



Wolfgang Zenker, BSc

Variationsformulierungen von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Technomathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Univ.-Prof. Dr. O. Steinbach

Institut für Numerische Mathematik

Graz, Oktober 2017

Vorwort

Zu Beginn dieser Arbeit möchte ich mich bei all jenen Personen bedanken, die mich über die Jahre meines Studiums begleitet und diese mit mir erlebt haben. Ein besonderer Dank gilt hierbei meiner Familie und meinen Freunden, welche für mich Hilfe, Stütze und Ablenkung zugleich waren und mich auch in schwierigen Phasen immer unterstützt und es mir auf vielfältige Weise ermöglicht haben, dieses Studium zu absolvieren.

Vor allem möchte ich mich bei Herrn Univ.-Prof. Dr. Olaf Steinbach für die fachliche Betreuung bedanken. Die außerordentliche und aufmerksame Zusammenarbeit in Form vieler Gespräche hat die Entstehung und Fertigstellung dieser Masterarbeit maßgeblich beeinflusst. Ich möchte mich auch bei jenen Personen bedanken, welche mir bei den Korrekturen, Formatierungen und vielen weiteren, kleinen Fragestellungen geholfen und dadurch eine Mitwirkung an dieser Arbeit haben.

Die Idee zu dieser Arbeit entstand während einer Vorlesung zu Space-Time-Methoden für zeitabhängige Differentialgleichungen im Sommer 2016. Aufgrund der vielen ungelösten Fragen und der großen Anzahl an Forschungsmöglichkeiten war mein Interesse für dieses Thema von Beginn an sehr groß. Nach Rücksprache mit Herrn Univ.-Prof. Dr. Steinbach wurde eine konkrete Fragestellung zur Untersuchung ausgewählt, welche in meiner nachfolgenden Arbeit behandelt wird. Während der Bearbeitung dieses Problems konnte ich viel Erfahrung sammeln, welche für mich sowohl fachlich als auch persönlich eine Bereicherung darstellt.

Kurzfassung

Diese Arbeit untersucht die Stabilität einer Variationsformulierung eines Anfangswertproblems einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Die Besonderheit dieser Variationsformulierung besteht darin, dass die Ansatz- und Testfunktionen dieselbe Regularität aufweisen. Um diese formulieren zu können, wird die Interpolation von Funktionenräumen betrachtet, wodurch Funktionenräume mit Anfangsbedingung genau analysiert sowie Normäquivalenzen gezeigt werden können. Mithilfe dieser Normäquivalenzen können die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Variationsformulierung bewiesen werden. In der Herleitung wird ein neuer Operator definiert, dessen asymptotisches Verhalten im Grenzfall der Hilbert-Transformation ähnlich ist. Zusätzlich wird die Existenz und Eindeutigkeit für eine erweiterte Differentialgleichung erster Ordnung gezeigt. Die Arbeit behandelt weiters die Diskretisierung der Variationsformulierung, welche mithilfe der Finiten-Element-Methode gelöst wird. Bei der Betrachtung der stückweise linearen Funktionen besitzt das Verfahren eine eindeutige Lösung, für welche zusätzlich eine Fehlerabschätzung für den Approximationsfehler angegeben wird. Dabei wird die Konvergenzrate des Verfahrens ersichtlich. Abschließend werden die theoretischen Resultate anhand praktischer Beispiele überprüft.

Abstract

This master thesis analyses the stability of the variational formulation of an initial value problem of a first order ordinary differential equation. The particularity of this formulation is the equal regularity of the ansatz and the test functions. In order to obtain a formulation, an interpolation of function spaces is considered whereby interpolation spaces and specific norm equivalences are shown. The existence and the uniqueness of the solution of the variational formulation are given by the means of the norm equivalence. For this purpose a new operator is defined which has a similar performance in the limit as the Hilbert transformation. Additionally the existence and uniqueness of the solution of an extended ordinary differential equation are shown. Furthermore the thesis discusses the discretization of a variational formulation solvable with the finite element method. Considering piecewise linear functions gives a unique solution of the FE-method. Additionally an error estimate for the approximation error can be shown and the order of convergence determined. Finally the theoretical results are proven with practical examples.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	11
1 Aufstellung des Modellproblems	13
1.1 Modellproblem	13
1.2 Variationsformulierungen	14
2 Funktionenräume und deren Interpolation	17
2.1 Sobolevräume	17
2.2 Interpolation von Funktionenräumen	20
2.2.1 Die K-Methode	20
2.2.2 Die J-Methode	22
2.3 Interpolation von Sobolevräumen	24
3 Existenz und Eindeutigkeit	29
3.1 Faktorisierung des Operators	30
3.2 Anwendung auf Bilinearform	33
3.3 Erweiterung der Differentialgleichung	37
4 Diskretisierung und Fehlerabschätzung	41
4.1 Diskretisierung des Gebiets	41
4.2 Ansatz- und Testfunktionen	43
4.3 Eindeutige Lösbarkeit der diskreten Variationsformulierung	44
4.4 Fehlerabschätzung der Approximationslösung	45
5 Numerische Beispiele	51
5.1 Modellproblem	52
5.2 Modifiziertes Problem	56
Literaturverzeichnis	59

Einleitung

Differentialgleichungen stellen ein unverzichtbares Konstrukt in der Theorie der Mathematik dar. Bereits seit der Entwicklung der Differentialrechnung durch Newton (1643-1727) und Leibniz (1646-1716) werden Gleichungen untersucht, welche neben der gesuchten Funktion auch deren Ableitungen enthalten, diese Gleichungen werden als Differentialgleichungen bezeichnet, wobei die ersten Anreize aus den Beobachtungen physikalischer Vorgänge kamen. Heute beinhalten viele physikalische Formeln solche Differentialgleichungen. Aus diesem Grund stellen diese Gleichungen weiterhin einen sehr großen Forschungsbereich in der Mathematik dar.

Die analytische Lösung von Differentialgleichungen kann oftmals sehr kompliziert oder teils sogar unmöglich sein, sollte für eine Gleichung keine geschlossene Formulierung existieren. Daher hatte sich die numerische Approximation von Lösungen als eine Alternative angeboten. Hierbei wird die Lösungsfunktion nicht explizit gesucht, sondern durch verschiedene Methoden angenähert. Die ersten Näherungsverfahren reichen bis zu Euler (1707-1783) zurück. Mit diesen Verfahren war es möglich, gewöhnliche Differentialgleichungen, Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variable, sehr schnell gut zu lösen. Für partielle Differentialgleichungen, Differentialgleichungen mit mehreren unabhängigen Variablen, waren diese Verfahren nicht immer geeignet.

Die Methoden, die in dieser Arbeit verwendet werden, beruhen auf der Variationsrechnung und der Theorie der Sobolevräume, welche den Ableitungsbegriff verallgemeinern. Mit diesen war es im 20. Jahrhundert möglich, die Finite-Element-Methode (FE-Methode) zu definieren und zu analysieren, die sich zu einer Standard-Methode im Bereich der numerischen Approximation von partiellen Differentialgleichungen entwickelt hat.

In dieser Arbeit wird das Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung untersucht. Bei einem Anfangswertproblem ist der Zustand der Lösung zum Startzeitpunkt gegeben. Das Ziel der Arbeit ist es, die Stabilität einer Variationsformulierung zu zeigen, mit deren Hilfe das Anfangswertproblem mittels der FE-Methode approximativ gelöst werden kann. Zu Beginn wird in Kapitel 1 das Modellproblem sowie die Motivation zu dieser Untersuchung dargelegt. In Kapitel 2 wird die Theorie der Interpolation von Funktionenräumen definiert, mit deren Hilfe die gewünschte Varia-

tionsformulierung aufgestellt werden kann. Für diese Variationsformulierung wird in Kapitel 3 die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gezeigt. Die diskrete Variante der Formulierung wird in Kapitel 4 beschrieben. Abschließend werden in Kapitel 5 anhand numerischer Beispiele die Korrektheit und Stabilität der vorgestellten Methode gezeigt.

1 Aufstellung des Modellproblems

Das Modellproblem dieser Arbeit ist ein Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Ein Anfangswertproblem besteht aus einer Differentialgleichung und einer Gleichung, die der Funktion zu einem Startzeitpunkt t_0 den Anfangswert u_0 zuweist. Da die Lösung einer Differentialgleichung im Allgemeinen eine Funktionenschar ist, wird die Lösung mit Hilfe des Anfangswerts eindeutig bestimmt. Eine Funktion \tilde{u} wird als Lösung des Anfangswertproblems bezeichnet, wenn sie die Differentialgleichung löst und die Anfangsbedingung $\tilde{u}(t_0) = u_0$ erfüllt.

In diesem Abschnitt wird das betrachtete Modellproblem dieser Arbeit formuliert und es werden die ersten Variationsformulierungen angeführt, welche die Grundlage für die weiteren Untersuchungen bilden.

1.1 Modellproblem

Das zentrale Modellproblem, welches in dieser Arbeit betrachtet wird, beschreibt ein Anfangswertproblem einer linearen, gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} u'(t) &= f(t), \quad t \in (0, T], \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Der Anfangswert $u(0) = 0$ sowie die obere Intervallsgrenze T sind hierbei ohne Beschränkung der Allgemeinheit gewählt. Das Anfangswertproblem (1.1) wird in der weiteren Arbeit in einer Darstellung mittels Operator verwendet, wodurch einige Eigenschaften des Anfangswertproblems gezeigt werden können. Sei hierfür ein Operator L definiert in der Form

$$L := \frac{d}{dt}, \quad L : X \rightarrow Y',$$

so ist L linear. Die Räume X und Y stellen geeignet gewählte Funktionenräume dar, wobei der Raum Y' den topologischen Dualraum des Raumes Y beschreibt. Das Modellproblem (1.1) kann somit in der Form

$$Lu = f \tag{1.2}$$

geschrieben werden. Der Anfangswert wird dabei in die Definition des Raumes X eingebunden.

1.2 Variationsformulierungen

Um die Differentialgleichung (1.1) zu lösen, wird diese in eine Variationsformulierung überführt. Da jede Lösung des Anfangswertproblems einer Lösung der Variationsformulierung und jede Lösung der Variationsformulierung einer schwachen Lösung des Anfangswertproblems entspricht, sind das Problem (1.1) und die Variationsformulierung äquivalent. Für die Variationsformulierung wird die Gleichung mit einer passenden, beliebigen Testfunktion v aus einem Funktionenraum Y multipliziert und anschließend wird das Produkt über das gesamte Intervall integriert. Es ergibt sich dadurch die Gleichung

$$\int_0^T u'(t)v(t) dt = \int_0^T f(t)v(t) dt.$$

Eine Funktion u aus einem geeignet gewählten Ansatzraum X wird als Lösung einer Variationsformulierung bezeichnet, wenn die Gleichung für jede beliebige Testfunktion v erfüllt ist.

Um die Definitheit der Integrale zu garantieren, müssen bestimmte Forderungen an die Funktionen u und v gestellt werden. Es ist zu erkennen, dass für u' und v in $L^2(0, T)$ das Integral $\int u'(t)v(t)dt$ existiert. Durch die Bedingung $u' \in L^2(0, T)$ folgt, dass $u \in H^1(0, T)$ ist. Die gegebene Anfangsbedingung schränkt allerdings die Wahl von u ein, sodass die Funktion aus dem Raum $H_{0,\cdot}^1(0, T) \subset H^1(0, T)$ mit

$$H_{0,\cdot}^1(0, T) := \{u \in H^1(0, T) \mid u(0) = 0\} \tag{1.3}$$

gewählt werden muss. Eine genaue Beschreibung der Räume $H^1(0, T)$ und $H_{0,\cdot}^1(0, T)$ wird in Kapitel 2 behandelt. Ausgehend von der Forderung $v \in L^2(0, T)$ folgt, dass die Funktion f ebenfalls in $L^2(0, T)$ enthalten sein muss.

Mit diesen Forderungen kann die folgende Variationsformulierung aufgestellt werden:

Gesucht ist eine Funktion $u \in H_{0,\cdot}^1(0, T)$, sodass

$$\int_0^T u'(t)v(t) dt = \int_0^T f(t)v(t) dt, \text{ für alle } v \in L^2(0, T). \quad (1.4)$$

Diese Variationsformulierung (1.4) wird im Nachfolgenden als *primale Formulierung* bezeichnet.

Die primale Formulierung kann in einer Operatorform dargestellt werden. Mit der Definition des Operators L_1

$$L_1 := \frac{d}{dt}, \quad L_1 : H_{0,\cdot}^1(0, T) \rightarrow L^2(0, T), \quad (1.5)$$

besitzt die Gleichung (1.4) der primalen Formulierung die Gestalt

$$(L_1 u, v)_{L^2(0, T)} = (f, v)_{L^2(0, T)}, \text{ für alle } v \in L^2(0, T).$$

Die Form $(\cdot, \cdot)_{L^2(0, T)}$ bezeichnet hierbei das L^2 -Skalarprodukt

$$(f, v)_{L^2(0, T)} = \int_0^T f(t)v(t) dt.$$

Die primale Formulierung kann transformiert werden, indem die linke Seite partiell integriert wird. Es folgt dadurch die Gleichung

$$\underbrace{u(t)v(t)\Big|_0^T}_{u(T)v(T) - u(0)v(0)} - \int_0^T u(t)v'(t) dt = \int_0^T f(t)v(t) dt.$$

Aufgrund der Anfangsbedingung ergibt der Term $u(0)v(0)$ den Wert Null. Wird die zusätzliche Bedingung $v(T) = 0$ an die Funktion v gestellt, so folgt die Gleichung

$$\int_0^T u(t)v'(t) dt = - \int_0^T f(t)v(t) dt.$$

Analog zur primalen Formulierung ist zu sehen, dass für die Definitheit des Integrals u und v' in $L^2(0, T)$ sein müssen, wodurch $v \in H^1(0, T)$ folgt. Aufgrund der zusätzlichen Bedingung $v(T) = 0$ ist die Funktion v in dem Teilraum $H_{\cdot, 0}^1(0, T) \subset H^1(0, T)$ mit der Definition

$$H_{\cdot, 0}^1(0, T) := \{v \in H^1(0, T) \mid v(T) = 0\} \quad (1.6)$$

enthalten. Für die rechte Seite der Differentialgleichung gilt, dass f aus dem Dualraum $[H_{\cdot, 0}^1(0, T)]'$ sein muss. Es folgt eine weitere Variationsformulierung:

Gesucht ist $u \in L^2(0, T)$, sodass

$$\int_0^T u(t)v'(t) dt = - \int_0^T f(t)v(t) dt, \text{ für alle } v \in H_{\cdot,0}^1(0, T). \quad (1.7)$$

Diese Variationsformulierung (1.7) wird in dieser Abhandlung als *duale Formulierung* bezeichnet.

Für die Operatorarstellung der dualen Formulierung wird der Operator L_0 definiert durch

$$L_0 := \frac{d}{dt}, \quad L_0 : L^2(0, T) \rightarrow [H_{\cdot,0}^1(0, T)]'. \quad (1.8)$$

Mit diesem Operator besitzt die duale Formulierung die Gestalt

$$(L_0 u, v)_{L^2(0, T)} = -\langle f, v \rangle, \text{ für alle } v \in H_{\cdot,0}^1(0, T).$$

Das Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stellt eine Erweiterung des Skalarprodukts auf den Dualraum dar. Für eine Funktion $f \in [H_{\cdot,0}^1(0, T)]'$ ist das Dualitätsprodukt definiert durch

$$\langle f, v \rangle := f(v), \quad v \in H_{\cdot,0}^1(0, T).$$

Ist die Funktion f im Funktionenraum $L^2(0, T)$ enthalten, kann das Dualitätsprodukt mit dem üblichen Skalarprodukt identifiziert werden.

Die primale und duale Variationsformulierung bilden zwei Variationsformulierungen, deren Lösung jeweils einer schwachen Lösung des Anfangswertproblems (1.1) entspricht. Es kann gezeigt werden, dass sowohl die primale als auch die duale Variationsformulierung eine eindeutige Lösung besitzen, siehe hierfür [18]. In beiden Formulierungen weisen jedoch die Ansatz- und Testfunktionen unterschiedliche Regularitäten hinsichtlich der (schwachen) Differenzierbarkeit auf. In dieser Abhandlung wird untersucht, inwieweit die beiden Formulierungen miteinander kombiniert werden können, sodass die Ansatz- und Testfunktionen gleiche Regularität aufweisen. Es wird sich zeigen, dass ein Operator $L_\theta = \frac{d}{dt}$ auf den Interpolationsräumen der primalen und dualen Formulierung definiert werden kann durch

$$L_\theta : (H_{0,\cdot}^1(0, T), L^2(0, T))_\theta \rightarrow [(L^2(0, T), H_{\cdot,0}^1(0, T))_\theta]',$$

wobei die Funktionenräume $(H_{0,\cdot}^1(0, T), L^2(0, T))_\theta$ und $[(L^2(0, T), H_{\cdot,0}^1(0, T))_\theta]'$ die Interpolation der Räume in Abhängigkeit eines Parameters θ beschreiben. Für den Fall $\theta = \frac{1}{2}$ wird in Kapitel 3 gezeigt, dass die Variationsformulierung eindeutig lösbar ist und die Ansatz- und Testfunktionen auch gleiche Regularität aufweisen. Im folgenden Kapitel wird die Theorie der Interpolation von Funktionenräumen dargelegt.

2 Funktionenräume und deren Interpolation

Für die weitere Analyse der Variationsformulierungen (1.4) und (1.7) werden spezifische Funktionenräume benötigt. Grundlegend für den folgenden Abschnitt wird der Sobolevraum $H^1(0, T)$ sein, dieser Funktionenraum wird in der kanonischen Form verwendet

$$H^1(0, T) = \{u \in L^2(0, T) \mid u' \in L^2(0, T)\},$$

wobei mit u' stets die verallgemeinerte, schwache Ableitung zu verstehen ist. Das H^1 -Skalarprodukt ist definiert durch

$$(u, v)_{H^1(0, T)} := (u, v)_{L^2(0, T)} + (u', v')_{L^2(0, T)}$$

mit der induzierten Norm $\|\cdot\|_{H^1(0, T)} = \sqrt{(\cdot, \cdot)_{H^1(0, T)}}$. Für zusätzliche Informationen zur schwachen Ableitung und der Sobolevräume siehe z.B. [3], [9] und [14].

Von großer Bedeutung für diese Arbeit sind Sobolevräume mit fraktionalem Index $H^s(0, T)$, $s \in \mathbb{R}_+$, diese werden im folgenden Abschnitt genau diskutiert.

2.1 Sobolevräume

Der Sobolevraum $H^1(0, T)$ enthält alle Funktionen, deren erste Ableitung quadratintegrierbar ist. Ausgehend von diesem Raum wird der $H^k(0, T)$ mit $k \in \mathbb{N}$ als Menge aller Funktionen definiert, deren k -te Ableitung quadratintegrierbar ist. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist somit

$$H^k(0, T) := \{u \in L^2(0, T) \mid u^{(k)} \in L^2(0, T)\}. \quad (2.1)$$

Dieses Konzept wird anschließend auf Sobolevräume $H^s(0, T)$ mit $s \in \mathbb{R}_+$ erweitert. Die Räume werden mithilfe der *Sobolev-Slobodeckii*-Halbnorm erklärt, welche definiert

ist durch

$$|u|_{H^\mu(0,T)} := \left(\int_0^T \int_0^T \frac{[u(s) - u(t)]^2}{|s - t|^{1+2\mu}} ds dt \right)^{1/2}, \quad \mu \in (0,1).$$

Sei nun $s = k + \mu$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mu \in (0,1)$, so gilt

$$H^s(0,T) := \{u \in H^k(0,T) \mid |u^{(k)}|_{H^\mu(0,T)} < \infty\}. \quad (2.2)$$

Der Raum ist mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^s(0,T)} := (u, v)_{H^k(0,T)} + \int_0^T \int_0^T \frac{[u^{(k)}(s) - u^{(k)}(t)][v^{(k)}(s) - v^{(k)}(t)]}{|s - t|^{1+2\mu}} ds dt$$

und der daraus resultierenden H^s -Norm $\|\cdot\|_{H^s(0,T)} = \sqrt{(\cdot, \cdot)_{H^s(0,T)}}$ ein Hilbertraum.

Aufgrund der Definition der Sobolevräume beschreibt ein Element eines Sobolevraums stets eine Äquivalenzklasse an Funktionen. Unterscheiden sich zwei Funktionen aus einem Sobolevraum nur auf einer Menge mit Maß Null, so sind diese beiden Funktionen ident. Daher ist in diesem Fall eine punktweise Definition nicht möglich. Unter bestimmten Umständen kann eine Funktion einen stetigen Repräsentanten besitzen, der eine punktweise Definition zulässt. Der *Sobolevsche Einbettungssatz*, der im Folgenden angegeben wird, liefert, dass für entsprechende $s \in \mathbb{R}$ alle Funktionen $u \in H^s(0,T)$ einen solchen stetigen Repräsentanten besitzen.

Satz 2.1 (Sobolevscher Einbettungssatz). [14, Satz 2.1] *Sei $s > \frac{1}{2}$. Dann gilt, dass jede Funktion $u \in H^s(0,T)$ einen stetigen Repräsentanten besitzt und somit $u \in C(\overline{(0,T)})$ ist. Es existiert ein $c > 0$, sodass die Abschätzung*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^s(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in H^s(\Omega)$$

gültig ist.

Für das Anfangswertproblem (1.2) werden Sobolevräume benötigt, deren Funktionen die Anfangsbedingung erfüllen. Dieses Konzept wird ausgehend von den Funktionenräumen mit Randbedingungen erweitert. Für Randbedingungen können zwei Räume definiert werden, deren Funktionen eine abstrakte oder schwache Nullrandbedingung erfüllen, diese sind

$$\tilde{H}^s(0,T) := \overline{C_0^\infty(0,T)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R})}} = \{u \in H^s(\mathbb{R}) \mid \text{supp } u \subset (0,T)\} \quad (2.3)$$

$$H_0^s(0,T) := \overline{C_0^\infty(0,T)}^{\|\cdot\|_{H^s(0,T)}} = \{u \in H^s(0,T) \mid u(0) = u(T) = 0\}, \quad s > \frac{1}{2}. \quad (2.4)$$

Die Bedingung $s > \frac{1}{2}$ der Definition des $H_0^s(0, T)$ folgt aus dem Sobolevschen Einbettungssatz 2.1, da die Funktionen $u \in H^s(0, T)$ nur für $s > \frac{1}{2}$ stetige Repräsentanten besitzen, welche eine punktweise Definition sinnvoll machen. Der folgende Satz liefert einen Zusammenhang der beiden Räume (2.3) und (2.4).

Satz 2.2. [14, Theorem 2.15] Für $s \geq 0$ gilt

$$\tilde{H}^s(0, T) \subset H_0^s(0, T).$$

Diese Aussage kann spezifiziert werden durch

$$\tilde{H}^s(0, T) = H_0^s(0, T) \quad \text{für } s \neq k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Weiters besitzen die Dualräume die Gestalt

$$\tilde{H}^s(0, T) = [H^{-s}(0, T)]', \quad H^s(0, T) = [\tilde{H}^{-s}(0, T)]'.$$

Die obigen zwei Räume (2.3) und (2.4) stellen Bedingungen an die Funktion auf dem gesamten Rand des Gebiets. Für das Anfangswertproblem (1.1) werden jedoch nur Bedingungen im Punkt Null gefordert, aus diesem Grund werden nachfolgend Funktionenräume mit Anfangsbedingungen definiert.

Definition 2.3. Für $s > \frac{1}{2}$ seien die Räume $H_{0,\cdot}^s(0, T)$ und $H_{\cdot,0}^s(0, T)$ definiert durch

$$H_{0,\cdot}^s(0, T) := \{u \in H^s(0, T) \mid u(0) = 0\}, \quad (2.5)$$

$$H_{\cdot,0}^s(0, T) := \{u \in H^s(0, T) \mid u(T) = 0\}. \quad (2.6)$$

Für diese zwei Räume gelten die Relationen $H_0^s(0, T) \subsetneq H_{0,\cdot}^s(0, T) \subsetneq H^s(0, T)$.

In Kapitel 1 wurden die Operatoren L_0 und L_1 beschrieben mit

$$L_1 : H_{0,\cdot}^1(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$$

und

$$L_0 : L^2(0, T) \rightarrow [H_{\cdot,0}^1(0, T)]'.$$

Es wird nun ein Operator L_θ für $0 < \theta < 1$ gesucht, dessen Definitionsbereich und Bild den jeweiligen Interpolationsräumen entsprechen mit

$$L_\theta : (H_{0,\cdot}^1(0, T), L^2(0, T))_\theta \rightarrow \left[(L^2(0, T), H_{\cdot,0}^1(0, T))_\theta \right]'.$$

2.2 Interpolation von Funktionenräumen

Im folgenden Abschnitt wird eine allgemeine Einführung in die Interpolation von Funktionenräumen gegeben. Ab nun werden alle in der Abhandlung auftretenden Funktionen als reellwertig angenommen. Für den komplexen Fall und weitere Informationen siehe [7], [11] oder [16].

Zu Beginn wird die Definition eines kompatiblen Paares gegeben.

Definition 2.4. *Seien X_0 und X_1 zwei normierte Vektorräume, welche Teilräume eines topologischen Vektorraums \mathcal{X} sind, so wird $\overline{X} := (X_0, X_1)$ als ein kompatibles Paar bezeichnet.*

Weiters werden die Räume $X_0 \cap X_1$ und $X_0 + X_1$ mit den Normen

$$\|u\|_{X_0 \cap X_1} := (\|u\|_{X_0}^2 + \|u\|_{X_1}^2)^{1/2}$$

$$\|u\|_{X_0 + X_1} := \inf_{\substack{u=u_0+u_1 \\ u_0 \in X_0, u_1 \in X_1}} \left\{ (\|u_0\|_{X_0}^2 + \|u_1\|_{X_1}^2)^{1/2} \right\}$$

benötigt. Das Ziel ist es nun, eine Interpolation der Funktionenräume X_0 und X_1 zu finden und zu konstruieren, sodass

$$X_{\theta,p} = (X_0, X_1)_{\theta,p}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (2.7)$$

einen Raum zwischen den beiden Räumen $X_0 \cap X_1$ und $X_0 + X_1$ bildet mit

$$X_0 \cap X_1 \subset X_{\theta,p} \subset X_0 + X_1.$$

Zur Konstruktion solcher Räume werden die K-Methode und die J-Methode verwendet, welche im Folgenden genau erklärt werden.

2.2.1 Die K-Methode

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der K-Methode erklärt. Für eine detaillierte Darstellung siehe [11].

Für die K-Methode sei das K-Funktional definiert durch

$$K(t, u) := \inf \left\{ (\|u_0\|_{X_0}^2 + t^2 \|u_1\|_{X_1}^2)^{1/2} \mid u_0 \in X_0, u_1 \in X_1, u = u_0 + u_1 \right\} \quad (2.8)$$

für $t > 0$ und $u \in X_0 + X_1$. Weiters wird für eine Funktion f eine gewichtete L^p -Norm erklärt mit

$$\|f\|_{\theta,p} := \left(\int_0^\infty |t^{-\theta} f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}, \quad (2.9)$$

womit der Raum $K_{\theta,p}(X_0, X_1) = K_{\theta,p}(\overline{X})$ beschrieben werden kann durch

$$K_{\theta,p}(X_0, X_1) := \left\{ u \in X_0 + X_1 \mid \|K(\cdot, u)\|_{\theta,p} < \infty \right\}. \quad (2.10)$$

Für weitere Ergebnisse ist es notwendig, dass die Norm mit dem Faktor $N_{\theta,p}$ entsprechend normiert wird, der festgelegt ist als

$$N_{\theta,p} := \|\min(1, \cdot)\|_{\theta,p}^{-1} = \begin{cases} (p\theta(1-\theta))^{1/2}, & 1 \leq p < \infty, \\ 1, & p = \infty. \end{cases} \quad (2.11)$$

Die Norm $\|\cdot\|_{K_{\theta,p}}$ wird für den Raum $K_{\theta,p}(\overline{X})$ definiert durch

$$\|u\|_{K_{\theta,p}} := N_{\theta,p} \|K(\cdot, u)\|_{\theta,p}. \quad (2.12)$$

Die $K_{\theta,p}$ -Norm kann bezüglich der Normen $\|\cdot\|_{X_0 \cap X_1}$ und $\|\cdot\|_{X_0 + X_1}$ abgeschätzt werden, welches im folgenden Lemma gezeigt wird.

Lemma 2.5. [11, Lemma 2.1] *Es sei $\overline{X} = (X_0, X_1)$ ein kompatibles Paar und $\|\cdot\|_{K_{\theta,p}}$ die normalisierte $K_{\theta,p}$ -Norm (2.12).*

i) Wenn $u \in X_0 \cap X_1$, dann ist $u \in K_{\theta,p}(\overline{X})$ und

$$\|u\|_{K_{\theta,p}} \leq \|u\|_{X_0}^{1-\theta} \|u\|_{X_1}^\theta \leq \|u\|_{X_0 \cap X_1}.$$

ii) Wenn $u \in K_{\theta,p}(\overline{X})$, dann ist $u \in X_0 + X_1$ und

$$\|u\|_{X_0 + X_1} \leq \|u\|_{K_{\theta,p}}.$$

Mit dem Lemma 2.5 folgt für den Raum $K_{\theta,p}(\overline{X})$, dass

$$X_0 \cap X_1 \subset K_{\theta,p}(\overline{X}) \subset X_0 + X_1,$$

wodurch $K_{\theta,p}$ einen Interpolationsraum von X_0 und X_1 darstellt.

Die Interpolation kann auf die Dualräume übertragen werden. Hierfür wird die zur K-Methode komplementäre und duale J-Methode verwendet.

2.2.2 Die J-Methode

Die J-Methode beschreibt eine weitere Methode zur Interpolation von Funktionenräumen. Analog zur K-Methode werden in diesem Abschnitt die Grundlagen dieser Methode formuliert, für weitere Informationen siehe [9] und [11].

In der J-Methode treten Integrale von vektorwertigen Funktionen auf, welche als Bochner-Integrale bezeichnet und im Folgenden erklärt werden, für weitere Details zu Bochner-Integralen siehe [17]. Hierzu wird die Definition einer *einfachen* Funktion angegeben, für welche Bochner-Integrale definiert werden können.

Definition 2.6. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und X ein normierter Raum. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow X$ wird als einfach bezeichnet, wenn eine endliche Anzahl an Elementen $\{u_k\}_{k=1}^N$ mit $u_k \in X$ und eine endliche Anzahl disjunkter, endlicher Mengen $\{E_k\}_{k=1}^N$ mit $E_k \subset \Omega$ existiert, sodass*

$$f|_{E_k} = u_k \quad \text{und} \quad f|_{\Omega \setminus \cup E_k} \equiv 0$$

gilt. Mithilfe dieser Definition ist das Bochner-Integral der Funktion f definiert als

$$\int_{\Omega} f(t) \, d\mu_t = \sum_{k=1}^N u_k \mu(E_k).$$

Für eine allgemeine Funktion $f : \Omega \rightarrow X$ ist das Bochner-Integral genau dann wohldefiniert, wenn eine Folge von einfachen Funktionen $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, sodass für fast alle $t \in \Omega$ $f_n(t)$ gegen $f(t)$ konvergiert und die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n(t) - f(t)\|_X \, d\mu_t = 0$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist äquivalent zu der Eigenschaft, dass die Funktion $t \mapsto \|f(t)\|_X$ integrierbar ist. Es gilt dann

$$\int_{\Omega} f(t) \, d\mu_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(t) \, d\mu_t.$$

Für ein kompatibles Paar (X_0, X_1) sei analog zum K-Funktional das J-Funktional definiert durch

$$J(t, u) := \left(\|u\|_{X_0}^2 + t^2 \|u\|_{X_1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{für } t > 0, u \in X_0 \cap X_1. \quad (2.13)$$

Es wird nun der Raum $J_{\theta,p}(X_0, X_1)$ als Raum aller Funktionen u beschrieben, welche in $X_0 + X_1$ enthalten und durch eine Funktion f in der folgenden Form darstellbar sind

$$u = \int_0^\infty f(t) \frac{dt}{t}, \quad (2.14)$$

wobei dieses Integral als Bochner-Integral einer vektorwertigen Funktion f zu verstehen ist. Die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow X_0 \cap X_1$ erfüllt dabei die Bedingungen

$$\int_0^\infty \|f(t)\|_{X_0+X_1} \frac{dt}{t} < \infty \text{ und } \int_a^b \|f(t)\|_{X_0 \cap X_1} \frac{dt}{t} < \infty$$

für a und b mit $0 < a < b < \infty$. Daher wird der Raum $J_{\theta,p}(X_0, X_1)$ definiert durch

$$J_{\theta,p}(X_0, X_1) := \{u \in X_0 + X_1 \mid u \text{ erfüllt (2.14)}\}. \quad (2.15)$$

Für den Raum $J_{\theta,p}$ wird die folgende Norm definiert

$$\|u\|_{J_{\theta,p}(X)} := \inf \|J(\cdot, f(\cdot))\|_{\theta,p}. \quad (2.16)$$

Das Infimum wird dabei über alle Funktionen f gebildet, die die Darstellung (2.14) erfüllen.

Mithilfe der J-Methode kann die Interpolation von Funktionenräumen auf die Dualräume von X_0 und X_1 übertragen werden. Dabei ergibt sich das folgende Resultat.

Satz 2.7. [11, Theorem 2.4] *Sei $X = (X_0, X_1)$ ein kompatibles Paar und $X_0 \cap X_1$ dicht in X_0 und X_1 . Dann ist $X_0 \cap X_1$ dicht in $X_0 + X_1$ und $X' := (X'_0, X'_1)$ ist ein kompatibles Paar. Weiters gilt für $0 < \theta < 1$ sowie $1 \leq p < \infty$ und q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*

$$(X_0, X_1)'_{\theta,p} = (X'_0, X'_1)_{\theta,q} \quad (2.17)$$

mit äquivalenten Normen.

Die Interpolation von Funktionenräumen ist daher mit der J-Methode auch bei Dualräumen gültig. Der folgende Satz zeigt, dass die Interpolationsräume der K-Methode und der J-Methode äquivalent sind und somit die Interpolation eindeutig und in derselben Weise für Funktionenräume und deren Dualräume durchgeführt werden kann.

Satz 2.8. [9, Theorem B.3] *Sei (X_0, X_1) ein kompatibles Paar. Für $0 < \theta < 1$ und $1 \leq p \leq \infty$ gilt, dass $K_{\theta,p}(X_0, X_1) = J_{\theta,p}(X_0, X_1)$ ist und die Normen äquivalent sind.*

Die Sätze 2.7 und 2.8 motivieren die Definition des Interpolationsraums von (X_0, X_1) mit

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} := K_{\theta,p}(X_0, X_1) = J_{\theta,p}(X_0, X_1) \quad (2.18)$$

und der Interpolationsnorm

$$\|\cdot\|_{\theta,p} := \|\cdot\|_{K_{\theta,p}}. \quad (2.19)$$

Die bisherigen Definitionen und Sätze sind für alle normierten Räume gültig. Werden als Ausgangsräume Hilberträume gewählt, so können weitere Aussagen über den Interpolationsraum und die dazugehörige Norm getroffen werden. Bei der Interpolation von Hilberträumen wird der Parameter $p = 2$ gewählt, um zu garantieren, dass der Interpolationsraum selbst wieder ein Hilbertraum ist.

Satz 2.9. [11, Theorem 3.4] *Es sei $\overline{H} = (H_0, H_1)$ ein kompatibles Paar von Hilberträumen, wobei H_1 dicht und kompakt in H_0 eingebettet ist. Weiters sei der Operator $A : H_1 \rightarrow H_1$ definiert durch*

$$(Au, v)_{H_1} = (u, v)_{H_0}, \quad u, v \in H_1.$$

Dann ist der Operator A kompakt, selbstadjungiert und injektiv und es existiert eine Orthonormalbasis $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ der Eigenvektoren von A mit den dazu gehörigen Eigenwerten ρ_i . Diese Eigenwerte erfüllen $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots > 0$ und $\rho_i \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$. Für $0 < \theta < 1$ gilt, dass

$$(H_0, H_1)_{\theta,2} = \left\{ u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k \in H_0 \mid \|u\|_{\theta}^* := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{-\theta} |u_k|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}. \quad (2.20)$$

Für die Norm $\|u\|_{\theta}^$ gilt die Äquivalenz $\|u\|_{\theta}^* = \|u\|_{K_{\theta,2}} = \|u\|_{J_{\theta,2}}$ für $u \in (H_0, H_1)_{\theta,2}$.*

Dieser Satz definiert eine Norm, welche durch die Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen eines Operators A beschrieben wird und äquivalent zur Interpolationsnorm $\|\cdot\|_{\theta,2}$ ist. Somit kann anstelle der (abstrakten) Interpolationsnorm die Summennorm $\|\cdot\|_{\theta}^*$ für den Interpolationsraum $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ verwendet werden.

2.3 Interpolation von Sobolevräumen

Im folgenden Abschnitt wird die Interpolation von Sobolevräumen betrachtet, weswegen die zwei betrachteten Räume X_0 und X_1 als Sobolevräume angenommen werden.

Zu Beginn wird ein allgemeines Resultat gegeben, welches zeigt, dass für

$$s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \quad 0 < \theta < 1, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

die Definition von $H^s(0, T)$ äquivalent zum Interpolationsraum von $H^{s_1}(0, T)$ und $H^{s_2}(0, T)$ ist.

Satz 2.10. [9, Theorem B.8] Sei Ω eine nichtleere, offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Für s_0 und s_1 in \mathbb{R} gilt, dass

$$(H^{s_0}(\Omega), H^{s_1}(\Omega))_{\theta,2} = H^s(\Omega) \quad \text{für } s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \quad 0 < \theta < 1.$$

Die H^s -Norm ist äquivalent zur normalisierten $K_{\theta,2}$ -Norm (2.12) des Interpolationsraums.

Bemerkung 2.1. Mit dem Satz 2.10 folgt, dass für $s_0 = 0, s_1 = 1$ und $\theta = \frac{1}{2}$ der Interpolationsraum $(L^2(0, T), H^1(0, T))_{\theta,2}$ dem Raum $H^{1/2}(0, T)$ entspricht. Die $H^{1/2}$ -Norm ist äquivalent zur Interpolationsnorm $\|\cdot\|_{\theta,2}$.

Für die Räume mit Randbedingungen \tilde{H}^s und H_0^s ((2.3) und (2.4)) muss aufgrund der Randbedingungen eine strengere Voraussetzung an das Gebiet gestellt werden.

Satz 2.11. Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet. Für s_0 und s_1 in \mathbb{R} gilt

$$\left(\tilde{H}^{s_0}(\Omega), \tilde{H}^{s_1}(\Omega)\right)_{\theta,2} = \tilde{H}^s(\Omega) \quad \text{für } s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \quad 0 < \theta < 1.$$

Weiters ist die H^s -Norm äquivalent zur normalisierten $K_{\theta,2}$ -Norm (2.12) des Interpolationsraums.

Der Satz liefert, dass auch \tilde{H}^s -Räume als Interpolationsräume aufgefasst werden können. Dieses Ergebnis motiviert die Darstellung dieser Räume mit Anfangswertbedingungen als Interpolationsräume. Es wurden zuvor die zwei Räume $H_{0,\cdot}^s(0, T)$ und $H_{\cdot,0}^s(0, T)$ ((2.5) und (2.6)) definiert, wobei hierfür $s > \frac{1}{2}$ festgelegt wurde. Diese Räume können nun in Anlehnung an Satz 2.11 als Interpolationsräume aufgefasst werden, es gilt daher die Darstellung

$$H_{0,\cdot}^s(0, T) = (L^2(0, T), H_{0,\cdot}^1(0, T))_{s,2}$$

für $s \in (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ mit analoger Darstellung für den Raum $H_{\cdot,0}^s(0, T)$. Für den Parameter s müssen nun drei Fälle unterschieden werden.

- $0 < s < \frac{1}{2}$

Für $0 < s < \frac{1}{2}$ gilt, dass $(L^2(0, T), H_{0,\cdot}^1(0, T))_{s,2} = H^s(0, T) = (L^2(0, T), H^1(0, T))_{s,2}$. In diesem Fall verschwindet die Anfangsbedingung, da keine punktweise Definition möglich ist.

- $\frac{1}{2} < s < 1$

Hierbei gilt, dass $(L^2(0, T), H_{0,\cdot}^1(0, T))_{s,2} = H_{0,\cdot}^s(0, T)$ und $H_{0,\cdot}^s(0, T) \subsetneq H^s(0, T)$ ist. Der Raum $H_{0,\cdot}^s(0, T)$ ist ein abgeschlossener Teilraum des $H^s(0, T)$.

- $s = \frac{1}{2}$

Dieses stellt einen Spezialfall dar. Im Gegensatz zum Fall $s > \frac{1}{2}$ gilt die direkte Randbedingung nicht, da aufgrund des Sobolevschen Einbettungssatzes (2.1) für $s = \frac{1}{2}$ keine Klasse von stetigen Funktionen existiert. Für den Raum $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ gilt, dass

$$H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T) = (L^2(0, T), H_{0,\cdot}^1(0, T))_{1/2,2},$$

wobei $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ ein echter Teilraum von $H^{1/2}(0, T)$ ist. Im Gegensatz zum Raum $H_{0,\cdot}^s(0, T)$ für $\frac{1}{2} < s < 1$ ist $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ nicht abgeschlossen. Der Raum liegt jedoch dicht in $H^{1/2}(0, T)$ und besitzt eine stetige Einbettung. Es gelten die Inklusionen

$$\begin{aligned} H_0^{1/2}(0, T) &\subsetneq H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T) \subsetneq H^{1/2}(0, T), \\ H_{0,0}^{1/2}(0, T) &\subsetneq H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T) \subsetneq H^{1/2}(0, T). \end{aligned}$$

Für eine Funktion $u \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ gilt, dass die Funktion $t^{-1/2}u(t)$ im Raum $L^2(0, T)$ enthalten ist, daher kann $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ mithilfe der folgenden Darstellung definiert werden

$$H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T) := \{u \in H^{1/2}(0, T) \mid t^{-1/2}u \in L^2(0, T)\}. \quad (2.21)$$

Die Definition des Raums $H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ ergibt sich analog mit

$$H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T) := \{u \in H^{1/2}(0, T) \mid (T-t)^{-1/2}u \in L^2(0, T)\}. \quad (2.22)$$

Die Räume $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ und $H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ besitzen aufgrund ihrer Auffassung als Interpolationsraum von $L^2(0, T)$ und $H_{0,\cdot}^1(0, T)$ beziehungsweise $H_{\cdot,0}^1(0, T)$ eine Interpolationsnorm, die jedoch aufgrund ihrer Definition, welche das K- oder J-Funktional enthält, schwer zu berechnen ist. Eine äquivalente Norm ist gegeben durch die Norm $\|\cdot\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)}$ mit

$$\|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)}^2 = \|u\|_{L^2(0, T)}^2 + |u|_{H^{1/2}(0, T)}^2 + \int_0^T \frac{1}{s} u(s)^2 ds \quad (2.23)$$

und $\|\cdot\|_{H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)}$ mit

$$\|u\|_{H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)}^2 = \|u\|_{L^2(0, T)}^2 + |u|_{H^{1/2}(0, T)}^2 + \int_0^T \frac{1}{T-s} u(s)^2 ds. \quad (2.24)$$

Die Norm entspricht der $H^{1/2}$ -Norm mit einem zusätzlichen Strafterm. Dieser Strafterm gewichtet die Funktion mit einer Singularität zum Anfangs- oder Endzeitpunkt.

Die Funktionenräume $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ und $H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ entsprechen den Interpolationsräumen von $L^2(0, T)$ und $H_{0,\cdot}^1(0, T)$ beziehungsweise $H_{\cdot,0}^1(0, T)$. Da diese Räume genutzt wurden, um die primale und duale Variationsformulierung in Kapitel 1 aufzustellen, können $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ und $H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ im Folgenden genutzt werden, um eine neue Variationsformulierung aufzustellen, die der Interpolation der primalen und dualen Variationsformulierungen entspricht. Aufgrund der Wahl dieser Räume als Ansatz- und Testfunktionenräume besitzen die Ansatz- und Testfunktionen die gleiche Regularität. Im nächsten Kapitel wird diese Variationsformulierung aufgestellt und die eindeutige Lösbarkeit bewiesen.

3 Existenz und Eindeutigkeit

Mithilfe der Funktionenräume $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ und $H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$, welche im vorherigen Kapitel eingeführt wurden, wird eine weitere Variationsformulierung aufgestellt:

Gesucht ist $u \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$, sodass

$$(L_{\frac{1}{2}}u, v)_{L^2(0,T)} = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T). \quad (3.1)$$

Aufgrund der Wahl der Funktionenräume erfüllt die Variationsformulierung die Forderung, dass die Ansatz- und Testfunktionen die gleiche Regularität besitzen. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Variationsformulierung (3.1) eine eindeutige Lösung besitzt.

Von zentraler Bedeutung für dieses Kapitel ist der Satz von Nečas, welcher unter bestimmten Voraussetzungen die eindeutige Lösbarkeit des Problems liefert.

Satz 3.1 (Satz von Nečas). [1, Theorem 2.5] *Seien X und Y zwei reflexive Banachräume. Weiters sei $B(\cdot, \cdot)$ eine beschränkte Bilinearform auf $X \times Y$. Die Variationsformulierung*

$$B(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in Y$$

besitzt für alle $f \in Y'$ eine eindeutige Lösung $u \in X$ genau dann, wenn die Inf-Sup-Bedingung

$$\exists \gamma > 0 : \quad \inf_{w \in X \setminus \{0\}} \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{B(w, v)}{\|w\|_X \|v\|_Y} \geq \gamma \quad (3.2)$$

erfüllt ist und für alle $v \in Y$ gilt, dass

$$B(w, v) = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow v = 0. \quad (3.3)$$

Die eindeutige Lösung u erfüllt die Abschätzung

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{Y'}. \quad (3.4)$$

Bemerkung 3.1. Um die Abschätzungen im Satz 3.1 zu zeigen, genügt es für ein beliebiges $u \in X$ ein $v \in Y$ zu finden, sodass

$$B(u, v) \geq \|u\|_X \|v\|_Y \quad (3.5)$$

erfüllt ist. Aus dieser Abschätzung folgt in direkter Weise die Inf-Sup-Bedingung.

In der Ungleichung (3.5) wird die Bilinearform mit den Normen der beiden Funktionen abgeschätzt. Der Satz 2.9 liefert mit $\|\cdot\|_\theta^* = \sum \rho_i^{-\theta} |\cdot|^2$ eine Norm, die der Interpolationsnorm entspricht und somit äquivalent zur $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ -Norm ist. Diese Summennorm motiviert die Betrachtung der Eigenwerte und Eigenfunktionen, welche im nächsten Abschnitt behandelt wird.

3.1 Faktorisierung des Operators

Im folgenden Abschnitt wird eine Spektralzerlegung eines Operators gesucht, der die Form

$$\langle Au, v \rangle = (u, v)_{L^2(0, T)}$$

besitzt. Zu diesem Zweck wird der zu L_1 adjungierte Operator $L_1' : L^2(0, T) \rightarrow [H_{0,\cdot}^1(0, T)]'$ betrachtet. Für diesen gilt

$$(L_1 u, v)_{L^2(0, T)} = (u, L_1' v)_{L^2(0, T)} \quad \forall u \in H_{0,\cdot}^1(0, T), v \in L^2(0, T).$$

Es sei der Operator A definiert durch

$$A := L_1' L_1, \quad A : H_{0,\cdot}^1(0, T) \rightarrow [H_{0,\cdot}^1(0, T)]'. \quad (3.6)$$

Für A gilt der folgende Satz.

Satz 3.2. [9, Theorem 2.37] *Es seien H und V zwei Hilberträume mit $V \subseteq H \subseteq V'$. Es sei H unendlichdimensional und die Einbettung $V \rightarrow H$ sei kompakt. Gilt für einen linearen Operator $T: V \rightarrow V'$, dass er selbstadjungiert und koerziv ist, so existiert eine Folge von Vektoren $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ in V und eine Folge reeller Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. Für alle $k \geq 1$ gilt, dass φ_k ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ_k ist.
2. Die Menge der Eigenvektoren $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bildet ein vollständiges Orthonormalsystem in H .

3. Die Eigenwerte erfüllen $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ mit $\lambda_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$.

4. Für jedes $u \in V$ gilt

$$Tu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi_k, u) \varphi_k,$$

wobei die Reihe in V' konvergiert.

Im Folgenden wird gezeigt, dass der Operator A die Voraussetzungen des Satzes 3.2 erfüllt. Zuvor wird der *Normierungssatz von Sobolev* formuliert, mit dessen Hilfe gezeigt werden kann, dass der Operator nicht nur koerziv, sondern elliptisch ist.

Satz 3.3 (Normierungssatz von Sobolev). [4, Theorem 7.3.12] Sei $f : H^1(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm auf $H^1(0, T)$ mit

$$i) 0 \leq f(v) \leq c_f \|v\|_{H^1(0, T)}, \quad \text{für alle } v \in H^1(0, T)$$

$$ii) f(\text{const}) = 0 \Rightarrow v \equiv 0$$

so beschreibt

$$\|v\|_{H^1(0, T), f} := \left\{ |f(v)|^2 + \|v'\|_{L^2(0, T)}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.7)$$

eine äquivalente Norm in $H^1(0, T)$.

Bemerkung 3.2. Es zeigt sich, dass der Operator A (3.6) selbstadjungiert ist. Mit der Definition von A folgt

$$\langle Au, v \rangle = (L_0 u, L_0 v)_{L^2(0, T)} = \langle u, Av \rangle, \quad u, v \in V.$$

Ein Operator wird als koerziv bezeichnet, wenn die Abschätzung

$$\langle Tu, u \rangle \geq c_1 \|u\|_V^2 - c_2 \|u\|_H^2$$

für alle $u \in V$ erfüllt ist. Ist zusätzlich die Abschätzung

$$\langle Tu, u \rangle \geq c \|u\|_V^2$$

für alle $u \in V$ gültig, so wird der Operator als V -elliptisch bezeichnet. Mithilfe des Normierungssatzes von Sobolev 3.3 zeigt sich, dass der Operator $H_{0,\cdot}^1(0, T)$ -elliptisch ist, da

$$\langle Au, u \rangle = (L_0 u, L_0 u)_{L^2(0, T)} = \|u'\|_{L^2(0, T)}^2$$

und die Halbnorm $\|u'\|_{L^2(0, T)}$ aufgrund der Null-Anfangsbedingung die Voraussetzungen des Normierungssatzes erfüllt und daher eine äquivalente Norm zu $\|u\|_{H^1(0, T)}$ bildet. Somit gilt

$$\langle Au, u \rangle \geq c \|u\|_{H_{0,\cdot}^1(0, T)}^2 \quad \forall u \in H_{0,\cdot}^1(0, T).$$

Jede Funktion $u \in H$ besitzt durch das Orthonormalsystem $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Darstellung in der Form

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)_H \varphi_k.$$

Der Satz 3.2, Punkt 2, motiviert aufgrund des Orthonormalsystems aus Eigenfunktionen die Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen von A . Aus diesem Grund wird das Eigenwertproblem

$$Au = \lambda u \tag{3.8}$$

für $u \in H_{0,\cdot}^1(0, T)$ betrachtet. Die Variationsformulierung lautet

$$\langle Au, v \rangle = (L_0 u, L_0 v)_{L^2(0, T)} = \int_0^T u'(t)v'(t) dt = \lambda \int_0^T u(t)v(t) dt.$$

Die obige Gleichung entspricht der Variationsformulierung des Eigenwertproblems der Laplacegleichung,

$$\left. \begin{aligned} -u''(t) &= \lambda u(t), \quad t \in (0, T) \\ u(0) &= 0 \\ u'(T) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.9}$$

mit Dirichlet- und Neumannrandbedingung in jeweils einem Randpunkt. Die allgemeine Lösung der Gleichung (3.9) besitzt die Gestalt

$$u(t) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}t).$$

Werden die Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u'(T) = 0$ miteinbezogen, ergeben sich die folgenden Eigenwerte λ_k , $k \in \mathbb{N}$, mit den dazu gehörigen, normierten Eigenfunktionen $\varphi_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2T} \pi \right)^2, \tag{3.10}$$

$$\varphi_k(t) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{2k-1}{2T} \pi t \right). \tag{3.11}$$

Aufgrund des Satzes 3.2 bildet die Menge $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem im Raum $L^2(0, T)$, daher existiert für jede Funktion $u \in H_{0,\cdot}^1(0, T)$ die Darstellung

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} u_k \sin \left(\frac{2k-1}{2T} \pi t \right), \quad t \in (0, T] \tag{3.12}$$

mit den Koeffizienten

$$u_k = \int_0^T \sqrt{2} u(t) \sin\left(\frac{2k-1}{2T}\pi t\right) dt.$$

Mithilfe der Reihendarstellung (3.12) folgt eine neue Gestalt der Bilinearform.

3.2 Anwendung auf Bilinearform

Wird der Operator L_1 auf eine beliebige Funktion $u \in H_{0,\cdot}^1(0, T)$ angewandt, ergibt sich aufgrund der Darstellung (3.12) der Funktion u und der Linearität von L_1 die Form

$$(L_1 u)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} u_k \underbrace{\left(\frac{2k-1}{2T}\pi\right)}_{=\sqrt{\lambda_k}} \cos\left(\frac{2k-1}{2T}\pi t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} u_k \sqrt{\lambda_k} \cos\left(\frac{2k-1}{2T}\pi t\right).$$

Mit diesem Ergebnis folgt für die Bilinearform

$$(L_1 u, v)_{L^2(0, T)} = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} u_k \left(\frac{2k-1}{2T}\pi\right) \cos\left(\frac{2k-1}{2T}\pi t\right) v(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sqrt{\lambda_k} \hat{v}_k, \quad (3.13)$$

wobei die Koeffizienten \hat{v}_k , $k \in \mathbb{N}$, definiert sind durch

$$\hat{v}_k := \int_0^T \sqrt{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2T}\pi t\right) v(t) dt.$$

Die Reihe (3.13) kann weiter abgeschätzt werden, um die Beschränktheit der Bilinearform zu zeigen. Hierfür wird die Hölder-Ungleichung verwendet, welche für eine allgemeine Reihe die folgende Abschätzung liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right)^{1/q} \quad (3.14)$$

für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $p, q \in (1, \infty)$.

Die Anwendung der Hölder-Ungleichung auf die Bilinearform mit $p = q = 2$ ergibt daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sqrt{\lambda_k} \hat{v}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[4]{\lambda_k} u_k \sqrt[4]{\lambda_k} \hat{v}_k \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \hat{v}_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sind die Funktionen u und v demnach so gewählt, dass beide Reihen konvergent sind, so folgt, dass die Bilinearform $(L_\theta u, v)_{L^2(0,T)}$ mit den entsprechenden Räumen beschränkt ist. Der Satz (2.9) liefert, dass die Summennorm

$$\|u\|_{1/2}^* = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{-\frac{1}{2}} u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

für Funktionen aus den Interpolationsräumen $H_{0,\cdot}^{1/2}(0,T)$ und $H_{\cdot,0}^{1/2}(0,T)$ endlich ist. Die Werte ρ_k sind dabei die Eigenwerte eines Operators T , der durch die Gleichung

$$(Tu, v)_{H^1(0,T)} = (u, v)_{L^2(0,T)}$$

definiert ist. Aufgrund der Äquivalenz

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle &= (u', v')_{L^2(0,T)} = (u, v)_{H^1(0,T)} - (u, v)_{L^2(0,T)} \\ &\iff \\ \langle Au, v \rangle &= (u - Tu, v)_{H^1(0,T)} \end{aligned}$$

folgt, dass die Eigenwerte ρ_k den Werten λ_k^{-1} entsprechen. Daher gilt für die Funktionen u und v aus den Räumen $H_{0,\cdot}^{1/2}(0,T)$ und $H_{\cdot,0}^{1/2}(0,T)$ die Normdarstellung

$$\|u\|_{1/2}^* = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{1}{2}} u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.15)$$

Somit ergibt sich mit der Wahl von $u \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0,T)$ und $v \in H_{\cdot,0}^{1/2}(0,T)$ die Beschränktheit der Bilinearform.

Um die Inf-Sup-Bedingung (3.2) zu erfüllen genügt es, die Abschätzung (3.5) zu zeigen. Hierfür wird ein Operator definiert, der durch die obigen Betrachtungen motiviert ist.

Definition 3.4. Für eine Funktion $u \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0,T)$ mit der Darstellung

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sqrt{2} \sin\left(\frac{2k-1}{2T} \pi t\right)$$

sei der Operator \mathcal{H}_T definiert durch

$$(\mathcal{H}_T u)(t) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sqrt{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2T} \pi t\right). \quad (3.16)$$

Bemerkung 3.3. Aufgrund der Definition von \mathcal{H}_T gilt

$$\mathcal{H}_T : H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T) \rightarrow H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T).$$

\mathcal{H}_T ist ein linearer, isometrischer Operator und es folgt daher

$$\|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)} = \|\mathcal{H}_T u\|_{H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)}.$$

Weiters ist der Operator bijektiv und besitzt für alle Funktionen $v \in H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ mit $v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{v}_k \sqrt{2} \cos(\frac{2k-1}{2T} \pi t)$ eine eindeutige Inverse

$$\mathcal{H}_T^{-1} : H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T) \rightarrow H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T), \quad \mathcal{H}_T^{-1} v = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{v}_k \sqrt{2} \sin\left(\frac{2k-1}{2T} \pi t\right).$$

In Verbindung mit der Ableitung $\frac{d}{dt}$ gilt die Regel

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}_T = -\mathcal{H}_T^{-1} \frac{d}{dt}.$$

Im Folgenden wird sich zeigen, dass sich der Operator \mathcal{H}_T im Grenzfall $T \rightarrow \infty$ äquivalent zur Hilbert-Transformation verhält. Die Hilbert-Transformation \mathcal{H} ist definiert durch

$$(\mathcal{H}w)(t) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(s)}{s-t} ds,$$

für eine reellwertige Funktion w , für weitere Details und Eigenschaften siehe [10]. Die beiden Operatoren \mathcal{H}_T und \mathcal{H} weisen einen direkten Zusammenhang auf. Werden in der Definition von \mathcal{H}_T die Koeffizienten u_k eingesetzt, so folgt

$$(\mathcal{H}_T u)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sqrt{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2T} \pi t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \int_0^T u(s) \sin\left(\frac{2k-1}{2T} \pi s\right) ds \cos\left(\frac{2k-1}{2T} \pi t\right).$$

Der Grenzwert dieser Reihe liefert einen Term, der als Integralkern von \mathcal{H}_T angesehen werden kann in der Form

$$(\mathcal{H}_T u)(t) = \int_0^T u(s) K(s, t) ds.$$

Dieser Kern besitzt die Darstellung

$$K(s, t) = \frac{1}{2T} \left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2T}(s-t)\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2T}(s+t)\right)} \right].$$

Zur Analyse der Konvergenz wird eine Erweiterung des Kerns in der Form

$$\begin{aligned} K(s, t) &= \frac{1}{2T} \left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2T}(s-t)\right)} \frac{\frac{\pi}{2T}(s-t)}{\frac{\pi}{2T}(s-t)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2T}(s+t)\right)} \frac{\frac{\pi}{2T}(s+t)}{\frac{\pi}{2T}(s+t)} \right] \\ &= \frac{1}{2T} \left[\frac{2T}{\pi} \frac{1}{(s-t)} \frac{\frac{\pi}{2T}(s-t)}{\sin\left(\frac{\pi}{2T}(s-t)\right)} + \frac{2T}{\pi} \frac{1}{(s+t)} \frac{\frac{\pi}{2T}(s+t)}{\sin\left(\frac{\pi}{2T}(s+t)\right)} \right] \end{aligned}$$

betrachtet. Für $T \rightarrow \infty$ gilt $\frac{\pi}{2T}(s \pm t) \rightarrow 0$, somit folgt aufgrund der Konvergenzeigenschaft

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

der Grenzwert für $T \rightarrow \infty$ mit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K(s, t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{s-t} + \frac{1}{s+t} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{2s}{(s-t)(s+t)}.$$

Der Operator \mathcal{H}_T besitzt im Grenzwert $T \rightarrow \infty$ die Gestalt

$$(\mathcal{H}_\infty u)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{u(s)}{s-t} \frac{2s}{s+t} ds$$

für $s-t \neq 0$. Der Kern weist daher im Grenzfall das selbe Verhalten für $s \rightarrow t$ wie die Hilbert-Transformation auf.

Sei nun $u \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ eine beliebige Funktion und $v := \mathcal{H}_T u$ eine Testfunktion. Für diese beiden Funktionen besitzt die Bilinearform die Gestalt

$$(L_{\frac{1}{2}} u, v)_{L^2(0, T)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_k u_l \underbrace{\left(\frac{2k-1}{2T} \pi \right) 2 \int_0^T \cos\left(\frac{2k-1}{2T} \pi t\right) \cos\left(\frac{2l-1}{2T} \pi t\right) dt}_{=\delta_{k,l}} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \sqrt{\lambda_k}.$$

Es folgt, dass die Bilinearform der Summennorm entspricht

$$(L_{\frac{1}{2}} u, v)_{L^2(0, T)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \lambda_k^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{1/2}^{*2}.$$

Die Summennorm $\|\cdot\|_{1/2}^*$ ist eine zu $\|\cdot\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)}$ äquivalente Norm, es folgt daher die Abschätzung

$$(L_{\frac{1}{2}} u, v)_{L^2(0, T)} = \|u\|_{1/2}^{*2} \geq c \|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)}^2.$$

Es kann also für jedes beliebige $u \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ ein $v \in H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ gefunden werden, sodass die Ungleichung (3.5) gültig ist. Aus diesem Grund folgt, dass die Inf-Sup-Bedingung erfüllt ist.

Mit der Wahl der Funktionen $u \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ und $v \in H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ erfüllt die Bilinearform $(L_{\frac{1}{2}}u, v)_{L^2(0, T)}$ die Inf-Sup-Bedingung und ist beschränkt. Als letzte Voraussetzung für den Satz von Nečas 3.1 ist die Bedingung

$$B(w, v) = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow v \equiv 0$$

zu zeigen.

Sei hierzu die Darstellung (3.13) der Bilinearform gewählt. Wird nun die Annahme $(L_{\frac{1}{2}}u, v)_{L^2(0, T)} = 0$ für alle $u \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ getroffen, so folgt mit der Wahl $u = \varphi_l$ aufgrund der Orthonormalität der Basis

$$(L_{\frac{1}{2}}u, v)_{L^2(0, T)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sqrt{\lambda_k} \hat{v}_k = \sqrt{\lambda_l} \hat{v}_l = 0$$

und daher die Bedingung

$$\int_0^T \sqrt{2} \cos\left(\frac{2l-1}{2}\pi t\right) v(t) dt = 0. \quad (3.17)$$

Die Gleichung (3.17) gilt für alle Basisfunktionen des $L^2(0, T)$. Somit folgt, dass die Funktion v der Nullfunktion entspricht.

Es wurde gezeigt, dass mit der Wahl der Funktionenräume $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ für X und $H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ für Y die Bilinearform beschränkt und sowohl die Inf-Sup-Bedingung als auch die Injektivitätsbedingung erfüllt ist. Mit dem Satz von Nečas folgt daher, dass eine eindeutige Lösung $u_0 \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ des Variationsproblems (3.1) existiert.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung kann auch für ein erweitertes Anfangswertproblem gezeigt werden. Dieses Problem wird im folgenden Abschnitt behandelt.

3.3 Erweiterung der Differentialgleichung

Die Differentialgleichung des Anfangswertproblems (1.1) wird in diesem Abschnitt in einer erweiterten Variante betrachtet. Das Modellproblem für das erweiterte Anfangswertproblem lautet

$$\left. \begin{aligned} u'(t) + u(t) &= f(t), \quad t \in (0, T], \\ u(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

die Differentialgleichung des Modellproblems wird um den Term $u(t)$ erweitert. Das modifizierte Anfangswertproblem (3.18) wird analog zum Modellproblem in eine Variationsformulierung transformiert:

Gesucht ist $u \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$, sodass

$$b(u, v) := \int_0^T (u'(t) + u(t))v(t) dt = \int_0^T f(t)v(t) dt, \text{ für alle } v \in H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T). \quad (3.19)$$

Die Form $b(\cdot, \cdot) : H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T) \times H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ definiert eine Bilinearform. Ist diese Bilinearform beschränkt und erfüllt die Bedingungen des Satzes von Nečas 3.1, so existiert eine eindeutige Lösung für das Variationsproblem (3.19). Es gilt also zu zeigen, dass

$$\exists \gamma > 0 : \quad \inf_{w \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T) \setminus \{0\}} \sup_{v \in H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T) \setminus \{0\}} \frac{|b(w, v)|}{\|w\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)} \|v\|_{H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)}} \geq \gamma.$$

Die Beschränktheit der Bilinearform folgt mithilfe der Beschränktheit der Bilinearform $(L_{\frac{1}{2}}u, v)_{L^2(0, T)} = (u', v)_{L^2(0, T)} \leq c \|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)} \|v\|_{H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)}$, welche in Abschnitt 3.2 gezeigt wurde. Es ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} b(u, v) &= (u', v)_{L^2(0, T)} + (u, v)_{L^2(0, T)} \\ &\leq c \|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)} \|v\|_{H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2(0, T)} \\ &\leq c \|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)} \|v\|_{H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)} + \|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)} \|v\|_{H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)} \\ &\leq \tilde{c} \|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)} \|v\|_{H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)}. \end{aligned}$$

Um die Inf-Sup-Bedingung zu zeigen, genügt es analog zur vorherigen Differentialgleichung, die Abschätzung (3.5) zu erfüllen. Hierfür wird das folgende Ergebnis angegeben.

Lemma 3.5. [15, Lemma 2.7] *Es gilt*

$$(u, \mathcal{H}_T u)_{L^2(0, T)} > 0, \text{ für alle } 0 \neq u \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T).$$

Wird die Funktion $v = \mathcal{H}_T u$ gewählt, so folgt mithilfe des Lemmas 3.5

$$b(u, v) = \underbrace{(u', v)_{L^2(0, T)}}_{\geq c \|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)}^2} + \underbrace{(u, v)_{L^2(0, T)}}_{> 0} \geq c \|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)}^2 = c \|u\|_{H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)} \|v\|_{H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)}.$$

Daher ist auch die Inf-Sup-Bedingung für die erweiterte Differentialgleichung erfüllt und es existiert eine eindeutige Lösung der Variationsformulierung (3.19).

In diesem Kapitel wurde die eindeutige Lösbarkeit der Variationsformulierung (3.1) gezeigt. Es kann daher eine Variationsformulierung aufgestellt werden, deren eindeutige Lösung einer schwachen Lösung des Anfangswertproblems (1.1) entspricht und deren Ansatz- und Testfunktionen die gleiche Regularität besitzen. Die eindeutige Lösbarkeit zeigt sich auch bei der Variationsformulierung einer erweiterten Differentialgleichung mit demselben Anfangswert. Im folgenden Kapitel wird die Diskretisierung und eindeutige Lösbarkeit der diskreten Variante der Variationsformulierung gezeigt.

4 Diskretisierung und Fehlerabschätzung

In dem folgenden Abschnitt wird die Diskretisierung des Modellproblems (1.1) behandelt. Im vorherigen Kapitel 3 wurde die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des kontinuierlichen Variationsproblems (3.1) gezeigt. Um dieses Problem numerisch lösen zu können, wird die Galerkin-Petrov-Methode angewandt. Hierfür wird die Lösung des Variationsproblems in einem endlichdimensionalen Teilraum $X_h \subset H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ gesucht. Als Testraum wird ebenfalls ein endlichdimensionaler Teilraum $Y_h \subset H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ gewählt, allerdings gilt für die Teilräume $X_h \neq Y_h$. Die diskrete Variationsformulierung besitzt daher die Gestalt:

Gesucht ist $u_h \in X_h$, sodass

$$(L_{\frac{1}{2}} u_h, v_h)_{L^2(0,T)} = (f, v_h)_{L^2(0,T)}, \text{ für alle } v_h \in Y_h. \quad (4.1)$$

Die beiden Teilräume X_h und Y_h erfüllen die Bedingung

$$\dim X_h = \dim Y_h = N < \infty.$$

Aus diesem Grund existiert eine endliche Basis $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ für X_h und $\{\psi_k\}_{k=1}^N$ für Y_h , sodass jedes Element $u_h \in X_h$ eine Darstellung

$$u_h = \sum_{k=1}^N u_{h_k} \varphi_k$$

besitzt, mit einer analogen Darstellung für alle $v_h \in Y_h$. Aufgrund der endlichen Anzahl an Basisfunktionen wird eine Zerlegung des Intervalls gesucht, auf der die einzelnen Funktionen definiert werden können.

4.1 Diskretisierung des Gebiets

Das betrachtete Gebiet ist das Intervall $\bar{\Omega} = [0, T]$. Dieses Gebiet wird für die Approximation diskretisiert und in Teilstücke zerlegt. Ein Teilstück ist somit wieder ein

Intervall (a, b) mit $0 \leq a < b \leq 1$. Eine Zerlegung des Gebiets ist in der Abbildung 4.1 dargestellt.

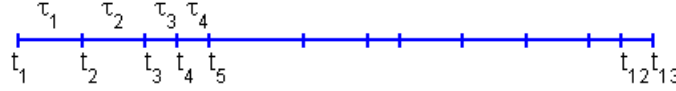


Abbildung 4.1: Zerlegung des Intervalls für $N = 12$

Als Diskretisierung wird nun eine Folge von Zerlegungen $\{\mathcal{T}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ betrachtet mit

$$\overline{\Omega} = \overline{\mathcal{T}}_N = \bigcup_{k=1}^N \overline{\tau}_k.$$

Die Knotenpunkte des Gebiets werden mit $\{t_k\}_{k=1}^M$ bezeichnet, die Elemente des Gebiets erhalten die Bezeichnung $\{\tau_k\}_{k=1}^N$. Es ist leicht zu sehen, dass ein Element genau zwei Knoten besitzt und für die Anzahl der Knoten $M = N + 1$ gilt. Ein Element τ_l besitzt somit die Form

$$\tau_l = (t_l, t_{l+1}).$$

In dieser Abhandlung werden nur zulässige Zerlegungen betrachtet, das bedeutet, dass der Schnitt zweier Elemente entweder leer oder genau ein Knoten ist

$$\tau_k \cap \tau_l = \begin{cases} t_i, & \text{mit } t_i \in \overline{\tau}_k, t_i \in \overline{\tau}_l \\ \emptyset, & \tau_k \text{ und } \tau_l \text{ nicht benachbart.} \end{cases}$$

Es können also keine Elemente ineinander liegen oder sich überschneiden. Die Länge eines Elements τ_l wird definiert durch

$$h_l := \int_{\tau_l} dt = t_{l+1} - t_l$$

und entspricht daher auch der Größe des Intervalls. Mithilfe der Länge kann eine globale Schrittweite der Diskretisierung festgelegt werden als

$$h = h_{\max} := \max_{l=1, \dots, N} h_l. \quad (4.2)$$

Eine Familie von Diskretisierungen \mathcal{T}_N heißt *lokal quasi-uniform*, wenn die Bedingung

$$\frac{h_l}{h_j} \leq c_L$$

für alle benachbarten Elemente τ_j von τ_l gilt. Das Verhältnis benachbarter Elemente kann sich also nicht beliebig verändern. Die betrachteten Diskretisierungen werden stets zulässig und lokal quasi-uniform sein.

Im folgenden Abschnitt werden die für diese Arbeit verwendeten Basisfunktionen definiert.

4.2 Ansatz- und Testfunktionen

Auf der im vorherigen Abschnitt dargestellten Zerlegung des Intervalls werden Funktionen definiert, die eine Basis bilden. In dieser Arbeit werden als Ansatz- und Testfunktionen die stückweise linear und global stetigen Funktionen verwendet. Der dazugehörige Funktionenraum wird mit $S_h^1(0, T)$ bezeichnet. Die Funktionen werden so gewählt, dass sie in einem Knoten den Wert Eins und in allen anderen Knoten den Wert Null besitzen. Die Basisfunktionen $\{\varphi_k^1\}_{k=0}^N$ des $S_h^1(0, T)$ sind daher wie folgend definiert

$$\varphi_0^1(t) = \begin{cases} \frac{t_1-t}{t_1-t_0}, & t \in [t_0, t_1), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \varphi_N^1(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{N-1}}{t_N-t_{N-1}}, & t \in [t_{N-1}, t_N], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\varphi_i^1(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}, & t \in [t_{i-1}, t_i), \\ \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, & t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N-1,$$

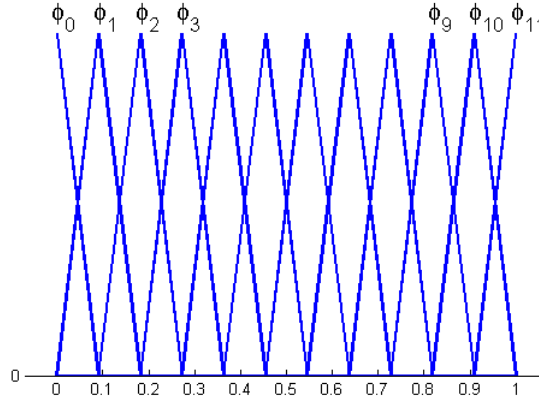
In der Abbildung 4.2 sind die Basisfunktionen für eine Diskretisierung mit $N = 12$ dargestellt.

Da die Funktionenräume X_h und Y_h Teilräume von $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ und $H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T)$ sind, müssen auch die diskreten Funktionenräume die jeweiligen Randbedingungen erfüllen. Es werden daher die Funktionenräume $S_{h_{0,\cdot}}^1(0, T)$ und $S_{h_{\cdot,0}}^1(0, T)$ definiert durch

$$S_{h_{0,\cdot}}^1(0, T) := S_h^1(0, T) \cap H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T) \quad S_{h_{\cdot,0}}^1(0, T) := S_h^1(0, T) \cap H_{\cdot,0}^{1/2}(0, T).$$

Aus dieser Definition folgt, dass der Raum $S_{h_{0,\cdot}}^1(0, T)$ von den Basisfunktionen $\{\varphi_k^1\}_{k=1}^N$ und der Raum $S_{h_{\cdot,0}}^1(0, T)$ von den Basisfunktionen $\{\varphi_k^1\}_{k=0}^{N-1}$ gebildet wird.

Für die Diskretisierung und die gewählten Ansatz- und Testfunktionen wird im folgenden Abschnitt die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Variationsproblems gezeigt.

Abbildung 4.2: Basis-Funktionen des S_h^1

4.3 Eindeutige Lösbarkeit der diskreten Variationsformulierung

Im vorherigen Abschnitt wurden die Funktionenräume $S_{h_0,\cdot}^1(0, T)$ und $S_{\cdot,0}^1(0, T)$ definiert. Mit der Wahl dieser Räume als Ansatz- und Testraum besitzt die Variationsformulierung (4.1) die Form:

Gesucht ist $u_h \in S_{h_0,\cdot}^1(0, T)$, sodass

$$(u_h', v_h)_{L^2(0,T)} = (f, v_h)_{L^2(0,T)}, \quad \text{für alle } v_h \in S_{\cdot,0}^1(0, T). \quad (4.3)$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass diese Formulierung eindeutig lösbar ist. Die Funktionen $u_h'(t)$ und $v_h(t)$ besitzen eine Darstellung als Linearkombination der Basisfunktionen

$$u_h'(t) = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k'(t), \quad v_h(t) = \sum_{k=0}^{N-1} v_k \varphi_k(t). \quad (4.4)$$

Wird diese Darstellung in die Variationsformulierung eingesetzt, ergibt sich die Gestalt

$$\left(\sum_{k=1}^N u_k \varphi_k', \sum_{k=0}^{N-1} v_k \varphi_k \right)_{L^2(0,T)} = \left(f, \sum_{k=0}^{N-1} v_k \varphi_k \right)_{L^2(0,T)}.$$

Da jede Funktion $v_h \in S_{\cdot,0}^1(0, T)$ eine Darstellung als Linearkombination (4.4) besitzt, genügt es, die Variationsformulierung mit den einzelnen Basisfunktionen des Raums

$S_{h,\cdot,0}^1(0,T)$ zu testen. Die Variationsformulierung kann daher in der Form des Gleichungssystems

$$A_h \underline{u} = \underline{f} \quad (4.5)$$

dargestellt werden mit der Matrix A_h

$$A_h[i, j] = (\varphi'_j, \varphi_{i-1})_{L^2(0,T)}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Die Einträge der Matrix können durch die Wahl der Basisfunktionen des $S_{h_0,\cdot}^1(0,T)$ und $S_{h,\cdot,0}^1(0,T)$ explizit angegeben werden. Daher besitzt A_h die Gestalt

$$A_h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A_h ist eine untere Dreiecksmatrix. Da die Elemente der Hauptdiagonale strikt positiv sind, besitzt die Matrix eine eindeutige Inverse, daher ist das Gleichungssystem (4.5) eindeutig lösbar. Der Lösungsvektor u_h mit

$$u_h = (u_1, u_2, \dots, u_N)^\top$$

beinhaltet die Koeffizienten der Darstellung der Lösungsfunktion u_h , somit ist die Lösungsfunktion u_h eindeutig bestimmt. Aus diesem Grund ist die diskrete Variationsformulierung (4.3) eindeutig lösbar. Im nächsten Abschnitt wird eine Fehlerabschätzung für die Approximationslösung u_h hergeleitet.

4.4 Fehlerabschätzung der Approximationslösung

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass das diskrete Variationsproblem (4.3) eindeutig lösbar ist und die Lösung u_h somit eine Approximationslösung des Variationsproblems (3.1) darstellt. Für die eindeutige Lösung u_h wird im folgenden Abschnitt eine Abschätzung des Approximationsfehlers $\|u - u_h\|_{L^2(0,T)}$ gezeigt.

Hierfür wird zuerst das folgende Variationsproblem für eine Funktion $v \in H_{0,\cdot}^1(0,T)$ betrachtet, welches als L^2 -Projektion interpretiert werden kann:

Gesucht ist v_h in $S_{h_0,\cdot}^1(0, T)$, sodass

$$(v'_h, w_h)_{L^2(0,T)} = (v', w_h)_{L^2(0,T)}, \quad \forall w_h \in S_{h,\cdot}^1(0, T). \quad (4.6)$$

Analog zu Abschnitt 4.3 kann gezeigt werden, dass das Variationsproblem (4.6) eine eindeutige Lösung $v_h \in S_{h_0,\cdot}^1(0, T)$ besitzt. Wird die L^2 -Norm von v_h betrachtet, so kann die Norm aufgrund der Eigenschaft $v_h \in S_{h_0,\cdot}^1(0, T)$ abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{L^2(0,T)}^2 &= \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} v_h(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k (v_{k-1}^2 + v_k^2) \leq h \sum_{k=1}^N v_k^2 = h(\underline{v}, \underline{v}) \\ &= h(A_h^{-1} \underline{f}, A_h^{-1} \underline{f}) = h(A_h^{-\top} A_h^{-1} \underline{f}, \underline{f}). \end{aligned}$$

Mit der Definition $\mu_h(v) := \frac{(A_h^{-\top} A_h^{-1} \underline{f}, \underline{f})}{(\underline{f}, \underline{f})}$ ergibt sich die Darstellung

$$h(A_h^{-\top} A_h^{-1} \underline{f}, \underline{f}) = h \mu_h(v)(\underline{f}, \underline{f}) = h \mu_h(v) \sum_{k=1}^N f_k^2.$$

Der Vektor \underline{f} ist definiert durch die rechte Seite $(v', w_h)_{L^2(0,T)}$ der Variationsformulierung (4.6). Äquivalent zum vorherigen Abschnitt ist es aufgrund der Basisdarstellung (4.4) ausreichend, die Basisfunktionen des Raums $S_{h,\cdot}^1(0, T)$ als Testfunktionen zu wählen. So gilt für den Vektor \underline{f}

$$f_k = (v', \varphi_{k-1})_{L^2(0,T)} = \int_{t_{k-2}}^{t_k} v(t) \varphi_{k-1}(t) dt = - \int_{t_{k-2}}^{t_k} v(t) \varphi'_{k-1}(t) dt \quad (4.7)$$

und dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} h \mu_h(v) \sum_{k=1}^N f_k^2 &= h \mu_h(v) \sum_{k=1}^N \left(- \int_{t_{k-2}}^{t_k} v(t) \varphi'_{k-1}(t) dt \right)^2 \\ &\leq h \mu_h(v) \sum_{k=1}^N \left(\int_{t_{k-2}}^{t_k} v(t)^2 dt \right) \left(\int_{t_{k-2}}^{t_k} (\varphi'_{k-1}(t))^2 dt \right) \\ &\leq 4h \mu_h(v) \int_0^T v(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Es kann ein Projektionsoperator $G_h: H_{0,\cdot}^1(0, T) \rightarrow S_{h_0,\cdot}^1(0, T)$ definiert werden durch

$$G_h v := v_h,$$

wobei v_h die eindeutige Lösung der Variationsformulierung (4.6) ist. Aus den vorherigen Überlegungen zeigt sich, dass der Operator G_h beschränkt ist mit

$$\|G_h u\|_{L^2(0,T)} \leq 2\sqrt{\mu_h(v)} \|v\|_{L^2(0,T)}. \quad (4.8)$$

Weiters wird für die Herleitung der Fehlerabschätzung der *Interpolationsoperator* I_h benötigt. Dieser Operator ist für eine stetige Funktion w definiert durch

$$I_h w(t) := \sum_{k=0}^N w(t_k) \varphi_k(t) \quad (4.9)$$

und beschreibt die Interpolation der Funktion w im Raum $S_h^1(0, T)$.

Aufgrund der Eigenschaft $I_h v \in S_{h_0}^1(0, T)$ für $v \in H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ gilt

$$G_h I_h v = I_h v,$$

da $I_h v$ eine Lösung für die Variationsformulierung (4.6) und diese eindeutig ist. Mithilfe dieser Eigenschaft und der Abschätzung (4.8) folgt durch die Wahl $v := u - u_h$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(0,T)} &= \|u - G_h u\|_{L^2(0,T)} \\ &= \|u - G_h u + I_h u - I_h u\|_{L^2(0,T)} \\ &= \|u - I_h u\|_{L^2(0,T)} + \|G_h(u - I_h u)\|_{L^2(0,T)} \\ &\leq \left(1 + 2\sqrt{\mu_h(u - I_h u)}\right) \|u - I_h u\|_{L^2(0,T)}. \end{aligned}$$

Der Interpolationsfehler $u - I_h u$ kann mit dem folgenden Lemma abgeschätzt werden.

Lemma 4.1. *Für eine Funktion $u \in H^s(0, T)$, $s \in [1, 2]$ gilt für den Interpolationsfehler mit der Konstante $c > 0$*

$$\|u - I_h u\|_{L^2(0,T)} \leq c h^s \|u\|_{H^s(0,T)}. \quad (4.10)$$

Daher ist das folgende Lemma gültig.

Lemma 4.2. *Sei $u \in H_{0,\cdot}^s(0, T)$, $s \in [1, 2]$ die eindeutige Lösung des Variationsproblems (3.1) und sei u_h die eindeutige Lösung der Galerkin-Petrov-Formulierung (4.3). Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T)} \leq c \left(1 + 2\sqrt{\mu_h(u - I_h u)}\right) h^s \|u\|_{H^s(0,T)} \quad (4.11)$$

mit

$$\mu_h(v) = \frac{(A_h^{-\top} A_h^{-1} f, f)}{(f, f)}, \quad f_k = \int_0^T (u(t) - I_h u(t)) \varphi_{k-1}(t) dt.$$

Bemerkung 4.1. Die Konstante $\mu_h(v)$ ist durch die Matrix A_h von der Schrittweite h abhängig, schränkt jedoch die Fehlerabschätzung nicht ein, wie im Folgenden gezeigt wird.

Aufgrund der Symmetrie der Matrix $A_h A_h^\top$ existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $\{\underline{\omega}_l\}_{l=1}^N$ mit den dazugehörigen Eigenwerten $\{\lambda_l\}_{l=1}^N$. Daher gilt für den Vektor \underline{f} die Darstellung

$$\underline{f} = \sum_{l=1}^N \gamma_l \underline{\omega}_l,$$

wobei γ_l eindeutig bestimmte Koeffizienten aus \mathbb{R} sind. Wird diese Darstellung in die Definition der Konstante $\mu_h(v)$ eingesetzt, ergibt sich

$$\mu_h(v) = \frac{(A_h^{-\top} A_h^{-1} \underline{f}, \underline{f})}{(\underline{f}, \underline{f})} = \frac{((A_h A_h^\top)^{-1} \sum_{l=1}^N \gamma_l \underline{\omega}_l, \sum_{l=1}^N \gamma_l \underline{\omega}_l)}{(\sum_{l=1}^N \gamma_l \underline{\omega}_l, \sum_{l=1}^N \gamma_l \underline{\omega}_l)}.$$

Aufgrund der Orthonormalität des Systems der Eigenvektoren und der Abbildungseigenschaft $(A_h A_h^\top)^{-1} \underline{\omega}_l = \lambda_l^{-1} \underline{\omega}_l$ folgt für die Konstante $\mu_h(v)$

$$\frac{((A_h A_h^\top)^{-1} \sum_{l=1}^N \gamma_l \underline{\omega}_l, \sum_{l=1}^N \gamma_l \underline{\omega}_l)}{(\sum_{l=1}^N \gamma_l \underline{\omega}_l, \sum_{l=1}^N \gamma_l \underline{\omega}_l)} = \frac{\sum_{l=1}^N \lambda_l^{-1} \gamma_l^2}{\sum_{l=1}^N \gamma_l^2} \leq \frac{\lambda_{\min}^{-1} \sum_{l=1}^N \gamma_l^2}{\sum_{l=1}^N \gamma_l^2} = \lambda_{\min}^{-1}.$$

Die Konstante $\mu_h(v)$ kann also mithilfe der Eigenwerte von $A_h A_h^\top$ abgeschätzt werden. Diese Matrix besitzt die Gestalt

$$A_h A_h^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ \vdots & & & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Absolutwerte der Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix sind invariant gegenüber einer Vertauschung der Zeilen oder Spalten. Aus diesem Grund können die Spalten und Zeilen dementsprechend sortiert werden, dass zuerst die Zeilen und Spalten an der ungeraden Position und anschließend die Zeilen und Spalten an der geraden Position gewählt werden. Die neue Zeilen- und Spaltennummerierung ergibt daher

$$\{1, 2, 3, \dots, N\} \longrightarrow \{1, 3, 5, \dots, (2 \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor - 1), 2, 4, 6, \dots, 2 \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\}.$$

Mit dieser Umsortierung ergibt sich für die Matrix $A_h A_h^\top$ die Gestalt

$$A_h A_h^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \\ & & & & & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Blockmatrizen entsprechen der Matrixdarstellung der Finiten-Differenz-Approximation des Laplaceoperators

$$-u''(t) \approx \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2}$$

mit der Dirichletrandbedingung $u(0) = 0$ zum Startzeitpunkt 0 und der Neumannrandbedingung $u'(T) = 0$ zum Endzeitpunkt T . Die Eigenwerte der gesamten Matrix entsprechen den Eigenwerten der Blockmatrizen, diese weisen gegenüber der Schrittweite h ein Verhalten von $\sim h^{-2}$ auf. Aufgrund des direkten Zusammenhangs der Variable $\mu_h(u - I_h u)$ mit den Eigenwerten und Eigenfunktionen der Matrix folgt, dass die Variable mit dem Auftreten eines hochfrequenten Anteils im Interpolationsfehler $\|u - I_h u\|$ wächst, sodass keine sinnvolle Konvergenzrate erkennbar ist. Durch eine feinere Diskretisierung verringert sich der hochfrequente Anteil im Interpolationsfehler. Daher ist die Konvergenzrate erst ab einer entsprechend feinen Diskretisierung zu beobachten.

Es zeigt sich, dass die Konstante $\mu_h(u - I_h u)$ für entsprechende Diskretisierungen ein Verhalten von $\sim h^2$ aufweist. Da h^2 die bestmögliche Konvergenz laut der Fehlerabschätzung darstellt, schränkt die Konstante $\mu_h(u - I_h u)$ die Abschätzung nicht ein.

Die Fehlerabschätzung kann in äquivalenter Weise für beliebige, weitere Normen hergeleitet werden, wird anstelle der L^2 -Norm die jeweilige Norm gewählt.

Im nachfolgenden, abschließenden Kapitel werden die theoretischen Untersuchungen anhand von verschiedenen Beispielen überprüft.

5 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel wird die zuvor in Kapitel 4 beschriebene Methode getestet und die Approximation der Lösungsfunktion anhand verschiedener Beispielen berechnet. Um die Stabilität und Korrektheit der Approximation zu zeigen, wurden mehrere Beispiele mit unterschiedlicher Regularität gewählt. Für die Berechnung der Lösung wurde das lineare Gleichungssystem (4.5) in der Software *MatLab* [8] implementiert und mit der Software-internen Funktion gelöst. Die Approximationen werden für 32, 64, 128, 256, 512 und 1024 Elemente durchgeführt. Da manche Funktionen der rechten Seite der Differentialgleichung eine Singularität zum Startzeitpunkt aufweisen können, ergeben sich bei der numerischen Berechnung der Integrale Rechenfehler, weswegen das erste Element des Vektors $\underline{f}_1 = \int_0^{t_1} f(t)\varphi_1(t) dt$ analytisch berechnet wird.

Als Diskretisierung des Intervalls $(0, T)$ wurden zwei Familien von lokal quasi-uniformen Verfeinerungen gewählt. Für die erste Familie wurde das Intervall äquidistant unterteilt, weshalb jedes Teilintervall dieselbe Größe besitzt. Hierbei gilt

$$h = \frac{T}{N},$$

wobei T dem Endzeitpunkt und damit der Intervallslänge und N der Anzahl an Elementen der Diskretisierung entspricht. Das Element τ_l besitzt die Form

$$\tau_l = [h(l-1), hl].$$

Eine Diskretisierung mit einer doppelten Anzahl an Elementen halbiert somit das Intervall und teilt es in zwei neue Elemente.

Für die zweite Familie an Diskretisierungen wurde eine adaptive Schrittweite verwendet. Hierbei wurde ein Faktor q definiert, mit dessen Wert die Schrittweiten berechnet werden. Für die Länge h_k gilt

$$h_k = qh_{k-1} = q^2h_{k-2} = \dots = q^k h_0,$$

der Faktor q beschreibt somit die Vergrößerung der Schrittweite in Abhängigkeit von der vorherigen Intervallsgröße. Aus der Bedingung

$$T = \sum_{k=1}^N h_k = h_0 \sum_{k=1}^N q^k$$

folgt mit der Wahl eines Faktors q die Schrittweite h_0 . Diese Wahl der adaptiven Schrittweite bewirkt eine Diskretisierung des Intervalls, die in der Abbildung 5.1 dargestellt ist.



Abbildung 5.1: Adaptive Diskretisierung für $N = 13$

Es ist zu erkennen, dass die Größe der Elemente zunimmt. Die Idee dieser Diskretisierung ist es, bei Funktionen, welche eine Singularität in der Ableitung zum Startzeitpunkt aufweisen können, den Bereich um den Startzeitpunkt feiner diskretisieren zu können.

Im Folgenden werden die einzelnen Beispiele sowie die Ergebnisse dargestellt. Zur Vereinfachung der Berechnungen wurde ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Zeitpunkt $T = 1$ gewählt.

5.1 Modellproblem

1. Beispiel

Als erstes Beispiel wurde eine polynomielle Funktion gewählt:

$$u_1(t) = t^2 + t. \quad (5.1)$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar und erfüllt die Anfangsbedingung $u(0) = 0$. Die rechte Seite der Differentialgleichung (1.1) besitzt die Gestalt $f(t) = 2t+1$. Anhand dieses Beispiels soll die Approximationsgüte des Verfahrens sowie die bestmögliche Konvergenzrate gezeigt werden.

Für das erste Beispiel wurde eine Diskretisierung mit äquidistanten Elementen gewählt, da die Funktion keine Singularitäten oder besondere Stellen aufweist. In der folgenden Tabelle sind die Approximationsfehler sowie die Konvergenzrate aufgelistet und anschließend in einer Graphik dargestellt.

N	L^2 -Fehler	Konvergenz
32	1.1886e-04	–
64	2.9716e-05	2.0
128	7.4290e-06	2.0
256	1.8572e-06	2.0
512	4.6431e-07	2.0
1024	1.1608e-07	2.0

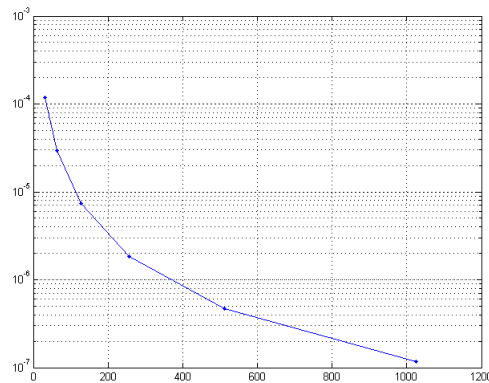


Abbildung 5.2: Approximationsfehler für das erste Beispiel

Es zeigt sich ein geringer Approximationsfehler. Die Konvergenzrate weist exakt den Wert 2 auf, welcher aufgrund des Lemmas 4.2 erwartet wurde.

2. Beispiel

Als zweites Beispiel wurde eine Kombination von Sinus- und Cosinusfunktionen gewählt. Die Lösungsfunktion lautet

$$u_2(t) = \sin(10\pi t) \cos(10\pi t) \quad (5.2)$$

mit der daraus resultierenden rechten Seite der Differentialgleichung $f(t) = 10\pi \cos(20\pi t)$. Für dieses Beispiel wurde die Familie der äquidistanten Diskretisierungen gewählt. Erneut zeigt sich eine sehr gute Approximation der Lösung mit einer Konvergenzrate, welche zu Beginn größer als 2 ist. In der nachfolgenden Tabelle sind die einzelnen Fehler und Konvergenzraten aufgelistet und anschließend in der Graphik dargestellt.

N	L^2 -Fehler	Konvergenz
32	9.0769e-02	—
64	1.4335e-02	2.66
128	3.2686e-03	2.13
256	7.9945e-04	2.03
512	1.9879e-04	2.01
1024	4.9630e-05	2.00

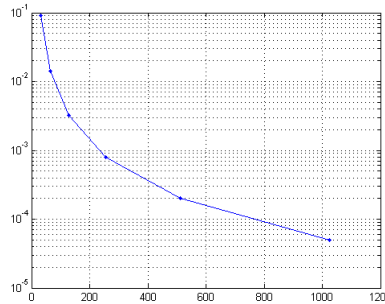


Abbildung 5.3: Approximationsfehler für das zweite Beispiel

Die anfangs höhere Konvergenzrate ergibt sich aus der zu Beginn kleinen Anzahl an Elementen bei einer stark schwingenden Funktion. Dieser Effekt klingt jedoch rasch bei größer werdender Anzahl an Elementen ab und es zeigt sich erneut der erwartete Wert von 2.

3. Beispiel

In den vorherigen beiden Beispielen wurden reguläre Funktionen gewählt, die mindestens zweimal stetig differenzierbar sind und eine höhere Regularität als $H^2(0, 1)$ aufweisen. Daher ergab sich auch die erwartete Konvergenzrate von 2. Im folgenden Beispiel wird eine Funktion gewählt, welche eine geringere Regularität besitzt. Es sei die Lösungsfunktion

$$u_3(t) = t^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

mit der rechten Seite der Differentialgleichung $f(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$. Das Beispiel wurde mit der Familie von äquidistanten Diskretisierungen berechnet. In der folgenden Tabelle sind die Approximationsfehler mit den Konvergenzraten aufgelistet.

N	L^2 -Fehler	Konvergenz
32	3.2198e-02	–
64	2.2804e-02	0.5
128	1.6138e-02	0.5
256	1.1416e-02	0.5
512	8.0736e-03	0.5
1024	5.7095e-03	0.5

Die Konvergenz wird anhand der Graphik ersichtlich.

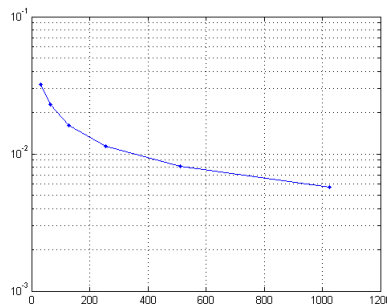


Abbildung 5.4: Approximationsfehler für das dritte Beispiel

Die Konvergenzrate weist in diesem Fall genau 0.5 auf. Der Approximationsfehler ist in diesem Beispiel bedeutend größer als in den beiden vorherigen Beispielen. Da jedoch anhand der rechten Seite der Differentialgleichung f zu sehen ist, dass die Ableitung an der Stelle Null eine Singularität aufweist, wird eine adaptive Netzverfeinerung verwendet, deren Elemente um den Nullpunkt kleiner werden. Daraus resultieren die folgenden Fehler und Konvergenzraten.

N	L^2 -Fehler	Konvergenz
32	1.2795e-02	–
64	2.7225e-03	2.23
128	1.4184e-04	4.26
256	5.9869e-05	1.24
512	5.9869e-05	0.00
1024	5.9869e-05	0.00

Es zeigt sich, dass mit einer adaptiven Netzverfeinerung die Approximation einen weit geringeren Fehler und eine höhere Konvergenzrate aufweist. Allerdings ändert

sich der Fehler ab einer Elementanzahl von $N = 256$ nicht mehr, sodass eine weitere Verfeinerung keine Verbesserung ergibt.

5.2 Modifiziertes Problem

Analog zum Modellproblem werden auch für das modifizierte Problem (3.18) mit der Differentialgleichung

$$u'(t) + u(t) = f(t)$$

Beispiele gerechnet. Die verwendeten Methoden und Diskretisierungen entsprechen den vorherigen Beispielen des Modellproblems.

1. Beispiel

Das erste Beispiel beschreibt eine quadratische Funktion mit

$$u_1(t) = t^2,$$

es folgt die rechte Seite der Differentialgleichung für das erste Beispiel mit $f(t) = 2t + t^2$. Die Approximationen wurden mit einer äquidistanten Diskretisierung berechnet und die resultierenden Fehler und Konvergenzraten in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

N	L^2 -Fehler	Konvergenz
32	1.3360e-04	–
64	3.3402e-05	2.00
128	8.3505e-06	2.00
256	2.0876e-06	2.00
512	5.2191e-07	2.00
1024	1.3048e-07	2.00

Es zeigt sich in diesem Beispiel äquivalent zum ursprünglichen Problem die erwartete Konvergenzrate von exakt 2.

2. Beispiel

Als zweites Beispiel wurde die Wurzelfunktion $t^{\frac{1}{2}}$ gewählt, somit folgt für die rechte Seite der Differentialgleichung die Darstellung $f(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}$. Aufgrund der Singularität wurden die Berechnungen mit einem adaptiven Netz mit dem Faktor $q = 1.1$ durchgeführt. In der nachfolgenden Tabelle sind die Fehler der Approximation sowie die Konvergenzraten dargestellt.

N	L^2 -Fehler	Konvergenz
32	1.5251e-02	–
64	3.2453e-03	2.23
128	1.6457e-04	4.30
256	5.9869e-05	1.46
512	5.9869e-05	0.00
1024	5.9869e-05	0.00

Es zeigt sich, dass die Funktion eine gute Konvergenz aufweist, allerdings ab $N = 256$ Elementen keine Verbesserung mehr entsteht.

In allen Beispielen war die erwartete Konvergenzrate zu beobachten. Für Funktionen aus dem Funktionenraum $H^2(0, T)$ besitzt das Verfahren die optimale Konvergenzrate von 2. Weist die Funktion geringere Regularität auf, so verringert sich die Rate entsprechend der jeweiligen Funktion. Bei den Wurzelfunktionen ist für beide Differentialgleichungen zu beobachten, dass der Fehler größer als bei den quadratischen oder trigonometrischen Funktionen und die Konvergenzrate entsprechend kleiner ist. Allerdings ist gut zu erkennen, dass die adaptive Netzverfeinerung eine eindeutige Verbesserung der Konvergenz bei den Wurzelfunktionen bewirkt.

Durch die Beispiele ist die Stabilität des Verfahrens zu erkennen. Es ist somit möglich, Anfangswertprobleme mithilfe der FE-Methode bei Verwendung von Ansatz- und Testfunktionen gleicher Regularität zu berechnen. Die bestmögliche Konvergenzrate entspricht dabei der quadratischen Konvergenz. Zum Schluss wird die Möglichkeit der Galerkin-Bubnov-Methode besprochen, welche aufgrund von Instabilität nicht zur Berechnung der Beispiele geeignet ist.

Beispiel für Instabilität

Die Variationsformulierung des Anfangswertproblems stellt aufgrund der unterschiedlichen Ansatz- und Testräume eine Galerkin-Petrov-Methode dar. Es stellt sich die Frage, ob diese zwei Räume gleich gewählt werden können, sodass anstelle der Galerkin-Petrov-Methode die Galerkin-Methode verwendet wird. Durch diese Wahl würde die Forderung der Nullrandbedingung an Funktionen im Testraum vom Endzeitpunkt T an den Anfangswert gestellt werden.

Wird als Testraum der Funktionenraum $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ gewählt, ergibt sich durch diese Wahl eine Instabilität. Obwohl die Lösung annähernd berechnet wird, bleiben die Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix A_h und damit die Konditionszahl in diesem Fall nicht konstant, sondern weisen ein Wachstum von $\sim N^2$ auf. Daher ist die Wahl des Testraums $H_{0,\cdot}^{1/2}(0, T)$ nicht zulässig.

Literaturverzeichnis

- [1] J.L. Guermond A. Ern. *Theory and Practice of Finite Elements*. Springer, New York, 2004.
- [2] J.L. Guermond A. Ern. A converse to Fortin’s lemma in Banach spaces. *Comptes Rendus Mathematique*, 354(11):1092–1095, 2016.
- [3] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [4] K. Atkinson and W. Han. *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*. Springer, 2001.
- [5] M. Fontes. Initial-boundary value problems for parabolic equations. 34:583–605, 2009.
- [6] S. Larsson and C. Schwab. Compressive space-time galerkin discretizations of parabolic partial differential equations. *arXiv:1501.04514 [math.NA]*, preprint 2015.
- [7] J.L. Lions and E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Application*. Springer, Berlin-Heidelberg, 1973.
- [8] MATLAB. *version 8.1.0 (R2013a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2030.
- [9] W. McLean. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [10] J. N. Pandey. *The Hilbert Transformation of Schwartz Distributions and Applications*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA, 1995.
- [11] D. P. Hewett S. N. Chandler-Wilde and Andrea Moiola. Interpolation of hilbert and sobolev spaces. quantitative estimates and counterexamples. *Mathematika*, 61:414–443, 2014.

- [12] R. Schilling. *Maß und Integral. Eine Einführung für Studenten.* de Gruyter Lehrbuch, Berlin, 2015.
- [13] A.A. Kilbas S.G. Samko and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.
- [14] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente.* Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2003.
- [15] O. Steinbach and M. Zank. Coercive space-time finite element methods for initial boundary value problems. *Berichte aus dem Institut für Numerische Mathematik*, (5), 2017.
- [16] L. Tartar. *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolations Spaces.* Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [17] K. Yosida. *Functional Analysis.* Springer, 1980.
- [18] W. Zenker. Die Finite-Element-Methode zur Lösung eines Anfangswertproblems. Masterprojekt TM, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Graz, 2017.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Datum

Unterschrift