Institut für Numerische Mathematik

Graz, Oktober 2017

Vorwort

Die vorliegende Masterarbeit entstand im Rahmen einer Kooperation zwischen der AVL LIST GmbH und der Technischen Universität Graz. Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines geeigneten Verfahrens zu Berechnung der Streckenrauigkeit anhand gegebener Messdaten. Das Thema wurde von Herrn Dr. Rupert Scheucher (AVL LIST GmbH) initiiert.

Die Betreuung seitens der AVL LIST GmbH ist ebenfalls durch Herrn Dr. Rupert Scheucher erfolgt. Ich möchte mich an dieser Stelle für die mir gebotene Möglichkeit zur Erstellung dieser Arbeit, sowie für die hervorragende Zusammenarbeit und die freundliche Aufnahme in seinem Team bedanken.

Die wissenschaftliche Betreuung seitens der Technischen Universität Graz fand durch Herrn Prof. Dr. Olaf Steinbach vom Institut für Numerische Mathematik statt. Ich möchte mich besonders für die anregenden Diskussionen, die zum Grundstein der Qualität der vorliegenden Arbeit beigetragen haben, sowie für die ausgezeichnete Unterstützung bedanken.

Ich bedanke mich auch für die außerordentlich gute Zusammenarbeit zwischen der Technischen Universität Graz und der AVL LIST GmbH.

Ein großer Dank geht an meinen Partner, meinen Sohn und meine Familie, die viel Geduld zeigten und mich stets unterstützt haben.

Zusammenfassung

Diese Masterarbeit beschäftigt sich mit der Lösung inverser Probleme. Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Streckenidentifikation. Anhand gegebener Messdaten ist im Speziellen die Streckenrauigkeit zu ermitteln.

Zur Abbildung des vorliegenden Systems wird ein Modell, bestehend aus sieben Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, aufgestellt. Die Komplexität des Modells stellt eine besondere Herausforderung an die Ermittlung eines effizienten numerischen Verfahrens zur Berechnung einer Lösung dar.

Um eine vereinfachte Betrachtung zu ermöglichen, wird das komplexe System auf eine Differentialgleichung der ersten Ordnung reduziert. In Folge werden verschiedene Lösungskonzepte entwickelt. Insbesondere das Konzept der Variationsformulierung, sowie die Diskretisierung mit der Finiten Elemente Methode, bieten im vorliegenden Fall geeignete Näherungslösungen.

Abschließend wird die entwickelte Methode für eine Differentialgleichung der ersten Ordnung auf das gesamte Modell erweitert und angewandt.

Abstract

This master's thesis deals with the solution of inverse problems. The goal of this work is the development of a numerical method for road identification. In detail, road roughness is to be derived from measurement data.

In order to depict the investigated system, a model consisting of seven differential equations of the second order is developed. The complexity of the derived model presents high challenges concerning the efficiency of a numerical solution method.

To facilitate a simplified analysis, the complex system is reduced to a single differential equation of the first order. Subsequently multiple solution methods are developed. Specifically, the application of variational formulation, in combination with finite element methods, delivers a superior approximation result.

In conclusion, the developed approach for a single differential equation of the first order is expanded and applied to the full model of seven differential equations of the second order.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	11
1 Grundlagen	13
1.1 Aufstellen der Kräftegleichgewichte	13
1.2 Konstanten und Anfangsbedingungen	16
1.3 Lösung des Differentialgleichungssystems	17
2 Problemstellung	23
2.1 Reduktion des Problems	23
2.2 Adjungierter Zustand	24
2.2.1 Diskretisierung	26
2.2.2 Konvergenz	27
2.2.3 Anwendungen	29
2.3 Variationsformulierung	38
2.3.1 Diskretisierung der Variationsformulierung	41
2.3.2 Anwendung der Variationsformulierung	47
3 Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung	55
3.1 Optimalitätssystem	55
3.2 Anwendung am vertikalen Modell	60

Einleitung

Diese Masterarbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Streckenidentifikation, im Speziellen der Streckenrauigkeit. Anhand gegebener Messdaten, die man aufgrund des Abfahrens einer Strecke erhält, wird auf die ursprüngliche Weganregung, d.h. die Charakteristik der Fahrbahnoberfläche der Straße zurückgeschlossen. Diese Messdaten hängen von den unterschiedlichsten Faktoren ab, daher ist die exakte Ermittlung der Fahrbahn nicht trivial. Die Faktoren sind einerseits die Federsteifigkeit und Dämpfungskonstanten sowie andererseits die Masse des Fahrzeuges und die Masse der Reifen. Des Weiteren hat die Beschaffenheit der Fahrbahn einen großen Einfluss.

Im Motorsport stellt die Ermittlung der Weganregung eine besondere Rolle dar. Sie kann einen Vorteil für das Rennverhalten eines Fahrzeuges bringen. Durch das Wissen über die Fahrbahnbeschaffenheit kann eine bessere Performance erzielt werden, dies ist wiederum entscheidend für bessere Resultate. Ziel der AVL-VSM Simulation und des somit erhaltenen Wissens über die Fahrbahnbeschaffenheit ist die Minimierung der Rundenzeit.

Durch rekursive Kontrollprozesse ist es möglich, anhand der Messdaten, die in diesem Fall gemessene Dämpferwege sind, und der vertikalen Radbeschleunigungen, auf die ursprüngliche Weganregung der Straße zu schließen. Vorerst wird eine künstlich erzeugte Straße verwendet, um so Messdaten zu erzeugen. Beim Einsatz des selben Fahrzeugsetups wie bei den tatsächlichen Messungen auf der Strecke müssen die Dämpferwege und die vertikalen Radbeschleunigungen von Simulation und Messung übereinstimmen.

Zu Beginn der Masterarbeit wird ein Modell aufgestellt, welches die vertikale Bewegung des Fahrzeuges beschreiben soll. Die Straße hat nur durch die vertikale Anregung auf das Fahrzeug einen Einfluss. Man erhält anhand des vertikalen Modells daher ausreichende Informationen für die Berechnung der Messdaten. Die Weganregung der Straße wird über das Fahrwerk auf das Fahrzeug übertragen. Unter Berücksichtigung des Gewichtes des Fahrzeuges, der Reifen sowie diverser Feder- und Dämpfungskonstanten wirkt die Anregung auf das aufgestellte vertikale Modell des Fahrzeuges. Mithilfe des Modells lassen sich bei bekannter Fahrbahn die Dämpferanregungen ermitteln. Anhand der nun berechneten Dämpferanregung wird versucht, iterativ auf die bereits bekannte Straße zurückzurechnen. Durch einen Vergleich mit der bereits bekannten Straße lassen sich Rückschlüsse auf die Genauigkeit und Effizienz des verwendeten Verfahrens schließen. Um noch weitere entscheidungsrelevante Informationen über das gewählte Verfahren zu erhalten, wird noch der Fehler, also die Abweichung zwischen ermittelter und bekannter Straße, berechnet.

Die Lösung sowie die Komplexität des Modells stellt eine besondere Herausforderung an

die Ermittlung eines effizienten numerischen Verfahrens dar. Hier handelt es sich um ein inverses Problem, bei dem aufgrund bestimmten Wissens auf die Ursache geschlossen wird. In diesem Fall ist die Ursache zur Wirkung auf das Modell die Weganregung. Die Ermittlung der Weganregung hat im Motorsport eine besondere Bedeutung, um ein optimales Fahrverhalten zu planen und, um bessere Ergebnisse bei den Rundenzeiten zu erhalten.

Als erster Schritt wurden die notwendigen Gleichungen für ein vertikales Modell aufgestellt. Es handelt sich hierbei um ein Differentialgleichungssystem der zweiten Ordnung, welches durch 7 Gleichungen beschrieben wird, siehe (1.1). Des Weiteren wurden die zur Lösung des Gleichungssystems notwendigen Anfangsbedingungen angenommen und entsprechende Konstanten festgelegt.

Durch das Lösen des Differentialgleichungssystems kann man die erzeugten Dämpferwege von einer selbst erstellten virtuellen Straße berechnen. Es ist somit möglich, künstliche Daten für die Dämpferwege zu erstellen. Mit diesen Daten soll nun ein Lösungsansatz ermittelt werden, um auf die Weganregung der Straße schließen zu können. Da die tatsächliche Straße selbst erstellt wurde, kann man gut durch den Vergleich der berechneten Straße mittels Dämpferwege mit der virtuellen Straße einen Überblick über die Effizienz der gewählten Methode erhalten. Die zu lösende Aufgabenstellung ist auf ein inverses Problem zurückzuführen. Bei inversen Problemen wird von einer beobachteten Wirkung eines Systems (den gemessenen Dämpferwegen) auf die Ursache (die Weganregung) zurückgeschlossen.

Kapitel 1 beschäftigt sich mit der Modellbildung. Es wird ein Differentialgleichungssystem zur Abbildung der physikalischen Zusammenhänge zwischen den Dämpferwegen und der Weganregung aufgestellt. Mit Hilfe eines bekannten Streckenverlaufs wird eine exakte Lösung des Differentialgleichungssystems ermöglicht, welche in Folge als Basis für künstliche Messdaten verwendet wird. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit dem Lösen des inversen Problems, welches durch das Differentialgleichungssystem beschrieben wird. Es werden verschiedene Lösungskonzepte präsentiert, um eine effiziente Lösung zu ermöglichen. Kapitel 3 befasst sich im Detail mit dem Lösungskonzept der Variationsformulierung. Dieses wird zuerst für eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, im nächsten Schritt für das gesamte Modell für 7 Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, erweitert und angewandt.

1 Grundlagen

Die Ermittlung der Strecke, insbesondere der Streckenrauigkeit, wird anhand eines "Full Car Model" berechnet. Bei einem "Full Car Model" spielen Komponenten, wie die Masse des Chassis, die Masse der vier Reifen, diverse Feder- und Dämpfungskonstanten sowie der Nick- und Rollwinkel eine wichtige Rolle.

Das vertikale Bewegungsmodell wird anhand des "Full Car Model" beschrieben. Die Bewegungsrichtung des vertikalen Modells ist die z -Achse. Die x -Achse entspricht der Fahrtrichtung des Autos, die y -Achse entspricht der seitlichen Bewegung des Autos.

Das vertikale Modell besteht aus 7 Freiheitsgraden. Diese setzen sich wie folgt zusammen:

1. Vertikale Verschiebung des Autos (Chassis) im Schwerpunkt z_{gc} ,
2. Rotation um die y -Achse, "pitch angle" (Nickwinkel) des Chassis θ ,
3. Rotation um die x -Achse, "roll angle" (Rollwinkel) des Chassis φ ,
4. Vertikale Verschiebung des linken Vorderrades z_1 (siehe Abbildung 1.1),
5. Vertikale Verschiebung des rechten Vorderrades z_2 (siehe Abbildung 1.1),
6. Vertikale Verschiebung des linken Hinterrades z_3 (siehe Abbildung 1.1),
7. Vertikale Verschiebung des rechten Hinterrades z_4 (siehe Abbildung 1.1).

1.1 Aufstellen der Kräftegleichgewichte

Für die 7 Freiheitsgrade lassen sich 7 Differentialgleichungen herleiten. Einerseits verwendet man das Newtonsche Prinzip, welches besagt, dass die Trägheitskräfte eines Körpers mit den angreifenden Kräften im Gleichgewicht stehen,

$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_i \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

wobei n die Anzahl der angreifenden Kräfte darstellt. Andererseits wird der Drallsatz

$$\Theta\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^n M_i \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

hier stellt n die Anzahl der wirkenden Momente dar, verwendet. Diese Formeln wurden aus der Literatur [12] entnommen.

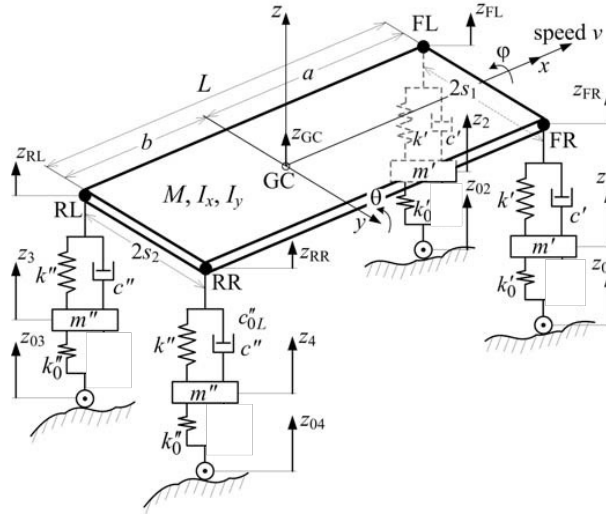


Abbildung 1.1: Skizze des vertikalen Modells [1]

Aus diesen beiden Formeln ergeben sich nun die folgenden 7 Differentialgleichungen, wie in [2] beschrieben, unter der Annahme kleiner Verdrehungen.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{z}_{gc} &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - mg, \\
 I_x\ddot{\varphi} &= s_1(F_1 - F_2) + s_2(F_4 - F_3), \\
 I_y\ddot{\theta} &= a(F_1 + F_2) - b(F_3 + F_4), \\
 m_1\ddot{z}_1 &= k_{01}(z_{01} - z_1) - F_1 - m_1g, \\
 m_2\ddot{z}_2 &= k_{02}(z_{02} - z_2) - F_2 - m_2g, \\
 m_3\ddot{z}_3 &= k_{03}(z_{03} - z_3) - F_3 - m_3g, \\
 m_4\ddot{z}_4 &= k_{04}(z_{04} - z_4) - F_4 - m_4g,
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 F_1 &= k_1(z_1 - z_{gc} - s_1\varphi - a\theta) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_{gc} - s_1\dot{\varphi} - a\dot{\theta}), \\
 F_2 &= k_2(z_2 - z_{gc} + s_1\varphi - a\theta) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_{gc} + s_1\dot{\varphi} - a\dot{\theta}), \\
 F_3 &= k_3(z_3 - z_{gc} + s_2\varphi + b\theta) + c_3(\dot{z}_3 - \dot{z}_{gc} + s_2\dot{\varphi} + b\dot{\theta}), \\
 F_4 &= k_4(z_4 - z_{gc} - s_2\varphi + b\theta) + c_4(\dot{z}_4 - \dot{z}_{gc} - s_2\dot{\varphi} + b\dot{\theta}).
 \end{aligned}$$

Durch Umformungen erhält man folgendes Differentialgleichungssystem:

$$M\ddot{z}(t) + R\dot{z}(t) + Kz(t) = F(t). \quad (1.1)$$

Die Matrix M wird als Massenmatrix, die Matrix R als Dämpfungsmatrix, die Matrix K als Federmatrix und der Vektor F als Kraftvektor bezeichnet. Diese haben folgende Form:

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_{gc} \\ \varphi \\ \Theta \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & s_1(c_1 - c_2) - s_2(c_3 - c_4) & a(c_1 + c_2) - b(c_3 + c_4) & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \\ s_1(c_1 - c_2) - s_2(c_3 - c_4) & s_1^2(c_1 + c_2) + s_2^2(c_3 + c_4) & s_1 a(c_1 - c_2) + s_2 b(c_3 - c_4) & -s_1 c_1 & s_1 c_2 & s_2 c_3 & -s_2 c_4 \\ a(c_1 + c_2) - b(c_3 + c_4) & a s_1(c_1 - c_2) + b s_2(c_3 - c_4) & a^2(c_1 + c_2) + b^2(c_3 + c_4) & -a c_1 & -a c_2 & b c_3 & b c_4 \\ -c_1 & -s_1 c_1 & -c_1 a & c_1 + c_{01} & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & s_1 c_2 & -c_2 a & 0 & c_2 + c_{02} & 0 & 0 \\ -c_3 & s_2 c_3 & c_3 b & 0 & 0 & c_3 + c_{03} & 0 \\ -c_4 & -s_2 c_4 & b c_4 & 0 & 0 & 0 & c_4 + c_{04} \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 & s_1(k_1 - k_2) - s_2(k_3 - k_4) & a(k_1 + k_2) - b(k_3 + k_4) & -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 \\ s_1(k_1 - k_2) - s_2(k_3 - k_4) & s_1^2(k_1 + k_2) + s_2^2(k_3 + k_4) & s_1 a(k_1 - k_2) + s_2 b(k_3 - k_4) & -s_1 k_1 & s_1 k_2 & s_2 k_3 & -s_2 k_4 \\ a(k_1 + k_2) - b(k_3 + k_4) & a s_1(k_1 - k_2) + b s_2(k_3 - k_4) & a^2(k_1 + k_2) + b^2(k_3 + k_4) & -a k_1 & -a k_2 & b k_3 & b k_4 \\ -k_1 & -s_1 k_1 & -k_1 a & k_1 + k_{01} & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & s_1 k_2 & -k_2 a & 0 & k_2 + k_{02} & 0 & 0 \\ -k_3 & s_2 k_3 & k_3 b & 0 & 0 & k_3 + k_{03} & 0 \\ -k_4 & -s_2 k_4 & b k_4 & 0 & 0 & 0 & k_4 + k_{04} \end{pmatrix},$$

und

$$F(t) = \begin{pmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \\ k_{01} z_{01} - m_1 g \\ k_{02} z_{02} - m_2 g \\ k_{03} z_{03} - m_3 g \\ k_{04} z_{04} - m_4 g \end{pmatrix}.$$

Zum Lösen wird das Differentialgleichungssystem (1.1) zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung umgeformt. Es wird der Vektor $z(t) := y_1(t)$ gesetzt und der Vektor $\dot{z}(t) := y_2(t)$ gesetzt. Es ergeben sich nun folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= -M^{-1} R y_2(t) - M^{-1} K y_1(t) + M^{-1} F(t), \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + b(t), \quad (1.2)$$

mit

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{14} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{14 \times 1}, \\
 A &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & -M^{-1}K & & & -M^{-1}R & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{14 \times 14}, \\
 b &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ M^{-1}F(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{14 \times 1}.
 \end{aligned}$$

1.2 Konstanten und Anfangsbedingungen

Zur Vervollständigung des Modells werden die Konstanten und Anfangsbedingungen benötigt.

Die Konstanten (siehe auch Abbildung 1.1) werden für das aufgestellte Modell (1.2) auf folgenden Werte gesetzt:

- Masse des Autos [kg] : $m = 609$,
- Trägheitsmoment [$kg \cdot m^2$] : $I_y = 308$,
- Trägheitsmoment [$kg \cdot m^2$] : $I_x = 36$,
- Dämpfungskonstante [Ns/m] : $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 6000$,
- Federkonstante [N/m] : $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 50000$,
- Masse des Reifens [kg] : $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 25$,
- Federkonstante beim Reifen in [N/m] : $k_{01} = k_{02} = k_{03} = k_{04} = 230000$,
- Halbe Vorderachsenlänge [m] : $s_1 = 0.75$,
- Halbe Hinterachsenlänge [m] : $s_2 = 0.7$,
- Abstand Vorderachse zum Schwerpunkt [m] : $a = 1.7$,
- Abstand Hinterachse zum Schwerpunkt [m] : $b = 1.3$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Auto in Ruhe, somit gibt es keine Anfangsgeschwindigkeit. In Abhängigkeit von der Straßenoberfläche befinden sich z_1, z_2, z_3, z_4 in einer konstanten Höhe von $0.3 m$. Des Weiteren ist kein Nickwinkel und kein Rollwinkel vorhanden.

Somit lassen sich die Anfangsbedingung wie folgt darstellen:

$$z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3 + z_{01} \\ 0.3 + z_{02} \\ 0.3 + z_{03} \\ 0.3 + z_{04} \end{pmatrix},$$

$$\dot{z}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Lösung des Differentialgleichungssystems

Das zuvor aufgestellte Differentialgleichungssystem erster Ordnung (1.2) wird mithilfe von Matlab exakt gelöst. Für die Erstellung der Lösung wird eine künstlich erzeugte Straße $st(t)$ angenommen. Der Vektor $b(t)$ hängt genau von dieser Weganregung der Straße $st(t)$ ab, dies entspricht den Einträgen für z_{01} , z_{02} , z_{03} und z_{04} . Die Matrix A kann man mit den bekannten Konstanten befüllen. Die in Matlab eingebaute Funktion "ode15s" löst das Gleichungssystem. Durch die direkte Simulation kann man anhand einer gegebenen Straße, von den Werten für z_{01} , z_{02} , z_{03} und z_{04} auf die Dämpfungsanregungen z_1 , z_2 , z_3 und z_4 schließen.

Um einen Überblick auf das System zu erhalten wurde das Differentialgleichungssystem (1.2) für unterschiedliche Straßenbilder berechnet.

In der Abbildung 1.2 wird als Weganregung eine lineare Funktion $st(t) = 20 - 2 \cdot t$ betrachtet. Das Auto bewegt sich mit allen vier Rädern gleichzeitig auf der selben Straße im Zeitintervall $t \in [0, 10]$ Sekunden. Die Anfangsbedingung wurde für z_{01} , z_{02} , z_{03} und z_{04} der Wert $st(0)$ verwendet. In der Grafik "Straße" ist der Verlauf der Straße dargestellt. Die Grafik "Messdaten" zeigt die vier ermittelten Messdaten z_1 , z_2 , z_3 und z_4 . Da auf das Auto für jeden Reifen dieselbe Anregung z_{01} , z_{02} , z_{03} und z_{04} wirkt, haben die Messdaten beinahe dieselben Werte wie die Anregung selbst. In der Grafik "Geschwindigkeit der Messdaten" wird für die einzelnen ermittelten Daten das Geschwindigkeitsverhalten \dot{z}_1 , \dot{z}_2 , \dot{z}_3 und \dot{z}_4 dargestellt. Das Geschwindigkeitsverhalten passt mit der Ableitung der Messdaten zusammen. In der Grafik "Straße und Messdaten" ist ersichtlich, dass die Messdaten ein leicht zeitlich verzögertes Verhalten im Vergleich zur Weganregung aufweisen.

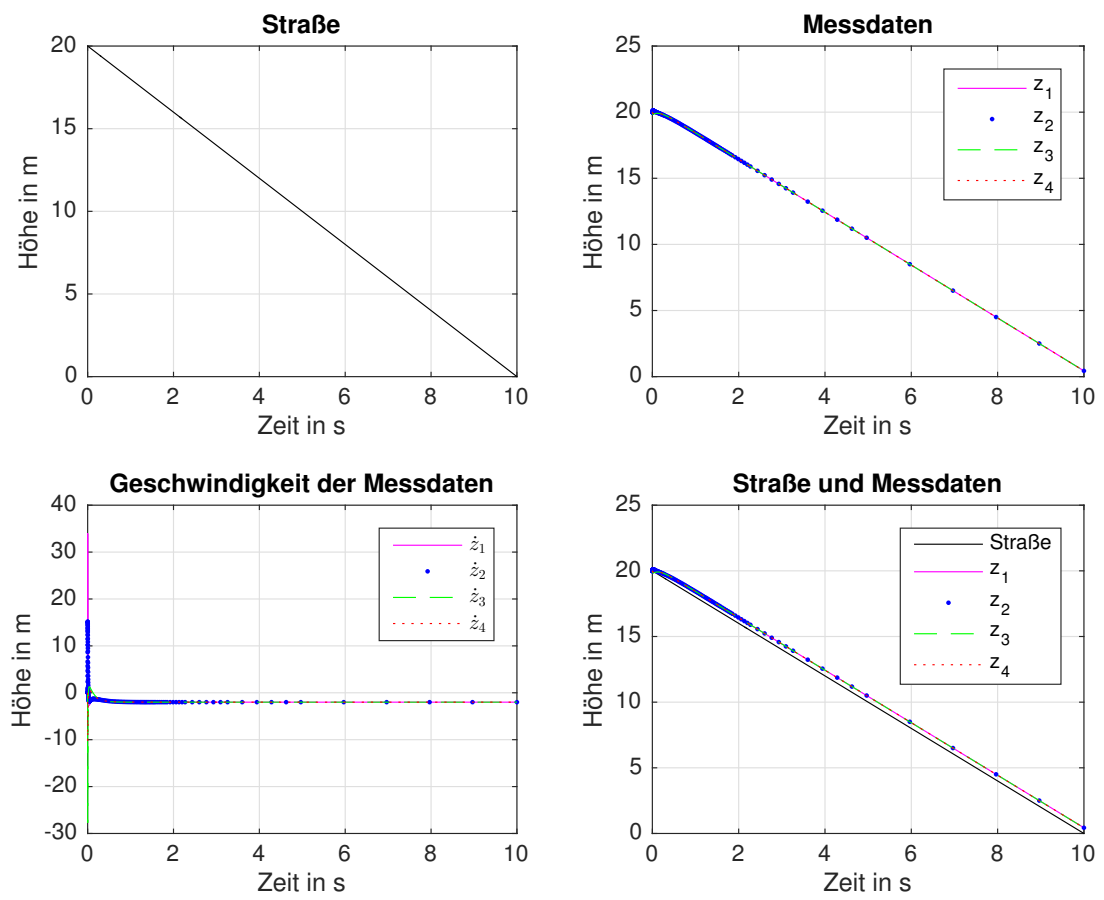


Abbildung 1.2: Lineare Funktion (Gefälle)

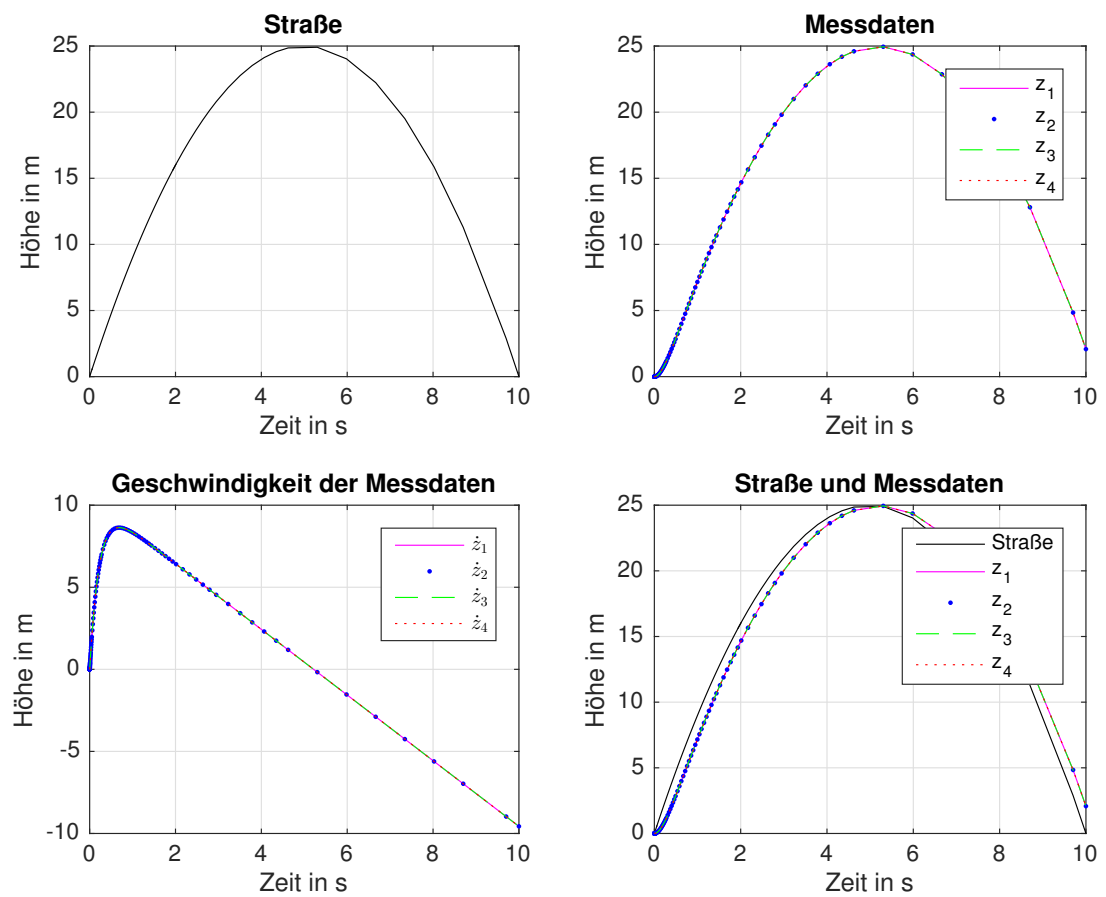


Abbildung 1.3: Quadratische Funktion (Schwelle)

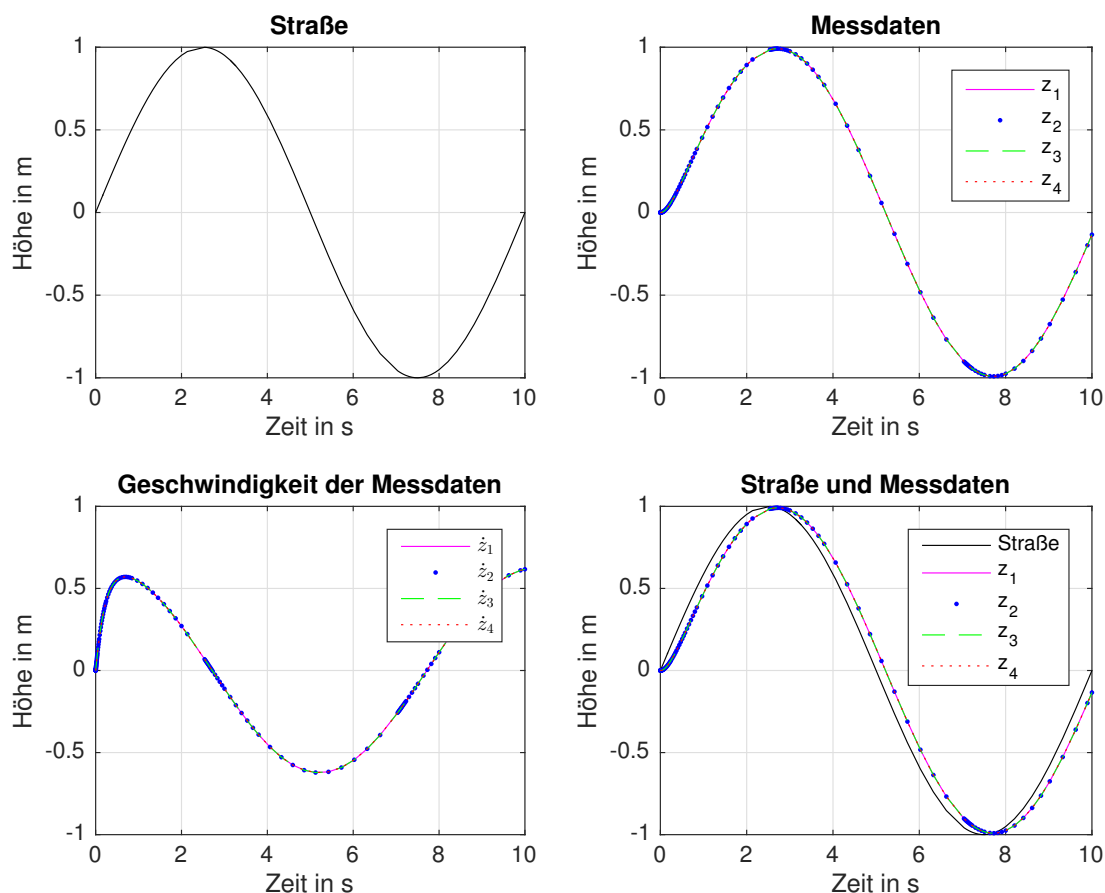


Abbildung 1.4: Sinuskurve (Bodenwelle)

Die Abbildung 1.3 stellt die Anregung durch eine quadratische Funktion $st(t) = -t^2 + 10 \cdot t$ dar. Die Messdaten z_1, z_2, z_3 und z_4 weisen auch für diese Weganregung z_{01}, z_{02}, z_{03} und z_{04} das gleiche Verhalten auf. Auch die berechneten Geschwindigkeiten $\dot{z}_{01}, \dot{z}_{02}, \dot{z}_{03}$ und \dot{z}_{04} weisen das erwartete Verhalten auf. Zuerst findet ein starker Geschwindigkeitsanstieg statt, somit wird in kürzester Zeit das Geschwindigkeitsverhalten der Weganregung erreicht. Danach verhält sich die Geschwindigkeit passend zur Weganregung. In der Grafik "Straße und Messdaten" ist wieder ein zeitverzögertes Verhalten der Messdaten im Hinblick auf die Anregung der Straße zu erkennen. Dies erklärt sich aus der Eigenschaft der Trägheit von Dämpfer und Feder.

In Abbildung 1.4 wird als Weganregung die Funktion $st(t) = \sin(\frac{2\pi}{10} \cdot t)$ betrachtet. Es findet bei den Messdaten ein kleiner Abfall der Messdaten statt. Sobald die Werte der Weganregung erreicht werden, weisen die Messdaten das selbe Verhalten wie die Weganregung auf. Auch hier ist deutlich die leichte zeitliche Verzögerung in der Grafik "Straße und

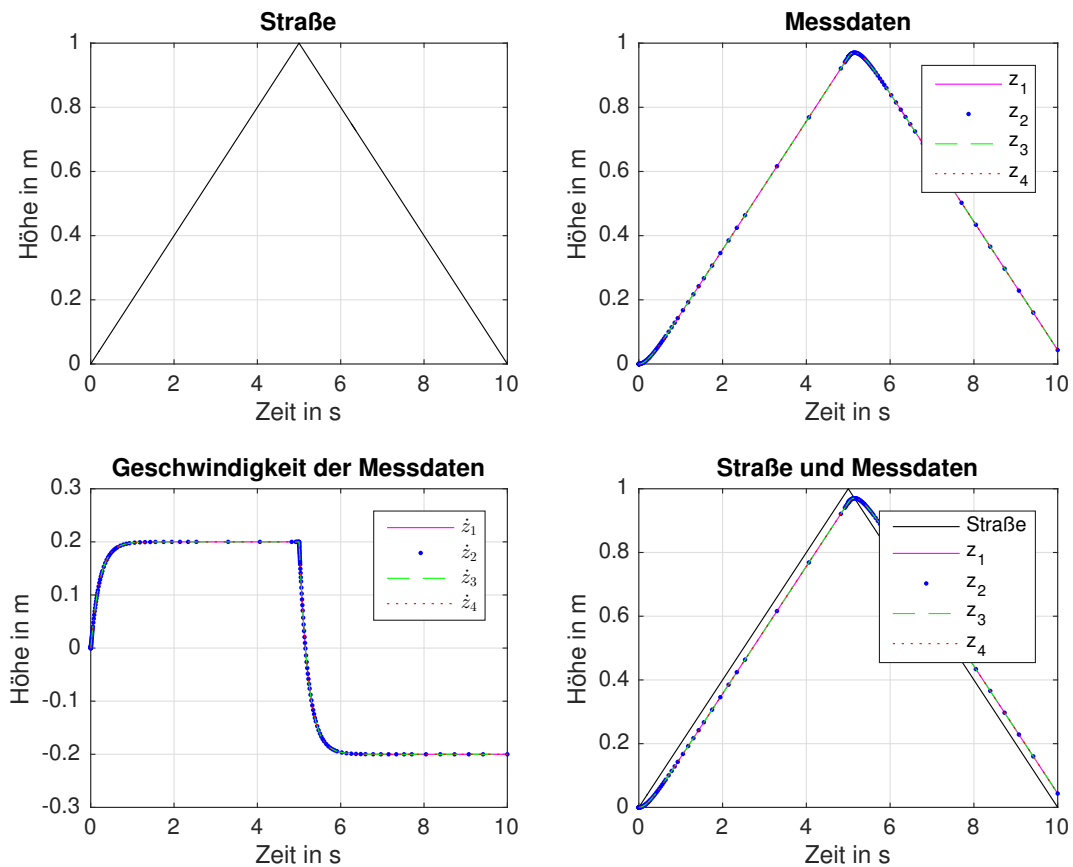


Abbildung 1.5: Betragsfunktion (Spitze Kante)

Messdaten" zu erkennen.

Die Abbildung 1.5 stellt eine Straße $st(t) = -\frac{1}{5} \cdot |t - 5| + 1$ dar. Zum Zeitpunkt $t = 5$ befindet sich ein "Knick" in der Straße. Man hat eine stetige Funktion als Straße, die jedoch in der Stelle $t = 5$ nicht differenzierbar ist. Die Messdaten z_1, z_2, z_3 und z_4 weisen auch hier das gleiche Verhalten wie die Weganregung z_{01}, z_{02}, z_{03} und z_{04} auf. Es findet somit auch in den Messdaten dieser sogenannte "Knick" statt. Wie auch in den vorherigen Beispielen ist eine zeitliche Verzögerung zu erkennen.

Als letztes Beispiel wird die Weganregung betrachtet, die eine Sprungstelle aufweist. Dies kann in der Realität eine Gehsteigkante sein. Abbildung 1.6 stellt eine Funktion, die eine Sprungstelle aufweist, dar. Die Funktion der Straße ist $st(t) = \frac{1}{5}[-\text{sgn}(t - 5) + 1]$, diese hat zum Zeitpunkt $t = 5$ eine Unstetigkeitsstelle. Die Messdaten weisen auch hier, unabhängig von der Sprungstelle, das gleiche Verhalten wie die Weganregung auf. Hier ist die zeitliche Verzögerung nach der Sprungstelle noch deutlicher zu erkennen.

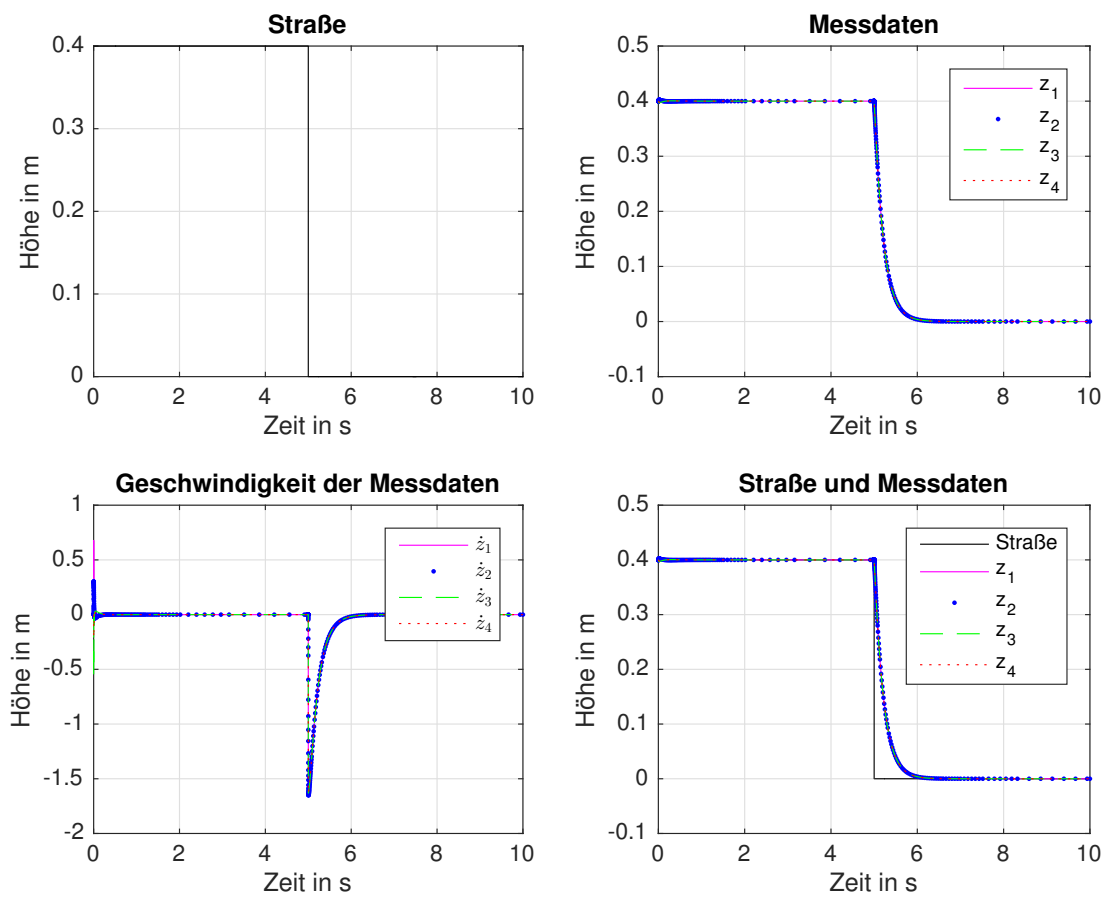


Abbildung 1.6: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante)

2 Problemstellung

In dieser Aufgabenstellung sind die Dämpferwege z_1, z_2, z_3 und z_4 gegeben, dies entspricht den Messdaten $g(t)$. Gesucht ist die Beschaffenheit der Fahrbahn, dies sind die Variablen z_{01}, z_{02}, z_{03} und z_{04} . Des Weiteren sind die Variablen z_{gc}, φ und θ im System unbekannt.

Die Lösung für z_{01}, z_{02}, z_{03} und z_{04} spiegelt die Weganregung der Straße wider. Die Funktion, welche die Fahrbahn beschreibt, muss nicht stetig differenzierbar sein. Ein Beispiel dafür wäre die Kante eines Gehsteiges. Die gegebenen Dämpferwege können für diese Aufgabenstellung durch das Lösen des Differentialgleichungssystems (1.1) erzeugt werden. Dies wurde unter anderem in Kapitel 1.3 erläutert.

Es handelt sich, wie bereits beschrieben, um ein inverses Problem für das Differentialgleichungssystem erster Ordnung (1.2) mit den entsprechenden Anfangsbedingungen. Die Lösung inverser Probleme ist meist schwer zu ermitteln. Um ein Verständnis über einen möglichen Lösungsansatz zu erhalten, wird das Problem vorerst auf eine Differentialgleichung erster Ordnung reduziert.

2.1 Reduktion des Problems

Um einen Überblick über die möglichen Lösungsvorgänge zu erhalten, wird nun eine einzelne Differentialgleichung erster Ordnung betrachtet.

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = ay(t) + r(t) \text{ mit } y(0) = y_0,$$

mit der Lösung

$$y(t) = y_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} r(s) ds.$$

Für das reduzierte Problem sind die Variable a , die Anfangsbedingung y_0 und die Messdaten $g(t)$ gegeben. Gesucht ist nun die Unbekannte $r(t)$, sodass $y(t)$ sich an die Messdaten $g(t)$ annähert. Daraus ergibt sich folgendes zu lösendes Minimierungsproblem:

$$\frac{1}{2} \|y_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} r(s) ds - g(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \frac{\rho}{2} \|r\|_{L_2(0,T)}^2 \rightarrow \min_r.$$

Es handelt sich hier um ein schlecht gestelltes Problem, daher wird zusätzlich der Regularisierungsterm $\frac{\rho}{2} \|r\|_{L_2(0,T)}^2$ addiert. Es wird somit der Fehler bezüglich der zu ermittelten

Straße $r(t)$ minimal gehalten. Die Variable $\rho > 0$ wird Regularisierungsfaktor genannt. Die notwendige Bedingung für ein Minimum ist, dass die Fréchet-Ableitung an einer möglichen Minimalstelle gleich Null ist.

Die Fréchet-Ableitung ist wie folgt definiert [8, S. 229]:

Definition 2.1 (Fréchet-differenzierbar). *Seien X und Y Banachräume. Eine Abbildung $\phi : D(\phi) \subset X \rightarrow Y$ heißt Fréchet-differenzierbar in einem Punkt $x \in \text{int}(D(\phi))$ (innerer Punkt), falls es eine offene Kugel $B_r(x) \subset D(\phi)$ und einen linearen Operator $A \in L(X, Y)$ gibt mit*

$$\lim_{B_r(0) \ni h \rightarrow 0} \frac{\|\phi(x+h) - \phi(x) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Der Operator $\phi'(x) := A$ heißt Fréchet-Ableitung oder Linearisierung von ϕ in x . Die Abbildung ϕ heißt Fréchet-differenzierbar in der offenen Menge $U \subset D(\phi)$, wenn sie in allen Punkten aus U eine Fréchet-Ableitung besitzt. Ist die Abbildung $\phi' : U \rightarrow L(X, Y)$ stetig, so heißt ϕ stetig Fréchet-differenzierbar in U .

2.2 Adjungierter Zustand

Die Lösung der Differentialgleichung $\dot{y} = ay(t) + r(t)$ mit $y(0) = y_0$ lässt sich, wie aus der Analysis bekannt, in eine homogene und partikuläre Lösung aufspalten. Man erhält somit $y = y_h + y_p$, $y_h(0) = y_0$ mit $\dot{y}_p = ay_p + r$, $y_p(0) = 0$. Mithilfe eines Lösungsoperators $S : [H^1(0, T)]' \rightarrow L_2(0, T)$ kann man $y_p = Sr$ darstellen, man erhält nun:

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p, \\ &= y_h + Sr. \end{aligned}$$

Gesucht ist eine Steuerung $r(t)$, und ein zugehöriger Zustand $y(t)$, sodass $y(t) \approx g(t)$ annähert. Aus dem zuvor aufgestellten Minimierungsproblem ergibt sich nun folgende Gestalt für dieses

$$\frac{1}{2} \|y_h + Sr - g\|_{L_2(0, T)}^2 + \frac{\rho}{2} \|r\|_{L_2(0, T)}^2 \rightarrow \min_r. \quad (2.1)$$

Es wurde y_p durch den Lösungsoperator S eliminiert, man erhält somit eine andere Darstellung für die Minimierungsaufgabe (2.1). Hier tritt nur die Steuerung r als Unbekannte auf. Zur Herleitung der Optimalitätsbedingung (2.4) wird das Minimierungsproblem um-

geformt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das innere Produkt in L_2 darstellt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|y_h + Sr - g\|_{L_2(0,T)}^2 + \frac{\rho}{2} \|r\|_{L_2(0,T)}^2 \\
&= \frac{1}{2} \langle Sr + y_h - g, Sr + y_h - g \rangle + \frac{\rho}{2} \langle r, r \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle Sr, Sr \rangle + \frac{1}{2} \langle y_h - g, Sr \rangle + \frac{1}{2} \langle y_h - g, Sr \rangle + \frac{1}{2} \langle y_h - g, y_h - g \rangle + \frac{\rho}{2} \langle r, r \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle S^* Sr, r \rangle + \langle S^* (y_h - g), r \rangle + \frac{1}{2} \|y_h - g\|_{L_2(0,T)}^2 + \frac{\rho}{2} \langle r, r \rangle \rightarrow \min_r.
\end{aligned}$$

Für die Lösung des Minimierungsproblems wird die Fréchet-Ableitung nach r gebildet und diese wird Null gesetzt:

$$\begin{aligned}
S^* Sr + S^* (y_h - g) + \rho r &= 0, \\
S^* \underbrace{(Sr + y_h - g)}_q + \rho r &= 0, \\
\underbrace{S^* q}_{=:p} + \rho r &= 0, \\
p + \rho r &= 0.
\end{aligned}$$

Die eingeführte Variable p wird adjungierter Zustand genannt. Durch den adjungierten Zustand p kann man das dazugehörige adjungierte Problem (2.3) wie kommend beschrieben herleiten. Der adjungierte Zustand p wird mit einer Testfunktion ψ multipliziert:

$$\langle p, \psi \rangle = \langle S^* q, \psi \rangle = \langle q, S\psi \rangle = \langle q, w \rangle \quad \forall \psi \in L_2(0, T),$$

wobei für eine Funktion w der Zusammenhang $\dot{w} = aw + \psi$ gilt, mit $w(0) = 0$. Es folgt die Darstellung für $\psi = \dot{w} - aw$. Nun wird wie folgt, die zuvor beschriebene Darstellung für ψ eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\langle p, \psi \rangle &= \int_0^T p\psi dt \\
&= \int_0^T p(\dot{w} - aw) dt = \underbrace{wp|_0^T}_{=0, \text{ da } p(T)=0} - \int_0^T w\dot{p} + awp dt \\
&= \int_0^T w(-\dot{p} - ap) dt = \langle -\dot{p} - ap, w \rangle.
\end{aligned}$$

Gleichsetzen der beiden Umformungen von $\langle p, \psi \rangle$ ergibt nun:

$$\begin{aligned}
\langle -\dot{p} - ap, w \rangle &= \langle q, w \rangle \\
-\dot{p} - ap &= q \\
-\dot{p} &= ap + q \\
&= ap + Sr + y_h - g \\
&= ap + y_p + \underbrace{y_h - g}_{\tilde{g}} \\
-\dot{p} &= ap + y_p + \tilde{g} \text{ mit } p(T) = 0.
\end{aligned}$$

Man erhält das folgende Optimalitätssystem:
Das primale Problem (vorwärts in der Zeit):

$$y_p = Sr : \dot{y}_p = ay_p + r, \text{ mit } y_p(0) = 0, \quad (2.2)$$

das adjungierte Problem (rückwärts in der Zeit):

$$-\dot{p} = ap + y_p + \tilde{g}, \text{ mit } p(T) = 0, \quad (2.3)$$

und die Optimalitätsbedingung im Zeitintervall $(0, T)$:

$$p + \rho r = 0. \quad (2.4)$$

Jede Lösung (y_p, r) des Minimierungsproblems (2.1) muss gemeinsam mit p das Optimalitätssystem erfüllen, siehe zum Beispiel [11].

2.2.1 Diskretisierung

Das primale und adjungierte Problem sind miteinander gekoppelt. Durch die Optimalitätsbedingung (2.4) kann man p durch r (die Weganregung) substituieren. Daraus ergibt sich $p = -\rho r$. Man erhält somit zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung sowie die dazugehörige Anfangs- und Endbedingung.

Zur numerischen Lösung werden die gekoppelten Differentialgleichungen (2.2) und (2.3) diskretisiert, wobei bei der zweiten Gleichung das p durch das r substituiert wird. Für die Diskretisierung wird das Intervall $[0, T]$ in n gleichmäßige Unterteilungen eingeteilt. Man erhält hierfür die Schrittweite $h = \frac{T}{n}$ mit den Stützstellen $t_k = k \cdot h$. Durch Annäherung der ersten Ableitung mithilfe der Finiten Differenzen Methode ergibt sich nun folgendes System:

$$\frac{y_{p_{k+1}} - y_{p_k}}{h} = ay_{p_k} + r_k, \quad y_{p_0} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{r_{k+1} - r_k}{h} = -ar_k + \frac{1}{\rho}y_{p_k} + \frac{1}{\rho}\tilde{g}_k, \quad r_n = 0. \quad (2.6)$$

Wie in der Literatur [5] beschrieben, lässt sich dies als lineares Gleichungssystem der Form

$$Au = f \quad (2.7)$$

darstellen. Zur Lösung dieses sei auf [3] verwiesen. Mit

$$u = \begin{pmatrix} y_{p_0} \\ r_0 \\ y_{p_1} \\ r_1 \\ y_{p_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{n-2} \\ y_{p_{n-1}} \\ r_{n-1} \\ y_{p_n} \\ r_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g}_1 \\ 0 \\ \tilde{g}_2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{g}_{n-1} \\ 0 \\ \tilde{g}_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\rho}{h}(ha-1) & -1 & \frac{\rho}{h} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+ha & h & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho}{h}(ha-1) & -1 & \frac{\rho}{h} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1+ha & h & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\rho}{h}(ha-1) & -1 & \frac{\rho}{h} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & h & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1+ha & \dots & 0 & \frac{\rho}{h}(ha-1) & -1 & \frac{\rho}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1+ha & h & -1 & \frac{\rho}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1+ha & h & -1 & \frac{\rho}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1+ha & h & -1 & \frac{\rho}{h} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Konvergenz

In diesem Abschnitt wird für $\rho = 0$ die Konvergenzordnung für die Näherungslösung r_h in der L_2 - Norm hergeleitet. Die folgenden Gleichungen ergeben sich aus dem Gleichungssystem (2.5) und (2.6), für $\rho = 0$:

$$r_k = \frac{y_{p_{k+1}} - y_{p_k}}{h} - ay_{p_k}, \quad (2.8)$$

$$y_{p_k} = -\tilde{g}_k. \quad (2.9)$$

Um eine Abschätzung zu erhalten, wird die Interpolierende I_h , diese stellt die stückweise lineare Interpolation in den Stützstellen dar, verwendet.

$$\begin{aligned} \|r(t) - r_h(t)\|_{L_2(0,T)} &= \|r(t) - I_h r(t) + I_h r(t) - r_h(t)\|_{L_2(0,T)} \\ &\leq \|r(t) - I_h r(t)\|_{L_2(0,T)} + \|I_h r(t) - r_h(t)\|_{L_2(0,T)} \end{aligned}$$

Der erste Term kann, aus der Vorlesung Numerischen Mathematik 1 [10] bekannt, mit

$$\|r(t) - I_h r(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \leq \frac{1}{2} h^4 \|\ddot{r}\|_{L_2(0,T)}^2$$

abgeschätzt werden.

Zur Abschätzung des zweiten Termes werden die kommenden Gleichungen benötigt:

$$\begin{aligned} r_h(t) &= r_k + \frac{t - t_k}{h} (r_{k+1} - r_k) \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \\ I_h r(t) &= r(t_k) + \frac{t - t_k}{h} (r(t_{k+1}) - r(t_k)) \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \end{aligned}$$

Da sich y_{p_k} aus Gleichung (2.9) direkt berechnen lässt, kann man $y_{p_{k+1}} = y_p(t_{k+1})$ auswerten. In Gleichung (2.8) wird für $y_p(t_{k+1})$ mithilfe von Taylor-Entwicklung folgende Umformung verwendet:

$$y_p(t_{k+1}) \approx y_p(t_k) + h\dot{y}_p(t_k) + \frac{h^2}{2!} \ddot{y}_p(\theta), \quad \theta \in [t_k, t_{k+1}].$$

Man erhält somit für r_k die folgende Darstellung:

$$r_k = \dot{y}_p(t_k) + \frac{h}{2} \ddot{y}_p(\theta) - ay_p(t_k).$$

Das gegebene Problem hat die Form $\dot{y}(t) = ay(t) + r(t)$, da $y = y_h + y_p$, durch Umformungen und Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} r(t) &= \dot{y}_p(t) + \underbrace{\dot{y}_h(t) - ay_h(t)}_{=0} - ay_p(t), \\ r(t) &= \dot{y}_p(t) - ay_p(t). \end{aligned}$$

In den zweiten Term werden nun die zuvor betrachteten Gleichungen eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\|I_h r(t) - r_h(t)\|_{L_2(0,T)}^2 &= \int_0^T (I_h r(t) - r_h(t))^2 dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (I_h r(t) - r_h(t))^2 dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(r(t_k) + \frac{t-t_k}{h} [r(t_{k+1}) - r(t_k)] - r_k + \frac{t-t_k}{h} [r_{k+1} - r_k] \right)^2 dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\dot{y}_p(t_k) - ay_p(t_k) \\
&\quad + \frac{t-t_k}{h} [\dot{y}_p(t_{k+1}) - ay_p(t_{k+1}) - \dot{y}_p(t_k) + ay_p(t_k)] \\
&\quad - \dot{y}_p(t_k) - \frac{h}{2} \ddot{y}_p(\theta) + ay_p(t_k) \\
&\quad - \frac{t-t_k}{h} [\dot{y}_p(t_{k+1}) + \frac{h}{2} \ddot{y}_p(\eta) - ay_p(t_{k+1}) - \dot{y}_p(t_k) - \frac{h}{2} \ddot{y}_p(\theta) + ay_p(t_k)])^2 dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(-\frac{h}{2} \ddot{y}_p(\theta) + \overbrace{\frac{t-t_k}{h} [-\frac{h}{2} \ddot{y}_p(\theta) + \frac{h}{2} \ddot{y}_p(\theta)]}^{\leq h} \right)^2 dt \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} h^2 \left(\frac{1}{2} [-\ddot{y}_p(\theta) - \ddot{y}_p(\eta) + \ddot{y}_p(\theta)] \right)^2 dt \\
&= h^2 \int_0^T \left(\frac{1}{2} [-\ddot{y}_p(\eta)] \right)^2 dt \\
&= \leq \frac{1}{4} h^2 T \max_{\eta \in [0,T]} |\ddot{y}_p(\eta)| =: h^2 c.
\end{aligned}$$

Man erhält nun die folgende Abschätzung für die Konvergenzordnung:

$$\begin{aligned}
\|r(t) - r_h(t)\|_{L_2(0,T)} &\leq \|r(t) - I_h r(t)\|_{L_2(0,T)} + \|I_h r(t) - r_h(t)\|_{L_2(0,T)}, \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} h^2 \|\ddot{r}\|_{L_2(0,T)} + h\sqrt{c}.
\end{aligned}$$

Aufgrund des zweiten Termes erhält man lineare Konvergenz für den L_2 - Fehler bezüglich der Straße.

2.2.3 Anwendungen

Anhand der eben hergeleiteten Theorie werden einige ausgewählte Beispiele zu Validierung des Algorithmus betrachtet. Hierfür werden anhand einer bereits bekannten Straße $st(t)$

durch das Lösen der Differentialgleichung $\dot{y} = ay(t) + st(t)$ mit $y(0) = y_0$ die künstlichen Messdaten $g(t)$, die ist in dem Fall die Lösung $y(t)$, erzeugt.

Durch die berechneten Messdaten $g(t)$ und der homogenen Lösung der Differentialgleichung $y_h(t)$ kann man nun die Gleichungen (2.5) und (2.6) lösen.

Als nächster Schritt wird für die folgenden Beispiele die Konstante $a = 0.1$ und die Anfangsbedingung $y_0 = 0.1$ gesetzt.

Mit diesem Wissen lässt sich nun das System, welches in Matlab implementiert wurde, lösen. Die Lösung y setzt sich aus der homogenen Lösung y_h und der partikulären y_p zusammen. Somit $y = y_h + y_p$. Des Weiteren wurde r , die angenäherte Lösung der Straße, ermittelt.

Um eine Aussage über die ermittelte Straße zu erhalten, wird zusätzlich der L_2 - Fehler für die entsprechende Verfeinerung berechnet. Der Fehler in der L_2 - Norm ist wie folgt definiert

$$\|y(t) - y_h(t)\|_{L_2(0,T)}.$$

Die Funktion $y_k(t)$ wird durch eine stückweise lineare Funktion angenähert

$$y_h(t) = y_k + \frac{t - t_k}{h} [y_{k+1} - y_k], \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Für die Berechnung des L_2 - Fehlers ergibt sich

$$\|y(t) - y_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 = \int_0^T [y(t) - y_h(t)]^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [y(t) - y_h(t)]^2 dt.$$

Als erstes Beispiel wird als virtuell erstellte Straße die lineare Funktion $st(t) = 20 - 2t$ betrachtet. In Abbildung 2.1 erhält man bereits für das niedrig gewählte Level $l = 2$, dies entspricht einer Unterteilung von $n = 4$, sowohl eine gute Annäherung für die Straße st mit der Näherungslösung r , als auch für die Messdaten g durch die Lösung y . Vorerst wurde für die Berechnung der Lösungen der Regularisierungsfaktor ρ auf Null gesetzt.

In Abbildung 2.2 und Abbildung 2.3 wird als virtuelle Straße die quadratische Funktion $st(t) = -t^2 + 10t$ betrachtet. Auch für diese Lösungen des Gleichungssystem (2.5) und (2.6) wurde ρ auf Null gesetzt. Bei einer Unterteilung für $n = 4$ erkennt man in Abbildung 2.2 bereits eine Annäherung von r an die Straße st . Für eine immer kleiner werdende Schrittweite h werden deutlich bessere Resultate erzielt. Sowohl die Straße r nähert sich der virtuellen Straße st an und als auch die Lösung y den Messdaten g . Dies ist deutlich in Abbildung 2.3 für eine Unterteilung $n = 128$ veranschaulicht.

Als weiteres Beispiel wird die Funktion $st(t) = \sin(\frac{2\pi}{10} \cdot t)$ als Verlauf einer Straße betrachtet. Bereits bei einer groben Unterteilung für $n = 16$ kann man in Abbildung 2.4 eine passende Näherung der Lösung r an die Straße st erkennen.

Tabelle 2.1 stellt den L_2 - Fehler bezüglich der Straße dar. In der Spalte Bodenwelle, für

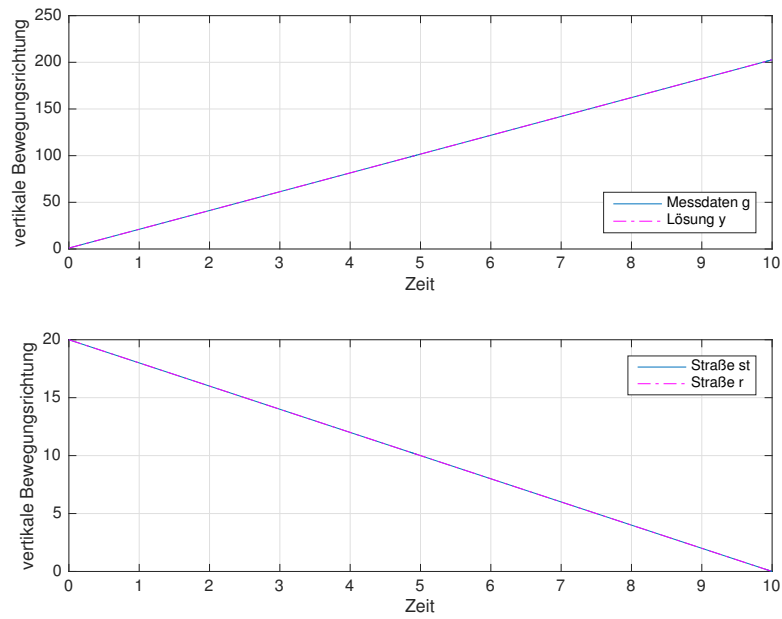


Abbildung 2.1: Lineare Funktion (Gefälle), $n = 4$

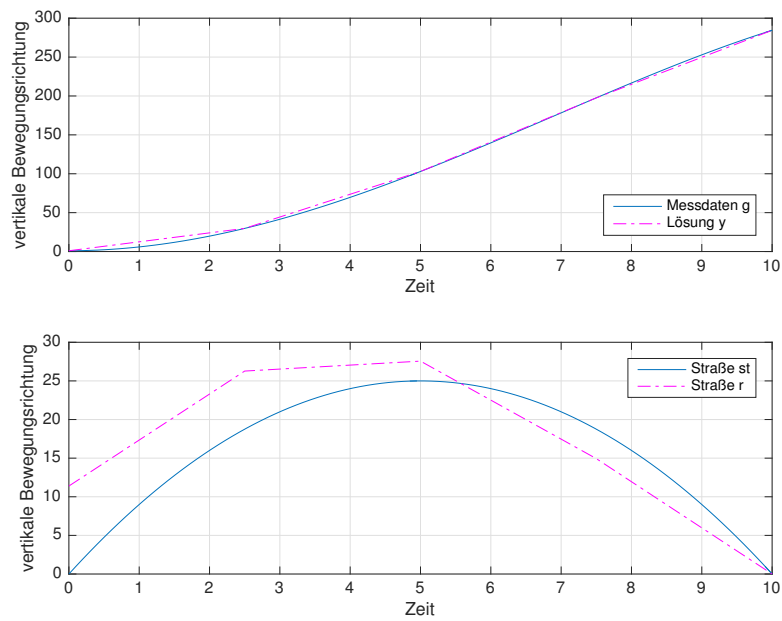
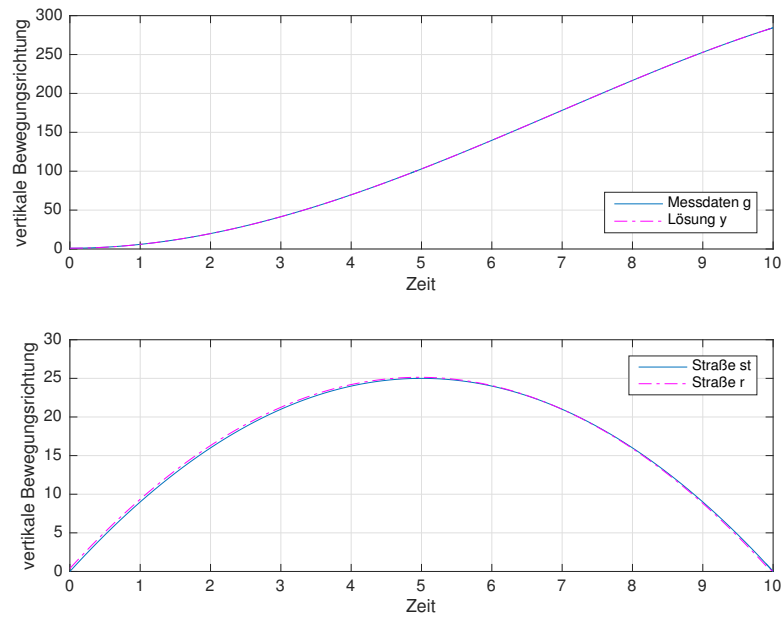
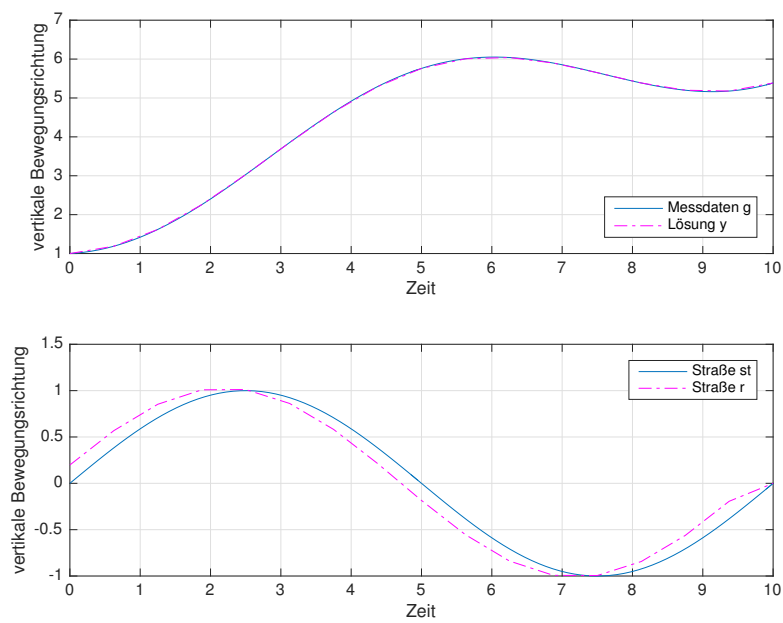
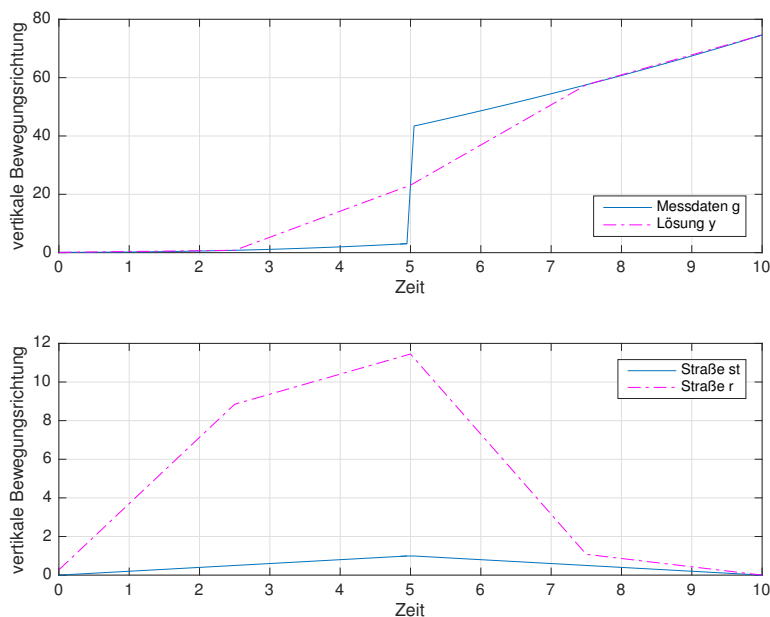


Abbildung 2.2: Quadratische Funktion (Schwelle), $n = 4$

Abbildung 2.3: Quadratische Funktion (Schwelle), $n = 128$ Abbildung 2.4: Sinusfunktion (Bodenwelle), $n = 16, \rho = 0$

Abbildung 2.5: Betragsfunktion (Spitze Kante), $n = 4$, $\rho = 0$

$\rho = 0$, liest man ab, dass bei höher werdendem Level l der Fehler kleiner wird. Es werden daher bessere Resultate, für kleiner werdende Schrittweiten h , für die angenäherte Lösung r erzielt. Verwendet man bei der Berechnung den Regularisierungsfaktor $\rho = 1$ nähert sich auch hier die Lösung r bei höherem Level l der Straße st an. Aus der Tabelle 2.1, in der Spalte für $\rho = 1$, sieht man im Vergleich für $\rho = 0$, dass sich der L_2 - Fehler langsamer verbessert.

Bisher wurden nur stetig differenzierbare Funktionen als mögliche Straßenbilder betrachtet. Für diese lässt sich bereits ohne Regularisierungsterm eine gute Näherungslösung r mit

Level	Unterteilung	Bodenwelle		Gehsteigkante		
		$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 10$
1	2	2.045357	2.005563	7.262198	7.037406	5.924531
2	4	1.241999	1.304509	9.105064	8.252124	5.984840
3	8	0.754008	0.908622	11.807444	9.055680	5.795447
4	16	0.408015	0.718107	16.369330	9.599110	5.701007
5	32	0.210975	0.658131	23.071408	9.831226	5.657408
6	64	0.107100	0.643093	32.626264	9.915191	5.636805
7	128	0.053935	0.639912	46.158083	9.945205	5.626830

Tabelle 2.1: L_2 - Fehler bezüglich der Straße

dem Gleichungssystem (2.7) ermitteln. Anhand dem zuvor besprochenen Beispiel für die Bodenwelle kann man sowohl in Tabelle 2.1 als auch in der Abbildung 2.4 ablesen, dass der Verlauf der Straße st passend durch die Näherungslösung r angenähert wird.

Der Verlauf einer Straße muss nicht überall stetig differenzierbar sein, er kann sogar eine Unstetigkeitsstelle aufweisen. Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Kante eines Gehsteiges. Die Funktion des Gehsteiges weist in der Kante eine Sprungstelle, also eine Unstetigkeitsstelle, auf. Die Funktion ist in dieser Sprungstelle nicht differenzierbar.

Zuerst wird eine stetige Funktion, die nicht überall differenzierbar ist betrachtet. Anhand dieser Funktion wird das Verhalten der angenäherten Lösung r analysiert. In Abbildung 2.5 wird die virtuell erstellte Straße mittels der Funktion $st(t) = -\frac{1}{5}|t-5|+1$ abgebildet. Diese Funktion ist zum Zeitpunkt $t = 5$ nicht differenzierbar, an dieser Stelle nimmt sie den Wert 1 an. Bei einer Unterteilung für $n = 4$ wird die Straße st durch die Näherungslösung r angenähert, jedoch findet an der Stelle $t = 5$ eine starke Abweichung statt ($r(5) = 11.45$). Das numerische Modell hat Schwierigkeiten die Funktion an dieser nicht differenzierbaren Stelle anzunähern. Auch die Näherung der Lösung y an die Messdaten g weist an dieser Stelle nicht das gewünschte Verhalten auf. Für eine Unterteilung, $n = 16$, sieht man in Abbildung 2.6 einen viel stärkeren Anstieg zum Zeitpunkt $t = 5$. Hier nimmt r sogar den Wert 35.11 an. Wohingegen im restlichen Bereich ein schnelleres Abklingen stattfindet und die Funktion r außerhalb des Intervall $[3.7, 5.6]$ eine passende Näherung darstellt. Bei weiterer Erhöhung des Levels l wird der Ausschlag zum kritischen Zeitpunkt größer, jedoch die restliche Näherung auf einem größerem Bereich des Intervalls besser.

Für die selbe Unterteilung, $n = 16$, wird der Regularisierungsfaktor ρ auf 1 gesetzt, hier weist die Näherungslösung r zum Zeitpunkt $t = 5$ ein kleineren Wert auf. Die Näherungsfunktion r nimmt den Wert 16.11 an. Jedoch wird der restliche Verlauf der Straße st nicht so gut wie für $\rho = 0$ angenähert. Dies ist in Abbildung 2.7 ersichtlich.

Um noch einen Schritt weiter zu gehen, wird nun eine Funktion, die das Verhalten einer Gehsteigkante darstellt, generiert. Dazu wurde eine virtuelle Straße mithilfe der Vorzeichenfunktion der Form $st(t) = \frac{1}{5}[-\text{sgn}(t-5) + 1]$ erstellt. Diese Funktion ist unstetig, es ist $st(5) = 1$, $st(t) = 2$ für $t \in [0, 5[$ und $st(t) = 0$ für $t \in]5, 10]$. Zuerst wird die Näherung r ohne Regularisierungsterm, d.h. $\rho = 0$, berechnet. In Abbildung 2.8 ist für die Unterteilung $n = 16$ ein ähnliches Verhalten wie bei der zuvor untersuchten Straße zu erkennen. Zum Zeitpunkt $t = 5$, wird anstatt des Wertes 2, der Wert $r(5) = 17.11$ angenommen. Jedoch wird im Großteil des Intervalls die Straße st gut angenähert. Auch weist für Näherungslösung y zu den Messdaten g , zu $t = 5$, ein nicht optimales Verhalten auf. Wird nun für die selbe Unterteilung mit dem Regularisierungsfaktor $\rho = 1$ die Näherungslösung r berechnet, erhält man in der Sprungstelle eine deutliche Verbesserung: $r(5) = 8.397$. In Abbildung 2.9 ist deutlich zu erkennen, dass nach und vor der Sprungstelle der Verlauf der Straße st von r wieder angenähert wird.

Tabelle 2.1 stellt unter anderem den L_2 - Fehler bezüglich der Gehsteigkante für $\rho = 0$ beziehungsweise $\rho = 1$ dar. Für $\rho = 0$ wächst der L_2 - Fehler bei höher werdendem Level l stark an, wohingegen der L_2 - Fehler für $\rho = 1$ nur ein leichtes Wachstum aufweist. Es lässt sich also vermuten, dass durch Erhöhung des Regularisierungsfaktors der L_2 - Fehler

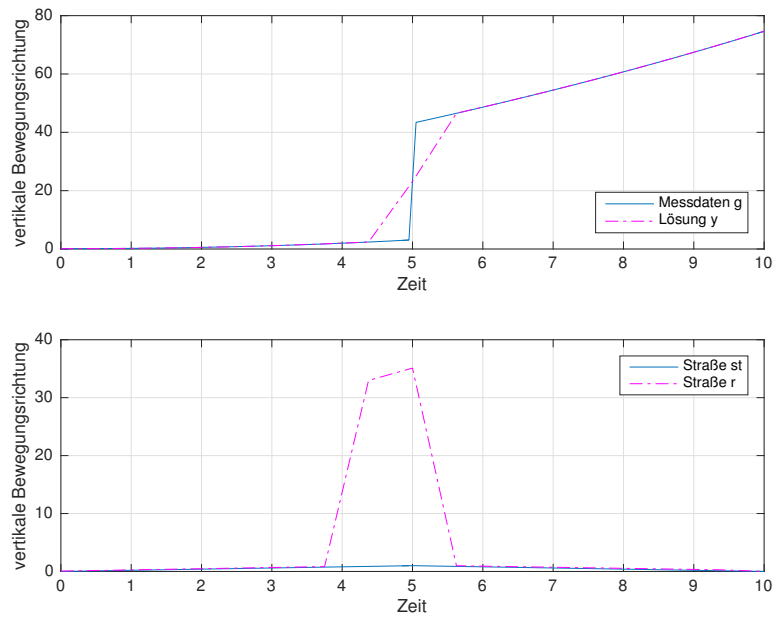


Abbildung 2.6: Betragsfunktion (Spitze Kante), $n = 16, \rho = 0$

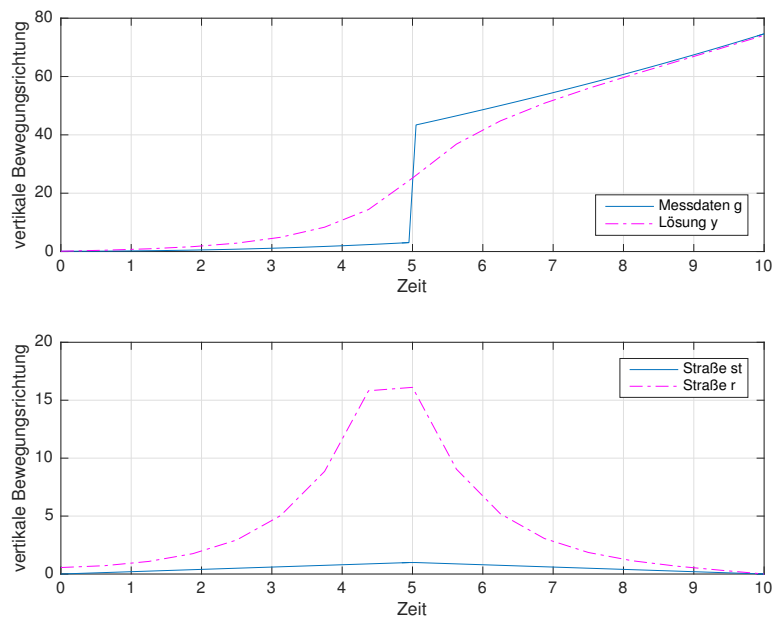


Abbildung 2.7: Betragsfunktion (Spitze Kante), $n = 16, \rho = 1$

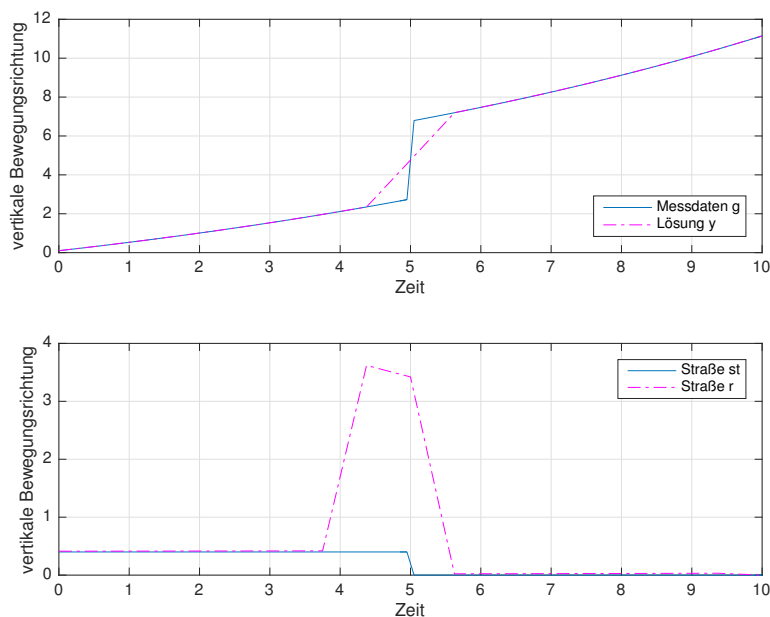


Abbildung 2.8: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 16, \rho = 0$

kleiner wird. Dies wird in Tabelle 2.1 unter Gehsteigkante $\rho = 10$ bestätigt. Auch wird der Wert für die Näherungslösung r zum Zeitpunkt $t = 5$ kleiner. In Abbildung 2.10 kann man den Wert 0.7614 ablesen. Jedoch ist hier der restliche Verlauf der Straße st trotz gleicher Unterteilung $n = 16$ nicht passend dargestellt. Die Näherungslösung r spiegelt das Bild der Straße nicht passend wieder. Auch die Messdaten g werden durch die Lösung y schlechter angenähert.

Da die Näherungslösung r den Verlauf der Straße vor allem für nicht stetig differenzierbare Funktionen, sowie für Funktionen mit einer Sprungstelle, schlecht darstellt, wird ein weiteres Lösungskonzept betrachtet. Im kommenden Teil der Arbeit werden mit Hilfe einer Variationsformulierung die Glattheitsanforderungen reduziert, um so eine bessere Näherungslösung zu erhalten.

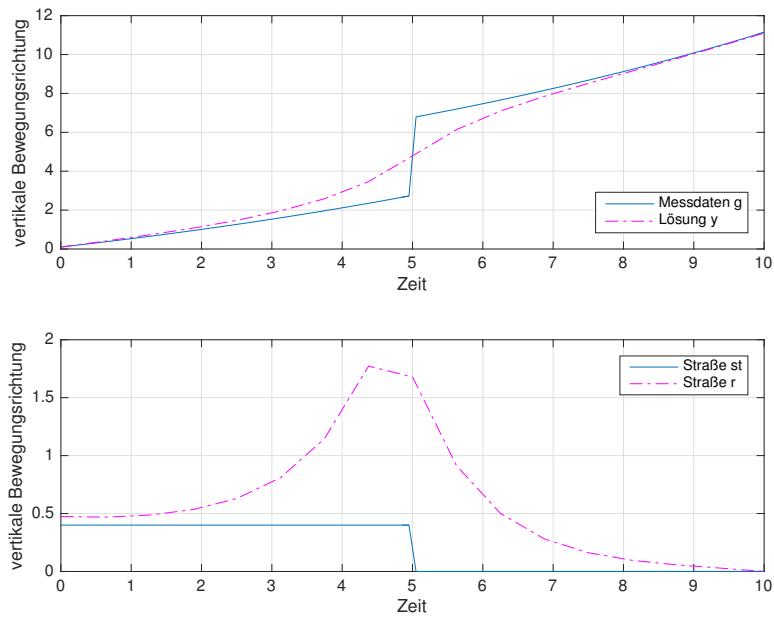


Abbildung 2.9: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 16, \rho = 1$

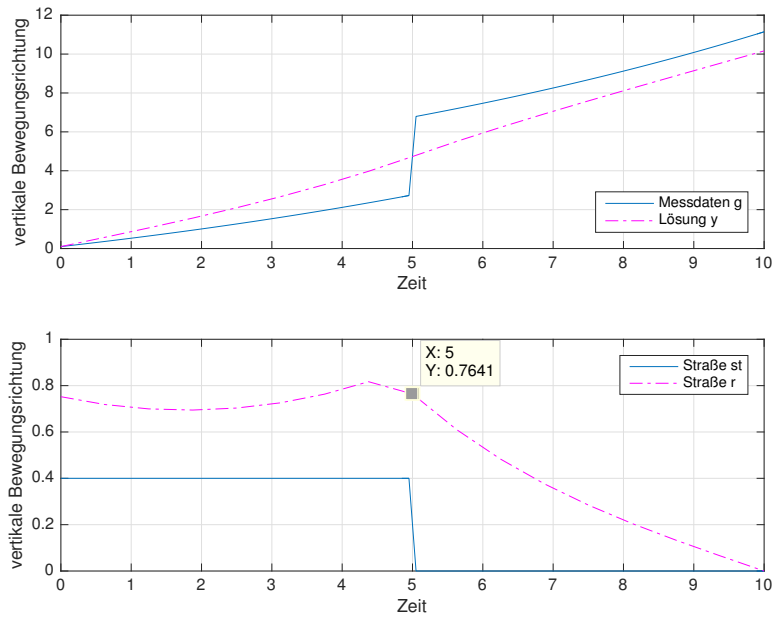


Abbildung 2.10: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 16, \rho = 10$

2.3 Variationsformulierung

Die Oberflächenstruktur der Straße ist nicht unbedingt stetig differenzierbar. Diese Eigenschaft kann sich somit auch auf die Messdaten g übertragen, da diese auch durch die Beschaffenheit der Straße beeinflusst werden.

Bisher wurde versucht, eine Lösung für die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = ay(t) + r(t)$ mit $y(0) = y_0$ zu finden, indem das Gleichungssystem mittels eines Minimierungsproblems sowie einem Einschrittverfahren gelöst wird. Hier wurde jedoch immer versucht, eine eventuell sogar unstetige Lösung durch eine stetige und im Weiteren sogar stetig differenzierbare Lösung anzunähern.

Als neuen Zugang kann man nun mit Hilfe von Variationsformulierungen die Ansprüche der Existenz der Ableitung "umgehen". Es lassen sich somit die Glattheitsanforderungen abschwächen.

Die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = ay(t) + r(t)$ wird mit einer Testfunktion v multipliziert, um eine Variationsformulierung zu erhalten. Als nächster Schritt wird die nun entstandene Gleichung über das Gebiet, hier das Intervall $(0, T)$, integriert und anschließend wird mit Hilfe der partiellen Integration die Ableitung von y eliminiert.

Auch hier wird das Problem in eine homogene und eine partikuläre Lösung aufgespalten. Die Lösung y ergibt sich durch die Addition dieser beiden: $y = y_h + y_p$ mit $y_h(0) = y_0$ und $y_p(0) = 0$. Vorerst noch einige Definitionen der benötigten Räume (weitere Definitionen siehe [9] sowie [7]):

Definition 2.2 ($H^1(0, T)$ -Raum). $H^1(0, T) := \{v \in L_2(0, T) : \dot{v} \in L_2(0, T)\}$.

Definition 2.3 ($H_0^1(0, T)$ -Raum). $H_0^1(0, T) := \{v \in H^1(0, T) : v(0) = v(T) = 0\}$.

Definition 2.4 ($H_{,0}^1(0, T)$ -Raum). $H_{,0}^1(0, T) := \{v \in H^1(0, T) : v(T) = 0\}$.

Definition 2.5 ($H_0^1(0, T)$ -Raum). $H_0^1(0, T) := \{v \in H^1(0, T) : v(0) = 0\}$.

Die zuvor beschriebenen Schritte werden auf die Gleichung $\dot{y}_p(t) = ay_p(t) + r(t)$ für $t \in (0, T)$ mit $y_p(0) = 0$ und $v \in H_{,0}^1$ angewandt:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_p(t) &= ay_p(t) + r(t), \\
 \dot{y}_p(t)v(t) &= ay_p(t)v(t) + r(t)v(t), \\
 \int_0^T \dot{y}_p(t)v(t)dt &= \int_0^T [ay_p(t)v(t) + r(t)v(t)]dt, \\
 \underbrace{y_p(t)v(t)|_0^T}_{=0, \text{ da } v(T)=0, y_p(0)=0} - \int_0^T y_p(t)\dot{v}(t)dt &= \int_0^T [ay_p(t)v(t) + r(t)v(t)]dt, \\
 - \int_0^T y_p(t)\dot{v}(t)dt &= \int_0^T [ay_p(t)v(t) + r(t)v(t)]dt, \\
 - \int_0^T [y_p(t)\dot{v}(t) + ay_p(t)v(t)]dt &= \int_0^T r(t)v(t)dt \quad \forall v \in H_{,0}^1(0, T).
 \end{aligned}$$

Gesucht ist ein $y_p \in L_2(0, T)$, sodass

$$-\int_0^T [y_p(t)\dot{v}(t) + ay_p(t)v(t)]dt = \int_0^T r(t)v(t)dt \quad \forall v \in H_0^1(0, T).$$

Man erhält nun die Bilinearform

$$a(y_p, v) = -\int_0^T [y_p(t)\dot{v}(t) + ay_p(t)v(t)]dt,$$

und die Linearform

$$b(v) = \int_0^T r(t)v(t)dt.$$

Gesucht ist die Straße $r(t)$, wobei $y(t) \approx g(t)$.

Für die Realisierung einer geeigneten Regularisierung wird ein Operator A eingeführt. Dieser bildet $A : [H_0^1(0, T)]' \rightarrow H_0^1(0, T)$ ab. Diese Abbildung ergibt sich durch Betrachtung der Optimalitätsbedingung, da $p \in H_0^1(0, T)$ und $r \in [H_0^1(0, T)]'$ liegt. Der Operator A kann als Lösungsoperator eines geeigneten Randwertproblems, zum Beispiel der Poissongleichung gewählt werden. Man erhält somit das folgende Minimierungsproblem

$$\frac{1}{2}\|y_h + Sr - g\|_{L_2(0, T)}^2 + \frac{\rho}{2}\langle r, Ar \rangle_{L_2(0, T)} \rightarrow \min_r, \quad (2.10)$$

mit dem Lösungsoperator $S : [H_0^1(0, T)]' \rightarrow L_2(0, T)$. Durch Berechnung der Fréchet-Ableitung und Nullsetzen erhält man die Optimalitätsbedingung:

$$\begin{aligned} S^*Sr + S^*(y_h - g) + \rho Ar &= 0, \\ S^*(Sr + y_h - g) + \rho Ar &= 0, \\ S^*q + \rho Ar &= 0, \\ p + \rho Ar &= 0. \end{aligned}$$

Die Variationsformulierung des primalen Problems hat folgende Gestalt: gesucht ist ein $y \in L_2(0, T)$, sodass

$$-\int_0^T [y_p(t)\dot{v}(t) + ay_p(t)v(t)]dt = \int_0^T r(t)v(t)dt \quad \forall v \in H_0^1(0, T),$$

mit $r \in [H_0^1(0, T)]'$.

Für die Herleitung der adjungierten Variationsformulierung wird der Lösungsoperator $S : [H_0^1(0, T)]' \rightarrow L_2(0, T)$ und seine adjungierte Darstellung $S^* : L_2(0, T) \rightarrow [H_0^1(0, T)]'$ verwendet.

Gelte für ein ψ der Zusammenhang $\dot{y}_\psi = ay_\psi + \psi$ mit $y_\psi(0) = 0$, des Weiteren sei $\psi \in [H_0^1(0, T)]'$ und $\phi \in L_2(0, T)$. Es gilt daher

$$\langle \psi, S^*\phi \rangle = \langle S\psi, \phi \rangle = \int_0^T y_\psi(t)\phi(t)dt,$$

wobei $y_\psi = S\psi \in L_2(0, T)$ eine eindeutige Lösung von

$$-\int_0^T [y_\psi \dot{v} + ay_\psi v] dt = \int_0^T \psi v dt \quad \text{für alle } v \in H_0^1(0, T)$$

ist. Sei $p \in H_0^1(0, T)$ die eindeutige Lösung von

$$-\int_0^T [q\dot{p} + aqp] dt = \int_0^T q\phi dt \quad \text{für alle } q \in L_2(0, T).$$

Wählt man für $v = p \in H_0^1(0, T)$ und $q = y_\psi \in L_2(0, T)$, dann erhält man

$$\begin{aligned} \langle \psi, S^* \phi \rangle &= \langle S\psi, \phi \rangle, \\ \int_0^T \phi q dt &= \int_0^T \phi \underbrace{y_\psi}_{S\psi} dt \\ &= -\int_0^T [y_\psi \dot{p} + ay_\psi p] dt \\ &= -\int_0^T [y_\psi \dot{v} + ay_\psi v] dt \\ &= \int_0^T \psi v dt \\ &= \int_0^T \psi p dt \\ &= \langle \psi, p \rangle. \end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$S^* \phi = p \in H_0^1(0, T),$$

mit $\phi = Sr + y_h - g$ (aus der Optimalitätsbedingung (2.10)). Man erhält das folgende Optimalitätssystem:

Primales Problem: gesucht ist ein $y_p \in L_2(0, T)$, sodass

$$-\int_0^T [y_p(t)\dot{v}(t) + ay_p(t)v(t)] dt = \int_0^T r(t)v(t) dt \quad \text{für alle } v \in H_0^1(0, T), \quad (2.11)$$

$$\langle -\dot{v} - av, y_p \rangle = \langle r, v \rangle, \quad (2.12)$$

Adjungierte Problem: gesucht ist ein $p \in H_0^1(0, T)$, sodass

$$-\int_0^T [q\dot{p} + aqp] dt = \int_0^T [qy_p + q \underbrace{(y_h - g)}_{\tilde{g}}] dt \quad \text{für alle } q \in L_2(0, T), \quad (2.13)$$

$$\langle q, -\dot{p} - ap \rangle = \langle q, y_p \rangle + \langle q, \tilde{g} \rangle, \quad (2.14)$$

Optimalitätsbedingung:

$$p + \rho Ar = 0, \quad A : [H_0^1(0, T)]' \rightarrow H_0^1(0, T), \quad (2.15)$$

$$\langle p, v \rangle + \rho \langle Ar, v \rangle = 0. \quad (2.16)$$

2.3.1 Diskretisierung der Variationsformulierung

Bei der Diskretisierung wird das Intervall $(0, T)$ in $n \in \mathbb{N}$ Elemente mit einer Schrittweite $h = \frac{T}{n}$, mit den Stützstellen $t_k = k \cdot h$, zerlegt. Für die Berechnungen der Lösungen werden hier die Finite Elemente Methode verwendet, siehe [6].

Die stückweise konstanten Basisfunktionen für $k = 1, \dots, n$ haben die folgende Gestalt:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in (t_{k-1}, t_k), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die stückweise linearen Basisfunktionen sind wie folgt gegeben

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \frac{t_1-t}{h} & \text{für } t \in (t_0, t_1), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und für $k = 2, \dots, n+1$

$$\phi_k(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{k-2}}{h} & \text{für } t \in (t_{k-2}, t_{k-1}), \\ \frac{t_k-t}{h} & \text{für } t \in (t_{k-1}, t_k), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dirac'sche Ansatzfunktion wird durch die nachstehende Darstellung beschrieben:

$$\delta_k(t) : \int_0^T \delta_k(t)v(t)dt = v(t_k) \quad \text{für } v \in H_{,0}^1(0, T),$$

vergleiche dazu [4]. Die gesuchte Näherung y_{p_h} und die Testfunktionen q_h stammen aus dem Raum der stückweise konstanten Funktionen. Die Testfunktion v_h und p_h aus dem Raum der stückweise linearen Funktionen. Es ergibt sich daher die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} v_h(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} v_i \phi_i(t), \\ y_{p_h}(t) &= \sum_{j=1}^n y_{p_j} \psi_j(t), \\ p_h(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} p_i \phi_i(t), \\ q_h(t) &= \sum_{i=1}^n q_i \psi_i(t). \end{aligned}$$

Nun werden y_{ph} und v_h in die Bilinearform eingesetzt:

$$\begin{aligned}
a(y_{ph}, v_h) &= - \int_0^T [y_{ph}(t)\dot{v}_h(t) + ay_{ph}(t)v_h(t)]dt \\
&= - \langle y_{ph}(t), \dot{v}_h(t) \rangle - \langle y_{ph}(t), av_h(t) \rangle \\
&= - \left\langle \sum_{j=1}^n y_{p_j} \psi_j(t), \sum_{i=0}^{n-1} v_i \dot{\phi}_i(t) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^n y_{p_j} \psi_j(t), a \sum_{i=0}^{n-1} v_i \phi_i(t) \right\rangle \\
&= - \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{n-1} v_i \langle \psi_j(t), \dot{\phi}_i(t) \rangle y_{p_j} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{n-1} v_i \langle \psi_j(t), a \phi_i(t) \rangle y_{p_j} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{n-1} v_i \underbrace{\langle \psi_j(t), -\dot{\phi}_i(t) - a \phi_i(t) \rangle}_{=: K_h[j, i]} y_{p_j} \\
&= v^T K_h y_p.
\end{aligned}$$

Die Einträge der Steifigkeitsmatrix K_h lassen sich folgendermaßen berechnen:

$$K_h[j, i] = \int_{t_{j-1}}^{t_j} [-\dot{\phi}_i(t) - a \phi_i(t)],$$

für $i = j$ erhält man

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{-1}{h} + a \frac{t_j - t}{h} dt \\
&= - \frac{1}{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} -1 + a(t_j - t) dt \\
&= - \frac{1}{h} \left[-t + a \left(t_j t - \frac{t^2}{2} \right) \right]_{t_{j-1}}^{t_j} \\
&= - \frac{1}{h} \left[-t_j + a \left(t_j^2 - \frac{t_j^2}{2} \right) - \left(-t_{j-1} + a \left(t_{j-1} t_j - \frac{(t_{j-1})^2}{2} \right) \right) \right] \\
&= - \frac{1}{h} \left[- \underbrace{(t_j - t_{j-1})}_h + a \left(t_j^2 - \frac{t_j^2}{2} - t_{j-1} t_j + \frac{(t_{j-1})^2}{2} \right) \right] \\
&= - \frac{1}{h} \left[-h + a \left(\frac{t_j^2}{2} - t_{j-1} t_j + \frac{(t_{j-1})^2}{2} \right) \right] \\
&= - \frac{1}{h} \left[-h + a \left(\frac{(t_j - t_{j-1})^2}{2} \right) \right] \\
&= - \frac{1}{h} \left[-h + a \left(\frac{h^2}{2} \right) \right] \\
&= 1 - \frac{a}{2} h,
\end{aligned}$$

und für $i = j + 1$ erhält man

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{h} + a \frac{t - t_{j-1}}{h} dt \\
&= -\frac{1}{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} 1 + a(t - t_{j-1}) dt \\
&= -\frac{1}{h} \left[t + a\left(\frac{t^2}{2} - t_{j-1}t\right) \right]_{t_{j-1}}^{t_j} \\
&= -\frac{1}{h} \left[t_j + a\left(\frac{t_j^2}{2} - t_j t_{j-1}\right) - \left(t_{j-1} + a\left(\frac{t_{j-1}^2}{2} - t_{j-1}^2\right)\right) \right] \\
&= -\frac{1}{h} \left[\underbrace{t_j - t_{j-1}}_h + a\left(\frac{t_j^2}{2} - t_j t_{j-1} + \frac{t_{j-1}^2}{2}\right) \right] \\
&= -\frac{1}{h} \left[h + a\left(\frac{(t_j - t_{j-1})^2}{2}\right) \right] \\
&= -\frac{1}{h} \left[h + a\left(\frac{h^2}{2}\right) \right] \\
&= -1 - \frac{a}{2}h.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende Darstellung für die Steifigkeitsmatrix $K_h \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$K_h = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{2}h & & & & \\ -1 - \frac{a}{2}h & 1 - \frac{a}{2}h & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 - \frac{a}{2}h & 1 - \frac{a}{2}h \end{pmatrix}.$$

Unterschiedliche Diskretisierungen für r

Für die gesuchte Näherungslösung r werden nun unterschiedliche Varianten der Diskretisierung betrachtet, um eine passende Näherung zu erhalten. Es wird bei allen Varianten der diskrete Ansatz für r_h und v_h in die Linearform eingesetzt, um somit ein zu lösendes Gleichungssystem aufzustellen.

1. Sei r stückweise konstant: $r_h(t) = \sum_{j=0}^{n-1} r_j \psi_j(t)$,

$$\begin{aligned}
 b(v_h) &= \int_0^T r_h(t) v_h(t) dt \\
 &= \langle r_h(t), v_h(t) \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{j=0}^{n-1} r_j \psi_j, \sum_{i=0}^{n-1} v_i \phi_i \right\rangle \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} v_i \langle \psi_j, \phi_i \rangle r_j \\
 &= \sum_{i,j=0}^{n-1} v_i \underbrace{\langle \phi_i, \psi_j \rangle}_{\tilde{M}_h} r_j \\
 &= v^T \tilde{M}_h r
 \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{M}_h = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

2. Sei r der Dirac-Impuls: $r_h(t) = \sum_{j=0}^{n-1} r_j \delta_j(t)$,

$$\begin{aligned}
 b(v_h) &= \int_0^T r_h(t) v_h(t) dt \\
 &= \int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} r_j \delta_j(t) v_h(t) dt \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} r_j \int_0^T \delta_j(t) v_h(t) dt \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} r_j v_j \\
 &= v^T r.
 \end{aligned}$$

3. Sei r stückweise konstant auf dem dualen Gitter

$$\Psi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in (t_0, t_0 + \frac{h}{2}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $k = 2, \dots, n - 1$

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in (t_{k-1} - \frac{h}{2}, t_{k-1} + \frac{h}{2}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $k = n$

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in (t_{n-1} - \frac{h}{2}, t_n), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man erhält für $r_h(t) = \sum_{j=0}^{n-1} r_j \Psi_j(t)$, und der Testfunktion v_h in die Linearform eingesetzt folgende Lösung:

$$b(v_h) = v^T \overline{M}_h r,$$

mit

$$\overline{M}_h = \frac{h}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & \\ 1 & 6 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 6 & 1 \\ & & & & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Aus dem zu lösenden Gleichungssystem $a(y_{ph}, v_h) = b(v_h)$ und den drei unterschiedlichen Lösungsvarianten ergeben sich somit drei unterschiedliche Lösungssysteme:

1. $v^T K_h y_p = v^T \tilde{M}_h r,$
2. $v^T K_h y_p = v^T r,$
3. $v^T K_h y_p = v^T \overline{M}_h r.$

Ausgehend von der ersten Variante erhält man für die diskrete primale Variationsformulierung

$$K_h y_p = \tilde{M}_h r.$$

Die diskrete adjungierte Variationsformulierung schaut wie folgt aus:

$$K_h^T p = h \cdot y_p + h \cdot \tilde{g}.$$

Die Diskretisierung der Optimalitätsbedingung wird aufgrund des Operators A für den Regularisierungsterm genauer betrachtet. Der Operator A wurde für die Darstellung der Optimalitätsbedingung eingeführt. Der adjungierte Zustand $p \in H_0^1$ und $r \in [H_0^1(0, T)]'$

liegt, bildet $A : [H_0^1(0, T)]' \rightarrow H_0^1(0, T)$ ab. Es sei $Ar := z$, somit $p + \rho z = 0$, mit $z \in H_0^1$. Es gilt also

$$\begin{aligned} A^{-1}z &= r, \\ -\ddot{z} &= r, \\ \langle -\ddot{z}, v \rangle &= \langle r, v \rangle, \\ \int_0^T -\ddot{z}v dt &= \int_0^T rv dt, \\ \underbrace{\dot{z}v|_0^T}_{=0, \text{ da } \dot{z}(0)=0} + \int_0^T \dot{z}\dot{v} dt &= \int_0^T rv dt, \\ \langle \dot{z}, \dot{v} \rangle &= \langle r, v \rangle, \\ A_h^{-1}z &= \tilde{M}_h r. \end{aligned}$$

Der Operator A_h^{-1} entspricht der Diskretisierung des Laplace Operators im Bezug als Lösungsoperator der Poissongleichung und hat die folgende Gestalt:

$$A_h^{-1} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da für $z = -\frac{1}{\rho}p$ gilt, erhält man

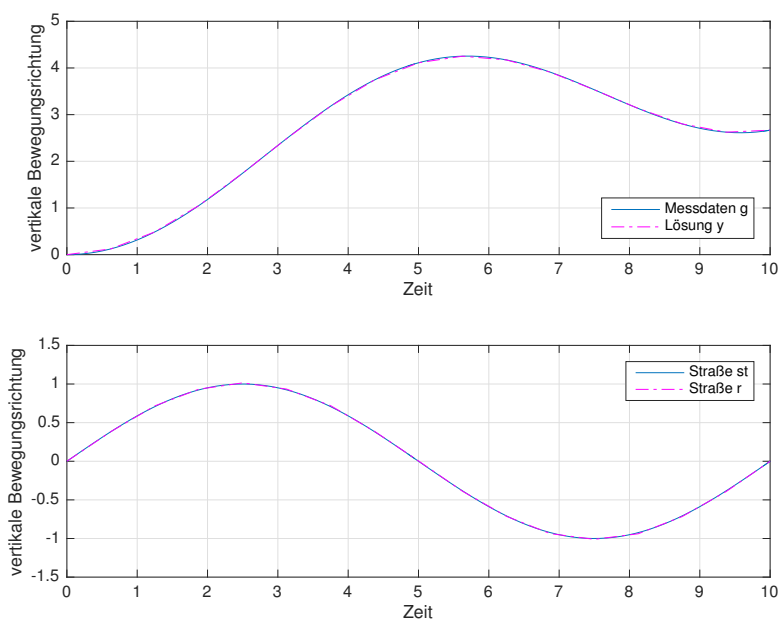
$$\begin{aligned} \tilde{M}_h r &= A_h^{-1}z, \\ \tilde{M}_h r &= -A_h^{-1}\frac{1}{\rho}p, \\ \rho\tilde{M}_h r &= -A_h^{-1}p, \\ A_h^{-1}p + \rho\tilde{M}_h r &= 0. \end{aligned}$$

Es ergibt sich das zu lösende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} K_h y_p - \tilde{M}_h r &= 0, \\ K_h^T p - h \cdot y_p &= h \cdot \tilde{g}, \\ A_h^{-1}p + \rho\tilde{M}_h r &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist nun äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} K_h & -\tilde{M}_h & 0 \\ -h \cdot D & 0 & K_h^T \\ 0 & \rho\tilde{M}_h & A_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p \\ r \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \cdot \tilde{g} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

Abbildung 2.11: Sinusfunktion (Bodenwelle), $n = 16, \rho = 0$

mit der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.2 Anwendung der Variationsformulierung

Es werden nun die drei unterschiedlichen Varianten in Matlab implementiert und analysiert. Die Näherungslösung r wird mit der bekannten Anregung der Straße verglichen. Um einen Überblick über die am besten passende Methode zu bekommen, wird dies anhand stetig differenzierbaren Funktionen bis hin zu Funktionen mit einer Sprungstelle betrachtet.

Stückweise konstantes r

Bei dieser Variante wird das Gleichungssystem (2.17) verwendet.

Abbildung 2.11 stellt die sogenannte Bodenwelle dar. Bereits bei einer Unterteilung für $n = 16$ wird für eine stetig differenzierbare Funktion eine passende Näherungslösung r zur Straße st berechnet. Auch werden hier die Messdaten g von der Lösung y gut angenähert. Betrachtet man eine stetige, aber zum Zeitpunkt $t = 5$ nicht differenzierbare Funktion, so

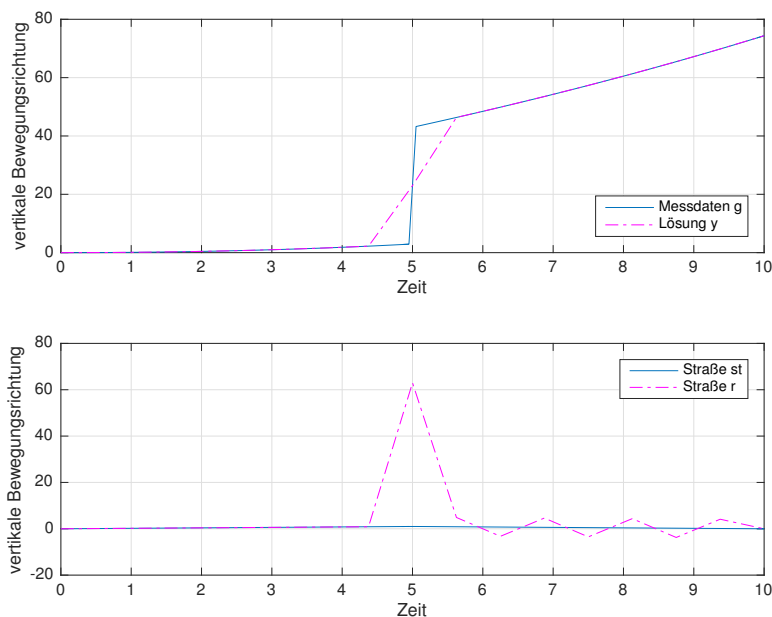


Abbildung 2.12: Betragsfunktion (Spitze Kante), $n = 16, \rho = 0$

ist klar zu erkennen, dass nach dem Zeitpunkt $t = 5$ die Näherungslösung r nicht mehr passend den Verlauf der Straße st darstellt. Dies ist in Abbildung 2.12 deutlich zu erkennen.

Als weiteren Schritt wird eine Funktion mit einer Unstetigkeitsstelle zum Zeitpunkt $t = 5$ betrachtet. Nicht nur nach der Unstetigkeitsstelle, sondern bereits auch davor wird die Straße st schlecht durch die Näherungslösung r dargestellt. Es ist klar zu erkennen, dass dieses System für unstetige Funktionen empfindlich ist. Die Messdaten g hingegen werden gut durch die Lösung y angenähert. Dies ist in Abbildung 2.13 ersichtlich.

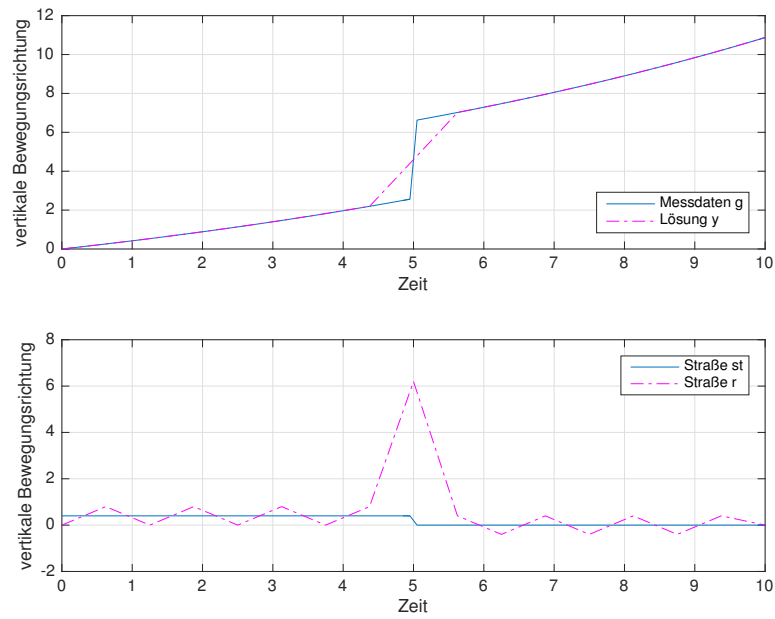
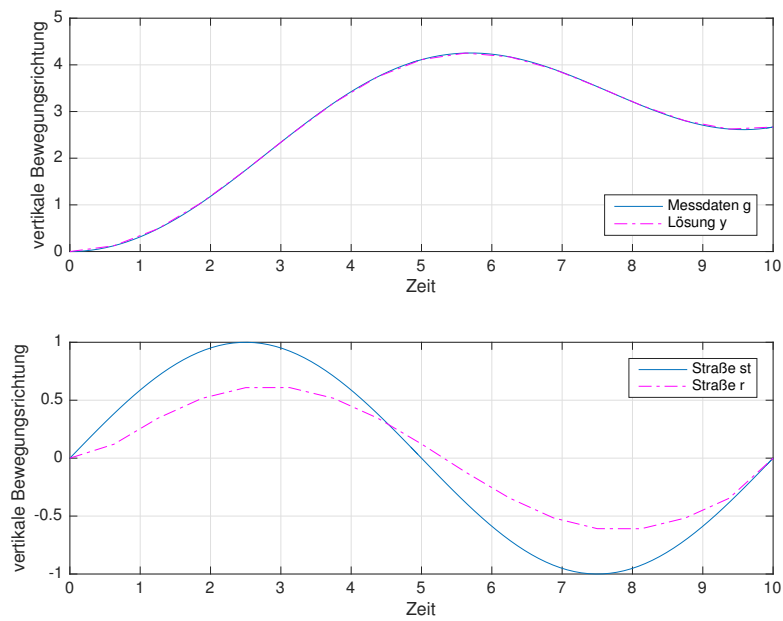
Dirac-Impuls für r

Für diese Variante wird mit dem folgenden Gleichungssystem gearbeitet:

$$\begin{pmatrix} K_h & -D & 0 \\ -h \cdot D & 0 & K_h^T \\ 0 & \rho \cdot D & A_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p \\ r \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \cdot \tilde{g} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zuerst wird eine stetig differenzierbare Funktion betrachtet. Die Näherungslösung r stellt den entsprechenden Verlauf der Straße st grob dar (siehe Abbildung 2.14). Wird noch feiner unterteilt, geht die Näherungslösung r gegen Null. Die Messdaten g werden jedoch gut durch die Lösung y approximiert.

Abbildung 2.15 stellt die Ergebnisse für eine stetige Funktion, die an der Stelle 5 nicht differenzierbar ist, dar. Auch hier geht die Näherungslösung r bei stärker Verfeinerung gegen Null. Jedoch kann man sehen, dass r nach dem Zeitpunkt $t = 5$ das Verhalten der

Abbildung 2.13: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 16$, $\rho = 0$ Abbildung 2.14: Sinusfunktion (Bodenwelle), $n = 16$, $\rho = 0$

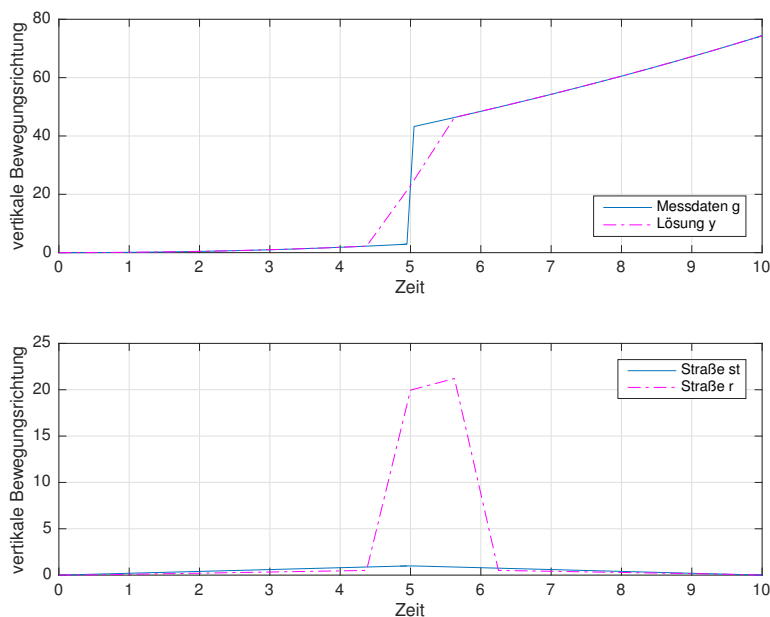


Abbildung 2.15: Betragsfunktion (Spitze Kante), $n = 16, \rho = 0$

Straße st gut darstellt.

Weist die Straße eine Unstetigkeitsstelle auf, lässt sich ein ähnliches Verhalten wie für eine Funktion, die in einer Stelle nicht differenzierbar ist, erkennen. Dies ist in Abbildung 2.16 abbildet. Für den Dirac-Impuls wird das Verhalten der Straße deutlich besser dargestellt, jedoch geht die Lösung bei einer starken Unterteilung gegen Null.

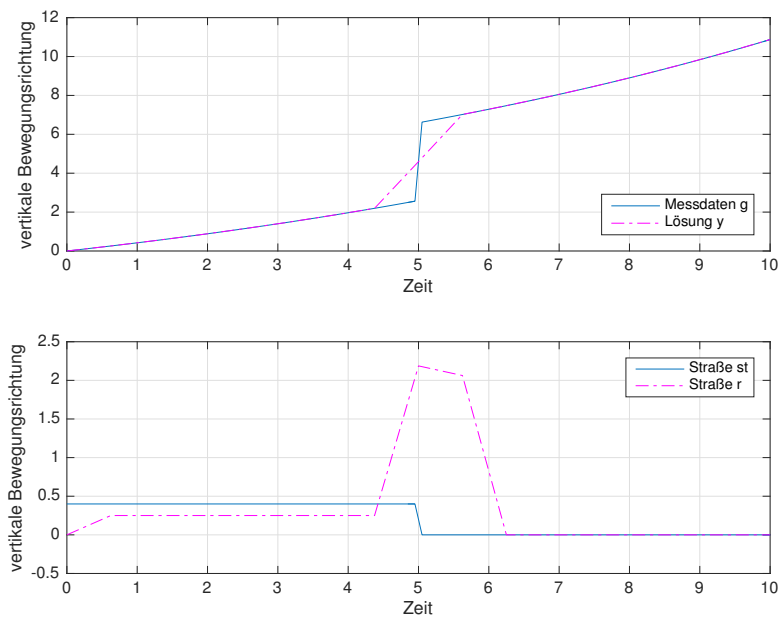
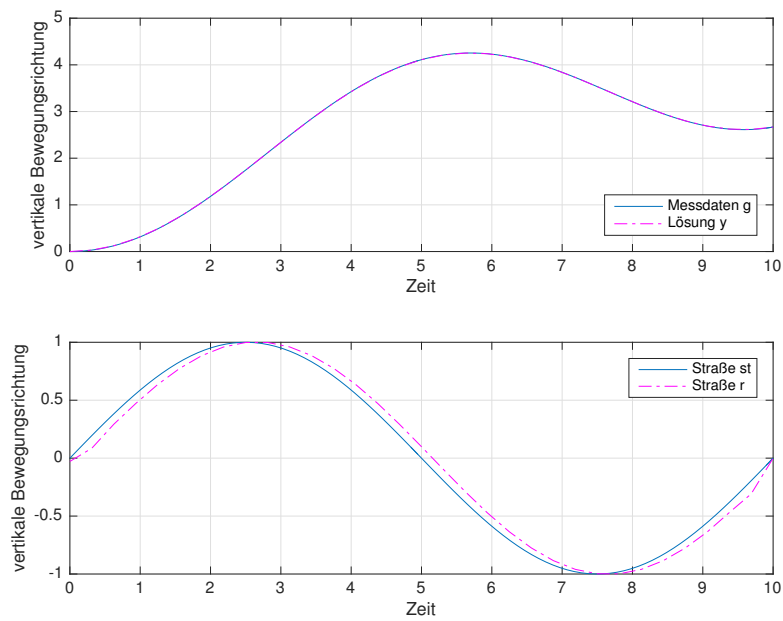
Stückweise konstantes r auf dualem Gitter

Für eine stückweise konstantes r auf dem dualen Gitter ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} K_h & -\bar{M}_h & 0 \\ -h \cdot D & 0 & K_h^T \\ 0 & \rho \bar{M}_h & A_h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p \\ r \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \cdot \tilde{g} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In Abbildung 2.17 ist wieder eine stetig differenzierbare Straße st abgebildet. Es ist eine gute Näherungslösung r zu erkennen, die zeitlich leicht verzögert ist. Bei stärkerer Verfeinerung wird die Verzögerung immer kleiner und es nähert sich die Näherungslösung r gut an die Straße st an. Die Messdaten g werden durch die Lösung y gut approximiert.

Nun wird eine stetige Funktion die zum Zeitpunkt $t = 5$ nicht differenzierbar ist betrachtet. Die Näherungslösung r kann zum Zeitpunkt $t = 5$ den Verlauf der Straße st nur schlecht approximieren, jedoch wird der restliche Verlauf passend berechnet (siehe Abbildung 2.18).

Abbildung 2.16: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 16$, $\rho = 0$ Abbildung 2.17: Sinusfunktion (Bodenwelle), $n = 32$, $\rho = 0$

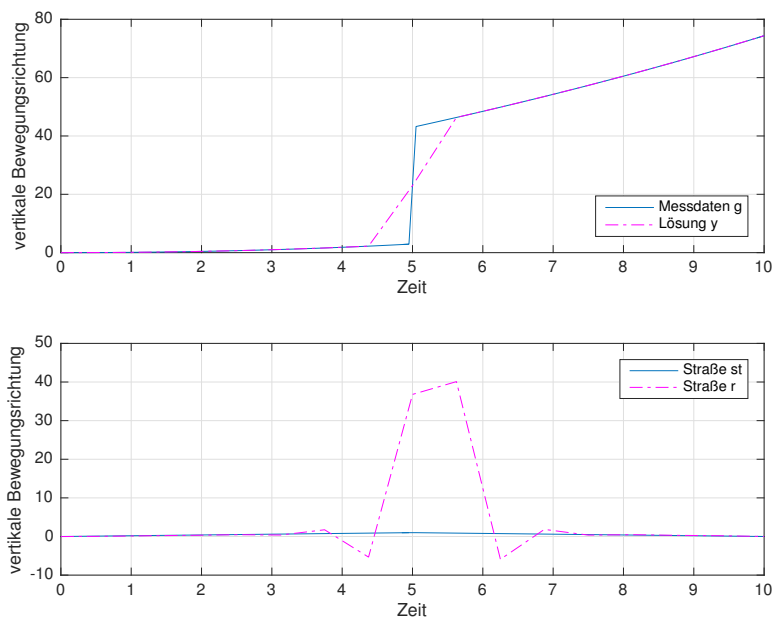


Abbildung 2.18: Betragsfunktion (Spitze Kante), $n = 16$, $\rho = 0$

Bei mehreren Unterteilungen wird der Ausschlag an der Stelle $t = 5$ größer, dafür wird das Intervall immer größer in welchem die Straße st von der Näherungslösung r gut approximiert wird.

Als nächster Schritt wird eine Straße mit einer Unstetigkeitsstelle betrachtet. In Abbildung 2.19 ist klar zu erkennen, dass hier ein ähnliches Verhalten wie in der Funktion mit der nicht differenzierbaren Stelle herrscht. Es wird auch hier eine gute Näherungslösung r für der Straße st berechnet. Auffallend ist, dass zu Beginn des Intervalls die Näherungslösung r den Verlauf der Straße nicht so gut darstellt. Dies liegt daran, dass zum Zeitpunkt $t < 0$ die Straße auf dem Niveau Null angenommen wird. Dadurch ergibt sich eine weitere Sprungstelle. Auch hier wird bei stärkerer Verfeinerung das Intervall, in welchem die Straße st von der Näherungslösung r gut approximiert wird, größer. Es findet hier jedoch zum Zeitpunkt $t = 5$ bei feineren Gitter ein stärkerer Ausschlag statt. Die Messdaten g werden von der Lösung y gut angenähert.

In Abbildung 2.20 wird die Lösung für ein $\rho = 0.1$ berechnet. Der Ausschlag bei der Sprungstelle wird deutlich kleiner, jedoch wird der restliche Verlauf der Straße st durch die Näherungslösung r etwas schlechter dargestellt. Selbiges trifft auch auf die Messdaten g , die durch die Lösung y angenähert werden, zu.

Tabelle 2.2 stellt den L_2 - Fehler bezüglich der Straße st und der Näherungslösung r , die durch die Diskretisierung mithilfe des dualen Gitter berechnet wurde. Für eine stetige Funktion (Bodenwelle) ohne einer Regularisierung ($\rho = 0$) wird der L_2 - Fehler bei Erhöhung des Levels l kleiner. Für unstetige Funktionen (Gehsteigkante) wird aufgrund des

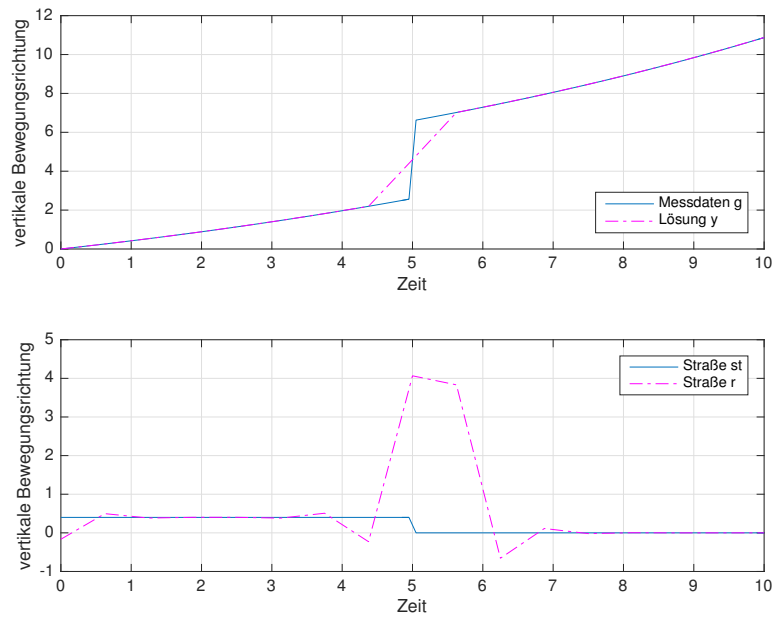


Abbildung 2.19: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 16, \rho = 0$

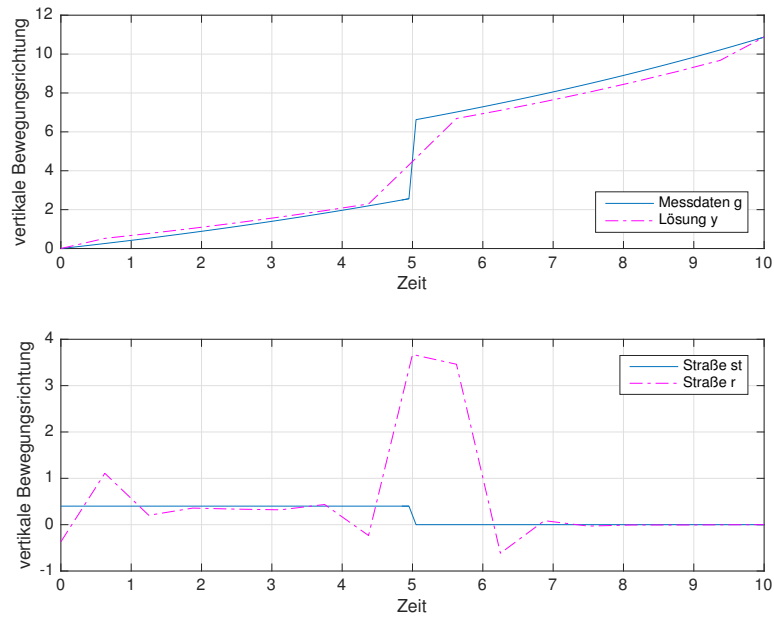


Abbildung 2.20: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 16, \rho = 0.1$

Level	Unterteilung	Bodenwelle		Gehsteigkante		
		$\rho = 0$	$\rho = 0.1$	$\rho = 0$	$\rho = 0.1$	$\rho = 1$
1	2	2.858293	2.808521	7.595957	7.221838	5.288518
2	4	1.409213	1.353800	10.875494	9.675319	5.046154
3	8	0.799984	0.736349	14.221845	12.813503	8.060086
4	16	0.421071	0.427331	19.355660	17.557620	11.991051
5	32	0.215216	0.360711	26.880853	24.493990	17.457575
6	64	0.108708	0.433298	37.683863	34.424279	25.063801
7	128	0.054620	0.578131	53.064895	48.539033	35.717599

Tabelle 2.2: L_2 - Fehler bezüglich der Straße für das duale Gitter

hohen Ausschlag bei der Unstetigkeitsstelle bei stärkerer Verfeinerung der Fehler größer, obwohl der restliche Verlauf der Straße immer besser dargestellt wird. Dies trifft auch für die Regularisierungen zu.

3 Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der tatsächlichen Anwendung für das vertikale Modell, das am Beginn dieser Arbeit aufgestellt und beschrieben wurde. Das bestehende Gleichungssystem wird nun auf ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung erweitert. Im Anschluss wird dies für das Differentialgleichungssystem der zweiten Ordnung, bestehend aus den 7 Gleichungen des vertikalen Modells, angewandt.

3.1 Optimalitätssystem

Betrachtet wird die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{z} &= -c(\dot{z} - \dot{z}_0) - k(z - z_0) - mg, \\
 \ddot{z} &= \underbrace{-\frac{c}{m}}_{a_2}(\dot{z} - \dot{z}_0) - \underbrace{\frac{k}{m}}_{a_1}(z - z_0) - g, \\
 \ddot{z} - a_2\dot{z} - a_1z &= \underbrace{\frac{c}{m}\dot{z}_0 + \frac{k}{m}z_0 - g}_{\tilde{z}_0}, \\
 \ddot{z} - a_2\dot{z} - a_1z &= \tilde{z}_0.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird mit einer Testfunktion v multipliziert, dann über das Intervall $(0, T)$ integriert und anschließend partiell integriert.

Die Variationsformulierung für ein $z \in H_0^1(0, T)$ und ein $\tilde{z}_0 \in [H_0^1(0, T)]'$ hat nun folgende Gestalt:

$$- \int_0^T [\dot{z}\dot{v} + a_2\dot{z}v + a_1zv] dt = \int_0^T \tilde{z}_0 v dt \quad \forall v \in H_0^1(0, T).$$

Sei $S : [H_0^1(0, T)]' \rightarrow H_0^1(0, T)$ der Lösungsoperator von $z = S\tilde{z}_0$.

Die Optimalitätsbedingung wird analog zum Kapitel 2 berechnet und hat die folgende Darstellung:

$$p + \rho A\tilde{z}_0 = 0,$$

mit $p = S^*q$ und $q = S\tilde{z}_0 + \tilde{g}$.

Für die Herleitung der adjungierten Variationsformulierung werden die primale Variations-

formulierung

$$-\int_0^T [\dot{z}_\psi \dot{v} + a_2 \dot{z}_\psi v + a_1 z_\psi v] dt = \int_0^T \psi v dt \quad \forall v \in H_0^1(0, T), \quad (3.1)$$

sowie die Gleichung

$$-\int_0^T [\dot{q} \dot{p} + a_2 \dot{q} p + a_1 q p] dt = \int_0^T q \phi dt \quad \forall q \in H_0^1(0, T), \quad (3.2)$$

benötigt.

Es folgt nun für ein $\psi \in [H_0^1(0, T)]'$, $\phi \in H_0^1(0, T)$:

$$\begin{aligned} \langle \psi, S^* \phi \rangle &= \langle S \psi, \phi \rangle \\ &= \langle z_\psi, \phi \rangle \\ &= \int_0^T z_\psi \phi dt \\ &= \int_0^T q \phi dt \\ &\stackrel{(3.2)}{=} - \int_0^T [\dot{q} \dot{p} + a_2 \dot{q} p + a_1 q p] dt \\ &= - \int_0^T [\dot{z}_\psi \dot{p} + a_2 \dot{z}_\psi p + a_1 z_\psi p] dt \\ &\stackrel{(3.1)}{=} \int_0^T \psi p dt \\ &= \langle \psi, p \rangle. \end{aligned}$$

Somit ist $p = S^* \phi$ mit $\phi = \underbrace{S \tilde{z}_0}_z + \tilde{g}$ (aus der Optimalitätsbedingung).

Die adjungierte Variationsformulierung für ein $p \in H_0^1(0, T)$ hat daher die folgende Gestalt:

$$-\int_0^T [\dot{q} \dot{p} + a_2 \dot{q} p + a_1 q p] dt = \int_0^T q(z + \tilde{g}) dt \quad \forall q \in H_0^1(0, T).$$

Es ergibt sich das unten stehende Optimalitätssystem:

$$\begin{aligned} \langle \dot{z}, -\dot{v} - a_2 v \rangle + \langle z, -a_1 v \rangle &= \langle \tilde{z}_0, v \rangle \quad v \in H_0^1(0, T), \\ \langle \dot{q}, -\dot{p} - a_2 p \rangle + \langle q, -a_1 p \rangle &= \langle q, z \rangle + \langle q, \tilde{g} \rangle \quad q \in H_0^1(0, T), \\ \langle p, v \rangle + \rho \langle A \tilde{z}_0, v \rangle &= 0 \quad v \in H_0^1(0, T). \end{aligned}$$

Um mehr Stabilität zu erhalten, werden z und \dot{z} substituiert. Es sei $\dot{z} = y_2 \in L_2$ (stückweise konstant) und $z = y_1 \in H_0^1$ (stückweise linear). Man erhält das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\langle y_2, -\dot{v} - a_2 v \rangle + \langle y_1, -a_1 v \rangle &= \langle \tilde{z}_0, v \rangle \quad v \in H_{,0}^1(0, T), \\ \langle \dot{q}, -\dot{p} - a_2 p \rangle + \langle q, -a_1 p \rangle &= \langle q, y_1 \rangle + \langle q, \tilde{g} \rangle \quad q \in H_0^1(0, T), \\ \langle p, v \rangle + \rho \langle A \tilde{z}_0, v \rangle &= 0 \quad v \in H_{,0}^1(0, T), \\ \langle \dot{y}_1, w \rangle &= \langle y_2, w \rangle \quad w \in L_2(0, T).\end{aligned}$$

Die Funktionen p, q, y_1 und v sind stückweise linear und die Funktionen y_2, \tilde{z}_0 und w sind stückweise konstant. Daraus ergibt sich das folgende diskrete Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -\hat{M}_h & -\bar{M}_h & K_h & 0 \\ -M_h & 0 & 0 & K_h^T - \hat{M}_h^T \\ 0 & \rho \bar{M}_h & 0 & A_h^{-1} \\ S_h & 0 & -T_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \tilde{z}_0 \\ y_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_h \tilde{g} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit

$$M_h = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\hat{M}_h = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1 & & & \\ a_1 & 4a_1 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_1 & 4a_1 & a_1 \\ & & & a_1 & 4a_1 \end{pmatrix},$$

$$S_h = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T_h = h \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

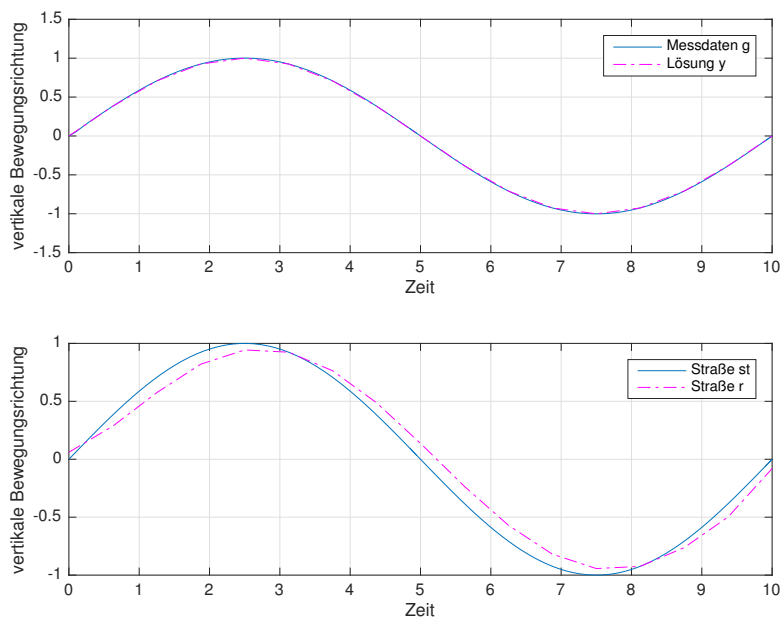


Abbildung 3.1: Sinusfunktion (Bodenwelle), $n = 16$, $\rho = 0$

Zuerst wird auch hier eine stetig differenzierbare Funktion betrachtet (siehe dazu Abbildung 3.1). Die Messdaten g werden gut durch die Lösung y angenähert. Der Verlauf der Straße st wird durch eine leichte zeitliche Verzögerung von der Näherungslösung r passend dargestellt. Auch hier wird die zeitliche Verzögerung bei stärkerer Verfeinerung kleiner.

Abbildung 3.2 stellt eine stetig, jedoch nicht überall differenzierbare Funktion dar. Es wird das Verhalten der Straße st mit einer zeitlichen Verzögerung durch die Näherungslösung r gut dargestellt.

Schließlich wird nun eine Funktion mit einer Sprungstelle betrachtet. Etwas vor und nach der Sprungstelle wird der Verlauf der Straße st durch die Näherungslösung r nur grob dargestellt. Hier sind auch die Messdaten g durch die Lösung y in etwa angenähert. Der restliche Verlauf der Straße wird durch die Näherungslösung gut approximiert. Jedoch findet zum Zeitpunkt $t = 0$ wieder die zweite Sprungstelle statt. Hier benötigt die Näherungslösung r einige Zeitschritte um das Niveau der Straße zu berechnen. Dies ist in Abbildung 3.3 ersichtlich.

Dasselbe Beispiel wird nun bei einer stärkeren Verfeinerung betrachtet (siehe Abbildung 3.4). Hier werden die Messdaten g deutlich besser durch die Lösung y angenähert. Auch der Verlauf der Straße st wird gut durch die Näherungslösung r dargestellt. Es muss daher nur stark genug verfeinert werden, um eine angemessene Lösung zu erhalten.

Nun wird noch dieses Beispiel (Gehsteigkante) für ein $\rho = 0.0001$ berechnet. Jedoch geht bereits für eine kleine Regularisierung die Näherungslösung r gegen Null. Dies ist in Abbildung 3.5 deutlich zu sehen.

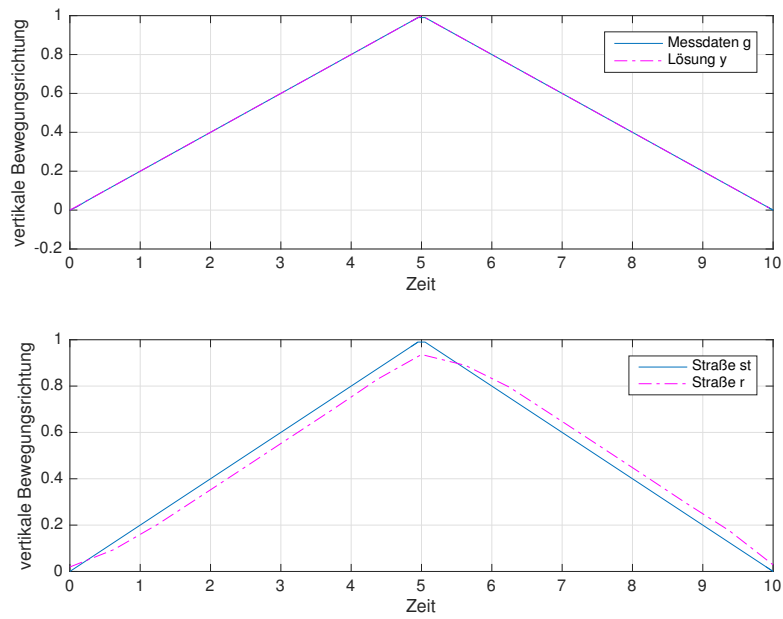


Abbildung 3.2: Betragsfunktion (Spitze Kante), $n = 16, \rho = 0$

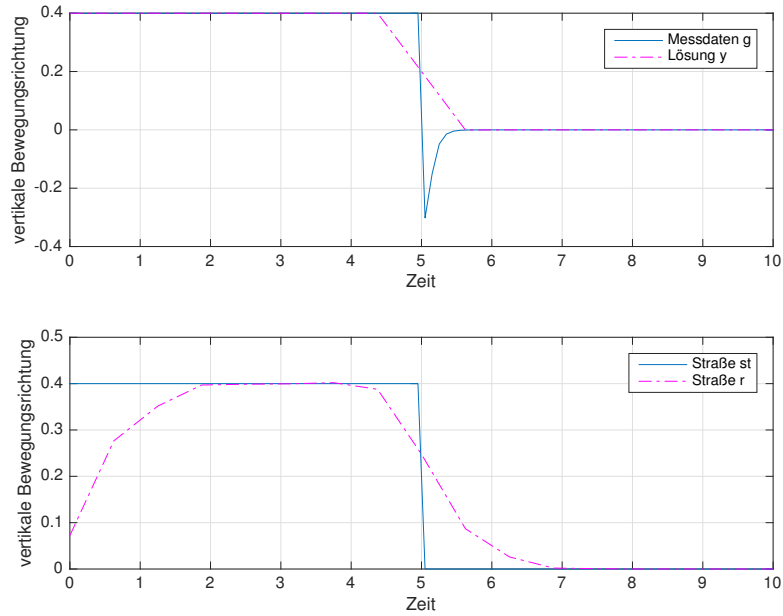


Abbildung 3.3: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 16, \rho = 0$

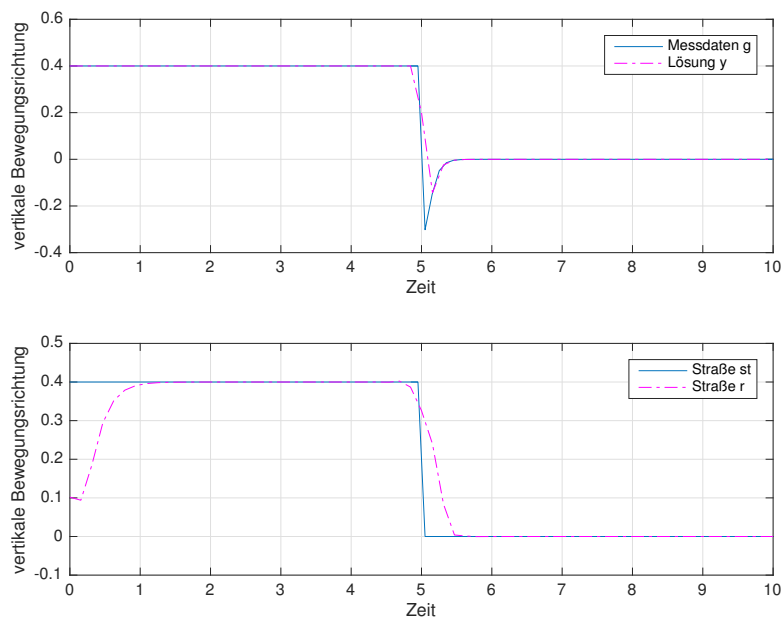


Abbildung 3.4: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 64, \rho = 0$

3.2 Anwendung am vertikalen Modell

Bisher wurde das Gleichungssystem nur an einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung angewandt. Dieses wird nun so erweitert, dass man es an dem folgenden System anwenden kann:

$$M\ddot{z}(t) + R\dot{z}(t) + Kz(t) = F(t).$$

Es handelt sich nun um ein Differentialgleichungssystem der zweiten Ordnung bestehend aus 7 Gleichungen. Durch Erweiterung des Systems zweiter Ordnung kann man es auf das vertikale Modell anwenden. Dies wurde in Matlab realisiert. Anschließend werden die Ergebnisse dazu betrachtet und interpretiert. Der Einfachheit halber wurde das Bild der Straße für alle Reifen zu jedem Zeitpunkt gleich angenommen. Somit stimmen die berechneten Messdaten g_1, g_2, g_3 und g_4 überein. Es sollten daher auch die Lösungen y_1, y_2, y_3 und y_4 sowie die Näherungslösungen r_1, r_2, r_3 und r_4 übereinstimmen.

Für eine stetig differenzierbare Funktion (Abbildung 3.6) findet wieder eine leichte zeitliche Verzögerung statt. Alle vier Näherungslösungen r_1, r_2, r_3 und r_4 sind zu jedem Zeitpunkt gleich und stellen den Verlauf der Straße $st1$ dar. Auch die Messdaten g_1 werden von allen vier Lösungen y_1, y_2, y_3 und y_4 gut approximiert.

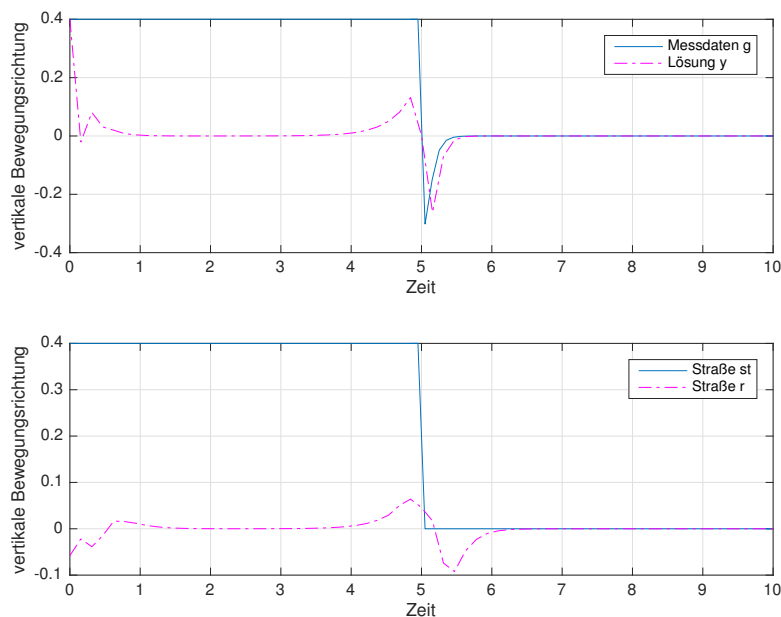
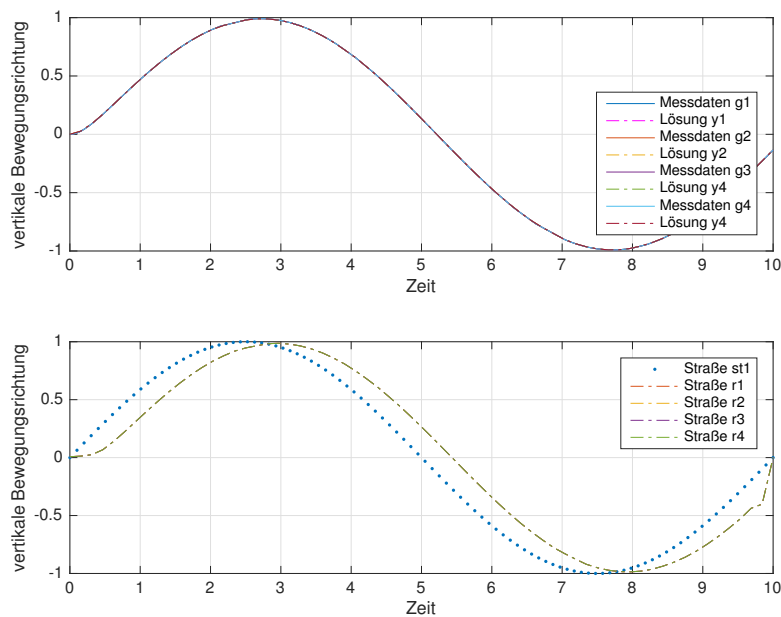
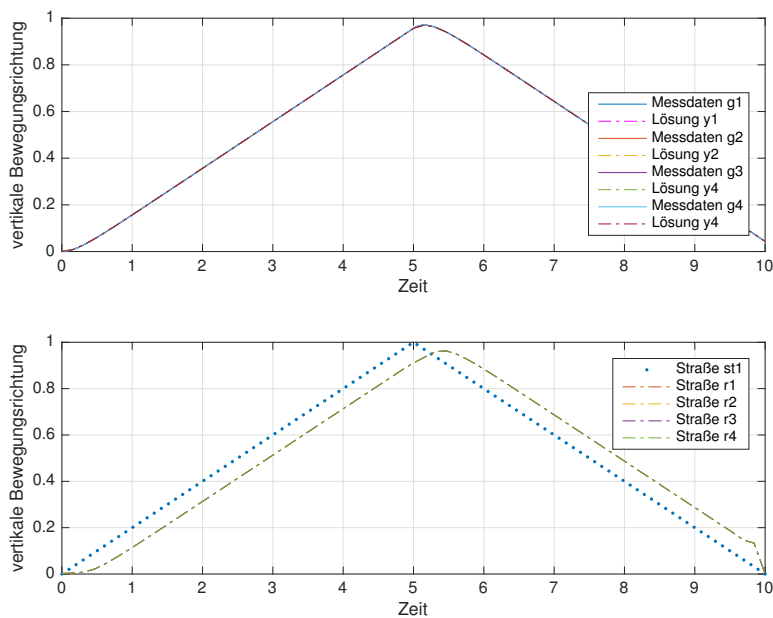
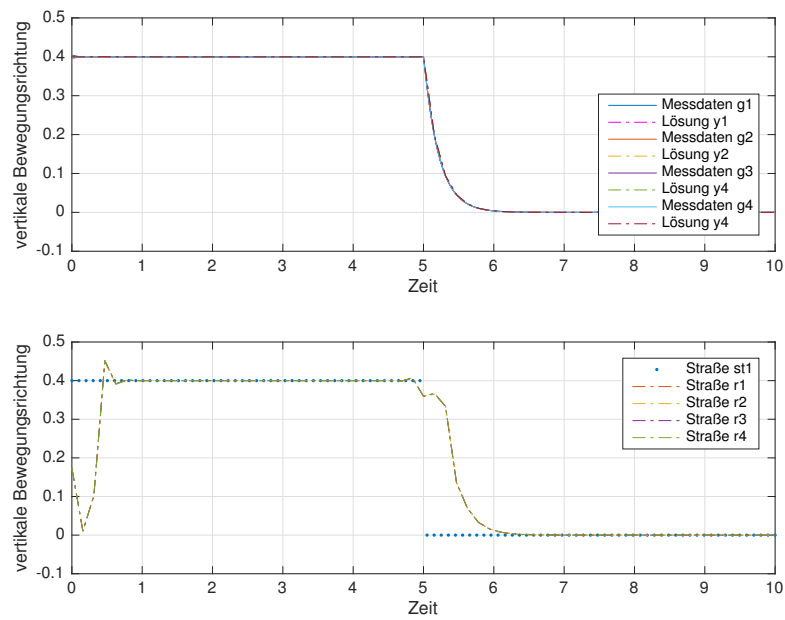


Abbildung 3.5: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 64$, $\rho = 0.0001$

Für Abbildung 3.7 wird nun eine stetige, aber zum Zeitpunkt $t = 5$ nicht differenzierbare Funktion betrachtet. Hier sieht man dasselbe Verhalten wie bei einer stetig differenzierbaren Funktion. Die Messdaten g_1, g_2, g_3 und g_4 sind ident und werden von den Lösungen y_1, y_2, y_3 und y_4 bestens approximiert. Das Bild der Straße st_1 wird zeitlich verzögert von den vier Näherungslösungen r_1, r_2, r_3 und r_4 dargestellt.

Als finales Beispiel wird nun eine Funktion mit einer Sprungstelle betrachtet. Dies ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Auch hier werden die Messdaten g_1 durch alle vier Lösungen y_1, y_2, y_3 und y_4 passend approximiert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ benötigen alle vier Näherungslösungen einige Zeitschritte um den Wert der Straße st_1 zu ermitteln. Nach dem Zeitpunkt $t = 1$ haben sie dies erreicht. Zum Zeitpunkt $t = 5$ gibt es eine grobe Annäherung der Näherungslösungen zu dem Bild der Straße.

Abbildung 3.6: Sinusfunktion (Bodenwelle), $n = 64$, $\rho = 0$ Abbildung 3.7: Betragsfunktion (Spitze Kante), $n = 64$, $\rho = 0$

Abbildung 3.8: Vorzeichenfunktion (Gehsteigkante), $n = 64, \rho = 0$

Literaturverzeichnis

- [1] L. Munteanu D. N. Dumitriu, V. Chiroiu. Car vertical dynamics simulations using both an in-house 7 dof model simulator and carsim commercial software. *U.P.B. Sci. Bull.*, 77, 2015.
- [2] International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2011. *Influence of Parameter Variations on System Identification of Full Car Model*, volume 2, Hong Kong, March 16-18 2011. IMECS 2011.
- [3] V. Mehrmann J. Liesen. *Lineare Algebra*. Springer, 2014.
- [4] M. Wagner L. Gaul, M. Kögl. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Springer, 2003.
- [5] V. Mehrmann M. Bollhöfer. *Numerische Mathematik*. Vieweg, 2004.
- [6] U. Langer M. Jung. *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*. Springer Vieweg, 2013.
- [7] G. Of. *Numerische Mathematik 3*. 2010.
- [8] A. Rieder. *Keine Probleme mit Inversen Problemen*. Vieweg, 2003.
- [9] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente*. Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2003.
- [10] O. Steinbach. *Numerische Mathematik 1*. 2005.
- [11] F. Tröltzsch. *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen*. Vieweg+Teubner, 2009.
- [12] H.-P. Willumeit. *Modelle und Modellierungsverfahren in der Fahrzeugdynamik*. B.G. Teubner Stuttgart, 1998.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZ-online hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Datum

Unterschrift