



Numerische Modalanalyse eines Niederdruckturbinenrotors und Erstellung von Campbell- und Interferenz-Diagrammen

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplomingenieur

Christian Schitter, BSc

Technische Universität Graz
Fakultät für Maschinenbau und Wirtschaftswissenschaften

Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik

Betreuer

Dipl.-Ing. Dr. techn. Andreas Marn
Dipl.-Ing. Dr. techn. Florian Schönleitner

Graz, November 2017

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum/Date

Unterschrift/Signature

Danksagung

„Wir müssen unbedingt Raum für Zweifel lassen, sonst gibt es keinen Fortschritt, kein Dazulernen. Man kann nichts Neues herausfinden, wenn man nicht vorher eine Frage stellt. Und um zu fragen, bedarf es des Zweifelns.“ (Richard P. Feynman)

Genau diese von Richard Feynman beschriebenen Zweifel führten mich zu dieser Arbeit. Beim Abschluss meiner Bachelorarbeit stellte sich die Frage, ist das wirklich schon alles? Haben wir das System vollständig erfasst und auch verstanden? Ist der Rotor vollständig charakterisiert? Aber auch das kindliche „Warum, ist das so?“ stellte uns vor neue und anspruchsvolle Fragen. Und diese mussten beantwortet werden...

Mit dieser Masterarbeit geht meine Studienzeit an der TU Graz einem Ende zu. Diese Thesis ist der Abschluss einer Studienzeit, die mir zeitlebens in Erinnerung bleiben wird. Geprägt von Freude, harter Arbeit aber auch unvergesslichen Erlebnissen.

Bei der Umsetzung meiner Arbeit wurde ich tatkräftig von Herrn DI Dr. Florian Schönleitner und Herrn DI Dr. Andreas Marn seitens des Instituts für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik unterstützt. Meinen beiden Betreuern gebührt in diesem Zuge mein bester Dank für die ausgezeichnete Zusammenarbeit und die tatkräftige Unterstützung.

Natürlich gilt mein Dank auch meiner Familie und meiner Freundin Christina, die mich immer unterstützt haben und mit einem offenen Ohr meinen Problemen aber auch Überlegungen gelauscht haben.

Herzlichen Dank!

Christian Schitter

Kurzfassung

Diese Masterarbeit wurde im Rahmen des Projekts „Aerodynamische Schwingungsanregung moderner Niederdruckturbinenbeschaufelungen“ (AdMoNt) zur Untersuchung von Schaufelschwingungen am Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik erstellt. Sie dient der Vervollständigung der bislang ermittelten modalen Eigenschaften des High Stage Loading Rotors (HSL Rotor).

Im ersten Teil der Arbeit wurde die Modalanalyse des HSL Rotors sowie seiner Hauptkomponenten Rotorscheibe und Rotorscheufel durchgeführt und ausgewertet. Darauf aufbauend wurde mithilfe von Campbell- und Interferenz-Diagrammen eine Resonanzuntersuchung durchgeführt, um mehr über die auftretenden Resonanzeffekte in Erfahrung zu bringen. Ferner wird in diesem Abschnitt die Rotorscheufel näher untersucht um für spätere Projekte ein Modell zur schnellen und verlässlichen Abschätzung der Eigenfrequenzen zu erhalten. Dafür liegt der Fokus auf den verwendeten Randbedingungen. Des Weiteren wird der Einfluss der Rotorscheibe auf die Eigenfrequenzen näher betrachtet. Dabei wird Augenmerk auf den Einfluss der umfangsveränderlichen Rotorscheibensteifigkeit sowie der schwankenden Materialqualitäten gelegt.

Im zweiten Teil der Masterarbeit wird die Studie von Singh et. al. „Resonance Identification for Impellers“ aufgegriffen und ein ähnliches Verdichtermmodell hinsichtlich seiner modalen Eigenschaften untersucht. Dadurch sollen die gewonnenen Erkenntnisse über die Erstellung der Interferenz-Diagramme verifiziert werden.

Im Anhang zu dieser Arbeit findet sich die Versuchsdokumentation einer am Prüfstand durchgeführten experimentellen Modalanalyse. Dabei wurde die Turbinenbeschaufelung mittels eines Impulshammers an verschiedenen Positionen angeregt und die schwingungsbedingten Dehnungen gemessen.

Abstract

This thesis is a part of a project „Aerodynamical vibration stimulation modern low-pressure turbine bladings“ (AdMoNt) regarding blade vibrations in a low-pressure turbine stage at the Institute for Thermal Turbomachinery and Machine Dynamics and should provide a deep knowledge about the modal characteristics of the High Stage Loading (HSL) rotor .

In the first part of this thesis the modal characteristics of the HSL rotor and its components is performed. Based on these results a resonance analysis of the rotor is created by dint of Campbell- and Interference-charts. Furthermore, this part deals with rotor blade as a submodel to create a reliable model to get the natural frequency for future projects. Therefore, a special focus is placed on the influence of the boundary conditions on the submodel. In addition, the influence of the rotor disc on the system modal characteristic is analyzed. This investigation focuses on the variability of the blade natural frequency due different material properties and the circumference change of the rotor disc's stiffness.

In the second part the paper of Singh et. Al. “Resonance Identification for Impellers“ was taken and an investigation of similar impeller's modal characteristic was performed. Through this investigation the procedure for the resonance analysis due interference charts is verified.

The attachment includes a documentation of an experimental modal analysis, which was performed on the rig-mounted rotor. The blading was stimulated by an impulse hammer on different positions. The response of the system is recorded by the strain gauges applied to the blades.

Abkürzungen

Kurzform	Beschreibung
1BI	Ein-Schaufel-Modell
5BI	Fünf-Schaufel-Modell
72BI	72-Schaufel-Modell
AdMoNt	Aerodynamische Schwingungsanregung moderner Niederdruckturbinenbeschaufelungen
ADP	Aero Design Point
CAD	Computational Aided Design
DGL	Differentialgleichung
DMS	Dehnmessstreifen
EO	Engine Order
EF	Eigenfrequenz
EGV	Exit Guide Vanes
FE	Finite Elemente
FEM	Finite Elemente Methode
HSL	High Stage Loading
IGV	Inlet Guide Vanes
MDOF	Multi Degree-of-Freedom Systems, Einmassenschwinger
NC	Nodal Circle = Knotenkreis = Umfangsknotenlinie
ND	Nodal Diameter = Knotendurchmesser = radiale Knotenlinie
TEC	Turbine Exit Casing, Turbinenausstrittsgehäuse
SAFE	Singh's Advanced Frequency Evaluation
SDOF	Single Degree-of-Freedom Systems, Einmassenschwinger
ZZENF	Zig-zag shaped excitations in nodal diameters versus frequency
3D	dreidimensional
bzw.	beziehungsweise
ca.	circa
const.	Konstant
d.h.	das heißt
erw.	erweitertes
etc.	et cetera
et al.	et alli (und andere)
Gl.	Gleichung

gr.	großes/groß
kl.	kleines/klein
max.	maximal
min.	minimal
Nr.	Nummer
sym.	symmetrisch
unsym.	Unsymmetrisch
z.B.	zum Beispiel
wshl.	Wahrscheinlich
schaufeldom.	schaufeldominant
scheibendom.	scheibendominant
Absolutgeschw.	Absolutgeschwindigkeit

Formelzeichen

Formelzeichen	Einheit	Beschreibung
A	$[m^2]$	Fläche
A_i, B_i, C_i	$[-]$	Konstante
$\bar{A}_i, \bar{B}_i,$	$[-]$	Konstante
B	$[Nm]$	Plattensteifigkeit
c	$[Ns/m]$	Dämpfung
c_r	$[Ns/m]$	modale Dämpfung
c_u	$[m/s]$	Umfangskomponente Absolutgeschw.
D	$[-]$	Dämpfungsgrad
E	$[N/mm^2]$	Elastizitätsmodul
F	$[N]$	Kraft, Fliehkraft
F_Z	$[N]$	z-Komponente Fliehkraft
F	$[N]$	umlaufende Erregerkraft
\hat{F}_k	$[N]$	Amplitude umlaufende Erregerkraft
\hat{F}_{ki}	$[N]$	Amplitude umlaufende Erregerkräfte
f	$[Hz]$	Frequenz
f_e	$[Hz]$	Erregerfrequenz
f_n	$[Hz]$	Eigenfrequenz
$f(t)$	$[N]$	Erregerkraft
\hat{f}	$[N]$	Amplitude der Erregerkraft
G	$[N/mm^2]$	Schubmodul
g_i	$[-]$	Konstante
h_{tot}	$[J/kg]$	Totalenthalpie
I	$[mm^4]$	Flächenmoment 2. Ordnung
I_m	$[-]$	Modifizierte Bessel'sche Funktion
i	$[-]$	harmonischer Index
J_m	$[-]$	Bessel'sche Funktion
j	$[-]$	Laufvariable
K_m	$[-]$	Modifizierte Bessel'sche Funktion
k	$[N/m]$	Federsteifigkeit
k	$[-]$	harmonischer Index
k_r	$[N/m]$	modale Steifigkeit
l	$[m]$	Länge
L	$[m]$	Balkenlänge
M	$[Nm]$	Moment
m	$[kg]$	Masse

Formelzeichen	Einheit	Beschreibung
m	[-]	Nodal Diameter, Knotendurchmesser, Umfangsmodenordnung
m'	[kg/m]	Masse pro Längeneinheit
m''	[kg/m ²]	Masse pro Flächeneinheit
m_r	[kg]	modale Masse
N	[N]	Normalkraft
N_{SYS}	[-]	Anzahl Freiheitsgrade
n	[-]	Radiale Modenordnung
n_{BP}, n_{ADP}	[min ⁻¹]	Drehzahl in einem Betriebspunkt
p	[N/m ²]	Druck, externe Belastung
p_i	[N/m ²]	modale Last
\hat{p}	[N/m ²]	Druckamplitude
Q	[N]	Querkraft
R	[m]	Radius
R	[-]	Anzahl Rotorschaukeln
r	[m]	Radius
S	[-]	Anzahl Leitschaufeln
$T(t)$	[s]	Komponente Separationsansatz
t	[s]	Zeit
u	[m]	Verschiebung in x-Richtung
u	[m/s]	Umfangsgeschwindigkeit
v	[m]	Verschiebung in y-Richtung
W	[J]	Arbeit
w	[m]	Durchbiegung, Verschiebung in z-Richtung
x	[m]	Position, Weg
\hat{x}	[m]	Amplitude der Schwingung
x_0	[m]	statische Ruhelage
\dot{x}	[m/s]	Geschwindigkeit
\ddot{x}	[m/s ²]	Beschleunigung
Y_m	[-]	Bessel'sche Funktion
z	[m]	z-Koordinate
Δ	[-]	Laplace-Operator
∇	[-]	Nabla-Operator
e	[-]	Euler'sche Zahl
$\delta(x - x_0), \dots$	[-]	Dirac-Funktion

Formelzeichen	Einheit	Beschreibung
$\underline{\underline{C}}$	[Ns/m]	Dämpfungsmatrix
$\underline{\underline{K}}$	[N/m]	Steifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{K}}_{sym}$	[N/m]	sym. Anteil Steifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{K}}_{unsym}$	[N/m]	unsym. Anteil Steifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{M}}$	[kg]	Massenmatrix
$\underline{\hat{A}}$	[m]	Amplitudenvektor, Eigenvektor
\underline{f}	[N]	Erregervektor
\underline{q}	[m]	modale Koordinate
$\underline{\dot{q}}$	[m/s]	modale Geschwindigkeit
$\underline{\ddot{q}}$	[m/s ²]	Modale Beschleunigung
\underline{x}	[m]	Positionsvektor
$\underline{\dot{x}}$	[m/s]	Geschwindigkeitsvektor
$\underline{\ddot{x}}$	[m/s ²]	Beschleunigungsvektor
$\underline{\phi}$	[-]	Modalmatrix
$\underline{\psi}$	[-]	Eigenvektor
α	[m/N]	Übertragungsfunktion
α_R	[-]	Massenkoeffizient Rayleigh Dämpfung
β	[-]	Koeffizient
β_R	[-]	Steifigkeitskoeffizient Rayleigh Dämpfung
β_{mn}	[-]	Eigenwert bei Plattenschwingungen
γ	[-]	Verzerrung
δ	[s ⁻¹]	Abklingkonstante
ε	[m/m]	Dehnung
θ	[°]	Umfangswinkel
$\vartheta(\theta)$	[°]	Komponente Separationsansatz
λ	[s ⁻¹]	Eigenwert
ν	[-]	Poisson-Zahl
ρ	[kg/m ³]	Dichte
φ	[°]	Neigewinkel
$\psi(r), \psi(x)$	[m]	Eigenfunktion
τ	[N/mm ²]	Schubspannung
Ω	[rad/s]	Erregerkreisfrequenz, Kreisfrequenz
ω	[rad/s]	Eigenkreisfrequenz
ω_0	[rad/s]	ungedämpfte Eigenkreisfrequenz
ω_d	[rad/s]	gedämpfte Eigenkreisfrequenz
ω_{mn}	[rad/s]	Eigenkreisfrequenz einer Platte

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	II
Kurzfassung	III
Abstract	IV
Abkürzungen	V
Formelzeichen	VII
Inhaltsverzeichnis	X
1. Einleitung	1
2. Aufgabenstellung und Zielsetzung	2
3. Theoretische Grundlagen	4
3.1 Finite Elemente Methode Berechnung	4
3.2 Modalanalyse	7
3.2.1 Allgemeines zur Modalanalyse	7
3.2.2 Grundlagen der Modalanalyse	8
3.2.3 Numerische Modalanalyse	21
3.3 Kontinuumsschwinger	28
3.3.1 Allgemeines zu Eigenformen	28
3.3.2 Balken	28
3.3.3 Scheiben und Platten	39
3.3.4 Bladed Disks	50
3.4 Blade-Passing Excitation	52
3.5 Diagramme zur Untersuchung von Schwingungsinteraktionen	54
3.5.1 Campbell-Diagramm	54
3.5.2 Interferenz-Diagramm	57
4. Numerische Charakterisierung des HSL-Rotors	64
4.1 Systembeschreibung	64
4.1.1 Aufbau des Rotors	64
4.1.2 Prüfstandaufbau	66
4.2 Eingrenzung der Untersuchung	67

4.3	Vorgehensweise bei der numerischen Untersuchung	67
4.4	Teilsystem Schaufel	68
4.4.1	Simulationsmodell.....	68
4.4.2	Eigenformen 1BI-Modell	70
4.4.3	Campbell-Diagramm	71
4.4.4	Interferenz-Diagramm	72
4.4.5	Zusammenfassung der Ergebnisse Schaufel	73
4.5	Teilsystem Rotorscheibe.....	74
4.5.1	Modellbildung und Simulationsparameter.....	74
4.5.2	Systemcharakterisierung	76
4.5.3	Campbell-Diagramm	77
4.5.4	Interferenz-Diagramm	79
4.5.5	Interpretation der Ergebnisse Scheibe	80
4.6	72BI-Modell	81
4.6.1	Modellaufbereitung und Vernetzung des 72BI-Modells	81
4.6.2	Systemcharakterisierung	84
4.6.3	Campbell-Diagramm	86
4.6.4	Interferenz-Diagramm	90
4.6.5	Schlussfolgerungen zum 72BI-Modell	94
4.7	Zusammenfassung der Ergebnisse	95
4.7.1	Einschaufelmodell.....	95
4.7.2	Rotorscheibe.....	95
4.7.3	72BI-Modell.....	96
4.7.4	Anmerkungen	96
4.8	Vergleich zum Versuch	97
4.8.1	Messergebnisse.....	98
4.8.2	Interpretation der Ergebnisse	99
5.	Erweiterte Untersuchung der Schaufeleigenfrequenz.....	100
5.1	Erweiterte Untersuchung des 1BI-Modells.....	100
5.1.1	1BI-Modell.....	100

5.1.2	Vergleich Rand- / Einspannungsbedingungen	101
5.2	Einfluss der Scheibensteifigkeit auf die Schaufeleigenfrequenz.....	105
5.2.1	Modifiziertes 1BI-Modell.....	105
5.2.2	5BI-Modell	109
5.2.3	Gesamtmodell.....	114
6.	Verdichterstudie [28]	118
6.1	Modellbildung, Vernetzung und Einspannbedingungen.....	119
6.1.1	Verdichter mit Deckscheibe	119
6.1.2	Verdichter ohne Deckscheibe	120
6.1.3	Nabenscheibe	121
6.1.4	Schaufelmodell	121
6.2	Auswertung	122
6.2.1	Maximaler Nodal Diameter	122
6.2.2	Schaufel	122
6.2.3	Nabenscheibe	123
6.2.4	Verdichter ohne Deckscheibe	124
6.2.5	Verdichter mit Deckscheibe	125
6.3	Interferenz Diagramme	126
6.3.1	Verdichterschaufel	127
6.3.2	Nabenscheibe	129
6.3.3	Verdichter ohne Deckscheibe	130
6.3.4	Verdichter mit Deckscheibe	131
6.4	Zusammenfassung und Interpretation	132
7.	Zusammenfassung.....	133
8.	Tabellenverzeichnis	XV
9.	Abbildungsverzeichnis	XVI
10.	Literaturverzeichnis	XX
Anhang A:	Veröffentlichung.....	XXIII
Anhang A-1:	Poster ASME TurboExpo 2016.....	VI
Anhang A-2:	ASME Paper	VII

Anhang B: Schwingung einer kreisrunden Platte	XX
Anhang B-1: Herleitung der Bewegungsgleichung einer Platte	XX
Anhang B-2: Überleitung auf die kreisrunde Platte	XXIV
Anhang B-3: Lösung der Bewegungsgleichung	XXV
Anhang B-3.1: Homogene Lösung	XXV
Anhang B-3.2: Inhomogene Lösung der Differentialgleichung	XXXIV
Anhang C: Numerische Charakterisierung 72Bl-Modell	XLIII
Anhang C-1: Grundlegendes zum Interferenz-Diagramm	XLIII
Anhang C-2: Interferenz-Diagramme	XLIV
Anhang C-2.1: Betriebspunkt ADP - umlauffrequente Anregung	XLIV
Anhang C-2.2: Stillstand – EO96 und EO15	XLVI
Anhang C-2.3: Betriebspunkt Approach (4140 min^{-1}) - EO96 und EO15	XLVIII
Anhang C-2.4: Betriebspunkt Cutback (5900 min^{-1}) - EO96 und EO15	L
Anhang C-2.5: Betriebspunkt Sideline (6300 min^{-1}) - EO96 und EO15	LII
Anhang C-3: Scheibenmoden	LIV
Anhang C-3.1: Modefamilie 1	LIV
Anhang C-3.2: Modefamilie 2	LV
Anhang C-4: Eigenformen Rotor	LVI
Anhang C-4.1: Schaufeldominante Modefamilie 1	LVI
Anhang C-4.2: Schaufeldominante Modefamilie 2	LVII
Anhang C-4.3: Schaufeldominante Modefamilie 3	LVIII
Anhang C-4.4: Schaufeldominante Modefamilie 4	LIX
Anhang C-4.5: Schaufeldominante Modefamilie 5	LX
Anhang C-4.6: Schaufeldominante Modefamilie 6	LX
Anhang C-4.7: Scheibendominante Modefamilie 1	LXI
Anhang C-4.8: Scheibendominante Modefamilie 2	LXI
Anhang C-4.9: Scheibendominante Modefamilie 3	LXI
Anhang D: Einfluss der Scheibensteifigkeit	LXII
Anhang D-1: Variation des E-Moduls	LXII
Anhang D-2: Veränderte Position am Rotor (5Bl)	LXIV

Anhang D-3: Veränderte Position am Rotor (Gesamtmodell).....	LXIV
Anhang E: Experimentelle Modalanalyse.....	LXV
Anhang E-1: Allgemeines	LXV
Anhang E-2: Versuchsaufbau	LXV
Anhang E-2.1: Prinzipieller Aufbau	LXV
Anhang E-2.2: Rotor mit DMS-Messstellen	LXVI
Anhang E-2.3: Messpunkte an der Schaufel.....	LXVII
Anhang E-2.4: Impulshammer	LXVIII
Anhang E-3: Versuchsdurchführung.....	LXVIII
Anhang E-3.1: Versuch 1: Gesamtbeschau felung	LXIX
Anhang E-3.2: Versuch 2: Einfluss der Lagerung	LXIX
Anhang E-3.3: Messunsicherheiten und Messfehler.....	LXX
Anhang E-4: Anmerkungen zum Versuch	LXX
Anhang F: Vergleich Rechenprogramme	LXXI

1. Einleitung

Seit den Anfängen der Fliegerei zu Beginn des 20. Jahrhunderts hat sich die Luftfahrt grundlegend geändert. Von den anfänglichen Fluggeräten der Gebrüder Wright wurden Flugzeuge stetig weiterentwickelt und sind heutzutage aus der globalisierten Welt nicht mehr wegzudenken.

Bei einem jährlich steigenden Flugaufkommen und steigenden Anforderungen sowie Auflagen im Bereich des Umweltschutzes sind die Flugzeug- und Triebwerkshersteller als auch Forschungseinrichtungen ständig gefordert das Konzept des „sparsameren und leistungsfähigeren“ Flugzeugs voranzutreiben. Dadurch sollen neue und innovative Technologien geschaffen werden, um die zukünftigen Anforderungen bewältigen zu können. Besonders der Bereich der Flugantriebe hat sich über die Jahre und Jahrzehnte sehr stark gewandelt. Wurden anfangs Kolbenmotoren eingesetzt, kamen nach und nach immer mehr Fluggasturbinen zum Einsatz. Die ursprünglich verwendeten Turbo-Jet-Triebwerke wurden in der zivilen Luftfahrt aufgrund der höheren Effizienz und des geringeren Treibstoffverbrauchs durch Turbo-Fan-Triebwerke (Mantelstromtriebwerke) verdrängt. Diese Triebwerke sind Stand der Technik und bieten die Grundlage für eine Vielzahl von Forschungsprojekten.

Einer der wichtigsten Ansatzpunkte für die Forschungstätigkeiten ist Treibstoffeinsparung bei Triebwerken um die Umweltbelastung und die Betriebskosten zu senken. Eine Möglichkeit dazu ist die Reduktion der Triebwerksmasse. Eine Reduktion der Masse, d.h. schlankere Bauteile bzw. eine Reduktion der Turbinenstufen, geht aber einher mit einer Erhöhung der Bauteilbelastung. Die in den Triebwerken vorhandenen Schwingungen führen zu einer zusätzlichen Steigerung der Belastung und können somit die Lebensdauer massiv verkürzen.

Um den steigenden Bauteilanforderungen Rechnung tragen zu können, sind Kenntnisse über die modalen Eigenschaften und des Schwingungsverhaltens einer Struktur unerlässlich. Dies ist wichtig, da eine steigende Schwingungsamplitude zu einer Zunahme der Belastungen (stärkere wechselnde Belastung) führt und somit Werkstoffgrenzwerte überschritten werden können. Als wichtigstes Stellglied kann die Dämpfung als Teil der modalen Eigenschaften angesehen werden. Ein Forschungsprojekt aus dieser Reihe ist AdMoNt („Aeroduynamische Schwingungsanregung Moderner Niederdruckturbinenbeschaufelungen“). Dabei wird das Schwingungsverhalten von Niederdruckturbinenstufen und das Zusammenwirken mit dem Turbinenaustrittsgehäuse (TEC) näher untersucht. Diese Arbeit ist ein Teil dieses Projektes und beschäftigt sich mit der numerischen Simulation eines Niederdruckturbinenrotors, dem sogenannten HSL Rotors (High Stage Loading).

2. Aufgabenstellung und Zielsetzung

Im Projekt AdMoNt wird die aerodynamische Schwingungsanregung einer Niederdruckturbinenstufe durch verschiedene stromabwärtsliegende Turbinenausstrittsgehäuse (turbine exit casing, TEC) untersucht. Um die Ergebnisinterpretation der Prüfstandversuche zu unterstützen, ist es erforderlich, Kenntnis über die modalen Eigenschaften des zu untersuchenden Rotors zu besitzen. In dieser Arbeit wird dazu die numerische Modalanalyse des in Abbildung 1 dargestellten High Stage Loading (HSL) Rotors durchgeführt. Des Weiteren sollen Interaktionen mit anderen Prüfstandkomponenten mit Hilfe von Campbell- und Interferenz-Diagrammen näher untersucht werden.

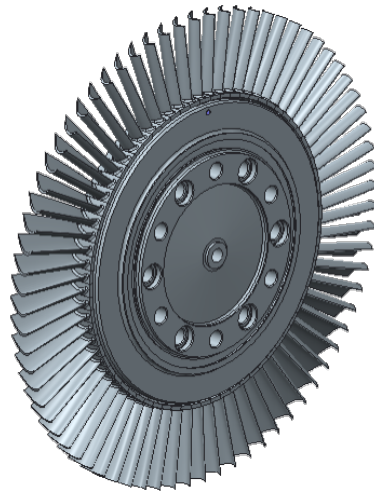


Abbildung 1: CAD-Modell HSL Rotor für numerische Modalanalyse

Die Modalanalyse erfolgt dabei in mehreren Abschnitten. Einerseits sollen die modalen Eigenschaften der Teilsysteme Rotorscheibe und Schaufel und andererseits die modalen Eigenschaften des 72-schaufeligen Rotors (72BI-Modell) hinsichtlich schaufel- und scheibendominanter Moden untersucht werden. Aus diesen Daten sollen mithilfe von Campbell- und Interferenz-Diagrammen auf Resonanzeffekte durch den Stator (96 statische Leitschaufeln) und das Turbinenausstrittsgehäuse (TEC) (15 statische Leitschaufeln) geschlossen werden. Abbildung 2 zeigt die Konfiguration Stator - Rotor – TEC, welche am subsonischen Turbinenprüfstand für aerodynamische, akustische und aeroelastische Untersuchungen (STTF-AAAI) des Instituts für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik der Technischen Universität Graz untersucht wird.

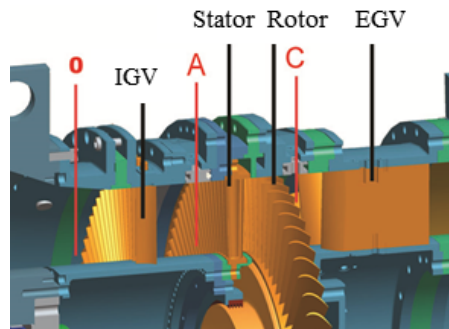


Abbildung 2: Prüfstandkonfiguration [1]

Des Weiteren soll gezeigt werden welchen Einfluss die Rotorscheibe auf die Schaufeln hat. Dabei soll einerseits betrachtet werden wie sich die schaufeldominanten Eigenfrequenzen über den Rotorumfang durch geometriebedingte Steifigkeitsunterschiede verändern. Andererseits soll untersucht werden welchen Einfluss veränderte Materialeigenschaften der Rotorscheibe auf die schaufeldominanten Eigenfrequenzen besitzen. Die veränderten Materialeigenschaften können durch unterschiedliche eingesetzte Werkstoffe aber auch schwankenden Lieferqualitäten bedingt sein. Ziel dieses Abschnitts ist es, Erkenntnisse über die rotorscheibenbedingten Einflüsse auf die Schaufeln sowie die schaufeldominanten Moden zu erlangen.

Die Zielsetzung dieser Arbeit ist durch eine vollständige modale Charakterisierung des HSL Rotors eine Unterscheidung in schaufel- und scheidendominanten Eigenfrequenzen (nähere Definition unter Kapitel 3.3.3.3) zu ermöglichen und aufbauend auf diesen Daten Campbell- und Interferenz-Diagramme zu erstellen. Anhand dieser sollen mögliche Resonanzeffekte, die durch im Strömungskanal befindliche Bauteile bedingt sind, ermittelt werden. Diese Erkenntnisse sollen helfen die Versuchsdaten besser interpretieren zu können.

3. Theoretische Grundlagen

Die theoretischen Grundlagen sollen für ein besseres Verständnis der nachfolgenden Kapitel dienen. Dabei wird grundlegend erklärt wie ein Finite Elemente Tool arbeitet, wie Modalanalysen durchgeführt werden und wie die Bauteile hinsichtlich ihrer Schwingungseigenformen charakterisiert werden. Des Weiteren werden Tools zur Resonanzuntersuchung der schwingenden Strukturen behandelt.

3.1 Finite Elemente Methode Berechnung

Die Finite Elemente Methode (FEM) ist ein numerisches Berechnungsverfahren basierend auf Differentialgleichungen oder partiellen Differentialgleichungen. Der dabei verfolgte Grundgedanke ist die Zerlegung einer komplexen Geometrie in einfache Teilbereiche, die sogenannten finiten Elemente oder in der Gesamtheit das Netz. Diese Methode ist in der Technik weit verbreitet und zählt mittlerweile zu den Standardwerkzeugen in der Strukturmechanik, in der Chemie als auch in der mathematischen Physik. [2] Die Grenzen für den Einsatz von FEM-Berechnungen sind fast unbeschränkt. Sie können immer dann eingesetzt werden, wenn partielle, orts- sowie zeitabhängige Differentialgleichungen zur Beschreibung der Vorgänge verwendet werden können. Als Ansatz dienen bei Schwingungen oder ähnlichem die Bewegungsgleichung oder bei Festigkeitsuntersuchungen das (statische) Gleichgewicht. [3]

Durch die FEM-Berechnungen werden Verschiebungsmodelle betrachtet, die basierend auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebung die geforderten Gleichgewichtsbedingungen erfüllen müssen. Wird nun das vereinfachte System mit virtuellen Verschiebungen beaufschlagt, so wird durch die am System angreifenden Kräfte eine virtuelle Arbeit geleistet. Die geforderte Bedingung ist bei einem im Gleichgewicht befindlichen System, dass die Summe der virtuellen Arbeit δW_{innen} und $\delta W_{\text{außen}}$ (Gl. 1) gleich null ist. Die Bedingung muss dabei nicht nur für das Gesamtsystem, sondern auch für jedes einzelne finite Element gelten. [3]

$$\delta W = \delta W_{\text{innen}} + \delta W_{\text{ausßen}} = 0 \quad (\text{Gl. 1})$$

„Prinzip der virtuellen Arbeit (PvA): Ein mechanisches System befindet sich unter der Einwirkung äußerer Kräfte und geometrischer Zwänge im Gleichgewicht. Die Summe der gesamten virtuellen Arbeit δW , welche dann durch innere und äußere Kräfte und beliebige (den vorgeschriebenen geometrischen Zwängungen genügende) virtuelle Verschiebung hervorgerufen wird, ist Null.“ [3]

Wie schon erwähnt zerlegen Finite-Elemente-Programme die Struktur in viele kleine Teilbereiche, die sogenannten Elemente. Dieser Vorgang wird auch als Diskretisierung bezeichnet. Dabei werden je nach Anforderung der zu lösenden Aufgabe unterschiedliche Elementtypen mit unterschiedlichsten Ansatzfunktionen sowie Formen verwendet. Vorrangig kommen bei den heutzutage verwendeten Softwarelösungen dreieckige bzw. rechteckige Elemente sowie deren räumlichen Äquivalente zum Einsatz. Abbildung 3 soll einen kurzen Überblick über die eingesetzten Elemente in den unterschiedlichen räumlichen Dimensionen geben. [3]

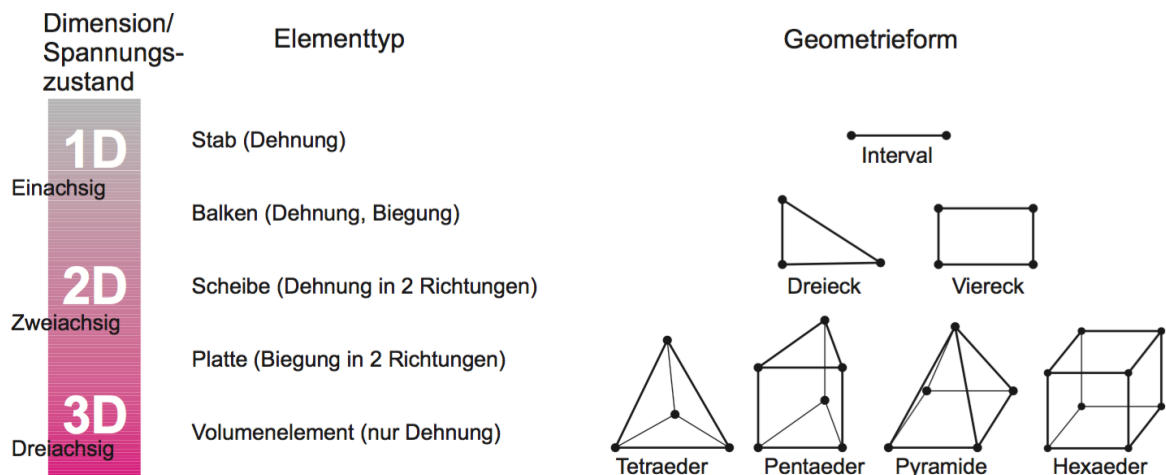


Abbildung 3: Elementformen [3]

Diesen Basiselementen liegen unterschiedlichste Ansatzfunktionen zugrunde, die in linearer, quadratischer oder kubischer Ordnung die Funktionsverläufe in den Elementen annähern. [3]

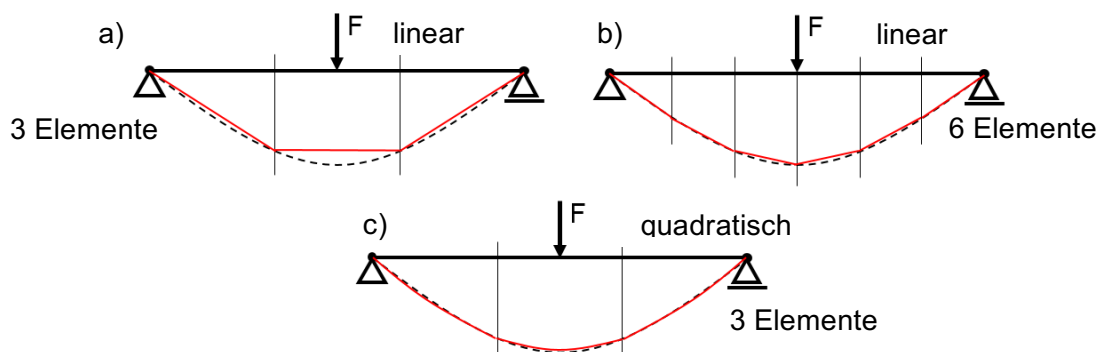


Abbildung 4: Diskretisierung einer Biegelinie [33]

Einen wesentlichen Einfluss bei einer FE-Berechnung/Simulation hat die Elementgröße, da diese zu Unterschieden in der Genauigkeit, der Rechenzeit und somit den Ergebnissen führt. Betrachtet man die Elementgröße anhand einer durch lineare Ansatzfunktionen angenäherten Biegelinie, so ist in Abbildung 4 a) und b) ersichtlich, dass bei einer höheren Elementanzahl die Biegelinie genauer abgebildet wird. [33] Abbildung 4 c) zeigt, dass durch die geschickte Wahl der Ansatzfunktion (z.B. quadratisch) die Elementanzahl geringgehalten werden kann, die Funktion aber gut angenähert wird.

Da jedoch eine steigende Elementanzahl mit der Erhöhung der Rechendauer einhergeht, werden häufig quadratische Ansatzfunktionen verwendet. Dadurch werden bei einer geringen Elementzahl die Funktionsverläufe besser angenähert als durch lineare Ansatzfunktionen. [33]

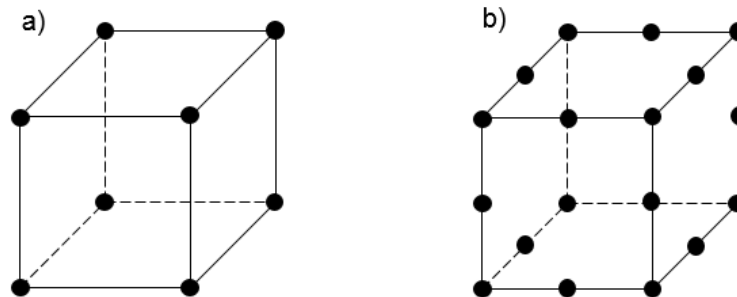


Abbildung 5: Elementtypen a) linear SOLID 185 b) quadratisch SOLID 186 [4]

Betrachtet man die Elemente, die zur Diskretisierung verwendet werden, (wie in Abbildung 5 z.B. Hexaeder) so weisen diese beim linearen Ansatz lediglich Knoten in den Eckpunkten auf. Bei der quadratischen Formulierung gibt es zusätzlich noch die sogenannten „Zwischenknoten“, die zu einer besseren Annäherung dienen. Das gleiche Erscheinungsbild zeigt sich auch bei den beiden Formulierungen von Tetraedern.

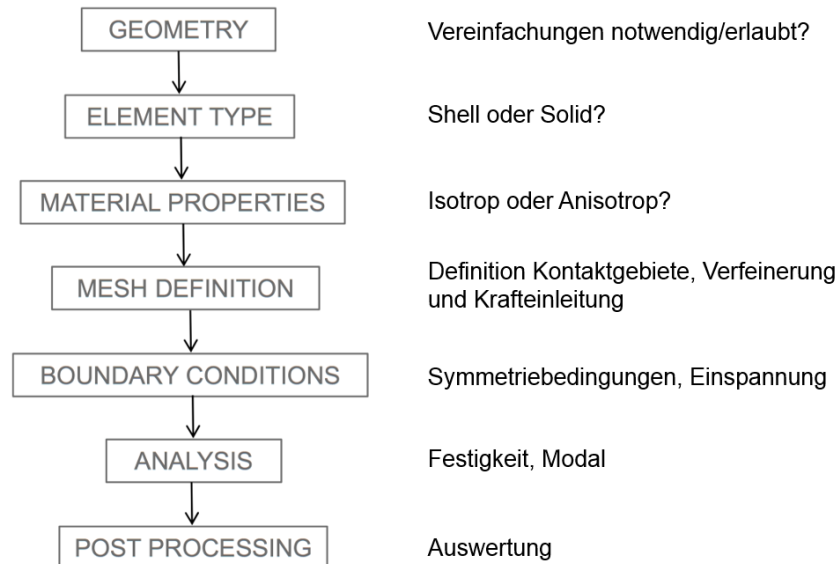


Abbildung 6: Vorgehensweise FEM [34]

In Abbildung 6 ist das prinzipielle Vorgehen bei der FEM-Berechnung dargestellt. Dabei ist anzumerken, dass besonders die Definition der Randbedingungen (Boundary Conditions) auf die Berechnungsergebnisse und die Abbildung der Realität einen sehr großen Einfluss haben. Abschließend sei angemerkt, dass die FE-Berechnungen sehr häufig eingesetzt werden, die Ergebnisse jedoch zu Fehleinschätzungen führen können, da diese besonders stark von der Aufbereitung und der Wahl der Randbedingungen abhängen.

3.2 Modalanalyse

Als Modalanalyse wird die Bestimmung der sogenannten modalen Parameter (Eigenformen und -frequenzen, modale Steifigkeit, modale Masse, modale Dämpfung) bezeichnet. Anhand dieser Parameter lässt sich das Schwingungsverhalten einer Struktur beschreiben. [5]

In diesem Abschnitt wird neben allgemeinen Anmerkungen zur Modalanalyse auf die Grundlagen samt den modalen Parametern eingegangen und im Anschluss die numerische Modalanalyse näher erläutert.

3.2.1 Allgemeines zur Modalanalyse

Bei der Modalanalyse unterscheidet man zwei Typen. Einerseits die numerische Modalanalyse, die in diesem Kapitel behandelt wird, und andererseits die experimentelle Modalanalyse, den sogenannten Modalversuch. Bei der numerischen Modalanalyse, die in den meisten Fällen auf rechnergestützter FE-Simulation basiert, benötigt man genaue Kenntnisse über die Werkstoffparameter, die Systemgeometrie sowie der Randbedingungen. Für diese Untersuchung reichen die Konstruktionsdaten aus, um die Eigenfrequenzen und Eigenformen ermitteln zu können. Im Gegensatz dazu bedarf der Modalversuch eines realen Prototyps des zu untersuchenden Systems. Dabei wird ein Schwingungsimpuls in das System eingebracht und die Schwingungsantwort gemessen (z.B. durch DMS, Beschleunigungsaufnehmer, Laservibrometer, etc.). Die wesentlichen Vorteile der numerische Modalanalyse gegenüber der experimentellen sind einerseits die relativ geringen Kosten, da kein Prototyp erforderlich ist, und andererseits die Vielfalt der Einsatzmöglichkeiten. Die numerische Modalanalyse kann in jeder Phase der Entwicklung eingesetzt werden, zudem lassen sich Änderungen bereits frühzeitig und relativ einfach einarbeiten. Des Weiteren lassen sich für schnelle Abschätzungen auch Teilmodelle einsetzen, die ohne großen Simulationsaufwand Anhaltswerte hinsichtlich der Eigenfrequenzen liefern. [5]

Aus diesen Gründen spielen numerische Modalanalysen bei der Auslegung von Systemen z.B. bei Flugzeugtriebwerken, Turbinen, etc. eine wesentliche Rolle, um bereits bei der Konstruktion Schwingungsproblemen vorbeugen zu können, ohne die Untersuchung an einem Prototyp durchführen zu müssen. Der Modalversuch spielt im Gegensatz zur numerischen Modalanalyse eher in späteren Entwicklungsphasen oder bei der Untersuchung von bereits im Betrieb befindlichen Systemen, z.B. zur Rissprüfung bei Turbinenrotoren, eine wichtige Rolle. Dabei spricht man in der Praxis häufig von einem Bump-, Ping-Test oder auch von einem Impulshammerversuch. [5]

3.2.2 Grundlagen der Modalanalyse

In diesem Abschnitt wird auf die theoretischen Grundlagen der Modalanalyse eingegangen. Dazu wird anfänglich ein Einmassenschwinger bzw. ein Single-Degree-of-Freedom System (SDOF) behandelt und in weiterer Folge auf den Mehrmassenschwinger bzw. ein Multi-Degree-of-Freedom (MDOF) System übergeleitet. Um die modale Charakteristik solcher Systeme bestimmen zu können, werden die Bewegungsgleichungen der Systeme als Ausgangspunkt für die nachfolgende Modalanalyse benötigt. Ferner können daraus die modalen Parameter des Systems, d.h. Eigenfrequenzen, Eigenformen, modale Masse, modale Steifigkeit und modale Dämpfung, sowie die Übertragungsfunktion bestimmt werden. Die nachfolgenden Ausführungen für den Einmassen- sowie den Mehrmassenschwinger basieren auf „Modal Testing: Theory and Practice“ von D.J. Ewins [6] sowie den Unterlagen zu „Maschinendynamik I“ [7] bzw. „Maschinendynamik II“ [8] von A. Marn.

3.2.2.1 Einmassenschwinger

Der Einmassenschwinger, wie in Abbildung 7 dargestellt, ist das einfachste auftretende Schwingungsproblem in der Technik, auf dem alle weiteren Betrachtungen von schwingungsfähigen Systemen aufbauen. Dazu werden auf den nachfolgenden Seiten die Grundlagen für die Modalanalyse des Einmassenschwingers hergeleitet. Anfangs wird dabei der ungedämpfte Fall (d.h. $c=0$) behandelt und in weiterer Folge auf den gedämpften Fall übergegangen. Jeweils erfolgt dabei die Betrachtung der freien sowie der erzwungenen Schwingung des Systems. Der bei der Herleitung betrachtete Schwinger besteht dabei aus einer Masse m , einer Feder mit der Federsteifigkeit k und für den gedämpften Fall einem Dämpfer mit der Dämpfungskonstante c . Der betrachtete Schwinger besitzt dabei nur einen Freiheitsgrad in x -Richtung und wird deswegen auch als Single-Degree-of-Freedom-System (SDOF) bezeichnet.

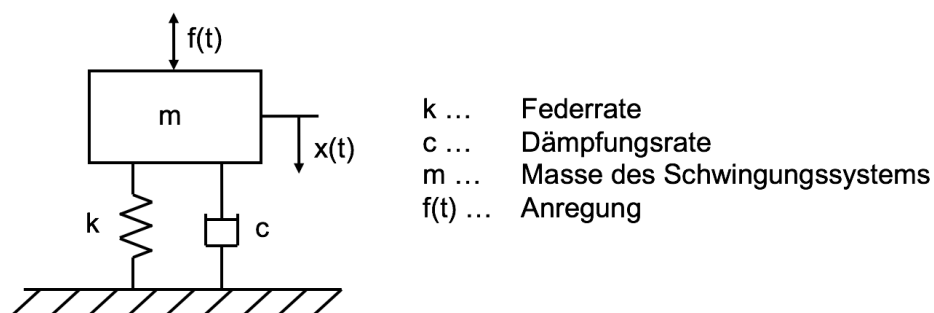


Abbildung 7: Einmassenschwinger [6]

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichung ist es erforderlich den Impulssatz für die Masse m in x -Richtung anzusetzen. Durch Umformen ergibt sich daraus für die ungedämpfte freie Schwingung (ohne Anregung, homogene Differentialgleichung) die Bewegungsgleichung in Form von (Gl. 2). Für die ungedämpfte erzwungene Schwingung ergibt sich die Bewegungsgleichung (inhomogene DGL) in Form von (Gl. 3).

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0 \quad (\text{Gl. 2})$$

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = f(t) \quad (\text{Gl. 3})$$

Um aus der Bewegungsgleichung (Gl. 2) des Systems die Eigenfrequenz bzw. Eigenkreisfrequenz ermitteln zu können, ist es erforderlich, die homogene Differentialgleichung (DGL) zu lösen. Dazu wurde die Bewegungsgleichung auf die Form (Gl. 4) umgeformt. Daraus lässt sich direkt die Eigenkreisfrequenz ω_0 (Gl. 5) des ungedämpften Einmassenschwingers ermitteln.

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = \ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0 \quad (\text{Gl. 4})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Gl. 5})$$

Bei der sich dabei ausbildenden Eigenform oszilliert die Masse m mit der Eigenkreisfrequenz ω_0 um die statische Ruhelage des Einmassenschwingers. In Abbildung 8 ist die freie Schwingung des SDOF dargestellt. Die Amplitude der Schwingung ist dabei über die Zeit gleichbleibend.

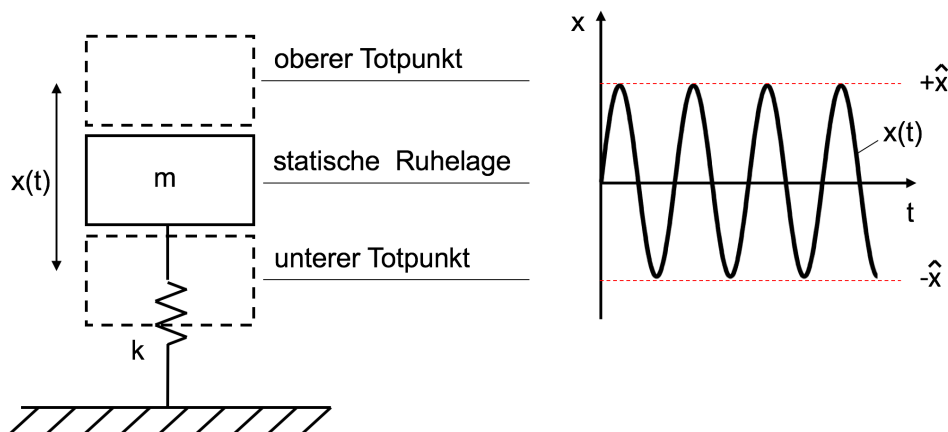


Abbildung 8: freie Schwingung des ungedämpften Einmassenschwingers [35]

Geht man nun von der freien Schwingung zur erzwungenen Schwingung über, so erweitert sich die Bewegungsgleichung (Gl. 2) um die Anregung bzw. das Störglied $f(t)$ auf die in Gleichung (Gl. 3) dargestellte Form. Diese Störglieder sind entscheidend für die partikuläre Lösung der inhomogenen Bewegungsdifferentialgleichung sowie den zu wählenden Lösungsansatz (Störgliedansatz). Für die nachfolgende Betrachtung wird angenommen, dass es sich um eine harmonische Anregung handelt, die sich wie in (Gl. 6) darstellen lässt. Dabei ist Ω die Erregerkreisfrequenz und \hat{f} die Amplitude der Erregerkraft.

$$f(t) = \hat{f} \cdot \cos(\Omega t) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = \hat{f} \cdot \sin(\Omega t) \quad (\text{Gl. 6})$$

$$f(t) = \hat{f} \cdot [\cos(\Omega t) + i \cdot \sin(\Omega t)] = \hat{f} \cdot e^{i\Omega t} \quad (\text{Gl. 7})$$

Eine harmonische Anregung (Gl. 6) kann durch eine komplexe Schreibweise, wie in (Gl. 7) dargestellt, ersetzt werden. Dabei ist die Struktur der Anregung entscheidend ob der Realteil (Cosinusfunktion) oder der Imaginärteil (Sinusfunktion) die Lösung der Differentialgleichung ist. Anhand der Form der Anregung kann ein geeigneter Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung gewählt werden. In (Gl. 9) ist der für die Lösung der Differentialgleichung mit harmonischem Störglied gewählte Ansatz dargestellt. \hat{x} ist dabei die Amplitude der auftretenden Schwingung.

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (\text{Gl. 8})$$

$$x(t) = \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} \quad (\text{Gl. 9})$$

$$-\Omega^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} + \omega_0^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} = \frac{\hat{f}}{m} \cdot e^{i\Omega t} \quad (\text{Gl. 10})$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{Gl. 11})$$

$$x_0 = \frac{\hat{f}}{k} \quad (\text{Gl. 12})$$

$$-\Omega^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} + \omega_0^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} = \frac{\hat{f}}{m} \cdot e^{i\Omega t} \cdot \frac{k}{k} \quad (\text{Gl. 13})$$

$$-\Omega^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} + \omega_0^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} = \omega_0^2 \cdot x_0 \cdot e^{i\Omega t} \quad (\text{Gl. 14})$$

Der gewählte Ansatz (Gl. 9), seine zweite Ableitung sowie die Anregung (Gl. 7) kann in die umgeformte Bewegungsgleichung (Gl. 8) eingesetzt werden, so ergibt sich die Gleichung (Gl. 10). Formt man diese Gleichung mit der Eigenkreisfrequenz (Gl. 11) und der statischen Längung bzw. Verkürzung (Gl. 12) um, so folgt daraus die in (Gl. 14) dargestellte Funktion. Daraus kann die partikuläre Lösung der Bewegungsgleichung ermittelt werden.

Somit folgt aus (Gl. 10) die in Gleichung (Gl. 15) dargestellte Übertragungsfunktion, welche das Verhältnis aus Systemantwort und Anregung beschreibt und eine wichtige Kenngröße für das Systemverhalten darstellt. Aus der Übertragungsfunktion lässt sich bestimmen, ob die Masse mit der Anregung gleichphasig oder gegenphasig schwingt, d.h. ob die Phasenverschiebung 0° oder 180° beträgt.

$$\alpha(\Omega) = \frac{\hat{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{k - m\Omega^2} \quad (\text{Gl. 15})$$

Da für den ungedämpften Einmassenschwinger die Grundlagen behandelt und hergeleitet wurden, wird jetzt auf den gedämpften Fall übergegangen, da dieser für technische Systeme eine sehr hohe Relevanz besitzt. Grund dafür ist, dass annähernd alle Schwingungen gedämpft sind und sich somit das Schwingungsverhalten eines Systems erheblich verändert. Für den gedämpften Einmassenschwinger mit äußerer Anregung erweitert sich die Bewegungsgleichung (Gl. 3) um den Dämpfungsterm $c \cdot \dot{x}(t)$ auf die in (Gl. 16) angeführte Bewegungsgleichung der erzwungenen gedämpften Schwingung.

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = f(t) \quad (\text{Gl. 16})$$

$$x(t) = \hat{x} \cdot e^{\lambda t} \quad (\text{Gl. 17})$$

Zur Lösung der Bewegungsgleichung ist es erforderlich, zuerst die homogene und im nächsten Schritt die inhomogene Differentialgleichung zu lösen. Bei der homogenen DGL verschwindet $f(t)$ auf der rechten Seite der Gleichung (Gl. 16), d.h. $f(t) = 0$. Um nun die nichttrivialen Lösungen des DGL zu erhalten, wird der in (Gl. 17) dargestellte komplexe Ansatz eingeführt. Wird der Ansatz sowie die ersten beiden Ableitungen in die homogene DGL (Gl. 16) eingesetzt, lässt sich der Eigenwert λ , wie in (Gl. 18) dargestellt, bestimmen.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2 \cdot m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot m} \quad (\text{Gl. 18})$$

Um die Gleichung (Gl. 18) zu vereinfachen, führt man die Ausdrücke (Gl. 19), (Gl. 20) und (Gl. 21) ein. Dabei ist ω_0 die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Einmassenschwingers, δ die Abklingkonstante und D der Dämpfungsgrad des gedämpften Einmassenschwingers. Damit ergibt sich für den Eigenwert λ die in (Gl. 22) dargestellte Form.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{Gl. 19})$$

$$\delta = \frac{c}{2m} \quad (\text{Gl. 20})$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} \quad (\text{Gl. 21})$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2} \quad (\text{Gl. 22})$$

Setzt man (Gl. 22) in den Exponentialansatz (Gl. 17) ein, so ergibt sich die Lösung für die Bewegungsgleichung des gedämpften Einmassenschwingers in Form von (Gl. 23). Die Eigenkreisfrequenz ω_d des gedämpften Schwingers ergibt sich mit (Gl. 24), dies entspricht dem imaginären Teil des Exponenten in (Gl. 23) bzw. dem Imaginärteil in (Gl. 22). Die Abklingkonstante δ des Schwingers (Gl. 20) ist dabei genau der Realteil des Exponenten. Mit der Eigenkreisfrequenz ω_d sowie der Abklingkonstante δ lässt sich die Lösung der Bewegungsgleichung (Gl. 23) weiter vereinfachen.

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} (\hat{x}_1 \cdot e^{i\omega_0\sqrt{1-D^2}t} + \hat{x}_2 \cdot e^{-i\omega_0\sqrt{1-D^2}t}) = e^{-\delta t} (\hat{x}_1 \cdot e^{i\omega_d t} + \hat{x}_2 \cdot e^{-i\omega_d t}) \quad (\text{Gl. 23})$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \quad (\text{Gl. 24})$$

In Abbildung 9 ist die gedämpfte Schwingung eines SDOF dargestellt. Dabei wurde viskose Dämpfung angenommen. Der Term $e^{-\delta t}$ in (Gl. 23) beschreibt die Form der Einhüllenden im Weg-Zeit Diagramm. Die Schwingungsamplitude nimmt aufgrund der Dämpfung über die Zeit ab. D.h. dem Schwinger wird Energie entzogen und z.B. in Wärme umgewandelt.

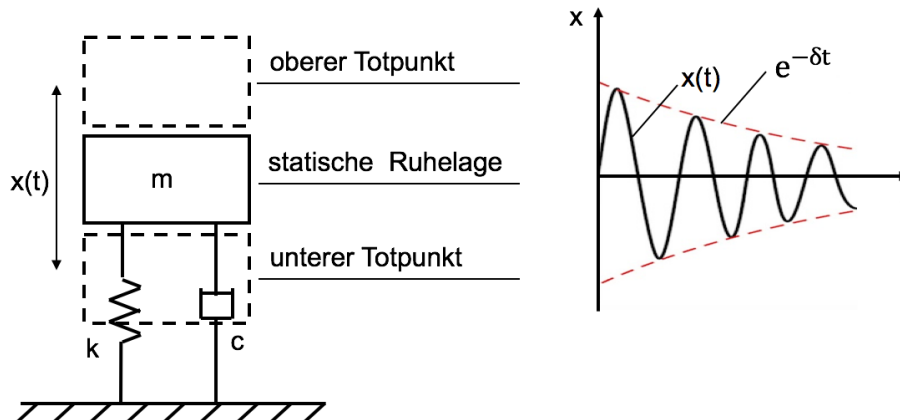


Abbildung 9: freie gedämpfte Schwingung eines Einmassenschwingers [36]

Um nun die partikuläre Lösung der inhomogenen Bewegungsdifferentialgleichung (Gl. 16) zu erhalten, ist analog zum ungedämpften Einmassenschwinger, die Form der Anregung ausschlaggebend für die Wahl des geeigneten Störgliedansatzes. Auch hier wird wieder angenommen, dass es sich um eine harmonische Anregung, wie in (Gl. 6) bzw. (Gl. 7) angeführt, handelt. Die Lösung erfolgt auch hier mithilfe des Störgliedansatzes aus (Gl. 9). Somit folgt daraus (Gl. 25) bzw. in umgewandelter Form (Gl. 26).

$$-\Omega^2 \cdot m \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} + i \cdot \Omega \cdot d \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} + k \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} = \hat{f} \cdot e^{i\Omega t} \quad (\text{Gl. 25})$$

$$-\Omega^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} + 2\delta \cdot \Omega \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} + \omega^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{i\Omega t} = \omega^2 \cdot x_0 \cdot e^{i\Omega t} \quad (\text{Gl. 26})$$

Aus (Gl. 25) kann die Übertragungsfunktion des gedämpften Einmassenschwingers bestimmt werden. Diese erweitert sich im Vergleich zum ungedämpften Fall um den Dämpfungsanteil $ic\Omega$ auf die in (Gl. 27) dargestellte Gleichung.

$$\alpha(\Omega) = \frac{\hat{x}}{\hat{f}} = \frac{1}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} \quad (\text{Gl. 27})$$

Vergleicht man nun die Übertragungsfunktion in (Gl. 27) mit der des ungedämpften Falls, so ist ersichtlich, dass die Dämpfung zu einer Phasenverschiebung zwischen 0° und 180° führt, d.h. die schwingende Masse eilt der Anregung hinterher.

3.2.2.2 Mehrmassenschwinger

Die Betrachtung von Mehrmassenschwingern baut im Wesentlichen auf den beim Einmassenschwinger gefundenen Zusammenhängen auf. Anhand dieser kann sehr gut die Modalanalyse erklärt werden. Es ist möglich den Mehrmassenschwinger durch die Superposition von einzelnen SDOF-Systemen für die einzelnen Freiheitsgrade zu beschreiben. In Abbildung 10 ist beispielhaft ein Mehrmassenschwinger mit zwei Freiheitsgraden (Massen) dargestellt. Die nachfolgenden Herleitungen sind generell für alle Systeme mit mehr als einem Freiheitsgrad gleich. Dieser Abschnitt ist analog zum Einmassenschwinger aufgebaut, anfangs wird von einem ungedämpften Mehrmassenschwinger ausgegangen und in späterer Folge mit dem gedämpften Fall fortgesetzt. [6]

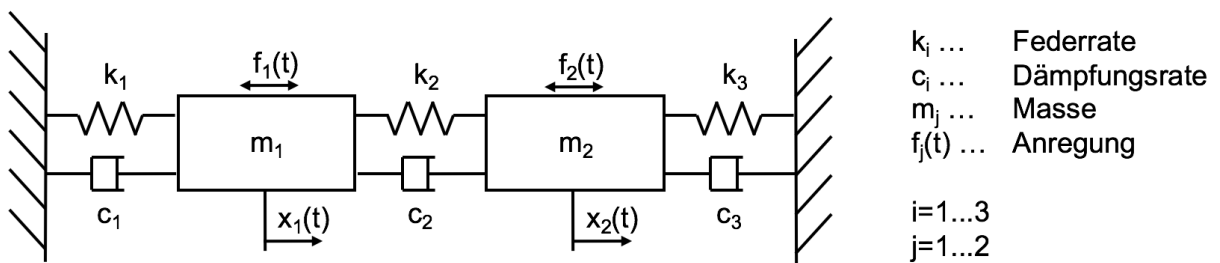


Abbildung 10: Mehrmassenschwinger mit zwei Freiheitsgraden [6]

Als erster Schritt ist es erforderlich für jede Einzelmasse des Mehrmassenschwingers die Bewegungsgleichung anzusetzen. Für den in Abbildung 10 dargestellten Zweimassenschwinger ergeben sich somit die beiden in (Gl. 28) und (Gl. 29) angeführten Bewegungsgleichungen. Daraus ist ersichtlich, dass die einzelnen Gleichungen gekoppelt sind und man somit ein gekoppeltes Gleichungssystem mit linearen Differentialgleichungen erhält. Für Systeme mit N_{SYS} Freiheitsgraden ergibt sich somit ein Gleichungssatz mit N_{SYS} gekoppelten Differentialgleichungen.

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) + [c_1 + c_2]\dot{x}_1(t) - c_2 \cdot \dot{x}_2(t) + [k_1 + k_2]x_1(t) - k_2 \cdot x_2(t) = f_1(t) \quad (\text{Gl. 28})$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2(t) + [c_2 + c_3]\dot{x}_2(t) - c_2 \cdot \dot{x}_1(t) + [k_2 + k_3]x_2(t) - k_2 \cdot x_1(t) = f_2(t) \quad (\text{Gl. 29})$$

Für einen Mehrmassenschwinger (N_{SYS} Freiheitsgrade) kann das erhaltene Gleichungssystem als Matrixgleichung, wie nachfolgend in (Gl. 30) angeschrieben, ausgedrückt werden. Dabei beinhaltet die Bewegungsgleichung die $N_{\text{SYS}} \times N_{\text{SYS}}$ Matrizen für Masse \underline{M} , Dämpfung \underline{C} , und Steifigkeit \underline{K} , sowie die $N_{\text{SYS}} \times 1$ Vektoren für die Bewegung $\underline{x}(t)$, $\underline{\dot{x}}(t)$, $\underline{\ddot{x}}(t)$ und die Anregung $\underline{f}(t)$.

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{M}} & \dots \text{Massenmatrix} \\
 \underline{\underline{K}} & \dots \text{Steifigkeitsmatrix} \\
 \underline{\underline{C}} & \dots \text{Dämpfungsmatrix} \\
 \underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{C}} \cdot \dot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{x}(t) & = \underline{f}(t) \quad (\text{Gl. 30}) \\
 \underline{f}(t) & \dots \text{zeitabhängiger Kraftvektor} \\
 \ddot{\underline{x}}(t) & \dots \text{Beschleunigungsvektor} \\
 \dot{\underline{x}}(t) & \dots \text{Geschwindigkeitsvektor} \\
 \underline{x}(t) & \dots \text{Wegvektor}
 \end{aligned}$$

Für die freie ungedämpfte Schwingung eines Mehrmassenschwingers vereinfacht sich die Bewegungsgleichung auf die in (Gl. 31) dargestellte Form. Dies folgt daraus, dass sowohl die Anregung $\underline{f}(t) = \underline{0}$ als auch die Dämpfungsmatrix $\underline{\underline{D}} = \underline{0}$ aus der Gleichung herausfallen.

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{x} = \underline{0} \quad (\text{Gl. 31})$$

$$\underline{x}(t) = \underline{\hat{A}} \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{Gl. 32})$$

Mit einem komplexen vektoriiellen Exponentialansatz (Gl. 32), analog zu Gleichung (Gl. 3) für den Einmassenschwinger, lässt sich auch hier die homogene Bewegungsdifferentialgleichung lösen. Dabei ist $\underline{\hat{A}}$ ein Amplitudenvektor des schwingungsfähigen Systems. Setzt man den Ansatz sowie seine zweite Ableitung in die ungedämpfte Bewegungsgleichung ein, folgt daraus die Gleichung (Gl. 33). Aus dieser Gleichung lassen sich durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante des Terms $(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}})$ die Eigenkreisfrequenzen des Systems bestimmen. Für einen Mehrmassenschwinger mit N_{SYS} Freiheitsgraden folgen daraus genau N_{SYS} Eigenfrequenzen (Gl. 34).

$$(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) \cdot \underline{\hat{A}} \cdot e^{i\omega t} = \underline{0} \quad (\text{Gl. 33})$$

$$\omega^2: (\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{N_{\text{SYS}}}^2) \quad (\text{Gl. 34})$$

Setzt man eine der erhaltenen Eigenkreisfrequenzen wieder in Gleichung (Gl. 33) ein, erhält man als Lösung die Eigenvektoren $\underline{\hat{A}}_i$, welche die Eigenformen des Mehrmassenschwingers beschreiben. Der Eigenvektor $\underline{\hat{A}}_1$ beschreibt dabei die erste Eigenform des schwingungsfähigen Systems. Insgesamt existieren somit bei einem System mit N_{SYS} Freiheitsgraden bzw. Eigenkreisfrequenzen N_{SYS} dazugehörige Eigenvektoren. Durch diese Eigenvektoren sind die Amplitudenverhältnisse der schwingenden Einzelmassen gegeben. Multipliziert man mit der Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix zwei beliebige Eigenvektoren des Systems so ergeben sich die in (Gl. 35) und (Gl. 36) dargestellten Beziehungen.

Wird dabei zweimalig der gleiche Eigenvektor verwendet, d.h. $i=j$, so ergibt sich bei (Gl. 35) die modale Masse m_r und bei (Gl. 36) die modale Steifigkeit k_r . Diese werden als modale Parameter des schwingungsfähigen Systems bezeichnet. Ist i ungleich j so ergeben die beiden Gleichungen (Gl. 35) und (Gl. 36) jeweils null. Dieses Verhalten wird als Orthogonalitätsbeziehung der Eigenvektoren bezeichnet.

$$\underline{\hat{A}}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\hat{A}}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m_{r,i} & i = j \end{cases} \quad (\text{Gl. 35})$$

$$\underline{\hat{A}}_i^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\hat{A}}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_{r,i} & i = j \end{cases} \quad (\text{Gl. 36})$$

Die Orthogonalitätsbeziehung bedeutet, dass ein schwingungsfähiges System mit einer Eigenfrequenz und der dazugehörigen Eigenform schwingen kann, ohne dass ein Energieaustausch mit anderen Eigenformen besteht. Anhand der dazugehörigen mathematischen Betrachtung ist ersichtlich, dass im N_{SYS} -dimensionalen modalen Raum alle Eigenvektoren normal zueinander stehen. Regt man eine Eigenform an, so schwingt nur diese und alle anderen haben keinen Einfluss auf die sich einstellende Schwingungsform.

Die Eigenvektoren $\underline{\hat{A}}_i$ des Systems lassen sich zu einer Matrix, der sogenannten Eigenformmatrix $\underline{\phi}$, wie in (Gl. 37), zusammenfassen. Diese Matrix wird in dieser Arbeit als Modalmatrix bezeichnet. Mit der Modalmatrix lassen sich die modalen Massen (Gl. 38) und die modalen Steifigkeiten (Gl. 39) des Systems berechnen. Auch die beiden sich ergebenden Matrizen für die modale Masse und modale Steifigkeit entsprechen wieder der Orthogonalitätsbeziehung und sind reine Diagonalmatrizen.

$$\underline{\phi} = [\underline{\hat{A}}_1 \dots \underline{\hat{A}}_{N_{\text{SYS}}}] = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \dots & \hat{A}_{1N_{\text{SYS}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{N_{\text{SYS}}1} & \dots & \hat{A}_{N_{\text{SYS}}N_{\text{SYS}}} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 37})$$

$$\underline{\phi}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\phi} = \underline{m}_r = \begin{bmatrix} m_{r,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_{r,N_{\text{SYS}}} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 38})$$

$$\underline{\phi}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\phi} = \underline{k}_r = \begin{bmatrix} k_{r,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{r,N_{\text{SYS}}} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 39})$$

Im Rahmen der Herleitung für die freie Schwingung eines Einmassenschwingers hat sich der in (Gl. 11) dargestellte Zusammenhang für die Berechnung der Eigenfrequenz ergeben. Dieser lässt sich auf den Schwinger mit N_{SYS} Freiheitsgraden überleiten. Somit ergibt sich die in (Gl. 40) dargestellte Beziehung für $\underline{\omega}^2$. Die sich dabei ergebende Matrix für die Eigenwerte (-kreisfrequenzen) des Systems ist wiederum eine diagonalbesetzte Matrix.

$$\underline{\omega}^2 = \underline{m}_r^{-1} \cdot \underline{k}_r \quad (\text{Gl. 40})$$

Geht man nun von der freien Schwingung des Mehrmassenschwingers zu der erzwungenen Schwingung über, erweitert sich die Gleichung (Gl. 31) um den Anregevektor $\underline{f}(t)$ auf die in (Gl. 41) dargestellte Form. Auch in diesem Abschnitt wird angenommen, dass es sich um eine harmonische Anregung, analog zu (Gl. 6) bzw. (Gl. 7), handelt. Somit kann für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung der komplexe Störgliedansatz wie in (Gl. 42) gewählt werden.

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{x}} + \underline{K} \cdot \underline{x} = \underline{f}(t) \quad (\text{Gl. 41})$$

$$\underline{x}(t) = \underline{\hat{x}} \cdot e^{i\Omega t} \quad (\text{Gl. 42})$$

$$-\Omega^2 \cdot \underline{M} \cdot \underline{\hat{x}} + \underline{K} \cdot \underline{\hat{x}} = \underline{\hat{f}} \quad (\text{Gl. 43})$$

Das Vorgehen zum Erhalt der partikulären Lösung erfolgt analog zum Einmassenschwinger. Man setzt den in (Gl. 42) gewählten Ansatz sowie seine zweite Ableitung in die (Gl. 41) ein und löst das in (Gl. 43) dargestellte Gleichungssystem nach den Amplituden der Schwingung $\underline{\hat{x}}$ auf. Aus (Gl. 43) lässt sich analog zum Einmassenschwinger die in (Gl. 44) dargestellte Übertragungsfunktion bestimmen.

$$\underline{\alpha}(\Omega) = (\underline{K} - \Omega^2 \underline{M})^{-1} \quad (\text{Gl. 44})$$

Aufbauend auf den vorangegangenen Überlegungen zum ungedämpften Mehrmassenschwinger wird nun auf den gedämpften Fall im Detail eingegangen. Somit erlangt die in Gleichung (Gl. 30) dargestellte Bewegungsgleichung volle Gültigkeit. Zur kompakten Darstellung der Gleichungen wurde die gedämpfte Bewegungsgleichung in (Gl. 45) nochmals angeführt. Auch hier soll anfangs die freie Schwingung (homogene Lösung) betrachtet werden und in weiterer Folge auf die erzwungene Schwingung übergegangen werden.

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{x}}(t) + \underline{C} \cdot \underline{\dot{x}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{x}(t) = \underline{f}(t) \quad (\text{Gl. 45})$$

Bei der homogenen Lösung des Differentialgleichungssystems verschwindet, wie auch schon beim Einmassenschwinger, die Anregung. Somit folgt die in (Gl. 46) dargestellte Gleichung, die mit Hilfe eines Exponentialansatzes (Gl. 47) gelöst werden kann. Setzt man diesen sowie seine beiden ersten Ableitungen in die Bewegungsgleichung (Gl. 46) ein, ergibt sich das Eigenwertproblem in Form von (Gl. 48). Dabei lassen sich N_{SYS} Eigenwerte λ_i bestimmen, indem die Koeffizientendeterminante des Terms $[\lambda^2 \cdot \underline{M} + \lambda \cdot \underline{C} + \underline{K}]$ verschwindet.

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{x}}(t) + \underline{C} \cdot \underline{\dot{x}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{x}(t) = \underline{0} \quad (\text{Gl. 46})$$

$$\underline{x}(t) = \underline{\hat{A}} \cdot e^{\lambda t} \quad (\text{Gl. 47})$$

$$\left[\lambda^2 \cdot \underline{M} + \lambda \cdot \underline{C} + \underline{K} \right] \underline{\hat{A}} = \underline{0} \quad (\text{Gl. 48})$$

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm i \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2} = -\delta \pm i \cdot \omega_d \quad (\text{Gl. 49})$$

Bei der Annahme eines schwach gedämpften Systems ergeben sich die Eigenwerte in der in (Gl. 49) dargestellten komplexen Form. Dies ist analog zum Einmassenschwinger. Dabei ist der Realteil wiederum die Abklingkonstante δ und der Imaginärteil die gedämpfte Eigenfrequenz. Setzt man die erhaltenen Eigenwerte wieder in die Gleichung (Gl. 48) ein, so erhält man die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{\hat{A}}_i$, welche die zugehörigen Eigenformen beschreiben.

Geht man nun zur erzwungenen Schwingung des gedämpften Mehrmassenschwingers über, ist das Vorgehen analog zum ungedämpften Fall. Zur Lösung des Differentialgleichungssystems in (Gl. 45) kann unter Annahme einer harmonischen Anregung der in (Gl. 42) gewählte Ansatz verwendet werden. Setzt man diesen Ansatz samt seinen ersten beiden Ableitungen in (Gl. 45) ein, so ergibt sich das Gleichungssystem (Gl. 50) zur Ermittlung der Amplituden $\underline{\hat{x}}$.

$$-\Omega^2 \cdot \underline{M} \cdot \underline{\hat{x}} + \Omega \cdot \underline{C} \cdot \underline{\hat{x}} + \underline{K} \cdot \underline{\hat{x}} = \underline{\hat{f}} \quad (\text{Gl. 50})$$

Analog zur erzwungenen Schwingung des ungedämpften Mehrmassenschwingers lässt sich auch hier die Übertragungsfunktion anhand von (Gl. 50) bestimmen. Somit folgt daraus die in (Gl. 51) dargestellte Gleichung der Übertragungsfunktion.

$$\underline{\alpha}(\Omega) = (\underline{K} + i\Omega\underline{C} - \Omega^2\underline{M})^{-1} \quad (\text{Gl. 51})$$

3.2.2.3 Modale Transformation

In den beiden vorangegangenen Abschnitten wurden die Grundlagen für den Einmassen- und den Mehrmassenschwinger hergeleitet. Betrachtet man den Mehrmassenschwinger, so ist ersichtlich, dass es sich um ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem handelt, das nur geschlossen lösbar ist. Die Überlegung hinter der modalen Transformation ist, das gekoppelte Gleichungssystem des Mehrmassenschwingers mit N_{SYS} Freiheitsgraden in N_{SYS} unabhängige Differentialgleichungen überzuführen. Das bedeutet, dass alle Matrizen in Diagonalf orm übergeführt werden müssen. Die Betrachtung des Mehrmassenschwingers erfolgt somit, wie in Abbildung 11 ersichtlich, durch die Superposition von Einmassenschwingern. Die nachfolgende Betrachtung basiert auf Marn [8].

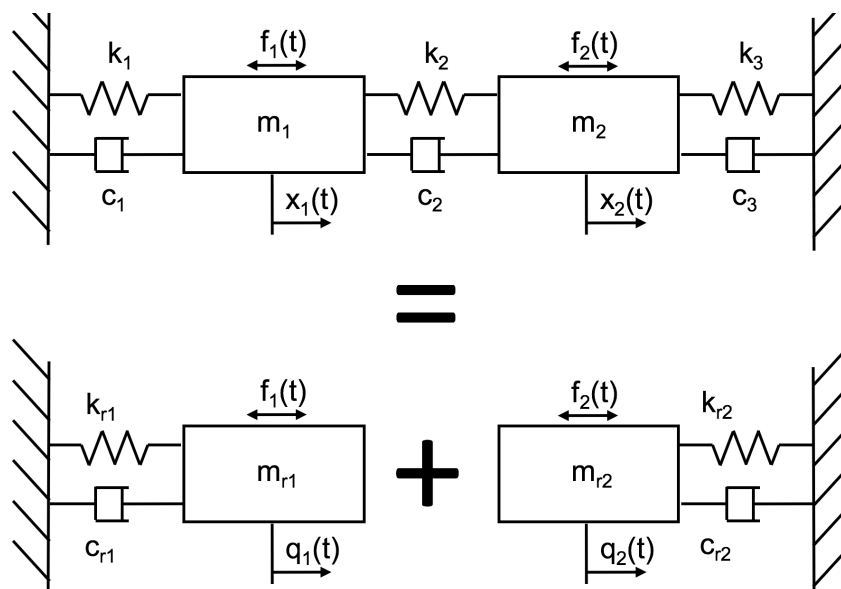


Abbildung 11: Modale Transformation [8]

Ausgehend vom im dreidimensionalen Raum vorliegenden System soll durch eine Koordinatentransformation in den N_{SYS} -dimensionalen modalen Raum das Gleichungssystem entkoppelt werden. Dabei werden die kartesischen Koordinaten x_1 und x_2 in die modalen Koordinaten q_1 und q_2 übergeführt. Diese Transformation wird auch als Modalanalyse bezeichnet und bildet die Grundlage für alle FE-basierenden Anwendungen zur Eigenschwingungsuntersuchung.

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{x}}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{0}} \quad (\text{Gl. 52})$$

$$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{\phi}} \cdot \underline{\underline{q}} \quad (\text{Gl. 53})$$

$$\underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\phi}} \cdot \underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\phi}} \cdot \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{Gl. 54})$$

$$\underline{\underline{m}}_r \cdot \underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{k}}_r \cdot \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{Gl. 55})$$

Anhand der in (Gl. 53) dargestellten Gleichung lassen sich die kartesischen Koordinaten in die modalen Koordinaten überführen. Dabei ist $\underline{\phi}$ die bereits vom Mehrmassenschwinger bekannte Modalmatrix. Setzt man nun die Koordinatentransformation in die Bewegungsgleichung (Gl. 52) des ungedämpften freien Mehrmassenschwingers ein und multipliziert man diese mit der transformierten Modalmatrix $\underline{\phi}^T$, so erhält man die in (Gl. 54) dargestellte entkoppelte Differentialgleichung des Mehrmassenschwingers. Dabei ist ersichtlich, dass sowohl die Massen- als auch die Steifigkeitsmatrix durch die Modalmatrix diagonalisiert werden. Anhand der beim Mehrmassenschwinger hergeleiteten Zusammenhänge (Gl. 38) und (Gl. 39) können die einzelnen Terme durch die modale Masse m_r bzw. die modale Steifigkeit k_r ersetzt werden. Somit folgen daraus N_{SYS} entkoppelte lineare Differentialgleichungen in Form von (Gl. 55).

Geht man nun zur gedämpften freien Schwingung des Mehrmassenschwingers mit der in (Gl. 56) dargestellten Bewegungsgleichung über, gelingt es im Allgemeinen nicht mehr das Gleichungssystem zu entkoppeln. Grund dafür ist, dass die Dämpfungsmatrix \underline{C} nicht zwangsläufig eine symmetrische Matrix sein muss. Dies wird beim in Abbildung 10 dargestellten Zweimassenschwinger ersichtlich, wenn einer der Dämpfer entfällt. Um dennoch die Dämpfungsmatrix auch diagonalisieren zu können, sind Annahmen für die Dämpfung zu treffen, durch die die Realität bestmöglich abzubilden ist. In der Praxis wird sehr häufig die sogenannte Rayleigh Dämpfung verwendet, um die Dämpfungsmatrix umschreiben zu können.

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{x}}(t) + \underline{C} \cdot \underline{\dot{x}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{x}(t) = \underline{0} \quad (\text{Gl. 56})$$

Bei der Rayleigh Dämpfung, oft auch als „proportionale Dämpfung“ oder „Bequemlichkeitshypothese“ bezeichnet, erfolgt die Annahme, dass sich die Dämpfungsmatrix aus der Massen- und Steifigkeitsmatrix zusammensetzt. Dies ist in (Gl. 57) dargestellt. Wie aus den vorangegangenen Abschnitten bekannt ist, können beide Matrizen diagonalisiert werden. Diese Gegebenheit macht man sich auch hier zu Nutze und ermöglicht es somit die Dämpfungsmatrix zu diagonalisieren. Die beiden Koeffizienten α und β sind durch Versuche zu bestimmen und erfordern somit gute Kenntnisse über das zu untersuchende System.

$$\underline{C} = \alpha_R \cdot \underline{M} + \beta_R \cdot \underline{K} \quad (\text{Gl. 57})$$

$$\underline{\phi}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{\ddot{q}} + \underline{\phi}^T \cdot [\alpha_R \cdot \underline{M} + \beta_R \cdot \underline{K}] \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{\phi}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{q} = \underline{0} \quad (\text{Gl. 58})$$

$$\underline{m}_r \cdot \underline{\ddot{q}} + \underline{c}_r \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{k}_r \cdot \underline{q} = \underline{0} \quad (\text{Gl. 59})$$

Setzt man den für die Rayleigh Dämpfung gefundenen Zusammenhang in die Bewegungsgleichung ein und führt diese in die modalen Koordinaten über, ergibt sich somit die in (Gl. 58) dargestellte Gleichung. Diese lässt sich durch die modale Masse m_r , die modale Steifigkeit k_r und die, mittels der Bequemlichkeitshypothese diagonalisierten Dämpfungsmatrix erhaltene modale Dämpfung c_r weiter vereinfachen. Somit ergibt sich die in (Gl. 59) dargestellte Form. Dies ist der Ausgangspunkt zur Lösung des Eigenwertproblems.

Aufbauend auf den für die freien Schwingungen hergeleiteten Grundlagen soll nun auf die Lösung von erzwungenen Schwingungen eingegangen werden. Geht man nun bei der Lösung des Mehrmassenschwingers von den bereits hergeleiteten Gleichungen aus und erweitert sie um die Anregung \underline{f} , ergeben sich die Bewegungsgleichungen für den ungedämpften Fall wie in (Gl. 60) und für den gedämpften Fall wie in (Gl. 61). Zur Lösung des entkoppelten Gleichungssatzes ist die Form der Anregung entscheidend. Es wird wieder angenommen, dass es sich um eine harmonische Anregung, die in (Gl. 62) in komplexer Form dargestellt ist, handelt. Somit kann der Ansatz (Gl. 63) analog zum bereits beschriebenen Vorgehen beim Mehrmassenschwinger gewählt werden.

$$\underline{m}_r \cdot \underline{\ddot{q}} + \underline{k}_r \cdot \underline{q} = \underline{\phi}^T \cdot \underline{f} \quad (\text{Gl. 60})$$

$$\underline{m}_r \cdot \underline{\ddot{q}} + \underline{c}_r \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{k}_r \cdot \underline{q} = \underline{\phi}^T \cdot \underline{f} \quad (\text{Gl. 61})$$

$$\underline{f} = \underline{\hat{f}} \cdot e^{i\Omega t} \quad (\text{Gl. 62})$$

$$\underline{q} = \underline{\hat{q}} \cdot e^{i\Omega t} \quad (\text{Gl. 63})$$

Das weitere Lösungsvorgehen bei der modalen Transformation ist analog wie beim Mehrmassenschwinger. Somit wird auf eine Wiederholung verzichtet. Ist die Lösung für \underline{q} bekannt, ist es erforderlich, die Lösung vom modalen Raum in den kartesischen Raum zurück zu transformieren. Durch diese Rücktransformation erhält man die Lösung \underline{x} der Bewegungsgleichung.

3.2.3 Numerische Modalanalyse

Eine numerische Modalanalyse ist eine FEM basierende und computergestützte Untersuchung der Schwingungscharakteristik eines Systems. [9] Dabei werden die im Kapitel 3.2.2 angeführten Gleichungen für das betrachtete System numerisch gelöst und die Eigenfrequenzen bzw. -kreisfrequenzen sowie Eigenformen bestimmt. In der Praxis werden dazu sehr häufig vorgefertigte Softwarepakete wie ANSYS, Nastran oder ähnliche verwendet.

In den nachfolgenden Schritten wird das prinzipielle Vorgehen bei einer numerischen Modalanalyse erklärt. Die Erklärung basiert dabei auf der Simulationssoftware ANSYS 15.0 APDL. Der Fokus liegt dabei auf dem Lösungsablauf. Die Modellbildung / -aufbereitung und das Erstellen des Rechengitters, die Auswertung und die mathematischen Grundzüge werden, obwohl es sich um sehr wichtige Teilbereiche der numerischen Modalanalyse handelt, in diesem Abschnitt nur überblicksmäßig behandelt. Für weitere Informationen wird hier auf die Literatur und die Beschreibungen der einzelnen Softwarepakete (z.B. [9],[10],[11],[12]) verwiesen.

3.2.3.1 Vorgehen

In diesem Schritt soll das Vorgehen zur Durchführung einer Modalanalyse erklärt werden. Dieses lässt sich in die drei Schritte Modellbildung, Lösung und Auswertung unterteilen

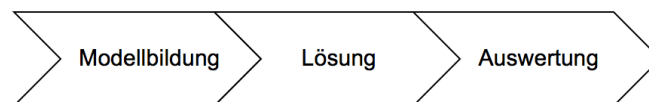


Abbildung 12: Vorgehen numerische Modalanalyse [9]

In Abbildung 12 ist die sachlogische Abfolge der zur Durchführung einer Modalanalyse erforderlichen Schritte dargestellt. In den nachfolgenden Abschnitten wird auf die einzelnen Prozessschritte „Modellbildung“, „Lösung“ und „Auswertung“ eingegangen.

Diese drei Schritte bzw. ihre einzelnen Elemente müssen nicht zwingend in einem einzigen Softwarepaket durchgeführt werden. Häufig werden eigene Tools für die Modellbildung (CAD- Software) und die Vernetzung verwendet. Diese Daten werden anschließend in die Simulationssoftware importiert. ANSYS selbst ermöglicht es, dass alle Schritte in einem Programm abgearbeitet werden können. [9]

3.2.3.2 Modellbildung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Modellbildung und den darin beinhalteten Schritten zur Durchführung einer numerischen Modalanalyse. Ziel der Modellbildung ist, ein vollständig definiertes Simulationsmodell zu erhalten, auf dem die Simulation aufbaut. Nachfolgend wird das in Abbildung 13 dargestellte Vorgehen bei der Modellbildung schrittweise erklärt.

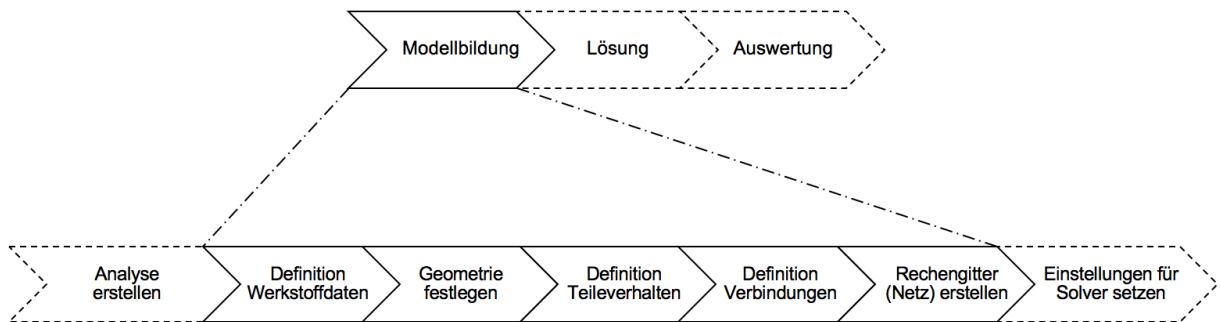


Abbildung 13: Modellbildung [9]

Im Rahmen des Schrittes „Definition Werkstoffdaten“ werden die Eigenschaften der verwendeten Materialien definiert. Dabei werden beispielhaft Dichte, Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl für die unterschiedlichen Materialien angegeben, die in weiterer Folge den Bauteilen zugewiesen werden können. Des Weiteren können materialspezifische Eigenheiten wie Temperaturabhängigkeiten, isotroper oder orthotroper Aufbau und vieles mehr definiert werden. [9] Der Schritt „Geometrie festlegen“ beschäftigt sich im Wesentlichen mit dem Erstellen bzw. dem Import der Geometrie und der Aufbereitung des Simulationsobjekts im „DesignModeler“ (ANSYS). Komplexe Geometrien, wie Turbinenrotoren, Wellensträngen oder andere aufwendige Bauteile oder Baugruppen, werden als CAD-Daten in die Simulationssoftware importiert. Diese vorab erstellten Konstruktionsdaten können im „DesignModeler“ weiterbearbeitet und aufbereitet werden. Beispielsweise können Details, wie Rundungen, eingefügt oder gelöscht werden. Sehr häufig ist es im Rahmen der Modellbildung erforderlich Flächenaufbereitungen durchzuführen, da die Kontaktflächen zwischen zwei Bauteilen einer importierten Baugruppe möglicherweise nicht übereinstimmen können. Der Grund hierfür liegt in den verwendeten Exportgeometrien und –dateiformaten, die gewisse Toleranzen aufweisen. Dabei werden die betreffenden Flächen im „DesignModeler“ so geteilt, dass die Kontaktflächen der Bauteile genau übereinstimmen. [9]

Bei der „Definition Teilverhalten“ kann gewählt werden, wie die Körper betrachtet werden sollen, ob sie eine kontinuierliche Massenverteilung besitzen oder ob die Bauteile als Punktmassen angenähert werden.

Der Schritt „Definition Verbindungen“ ist nur bei der Simulation von Baugruppen erforderlich. Dabei ist es notwendig die Kontaktbedingungen zwischen den einzelnen Systemkomponenten zu definieren. Hier gibt es unterschiedliche Möglichkeiten der Kontaktbedingungen, z.B. „Bonded“ ist eine starre Verbindung zwischen den einzelnen Elementen, „frictionless“ ist ein reibungsfreier Kontakt und „frictional“ ein reibungsbehafteter Kontakt. Die unterschiedlichen Kontaktbedingungen und die damit verbundenen

Bewegungsmöglichkeiten haben einen wesentlichen Einfluss auf die Lösung der Modalanalyse, da die Steifigkeiten der Kontaktstellen und auftretenden Dämpfungseffekte in die Lösung miteinbezogen werden. Für die genaue Definition und Arten der Kontaktbedingungen wird auf ANSYS [12] verwiesen.

Der letzte Abschnitt der Modellbildung „Rechengitter erstellen“ befasst sich mit dem Vernetzen der Geometrie. Dabei sei angemerkt, dass sich das Vorgehen nicht wesentlich zu anderen Analysetypen unterscheidet. Bei der Definition der Netzparameter kann eine Vielzahl von unterschiedlichen Einstellungen getroffen werden. Hier wird nur ein kurzer Überblick über einige wichtige gegeben. Anfangs ist zu wählen mit welcher Vernetzungsmethode vorgegangen wird. Häufig wird die „Hex Dominant“-Methode verwendet, d.h. es werden hauptsächlich rechteckige Elemente und nur in Ausnahmefällen dreieckige Elemente verwendet. Als einer der wesentlichsten Schritte kann die Definition der Netzelementgröße angesehen werden. Dabei lässt sich die Kantenlänge der Elemente eingeben und es können im selben Punkt auch lokale Verfeinerungen des Gitters durchgeführt werden. Besonders bei Bauteilkontakten, die mit Kontaktbedingungen versehen sind, wird empfohlen, ein sogenanntes „Mapped Surface“ anzuwenden. Dabei orientiert sich das Gitter des einen Bauteils am Gitter des anderen, das führt dazu, dass die Knotenpunkte der Bauteilgitter übereinstimmen. [9]

3.2.3.3 Lösung

Im Rahmen des Abschnitts wird auf das Vorgehen bei der Vorbereitung und Durchführung der Modalanalyse eingegangen. Dabei liegt der Fokus auf den Solvereinstellungen, den Randbedingungen und Lasten als Grundlage für den Lösungsvorgang. Das mathematische Vorgehen des Solvers wird in einem späteren Abschnitt behandelt. In Abbildung 14 sind die Schritte, die zur Vorbereitung und Durchführung der Modalanalyse erforderlich sind, dargestellt.

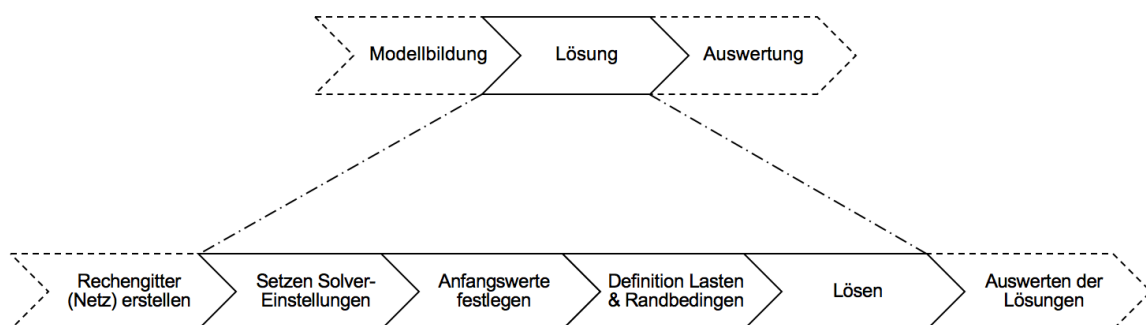


Abbildung 14: Lösung [9]

Beim Setzen der Solvereinstellungen ist es einerseits erforderlich, dem System vorzugeben wie viele Modes bzw. bis zu welcher Frequenz (Abbruchbedingung) die Eigenfrequenzen der zu untersuchenden Struktur ermittelt werden und andererseits, welcher Solver verwendet wird. Dabei kann gewählt werden, ob das System als gedämpft oder als ungedämpft betrachtet werden soll. Je nach Auswahl schalten sich unterschiedliche Zusatzoptionen frei. Als Standardeinstellungen werden bei ANSYS die ersten sechs Eigenfrequenzen gelöst und das System wird als ungedämpft betrachtet. Ferner ist es möglich, für den jeweiligen Anwendungszweck unterschiedliche Solver, auf die im Abschnitt 3.2.3.5 näher eingegangen wird, auszuwählen. Standardmäßig ist bei ANSYS die automatische Solverauswahl aktiviert. Dabei wählt die Software den für das Problem passenden Solver selbständig aus. Durch weitere Einstellung lässt sich die Solverauswahl hierbei einschränken. Beispielhaft kann eingestellt werden, dass die Lösung iterativ oder direkt gesucht werden soll. Häufig wird aber keinerlei Einstellung getroffen und die Standardeinstellung „Program controlled“ wird verwendet. [9]

Im Punkt „Anfangswerte festlegen“ wird ausgewählt, welcher Typ von Analyse durchgeführt wird. Sehr häufig wird dabei der Typ „Static Structural Analysis“ gewählt. Somit können Belastungen, wie z.B. Zentrifugalkräfte, die auf die Struktur wirken, berücksichtigt werden. [9]

Der Abschnitt „Definition Lasten & Randbedingungen“ ist erforderlich, um die Position bzw. die Einspannungsbedingungen des betrachteten Systems zu definieren. Als Lasten werden bei der Modalanalyse nicht äußere Belastungen angesehen, sondern nur Rotationsgeschwindigkeiten, die somit zu einer Fliehkraftwirkung führen. Bei der Modalanalyse ist es nicht zwingend erforderlich, dass Randbedingungen definiert werden. Lediglich im Falle einer Last (Drehbewegung) ist es erforderlich, das Bauteil mit Randbedingungen zu versehen. Aus der Vielzahl unterschiedlicher Bedingungen sollte hier das „Remote Displacement“ (alle sechs räumlichen Freiheitsgrade lassen sich einzeln definieren), der „Cylindrical Support“ und der „Frictionless Support“ angeführt sein. Für die genaue Definition wird auf ANSYS [11] verwiesen.

Beim Lösungsvorgang werden aus den Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems (unendlich viele Freiheitsgrade) die Eigenfrequenzen und die Eigenwerte ermittelt. Dabei werden die Ergebnisse laufend im sogenannten „Log-File“ mitgeschrieben und können eingesehen werden. [9]

3.2.3.4 Auswertung

Im Rahmen dieses Abschnitts wird nur eine gängige Methode der Ergebnis-Auswertung näher erklärt. Dabei wird kurz auf die Visualisierung der Ergebnisse (Eigenformen) und die Erstellung eines Campbell-Diagramms (Vorausgesetzte dynamische Modalanalyse) eingegangen. In Abbildung 15 ist ein mögliches Vorgehen bei der Auswertung der Modalanalyse dargestellt.

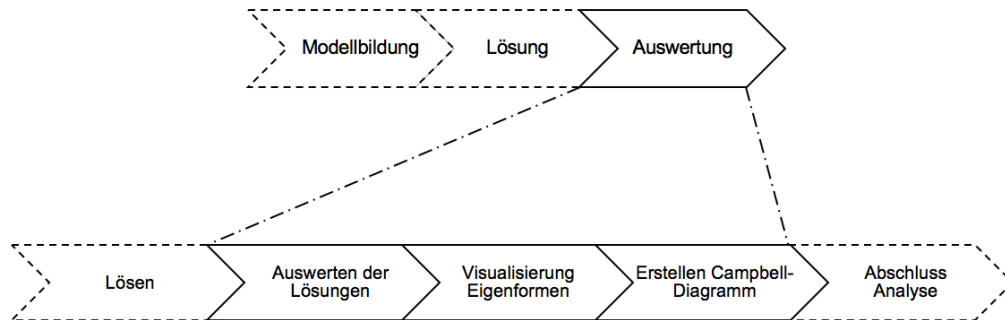


Abbildung 15: Auswertung [9]

Die Ergebnisse der Modalanalyse, d.h. die ermittelten Eigenfrequenzen, werden in ANSYS einerseits in einem Balkendiagramm und andererseits in Tabellenform dargestellt. Aus diesen Ergebnissen können mittels weniger Befehle die dazugehörigen Eigenformen visualisiert werden. Oftmals wird dabei die schwingungsbedingte Verschiebung der Struktur dargestellt. Im selben Befehlsmenü kann auch ein Campbell-Diagramm erzeugt werden, dazu muss aber bei der Modalanalyse eine Drehbewegung (mit unterschiedlichen Drehzahlen) berücksichtigt werden. [9]

3.2.3.5 Mathematisches Vorgehen des Solvers

Bei der numerischen Modalanalyse gibt es je nach Systemaufbau unterschiedliche Ansätze zur Lösung der zugrundeliegenden Eigenwertprobleme. Die dabei verwendeten Lösungsmechanismen werden im Allgemeinen als Solver bezeichnet. Je nach Aufbau ist zu unterscheiden ob das System als gedämpft oder ungedämpft betrachtet werden soll und ob die Matrizen der Bewegungsgleichungen symmetrisch oder unsymmetrisch besetzt sind. Dies erfordert bei der manuellen Wahl des geeigneten Solvers genaue Kenntnisse über die Systembeschaffenheit. Aus diesem Grund wird häufig die Wahl des Solvers für erste Untersuchungen der Simulationssoftware selbst überlassen und erst in späteren Phasen eine manuelle Solverwahl durchgeführt.

Aus den Bewegungsgleichungen folgen die Zusammenhänge für den ungedämpften Fall (Gl. 64) bzw. für den gedämpften Fall (Gl. 65), die durch den Solver gelöst werden müssen. Die Herleitung kann beispielhaft vom Mehrmassenschwinger übernommen werden. Dabei ist \underline{K} die Steifigkeitsmatrix, \underline{M} die Massenmatrix und \underline{C} für den gedämpften Fall die Dämpfungsmatrix. $\underline{\psi}$ ist der gesuchte Eigenvektor (Eigenform) und λ der Eigenwert. [10]

$$\left[-\lambda^2 \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right] \cdot \underline{\underline{\psi}} = 0 \quad (\text{Gl. 64})$$

$$\left[-\lambda^2 \cdot \underline{\underline{M}} + \lambda \cdot \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}}\right] \cdot \underline{\underline{\psi}} = 0 \quad (\text{Gl. 65})$$

Je nach Anwendungsfall, d.h. gedämpft oder ungedämpft und symmetrische bzw. unsymmetrische Matrizen, werden unterschiedliche Solver verwendet. In Tabelle 1 sind die in ANSYS implementierten Solver samt ihren Einsatzzwecken angeführt.

Tabelle 1: Solvertypen [10]

Bezeichnung	Verwendung	Dämpfung
Supernode	Symmetrische Matrizen	ungedämpft
Block Lanczos	Symmetrische Matrizen	ungedämpft
PCG Lanczos	Symmetrische Matrizen	ungedämpft
Subspace	Symmetrische Matrizen	ungedämpft
Unsymmetric	Unsymmetrische Matrizen	ungedämpft
Damped	Symmetrische oder unsymmetrische gedämpfte Systeme	gedämpft
QR Damped	Symmetrische oder unsymmetrische gedämpfte Systeme	gedämpft

Im Nachfolgenden wird dabei ein gedämpftes System näher betrachtet. Durch den Einfluss der Dämpfung kommt es zu einem quadratischen Eigenwertproblem, wie in (Gl. 65) dargestellt. Die Eigenwerte ergeben sich somit, wie schon beim Mehrmassenschwinger in Form von (Gl. 66). [10]

$$\lambda = -\delta \pm i \cdot \omega_d \quad (\text{Gl. 66})$$

Löst man das Gleichungssystem in dieser Form, so ist die Lösungsvariante sehr zeitintensive, da die Gleichungen des Systems gekoppelt sind und somit vollständig gelöst werden müssten. Aus diesem Grund arbeiten die in ANSYS implementierten Solver nach dem in Abschnitt 3.2.2.3 erklärten Prinzip der modalen Transformation. Dabei sollen alle Matrizen des Gleichungssystem diagonalisiert und somit entkoppelt werden. Dies kann jedoch bei unsymmetrischen Matrizen zu Problemen führen, da sich diese nicht mehr wie in Abschnitt 3.2.2 gezeigt, in Diagonalmatrizen überführen lassen. Insbesondere bei gedämpften Systemen ist die Dämpfungsmatrix $\underline{\underline{C}}$ nicht zwingend symmetrisch. Es ist erforderlich, dass einige der Solver in der Lage sein müssen, Gleichungssysteme mit symmetrischen als auch unsymmetrischen Matrizen lösen zu können. Im Folgenden wird der „QR Damped“ Solver herausgegriffen und das Vorgehen bei der Lösung näher erklärt. [37]

Die Lösung ist dabei sehr stark an den Abschnitt 0 angelehnt, dennoch unterscheidet sich der „QR Damped“ Solver von dem gezeigten, da sowohl die Steifigkeitsmatrix \underline{K} als auch die Dämpfungsmatrix \underline{C} unsymmetrisch sein können. Des Weiteren wird hier nicht die Bequemlichkeitshypothese zur Umschreibung der Dämpfungsmatrix verwendet, sondern das Prinzip der modalen Dämpfung, welches nachfolgend noch näher erklärt wird. [37]

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{C} \cdot \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{x}(t) = \underline{0} \quad (\text{Gl. 67})$$

$$\underline{x} = \underline{\phi} \cdot \underline{q} \quad (\text{Gl. 68})$$

$$\underline{\phi}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\phi} \cdot \ddot{\underline{q}} + \underline{\phi}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\phi} \cdot \dot{\underline{q}} + \left[\underline{\phi}^T \cdot \underline{K}_{sym} \cdot \underline{\phi} + \underline{\phi}^T \cdot \underline{K}_{unsym} \cdot \underline{\phi} \right] \cdot \underline{q} = \underline{0} \quad (\text{Gl. 69})$$

$$\underline{\phi}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\phi} = \begin{bmatrix} 2D_1\omega_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2D_{N_{SYS}}\omega_{N_{SYS}} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 70})$$

Ausgehend von der in (Gl. 67) dargestellten Bewegungsgleichung wird die modale Transformation durchgeführt. Dabei wird analog zu Abschnitt 0 mit dem in (Gl. 68) angeführten Ansatz die Koordinatentransformation in den modalen Raum durchgeführt.

Da jedoch die Steifigkeitsmatrix \underline{K} nicht diagonal besetzt ist, wird hier ein Zwischenschritt eingefügt und diese Matrix in einen symmetrischen \underline{K}_{sym} sowie den verbleibenden unsymmetrischen \underline{K}_{unsym} Anteil aufgeteilt. Somit kann der symmetrische Anteil sehr einfach diagonalisiert werden. Auch der unsymmetrische Teil wird in den modalen Raum übergeführt. Somit vereinfacht sich die Lösung des Problems enorm, da nicht mehr alle Gleichungen miteinander gekoppelt sind, sondern nur mehr einige wenige. [37]

Die Dämpfungsmatrix wird hier nach dem Prinzip der modalen Dämpfung diagonalisiert. Dabei sind die Diagonaleinträge der umgeformten Matrix $2D_i\omega_i$, die somit vom Dämpfungsgrad D_i und der Eigenkreisfrequenz ω_i des i-ten Mode abhängen. Der Dämpfungsgrad muss dabei so bestimmt werden, dass er möglichst gut die Realität abbildet. (Gl. 70) zeigt die diagonalisierte Form der Dämpfung. [37]

Durch die beiden Annahmen bzw. Umformungen gelangt man zu der in (Gl. 69) dargestellten Form, bei der die Differentialgleichungen fast vollständig entkoppelt sind. Somit ist es möglich, die Gleichungen mit einem Differentialgleichungsalgorithmus zeiteffizient zu lösen.

3.3 Kontinuumsschwinger

Wie schon erwähnt sollen bei der Modalanalyse die modalen Parameter eines Systems ermittelt werden. Dazu zählen zum Beispiel die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Eigenformen. Die in der Technik betrachteten Systeme können je nach Art in Einmassenschwinger, Mehrmassenschwinger und Kontinuumsschwinger eingeteilt werden. Ein schwingungsfähiges System hat genau so viele Eigenfrequenzen und somit Eigenformen wie es Freiheitsgrade besitzt. So hat ein Einmassenschwinger einen Freiheitsgrad, ein Mehrmassenschwinger mit N_{SYS} Einzelmassen hat N_{SYS} Freiheitsgrade (offene Mehrmassenschwinger $N_{\text{SYS}}-1$ Freiheitsgrade) und ein Kontinuumsschwinger besitzt aufgrund seiner unendlich vielen Freiheitsgrade unendlich viele Eigenfrequenzen. [13]

In diesem Kapitel liegt der Fokus auf der Herleitung und Lösung der Bewegungsgleichungen. Vieles baut auf den in Abschnitt 3.2.2 hergeleiteten Zusammenhängen der Ein- und Mehrmassenschwinger auf, die hier als bekannt angenommen werden. Im folgenden Abschnitt wird auf einen Balken, Scheiben und Platten sowie „bladed Disks“ eingegangen. Für Scheiben sowie „bladed Disks“ erfolgt im Rahmen dieses Abschnitts keine Herleitung der Gleichungen.

3.3.1 Allgemeines zu Eigenformen

Im Gegensatz zu den Eigenformen der Ein- und Mehrmassenschwinger treten bei Kontinuumsschwingern Biege- und Torsionseigenformen sowie Mischformen der beiden auf. Somit gibt es die Möglichkeit die Eigenformen hinsichtlich der Schwingungsform (Biege- oder Torsionsschwingung bzw. Mischformen) zu charakterisieren. Je nach Bauteil können die sich dabei ausbildenden Eigenformen mit der Anzahl von Knotenpunkten und Knotenlinien genau beschrieben werden. Bei komplexen schwingungsfähigen Systemen (z.B. Turbinenrotor) ist es ferner noch möglich die Eigenformen hinsichtlich der dominanten Systemkomponente zu unterteilen. Bei dem beispielhaft angeführten Turbinenrotor würde man im Wesentlichen zwischen scheidendominanten, also die Schwingungen des Grundkörpers dominieren, und schaufeldominanten, d.h. die Schwingungen der Beschaukelung dominieren, Moden unterscheiden können. [18]

3.3.2 Balken

In diesem Abschnitt wird auf den Balken als Kontinuumsschwinger eingegangen. Dazu wird die Herleitung der Bewegungsgleichung sowie deren Lösung näher behandelt. In späterer Folge wird von den gewonnenen Erkenntnissen auf den Balken mit Fliehkrafteinfluss übergeleitet.

Ein Balken stellt ein schwingungsfähiges System mit unendlich vielen Freiheitsgraden dar. Ein dreidimensionaler Balken besitzt eine definierte Querschnittsfläche und eine über die Form und den Werkstoff definierte Biege- sowie Torsionssteifigkeit. Bei einem solchen Balken können Biegeschwingungen um die Hoch- oder die Querachse sowie Torsionsschwingungen um die Längsachse auftreten. [38]

3.3.2.1 Bernoulli-Euler-Balken

Nachfolgend wird die ungedämpfte Biegeschwingung eines Bernoulli-Euler-Balkens näher betrachtet und die zur Ermittlung der Eigenfrequenzen und Eigenformen benötigten Gleichungen, angelehnt an Marn [8] und Müller [39], hergeleitet. In Abbildung 16 ist ein differentiell kleines Element des betrachteten Biegebalkens dargestellt. Für die folgende Herleitung wird angenommen, dass die Durchbiegungen sowie die Neigungen als sehr klein zu betrachten sind. Dies ist erforderlich, um das zu lösende Problem vereinfachen und linearisieren zu können. Des Weiteren wird angenommen, dass der Querschnitt A des Balkens konstant ist.

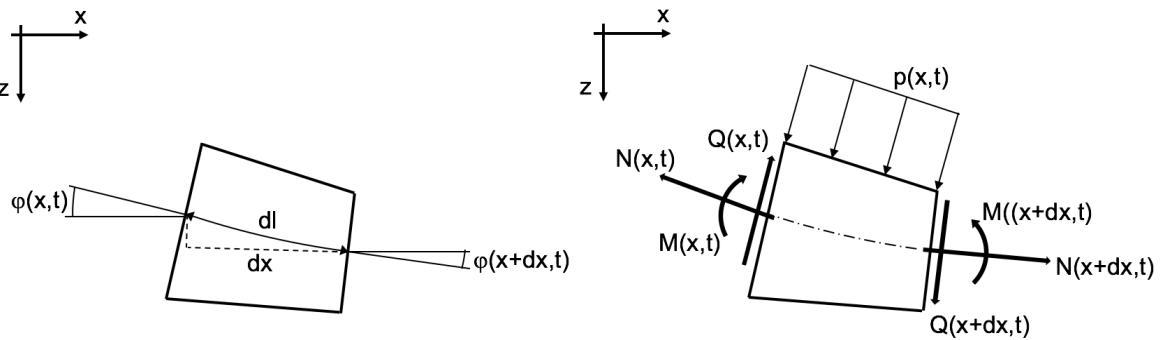


Abbildung 16: Balkenelement [8]

Das differentiell kleine Balkenelement wird freigeschnitten und der Impulssatz in z -Richtung angesetzt. Der in (Gl. 71) angeführte Impulssatz für das Balkenelement (Abbildung 16) dient zur späteren Bestimmung der Bewegungsgleichung. Dabei ist Q die Querkraft, N die Normalkraft und M das Moment. Es handelt sich dabei um innere Kräfte und Momente, die sich durch das Herauslösen des Balkenelements ergeben. Die externe Last $p(x, t)$ ist eine orts- sowie zeitabhängige Streckenlast, die auf das Balkenelement wirkt. ρ ist die Dichte des Balkenwerkstoffs, A die konstante Querschnittsfläche, dl die Länge des Balkenelements und w die Durchbiegung. Zudem lassen sich die Dichte ρ und die Querschnittsfläche A wie in (Gl. 72) zu einer längenbezogenen Masse m' zusammenfassen.

$$\rho \cdot A \cdot dl \cdot \ddot{w} = -Q(x, t) \cdot \cos(\varphi(x, t)) + Q(x + dx, t) \cdot \cos(\varphi(x + dx, t)) - N(x, t) \cdot \sin(\varphi(x, t)) + N(x + dx, t) \cdot \sin(\varphi(x + dx, t)) + p(x, t) \cdot dl \cdot \cos(\varphi(x, t)) \quad (\text{Gl. 71})$$

$$m' = \rho \cdot A \quad (\text{Gl. 72})$$

Da angenommen wurde, dass die Durchbiegungen als auch die Neigungen sehr klein sind, ist es möglich, die Gleichung zu linearisieren. Zudem wird angenommen, dass die Änderung der Normalkräfte vernachlässigbar ist. In den nachfolgenden Gleichungen (Gl. 73) bis (Gl. 77) sind die durchgeführten Linearisierungen bzw. Vereinfachungen dargestellt.

$$\varphi \ll 1 \quad (\text{Gl. 73})$$

$$\cos(\varphi) \approx 1 \quad \text{bzw.} \quad \cos(\varphi + d\varphi) \approx 1 \quad (\text{Gl. 74})$$

$$dl = \frac{dx}{\cos(\varphi)} = dx \quad (\text{Gl. 75})$$

$$-N(x, t) + N(x + dx, t) = 0 \quad (\text{Gl. 76})$$

$$-Q(x, t) + Q(x + dx, t) = -Q(x, t) + Q(x, t) + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \quad (\text{Gl. 77})$$

Aufgrund der kleinen Winkel können die Winkelfunktionen, wie in (Gl. 74) dargestellt, linearisiert werden. Somit ergibt sich, dass die Länge des Balkenelements dl der Länge dx in x-Richtung entspricht. Die Änderung der Querkräfte über das Balkenelement kann durch eine Taylor-Reihenentwicklung dargestellt werden. Dazu wurden in (Gl. 77) die Terme höherer Ordnung vernachlässigt.

Somit vereinfacht sich der in (Gl. 71) angesetzte Impulssatz auf die Form von (Gl. 78). Formt man diese Gleichung nun weiter um und stellt die zeitliche Ableitung der Durchbiegung anders dar, ergibt sich die in (Gl. 79) dargestellte Form.

$$m' \cdot dx \cdot \ddot{w} = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx + p(x, t) \cdot dx \quad (\text{Gl. 78})$$

$$m' \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + p(x, t) \quad (\text{Gl. 79})$$

Die erhaltene Gleichung (Gl. 79) kann weiter vereinfacht bzw. umgeformt werden. Dazu werden Zusammenhänge für die Querkraft und das Biegemoment herangezogen, die aus der Herleitung der Biegelinie eines Balkens stammen. Wie diese Zusammenhänge zustande kommen, wird hier nicht näher erläutert. Dazu wird auf Dubbel [13] oder andere technische Taschenbücher verwiesen. Anhand der Zusammenhänge zwischen Biegemoment, Querkraft und der Durchbiegung bzw. ihrer Ableitungen folgen die beiden Gleichungen (Gl. 80) und (Gl. 81). Unter Verwendung dieser kann in (Gl. 79) die Querkraftänderung mit dem in (Gl. 82) dargestellten Zusammenhang umschrieben werden.

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (\text{Gl. 80})$$

$$M(x) = -E \cdot I \cdot w'' \quad (\text{Gl. 81})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -E \cdot I \cdot w^{IV} = -E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (\text{Gl. 82})$$

Setzt man (Gl. 82) nun in (Gl. 79) ein und bringt diesen Term auf die linke Seite, so ergibt sich die Bewegungsgleichung des Balkens in Form von (Gl. 83). Dieser Zusammenhang ist für die Biegeschwingung des Balkens gültig. Anhand von (Gl. 83) ist der wesentliche Unterschied zu den Ein- und Mehrmassenschwingern ersichtlich. Die Bewegungsgleichung beinhaltet sowohl zeitliche als auch örtliche Ableitungen. Dies stellt besonders bei der späteren Lösung einen Unterschied bei dem zu wählenden Ansatz dar.

$$m' \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x, t) \quad (\text{Gl. 83})$$

Die erhaltene Bewegungsgleichung ist eine inhomogene partielle Differentialgleichung, die erfordert, zuerst die homogene Lösung und in weiterer Folge die partikuläre Lösung zu finden. Darauf wird in den nachfolgenden Schritten eingegangen.

Bei der homogenen Lösung verschwindet die externe Last $p(x, t)$ aus der Bewegungsgleichung. Die somit zu lösende partielle Differentialgleichung ergibt sich in Form von (Gl. 84). Um diese nun lösen zu können ist ein geeigneter Ansatz erforderlich. Hier wird der in (Gl. 85) dargestellte Separationsansatz nach Bernoulli gewählt, abgeleitet und in (Gl. 86) eingesetzt. Nach dem Trennen der Variablen ergibt sich somit der in (Gl. 86) angeführte Zusammenhang.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (\text{Gl. 84})$$

$$w(x, t) = \psi(x) \cdot T(t) \quad (\text{Gl. 85})$$

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = -\omega^2 \quad (\text{Gl. 86})$$

Die Gleichung (Gl. 86) ist nur dann erfüllt, wenn beide Terme konstant sind, da eine Variation von t auf der linken Seite zu keiner Änderung des von x abhängigen Terms auf der rechten Seite führt und umgekehrt. Somit kann angenommen werden, dass jeder Term gleich der Konstante $-\omega^2$ sein muss.

Durch den gewählten Ansatz und der Gegebenheit, dass beide Terme konstant sein müssen, ergeben sich somit zwei gewöhnliche und voneinander unabhängige Differentialgleichungen. Dabei ist (Gl. 87) nur von der Zeit t abhängig und (Gl. 88) nur von der Position x . Diese beiden Gleichungen lassen sich somit unabhängig voneinander lösen.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 \cdot T = 0 \quad (\text{Gl. 87})$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \frac{m'}{E \cdot I} \cdot \omega^2 \cdot \psi = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \beta^4 \cdot \psi = 0 \quad (\text{Gl. 88})$$

$$\beta^4 = \frac{m'}{E \cdot I} \cdot \omega^2 \quad (\text{Gl. 89})$$

Damit die erhaltenen Lösungen übersichtlicher sind, wurden die konstanten Koeffizienten in (Gl. 88) anhand von (Gl. 89) zu einem neuen Koeffizienten β^4 zusammengefasst. Zur Lösung der Differentialgleichungen wurden Exponentialansätze analog zu den Ein- und Mehrmassenschwingern verwendet. Die sich ergebenden Lösungen sind in (Gl. 90) und (Gl. 91) dargestellt.

$$T(t) = B_1 \cdot \cos(\omega t) + B_2 \cdot \sin(\omega t) \quad (\text{Gl. 90})$$

$$\psi(x) = A_1 \cdot \cos(\beta x) + A_2 \cdot \sin(\beta x) + A_3 \cdot \cosh(\beta x) + A_4 \cdot \sinh(\beta x) \quad (\text{Gl. 91})$$

Wählt man nun geeignete Randbedingungen (z.B. einseitig eingespannter Biegebalken) und Anfangsbedingungen, so können die Eigenfunktionen $\psi(x)$ und Eigenfrequenzen bestimmt werden. Die Eigenfunktionen entsprechen den Eigenformen des Balkens und können bis auf eine Konstante bestimmt werden. Setzt man die Lösungen der beiden Differentialgleichungen (Gl. 90) und (Gl. 91) in den Ansatz aus (Gl. 85) ein, so erhält man die Lösung (Gl. 92) der homogenen Differentialgleichung.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} \cdot \cos(\beta_n x) + A_{2n} \cdot \sin(\beta_n x) + A_{3n} \cdot \cosh(\beta_n x) + A_{4n} \cdot \sinh(\beta_n x)] [B_{1n} \cdot \cos(\omega_n t) + B_{2n} \cdot \sin(\omega_n t)] \quad (\text{Gl. 92})$$

Für die Eigenformen des Biegebalkens muss wieder die Orthogonalitätsbeziehung gelten, d.h. eine Eigenform kann ohne Energieaustausch mit anderen Eigenformen schwingen. Dies lässt sich anhand der beiden Gleichungen (Gl. 93) und (Gl. 94) erkennen.

$$\int_0^L \rho \cdot A \cdot \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m_r & i = j \end{cases} \quad (\text{Gl. 93})$$

$$\int_0^L E \cdot I \cdot \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_r & i = j \end{cases} \quad (\text{Gl. 94})$$

Geht man nun von der homogenen zur partikulären Lösung über, ist für diesen Fall die in (Gl. 83) angeführte Bewegungsgleichung vollumfänglich gültig. Die externe und zeitlich veränderliche Last $p(x, t)$, hier eine Streckenlast, führt zu einer erzwungenen Schwingung des Balkens. Um die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, gibt es unterschiedlichste Vorgehensweisen. Eine Möglichkeit stellt wiederum die modale Transformation dar, die bereits beim Mehrmassenschwinger behandelt wurde. Für die nachfolgende Herleitung wird angenommen, dass es sich bei der zeitlich veränderlichen Streckenlast um eine harmonische Funktion, wie in (Gl. 95), handelt. Da diese Funktion ausschlaggebend für den Störgliedansatz ist, konnte dieser, wie in (Gl. 96), gewählt werden. $\hat{p}(x)$ ist dabei die örtlich abhängige Amplitude der Anregung bzw. der externen Last und $\hat{w}(x)$ ist die Amplitude der Schwingung. Setzt man die Anregung sowie den Ansatz samt den nötigen Ableitungen in die Bewegungsgleichung (Gl. 83) ein, erhält man die Amplitudengleichung des Kontinuumsschwingers.

$$p(x, t) = \hat{p}(x) \cdot \cos(\Omega \cdot t) \quad (\text{Gl. 95})$$

$$w(x, t) = \hat{w}(x) \cdot \cos(\Omega \cdot t) \quad (\text{Gl. 96})$$

$$-m' \cdot \Omega^2 \cdot \hat{w}(x) + E \cdot I \cdot \hat{w}^{IV}(x) = \hat{p}(x) \quad (\text{Gl. 97})$$

Um die erhaltene Differentialgleichung (Gl. 97) zu lösen wird die modale Transformation angewendet. Dazu ist es erforderlich, die Koordinatentransformation vom dreidimensionalen Raum in den modalen Raum durchzuführen. Hierzu wird der in (Gl. 98) angeführte modale Ansatz gewählt. q_i ist dabei die modale Koordinate und $\psi_i(x)$ die aus der homogenen Lösung bekannte Eigenfunktion. Dieser Schritt wird auch als Entwicklung nach Eigenfunktionen (Eigenform) bezeichnet. Analog lässt sich auch die externe Last anhand der Eigenfunktionen mittels eines geeigneten Ansatzes, wie in (Gl. 99), entwickeln. Dabei ist p_i die sogenannte modale Last und $\psi_i(x)$ wiederum die Eigenfunktion.

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \cdot \psi_i(x) \quad (\text{Gl. 98})$$

$$\hat{p}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \psi_i(x) \quad (\text{Gl. 99})$$

Setzt man die beiden Ansätze (Gl. 98) und (Gl. 99) in die Amplitudengleichung (Gl. 97) ein, so ergibt sich die in (Gl. 100) dargestellte Gleichung. Durch den Zusammenhang aus (Gl. 101) vereinfacht sich die Gleichung weiter auf die in (Gl. 102) dargestellte Form.

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i \cdot \left[-m' \cdot \Omega^2 \cdot \psi_i(x) + E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 \psi_i(x)}{\partial x^4} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \psi_i(x) \quad (\text{Gl. 100})$$

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 \psi_i(x)}{\partial x^4} = m' \cdot \omega^2 \cdot \psi_i(x) \quad (\text{Gl. 101})$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i \cdot [-m' \cdot \Omega^2 + m' \cdot \omega_i^2] \cdot \psi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \psi_i(x) \quad (\text{Gl. 102})$$

Aus der in (Gl. 102) angeführten Gleichung lässt sich die modale Koordinate q_i berechnen. Dazu wird die Orthogonalitätsbeziehung und die damit verbundene Entkopplung der Eigenformen bzw. Frequenzen zur Anwendung gebracht. Dafür wird Gleichung (Gl. 103) mit einer Eigenfunktion z.B. $\psi_1(x)$ multipliziert. Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung fallen alle Terme aus der Gleichung heraus, deren Index nicht 1 ist. Formt man die sich ergebende Gleichung auf q_1 um, so ergibt sich die modale Koordinate für die erste Eigenfunktion. Dieser Schritt lässt sich analog für alle weiteren Eigenformen bzw. -funktionen wiederholen. Somit ergibt sich die verallgemeinerte modale Koordinate q_i in Form von (Gl. 104).

$$\begin{aligned} q_1 \cdot m' \cdot [\omega_1^2 - \Omega^2] \cdot \psi_1(x) + q_2 \cdot m' \cdot [\omega_2^2 - \Omega^2] \cdot \psi_2(x) + \dots \\ = p_1 \cdot \psi_1(x) + p_2 \cdot \psi_2(x) + \dots \end{aligned} \quad (\text{Gl. 103})$$

$$q_i = \frac{p_i}{m' \cdot [\omega_i^2 - \Omega^2]} \quad (\text{Gl. 104})$$

Anhand der Gleichung (Gl. 104) ist ersichtlich, dass die modalen Koordinaten q_i von der modalen Last p_i abhängig sind. Diese lässt sich basierend auf der Gleichung (Gl. 99) berechnen. Dabei wird (Gl. 99) mit dem Integral (Gl. 105) multipliziert. Somit ergibt sich die in (Gl. 108) dargestellte Gleichung. Diese entspricht wieder der Orthogonalitätsbeziehung, wobei g_i ein Skalierungsfaktor ist, der durch (Gl. 107) berechnet werden kann. Die modale Last kann somit in Form von (Gl. 108) geschrieben werden.

$$\int_0^L \psi_j(x) \cdot dx \quad (\text{Gl. 105})$$

$$\int_0^L \psi_j(x) \cdot \hat{p}(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L p_i \cdot \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ g_i p_i & i = j \end{cases} \quad (\text{Gl. 106})$$

$$g_i = \int_0^L \psi_i(x) \cdot \psi_i(x) \cdot dx \quad (\text{Gl. 107})$$

$$p_i = \frac{1}{g_i} \int_0^L \psi_i(x) \cdot \hat{p}(x) \cdot dx \quad (\text{Gl. 108})$$

Somit ist die modale Koordinate vollständig bestimmt. Um die Lösung der Differentialgleichung zu erhalten, ist es erforderlich, q_i zurück in den Ansatz (Gl. 98) einzusetzen. Dabei erhält man die Amplitudenfunktion $\hat{w}(x)$ der Schwingung. Setzt man dies weiter in den ursprünglich gewählten Ansatz (Gl. 96) ein, so erhält man die Lösung.

Durch diese Berechnung ist es somit möglich die Eigenformen des Biegebalkens zu bestimmen. In Abbildung 17 sind beispielhaft die ersten drei Biegeeigenformen um das kleine Widerstandsmoment dargestellt. Da es sich bei dem betrachteten einseitig eingespannten Biegebalken um einen Kontinuumsschwinger handelt, besitzt dieser unendlich viele Biegeeigenformen. Mit steigender Ordnung nimmt die Anzahl der Knoten zu. Die n -te Biegeeigenform besitzt n Knoten.

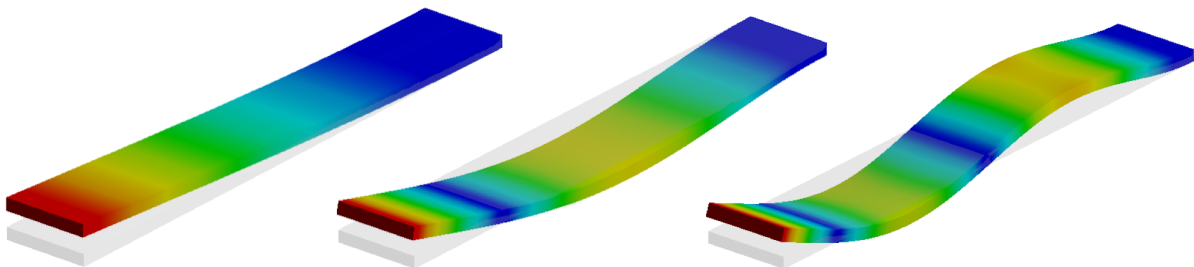


Abbildung 17: Biegeeigenformen eines Balkens [14]

Da es sich bei dem Balken um ein dreidimensionales Bauteil handelt, besitzt dieser nicht nur Eigenformen, wie in Abbildung 17 dargestellt, sondern auch Biegeeigenformen um das große Widerstandsmoment und Torsionseigenformen. Die Herleitung für die Biegeeigenformen um die zweite Hauptträgheitsachse geschieht analog zu der oben durchgeführten Herleitung. Für die Torsionsschwingungen müsste die Herleitung anhand der De-Saint-Venant-Balkentorsionstheorie bzw. dem Timoshenko-Balken erfolgen, auf die im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen wird.

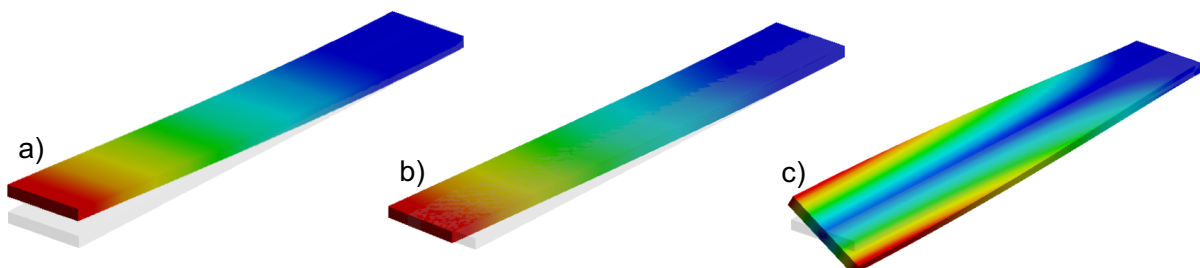


Abbildung 18: Balkeneigenformen [14]

In Abbildung 18 sind drei mögliche Eigenformtypen eines einseitig eingespannten Biegebalkens dargestellt. Neben den dargestellten Eigenformen existieren weitere für Längsschwingungen, diese wurden hier jedoch nicht betrachtet. Dabei ist in a) die erste Biegeeigenform um das kleine Widerstandsmoment, in b) die erste Biegeeigenform um das große Widerstandsmoment und in c) die erste Torsionseigenform dargestellt.

3.3.2.2 Balken mit Fliehkräfteinfluss

In diesem Abschnitt wird die Bewegungsgleichung für den Balken unter Fliehkräfteinfluss, angelehnt an Magnus, Popp, Sextro [15], hergeleitet. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Bernoulli-Euler-Balkentheorie, wie im vorangegangenen Kapitel, Gültigkeit besitzt und die Verformungen somit klein sind.

In Abbildung 19 ist der betrachtete Balken dargestellt. Dieser rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um das Wellenzentrum. Es wird angenommen, dass der Balken mit der Länge L über die gesamte Länge eine konstante Biegesteifigkeit EI sowie Querschnittsfläche A besitzt. Für die nachfolgende Betrachtung wird das körperfeste und somit mitrotierende Koordinatensystem x - y - z verwendet. Damit die Kraftwirkung aufgrund der Rotation sichtbar wird, wird der Impulssatz in z -Richtung an einem differentiell kleinen Balkenelement des verformten Balkens angesetzt. In Abbildung 19 ist das betrachtete freigeschnittene Balkenelement dargestellt.

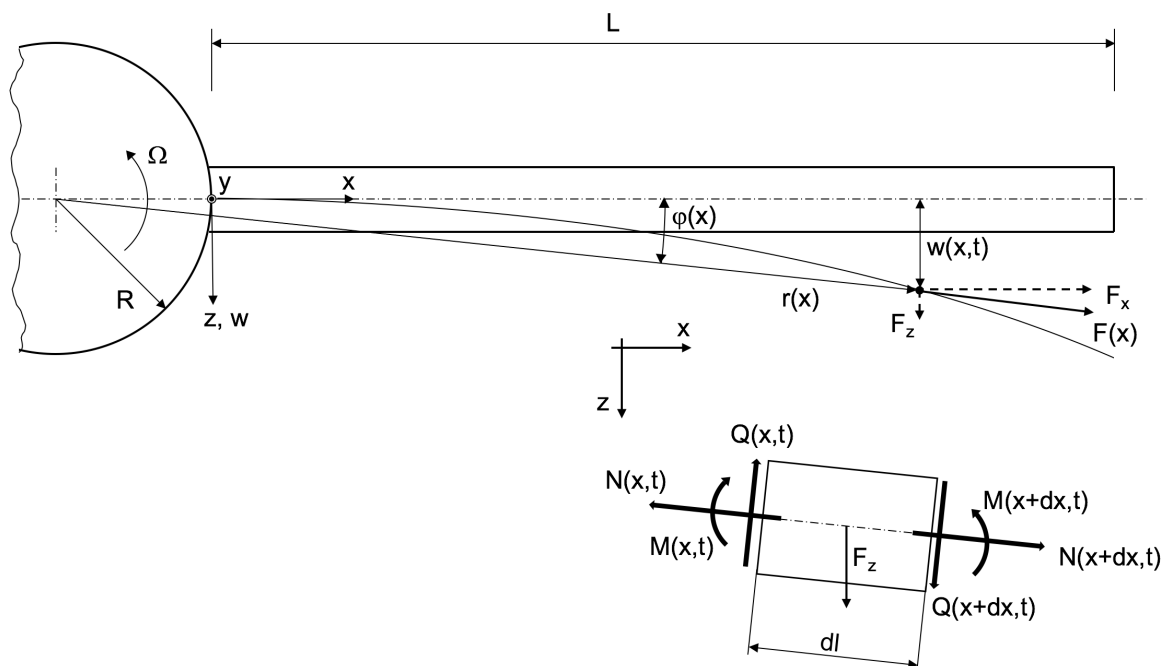


Abbildung 19: Schwingung eines Balkens unter Fliehkräfteinfluss [15]

In (Gl. 109) ist der aufgestellte Impulssatz für das Balkenelement ersichtlich. Bei den auftretenden Schnittreaktionen ist Q die Querkraft, N die Normalkraft und M das Moment, das auf das Balkenelement wirkt. F_z ist dabei die z -Komponente der auf das Balkenelement wirkenden Fliehkraft $F(x)$. ρ ist wiederum die Dichte des Balkenwerkstoffs, A der Balkenquerschnitt, dl die Länge des differentiellen Balkenelements und w die Durchbiegung.

$$\begin{aligned} \rho \cdot A \cdot dl \cdot \ddot{w} = & -Q(x, t) \cdot \cos(\varphi(x, t)) + Q(x + dx, t) \cdot \cos(\varphi(x + dx, t)) \\ & - N(x, t) \cdot \sin(\varphi(x, t)) + N(x + dx, t) \cdot \sin(\varphi(x + dx, t)) + F_z \end{aligned} \quad (\text{Gl. 109})$$

Die erhaltene Impulsgleichung lässt sich aufgrund der vorausgesetzten kleinen Verformungen bzw. Verschiebungen wiederum linearisieren. Dazu kommen wieder die bereits verwendeten Beziehungen (Gl. 74), (Gl. 75) und (Gl. 77) zum Einsatz. Durch die Änderung der Normalkräfte entlang des Balkens, bedingt durch die Fliehkraftwirkung können diese nicht vernachlässigt werden. Die Differenz der Normalkräfte lässt sich analog zur Querkraft einer Taylorreihen-Entwicklung darstellen. Die aufgrund des Fliehkrafteinflusses zusätzlich erforderlichen Beziehungen sind in (Gl. 110) und (Gl. 111) dargestellt.

$$\begin{aligned} & -N(x, t) \cdot \sin(\varphi(x, t)) + N(x + dx, t) \cdot \sin(\varphi(x + dx, t)) = \\ & = -N(x, t)w'(x, t) + N(x, t)w'(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(N(x, t) \cdot w'(x, t)) \cdot dx \end{aligned} \quad (\text{Gl. 110})$$

$$\sin(\varphi) \approx \varphi = w' \quad \text{bzw.} \quad \sin(\varphi + d\varphi) \approx \varphi = w' \quad (\text{Gl. 111})$$

Bis zu diesem Punkt wurden lediglich mathematische Linearisierungen vorgenommen. Die Fliehkraftwirkung und die dadurch bedingten Kräfte auf das Balkenelement wurden noch nicht näher betrachtet. Die in der Bewegungsgleichung (Gl. 109) enthaltene Fliehkraftkomponente F_z lässt sich wie in (Gl. 112) über die Fliehkraft F ausdrücken. Die Fliehkraft F errechnet sich dabei selbst über den in (Gl. 113) dargestellten Zusammenhang. Setzt man (Gl. 113) und den Zusammenhang für die Winkelfunktion (Gl. 114) ein, so ergibt sich für die Fliehkraftkomponente der in (Gl. 112) dargestellte Zusammenhang.

$$F_z = F \cdot \sin(\varphi) = m' \cdot dl \cdot w \cdot \Omega^2 \quad (\text{Gl. 112})$$

$$F = m' \cdot dl \cdot r(x) \cdot \Omega^2 \quad (\text{Gl. 113})$$

$$\sin(\varphi) = \frac{w}{r(x)} \quad (\text{Gl. 114})$$

Setzt man nun alle Linearisierungen und die Umschreibung für die Fliehkraftkomponente F_z in Gleichung (Gl. 109) ein und formt diese weiter um, so vereinfacht sich die Gleichung auf die in (Gl. 115) dargestellte Form.

$$m' \cdot \ddot{w}(x, t) = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(N(x, t) \cdot w'(x, t)) + m' \cdot w(x, t) \cdot \Omega^2 \quad (\text{Gl. 115})$$

In (Gl. 115) ist die Abhängigkeit von der Durchbiegung als auch der Quer- sowie Normalkraft ersichtlich. Die Querkraft kann nun durch den bereits bekannten Zusammenhang aus (Gl. 82) und die Normalkraft mit der in (Gl. 116) dargestellten Beziehung ersetzt werden. Diese folgt aus dem Kräftegleichgewicht für ein abgeschnittenes Balkenelement mit der Länge ($L-x$). Dabei steht die Fliehkraft mit der Normalkraft im Gleichgewicht.

$$N(x) = \int_x^L m' \cdot (R + x) \cdot \Omega^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot m' \cdot \Omega^2 \cdot (L - x) \cdot (2R + L + x) \quad (\text{Gl. 116})$$

Setzt man diese beiden Zusammenhänge nun in die Gleichung (Gl. 115) ein und bringt alle Terme auf eine Seite, so ergibt sich die Bewegungsgleichung in Form von (Gl. 117).

$$\ddot{w}(x, t) + \frac{EI}{m'} \cdot w^{IV}(x, t) - \Omega^2 \left[\int_x^L (R + x) \cdot dx \cdot w''(x, t) - (R + x) \cdot w'(x, t) + w(x, t) \right] = 0 \quad (\text{Gl. 117})$$

Für die Lösung der Bewegungsgleichung (Gl. 117) gibt es nur noch Näherungslösungen. Eine analytische Lösung, wie in den vorangegangenen Abschnitten ist hier nicht mehr möglich. Dabei zeigt sich, dass die Eigenfrequenzen mit steigender Drehzahl d.h. zunehmender Fliehkraft steigen. Dieser Effekt wird als „Stress Stiffening“ bzw. „Dynamic Stiffening“ bezeichnet. [15]

Der hier betrachtete Balken unter Fliehkrafteinfluss ist das einfachste Modell einer rotierenden Turbinenschaufel. [15] Da aufgrund der aerodynamischen Anforderungen Turbinenschaufeln sehr häufig in sich verwunden sind, kommt es zu zwei miteinander gekoppelten Differentialgleichungen. [16] Dabei kann ein weiterer Effekt auftreten, das sogenannte „Spin Softening“. Dabei nimmt die Eigenfrequenz bei steigender Drehzahl ab. Dafür gibt es mehrere Gründe. Einerseits längen sich die Schaufeln bzw. der Balken im Betrieb. Dies ist anhand von (Gl. 118) ersichtlich. Ein weiterer möglicher Grund ist die Entwindung von verwundenen Schaufeln, dadurch würde das Flächenträgheitsmoment I sinken und somit die Eigenfrequenz, wie in (Gl. 118) ersichtlich, abnehmen.

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{l^3 m}} \quad (\text{Gl. 118})$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3} \quad (\text{Gl. 119})$$

3.3.3 Scheiben und Platten

Im europäischen Sprachraum unterscheidet man zwischen Scheiben und Platten. Der wesentliche Unterschied besteht dabei in der Schwingungs- bzw. Belastungsebene. Dabei erfolgt keine Unterscheidung hinsichtlich der geometrischen Form. Im angloamerikanischen Sprachraum werden kreisrunde Scheiben und Platten generell nur als „Disk“ bezeichnet, dadurch kann nicht auf die Schwingungs- bzw. Belastungsebenen geschlossen werden. [16]

3.3.3.1 Scheiben

Scheiben führen die sogenannten „in-Plane“ Schwingungen infolge von Dehnungen und Scherungen parallel zu der Mittelebene aus. Dabei kommt es zu orts- und zeitabhängigen Verschiebungen in der Ebene. Die Belastung bzw. Anregung liegt dabei in der Mittelebene bzw. parallel dazu. [16] In Abbildung 20 ist eine rechteckige und eine kreisrunde Scheibe dargestellt. $p(x,y,t)$ ist dabei ein auf die Seitenfläche parallel zur Mittelebene wirkender orts- sowie zeitabhängiger Druck.

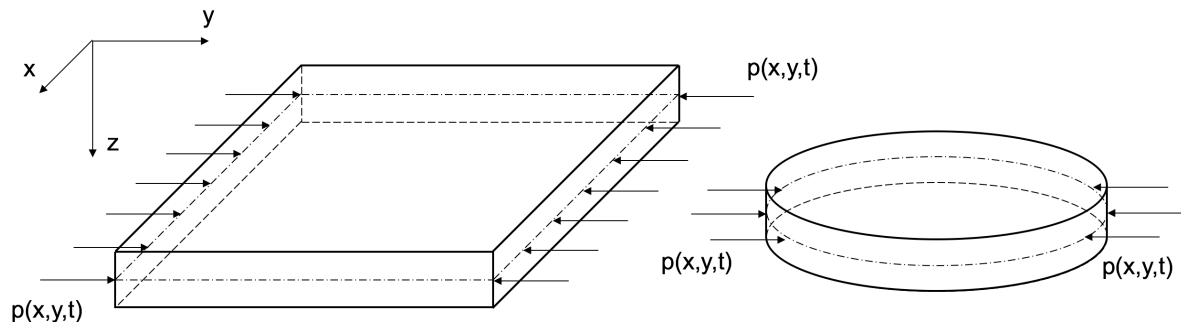


Abbildung 20: rechteckige und kreisrunde Scheibe

Auf die Herleitung der Bewegungsgleichung für Scheiben sowie deren Lösung dieser wird hier nicht näher eingegangen. Scheibenschwingungen spielen für diese Arbeit nur eine nachrangige Rolle.

3.3.3.2 Platten

Platten führen die sogenannten „out-of-Plane“-Schwingungen aufgrund von Scherkräften und Biegemomenten normal zur Mittelebene aus. Dabei kommt es zu orts- und zeitabhängigen Durchbiegungen. Die Belastung bzw. die Anregung liegt normal auf die Mittelebene. Auch bei der Platte ist $p(x,y,t)$ ein orts- und zeitabhängiger Druck, der normal auf die Oberfläche wirkt. [16] In Abbildung 21 ist eine rechteckige und kreisrunde Platte dargestellt.

Im nachfolgenden Abschnitt wird eine Zusammenfassung der Herleitung der Bewegungsgleichung sowie deren Lösungen angeführt. Aufgrund der Relevanz für diese Arbeit wird dabei der Sonderfall eines Turbinenrotors näher betrachtet. Für die genaue schrittweise Herleitung samt der Erklärung der einzelnen Schritte wird auf „Anhang B: Schwingung einer kreisrunden Platte“ verwiesen.

Die Herleitung der Bewegungsgleichung erfolgte angelehnt an Wandinger [40], die weitere Lösung der Bewegungsgleichung einer kreisrunden Platte wurde zusammen mit Herrn Dr. Marn erarbeitet.

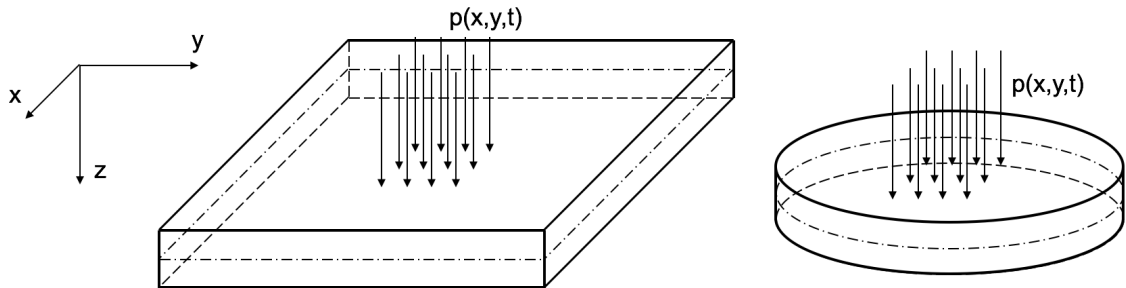


Abbildung 21: rechteckige und kreisrunde Platte [17]

In Abbildung 21 sind zwei mögliche Beispiele für eine Platte angeführt. Für die Herleitung der Bewegungsgleichung wird ein differentiell kleines rechteckiges Plattenelement herangezogen. Dazu wird im ersten Schritt das Plattenelement freigeschnitten und die Schnittkräfte sowie –momente angesetzt. In Abbildung 22 ist das freigeschnittene Plattenelement dargestellt. Die dicken Doppelpfeile symbolisieren dabei jeweils innere Momente, die einfachen Pfeile symbolisieren innere Kräfte. Die äußere Belastung, in Form eines Drucks, ist als dünner Pfeil dargestellt.

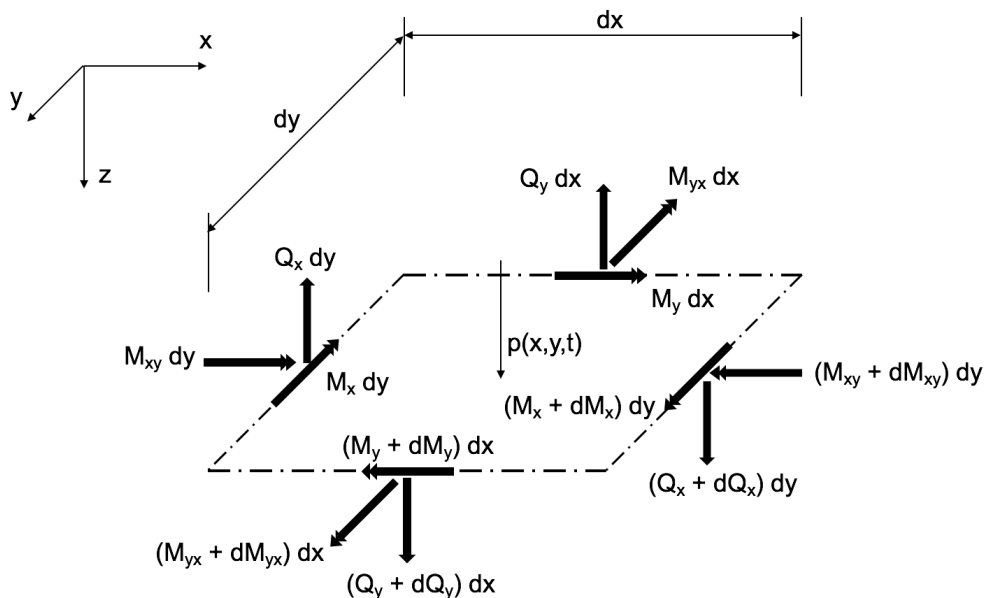


Abbildung 22: freigeschnittenes Plattenelement [40]

Das Kräfte- bzw. die Momentengleichgewichte lassen sich mit der Taylor-Reihenentwicklung, analog zu (Gl. 77), weiter vereinfachen. Setzt man nun die erhaltenen Ausdrücke aus den Momentengleichgewichten in das Kräftegleichgewicht ein, erhält man mit der Annahme $M_{xy} = M_{yx}$ die in (Gl. 120) dargestellte Differentialgleichung.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (\text{Gl. 120})$$

Diese Momentengleichung kann nun mit Hilfe der Kirchhoff'schen Plattentheorie und den Materialgesetzen zur Bewegungsgleichung übergeführt werden. Dazu ist es einerseits erforderlich die Verzerrungs-Verschiebungs-Bedingungen und andererseits die Spannungs-Verzerrungs-Bedingungen anzuwenden, um somit die Momente durch die auftretenden Verschiebungen auszudrücken. Das genaue Vorgehen sowie die dazu getroffenen Annahmen sind aus „Anhang B-1: Herleitung der Bewegungsgleichung einer Platte“ zu entnehmen. Somit folgt aus (Gl. 120) die in (Gl. 121) dargestellte Kirchhoff'sche Plattengleichung. Anhand dieser lässt sich die durch die äußere Last bedingte statische Durchbiegung der betrachteten Platte beschreiben.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{B} \quad (\text{Gl. 121})$$

Da man aber nicht an der statischen Durchbiegung, sondern an der zeitlich abhängigen Durchbiegung bzw. Bewegung interessiert ist, kann zu der Kirchhoff'schen Plattengleichung der in (Gl. 122) dargestellte d'Alembert'sche Trägheitsterm hinzugefügt werden. Dabei ist m'' eine Masse pro Flächeneinheit, die sich aus der Dichte und der Plattendicke zusammensetzt.

$$dF_T = -m'' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{Gl. 122})$$

Somit erhält man aus der Kirchhoff'schen Plattengleichung die in (Gl. 123) dargestellte Bewegungsgleichung der Platte. Dabei handelt es sich um eine inhomogene partielle Differentialgleichung. Die Gleichung (Gl. 123) lässt sich ferner auch in symbolischer Schreibweise mithilfe des Laplace-Operators anschreiben, somit folgt die in (Gl. 124) dargestellte Form der Bewegungsgleichung.

$$\frac{m''}{B} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y, t)}{B} \quad (\text{Gl. 123})$$

$$\frac{m''}{B} \cdot \ddot{w} + \Delta^2 w = \frac{p(x, y, t)}{B} \quad (\text{Gl. 124})$$

Der Vorteil der Darstellung in symbolischer Schreibweise liegt in der einfach möglichen Koordinatentransformation. Es ist möglich, dass statt des Laplace-Operators in kartesischen Koordinaten jener in Zylinderkoordinaten eingesetzt wird, ohne dass sich die Bewegungsgleichung ändert. Die Koordinatentransformation ist in (Gl. 125) dargestellt.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \xrightarrow{\text{Koordinaten-}} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{Gl. 125})$$

Im Nachfolgenden wird die Lösung für die in Abbildung 23 dargestellte kreisrunde Platte mit fest eingespannten Außenrand durchgeführt.

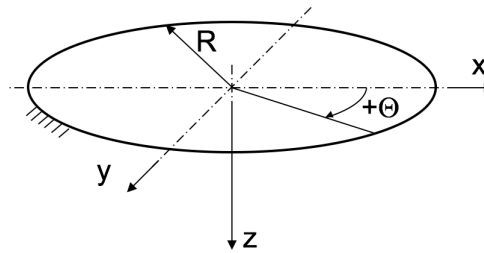


Abbildung 23: eingespannte kreisrunde Platte

Da es sich bei der zu lösenden Bewegungsgleichung um eine partielle inhomogene Differentialgleichung handelt, muss dazu zuerst die homogene Lösung und im Anschluss die partikuläre Lösung gesucht werden. Bei der homogenen Differentialgleichung verschwindet die Störfunktion auf der rechten Seite und somit ergibt sich die in (Gl. 126) dargestellte Bewegungsgleichung.

$$\frac{m''}{B} \cdot \ddot{w} + \Delta^2 w = 0 \quad (\text{Gl. 126})$$

$$w(r, \theta, t) = T(t) \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta) \quad (\text{Gl. 127})$$

Zur Lösung der partiellen homogenen Differentialgleichung in (Gl. 126) kann, analog zum Bernoulli-Euler-Balken, der in (Gl. 127) angeführte Separationsansatz verwendet werden. Dadurch ist es möglich, die unterschiedlichen Variablen zu trennen und die partielle Differentialgleichung in einzelne unabhängige Gleichungen überzuführen. In (Gl. 128) ist die Bewegungsgleichung mit bereits getrennten Variablen dargestellt. Diese kann nur erfüllt sein, wenn beide Seiten konstant und somit gleich einer Konstante $-\omega^2$ sind. Damit lässt sich (Gl. 128) in zwei getrennt lösbare Differentialgleichungen aufteilen, die in (Gl. 129) und (Gl. 130) angeführt sind.

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\frac{B}{m''} \cdot \frac{\Delta^2 \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta)}{\psi(r) \cdot \vartheta(\theta)} = -\omega^2 \quad (\text{Gl. 128})$$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 \cdot T(t) = 0 \quad (\text{Gl. 129})$$

$$\Delta^2 \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta) - \frac{B}{m''} \cdot \omega^2 \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta) = (\nabla^4 - \beta^4) \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 130})$$

Die beiden unabhängigen Differentialgleichungen lassen sich mittels Exponentialansätzen und den Bessel'schen Differentialgleichungen lösen. Der ausführliche Lösungsweg der Differentialgleichungen ist aus Abschnitt „Anhang B-3.1: Homogene Lösung“ zu entnehmen. Somit erhält man die allgemeine Lösung für eine kreisrunde Platte in Form von (Gl. 131).

$$\begin{aligned}
w(r, \theta, t) = & \{ [A_2 \cdot \cos(m\theta) + B_2 \cdot \sin(m\theta)] [A_3 \cdot I_m(\beta r) + B_3 \cdot K_m(\beta r)] \\
& + [A_5 \cdot J_m(\beta r) + B_5 \cdot Y_m(\beta r)] [A_4 \cdot \cos(m\theta) + B_4 \cdot \sin(m\theta)] \} \\
& \cdot [A_1 \cdot \cos(\omega t) + B_1 \cdot \sin(\omega t)]
\end{aligned} \tag{Gl. 131}$$

Die in (Gl. 131) angeführte Gleichung ist somit für alle Platten unabhängig von den Randbedingungen, gültig. Je nach Art der Platte und Randbedingungen vereinfacht sich die Gleichung weiter. Für die nachfolgende Betrachtung wird angenommen, dass es sich um eine kreisrunde Platte ohne zentrischer Bohrung handelt. Dies führt unter Zusammenfassung der Konstanten dazu, dass sich die Differentialgleichung in Form von (Gl. 132) ergibt.

$$\begin{aligned}
w(r, \theta, t) = & \{ [C_1 I_m(\beta r) + C_2 J_m(\beta r)] \cos(m\theta) + [C_3 I_m(\beta r) + C_4 J_m(\beta r)] \sin(m\theta) \} \\
& \cdot [A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)]
\end{aligned} \tag{Gl. 132}$$

Diese Gleichung ist für die kreisrunde Platte ohne zentrischer Bohrung allgemein gültig. Im Nachfolgenden wird die Platte als am Außenrand ($r = R$) fest eingespannt betrachtet. Daraus folgen die beiden in (Gl. 133) und (Gl. 134) dargestellten Randbedingungen für die Durchbiegung und die Neigung.

$$w(r = R, \theta, t) = 0 \tag{Gl. 133}$$

$$\left. \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \tag{Gl. 134}$$

Das Vorgehen zur weiteren Lösung mit den in (Gl. 133) und (Gl. 134) dargestellten Randbedingungen ist aus „Anhang B-3.1: Homogene Lösung“ zu entnehmen. Führt man diese Lösungsschritte durch, gelangt man zu der Lösung (Gl. 135) für die am Rand fest eingespannte Platte.

$$\begin{aligned}
w(r, \theta, t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_2 \cdot \left[I_m(\beta_{mn} r) - \frac{J_m(\beta_{mn} R)}{I_m(\beta_{mn} R)} \cdot J_m(\beta_{mn} r) \right] \cos(m\theta) \right. \\
& + C_4 \cdot \left[I_m(\beta_{mn} r) - \frac{J_m(\beta_{mn} R)}{I_m(\beta_{mn} R)} \cdot J_m(\beta_{mn} r) \right] \sin(m\theta) \left. \right\} \\
& \cdot [A_1 \cdot \cos(\omega_{mn} t) + B_1 \cdot \sin(\omega_{mn} t)]
\end{aligned} \tag{Gl. 135}$$

Betrachtet man diese Funktion gemeinsam mit „Anhang B-3.1: Homogene Lösung“ genauer, so lässt sich erkennen, dass radiale Nullstellen sowie Nullstellen in Umfangsrichtung auftreten. Die radialen Nulldurchgänge entsprechen den Nullstellen der Bessel'schen Funktionen I_m und J_m (radiale Eigenfunktionen). Diese stellen sich als Knotenkreise bzw. Nodal Circle in den Eigenformen dar. Die Nullstellen in Umfangsrichtung folgen aus den Nullstellen von $\cos(m\theta)$ und $\sin(m\theta)$. Diese stellen sich in den Eigenformen als Knotendurchmesser bzw. Nodal Diameter dar.

Diese Lösung lässt sich anhand der Funktionen $\cos(m\theta)$ bzw. $\sin(m\theta)$ in zwei Teile, die sogenannten Teileigenfunktionen, aufteilen, die jeweils eigenständige Lösungen der Bewegungsgleichung darstellen. Die beiden damit ermittelten Eigenformen besitzen durch die Winkelfunktionen eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2m}$. In Abbildung 24 sind die beiden aufgeteilten Eigenformen ersichtlich.

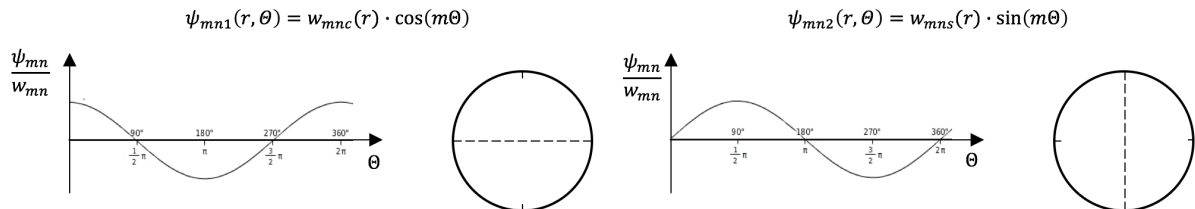


Abbildung 24: Eigenfunktionen und Eigenformen [44]

Da die homogene Lösung der Differentialgleichung nun bekannt ist, kann mit der partikulären Lösung fortgesetzt werden. Die genauen Schritte sind aus „Anhang B-3.2: Inhomogene Lösung der Differentialgleichung“ zu entnehmen. Um die inhomogene Lösung der Differentialgleichung zu finden, ist es zuerst erforderlich, die Störfunktion in der Bewegungsgleichung (Gl. 136) näher zu betrachten.

$$\frac{m''}{B} \cdot \ddot{w} + \Delta^2 w = \frac{p(x, y, t)}{B} \quad (\text{Gl. 136})$$

Die Form der Störfunktion beschreibt die Anregung der Platte. In dem hier betrachteten Fall sollen mehrere über den Umfang verteilte Kräfte auf die Struktur wirken. Im Speziellen wird hier der Fall betrachtet, dass ein Turbinenrotor durch die Rotor-Stator-Interaktion angeregt wird. Dabei können die Erregerkräfte nur direkt an den Schaufeln wirken, zwischen den Schaufeln ist keine Kraftwirkung möglich. Der Rotor besteht dabei aus dem Grundkörper, der sogenannten „Rotorscheibe“ und R über den Umfang verteilten Schaufeln. Vor dem Rotor befindet sich ein Stator mit S Leitschaufeln, der die richtige Zuströmung zum Rotor gewährleistet. Da der Rotor sehr knapp hinter dem Stator mit der Drehkreisfrequenz Ω rotiert, kommt es aufgrund des Schaufelnachlaufs der Leitschaufeln zu einer Anregung des Rotors. Durch den Stator wirken somit über den Umfang verteilt S Erregerkräfte auf den Rotor.

Für die nachfolgende Betrachtung wird, entgegen der Realität, angenommen, dass der Rotor stillsteht und die Erregerkräfte mit der Kreisfrequenz Ω rotieren. Unter der Annahme, dass die S Erregerkräfte nur an den Schaufelpositionen wirken, kann mithilfe von Fourier-Reihen und der Dirac-Funktion die Erregerkraft anhand von (Gl. 137) beschrieben werden.

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} \cdot \cos(i \cdot S \cdot \theta) \cdot \cos(k \cdot R \cdot \theta) \cdot \delta(\theta - \Omega t) \cdot \delta(r - r_a) \quad (\text{Gl. 137})$$

Dieser in (Gl. 137) dargestellte Zusammenhang für die Erregerkraft lässt sich weiter vereinfachen und für die Störfunktion in die Bewegungsgleichung (Gl. 136) einsetzen. Somit erhält man die in (Gl. 138) dargestellte Bewegungsgleichung.

$$\frac{m''}{B} \ddot{w} + \Delta^2 w = \frac{1}{2BA} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} [\cos(iS\theta - kR\theta) + \cos(iS\theta + kR\theta)] \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) \quad (\text{Gl. 138})$$

Mit Hilfe eines Separationsansatzes und der modalen Entwicklung kann diese Platten-Bewegungsgleichung gelöst werden. Dazu wird der in (Gl. 139) dargestellte Ansatz herangezogen. Durch diesen Ansatz ist es wieder möglich, die Bewegungsgleichung durch trennen der Variablen in mehrere einzeln lösbare Differentialgleichungen aufzuteilen.

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn}(r, \theta) \cdot T(t) \quad (\text{Gl. 139})$$

In dem Ansatz stellt $\psi_{mn}(r, \theta)$ die aus „Anhang B-3.1: Homogene Lösung“ bekannte Eigenfunktion dar, das zweite Glied $T(t)$ ist die zeitabhängige modale Koordinate. Diese Eigenfunktion $\psi_{mn}(r, \theta)$ kann in die beiden Komponenten $\psi_{mn1}(r, \theta)$ und $\psi_{mn2}(r, \theta)$ aufgespalten werden und somit ergeben sich zwei unabhängige Ansätze (Gl. 140) und (Gl. 141), mit denen die Differentialgleichung getrennt gelöst werden kann. Hat man für beide Ansätze die Lösungen ermittelt, können diese wieder zu einer Gesamtlösung zusammengefasst werden.

$$w_1(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn1}(r, \theta) \cdot T_{mn1}(t) \quad (\text{Gl. 140})$$

$$w_2(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn2}(r, \theta) \cdot T_{mn2}(t) \quad (\text{Gl. 141})$$

Für die nachfolgende Lösung wird nur jene mit dem Ansatz $w_1(r, \theta, t)$ (Gl. 140) behandelt. Das Vorgehen bei der Lösung mit $w_2(r, \theta, t)$ (Gl. 141) erfolgt analog. Setzt man den verwendeten Ansatz aus (Gl. 140) bzw. seine Ableitungen in (Gl. 138) ein und formt diese Gleichung um, so erhält man die Differentialgleichung (Gl. 142).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn1} \cdot \left[\frac{\partial^2 T_{mn1}}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \cdot T_{mn1} \right] = \frac{1}{2m''A} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} [\cos(iS\theta - kR\theta) + \cos(iS\theta + kR\theta)] \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) \quad (\text{Gl. 142})$$

Unter Anwendung der Orthogonalitätsbeziehung für die Eigenfunktionen kann die Differentialgleichung auf die in (Gl. 143) dargestellte Form übergeführt werden. Das genaue Vorgehen ist wieder aus „Anhang B-3.2: Inhomogene Lösung der Differentialgleichung“ zu entnehmen.

$$\frac{\partial^2 T_{mn1}}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \cdot T_{mn1} = \frac{1}{2m''A} \cdot \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} \psi_{kl1} [\cos(iS\theta - kR\theta) + \cos(iS\theta + kR\theta)] \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) r dr d\theta \quad (\text{Gl. 143})$$

Bei der in (Gl. 143) dargestellten Gleichung handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Für diese ist die homogene sowie die inhomogene Lösung zu ermitteln. Analog zum vorigen Abschnitt folgt für die homogene Lösung der erhaltenen Differentialgleichung die in (Gl. 144) dargestellte Lösung.

$$T_{mn1} = A_1 \cdot \cos(\omega_{mn}t) + B_1 \cdot \sin(\omega_{mn}t) = T_{mn1h} \quad (\text{Gl. 144})$$

Für die inhomogene Lösung ist jedes Glied einer Summe auf der rechten Seite als einzelne Anregung zu betrachten und dementsprechend die Differentialgleichung getrennt zu lösen. Für die Gesamtlösung können die einzelnen Glieder in späterer Folge wieder aufsummiert werden. Die Störfunktion der Differentialgleichung kann dabei in die beiden Glieder *I* (Gl. 145) und *II* (Gl. 146) aufgeteilt werden.

$$I = \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \hat{F}_{ki} \psi_{kl1} \cos(iS\theta - kR\theta) \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) r dr d\theta \quad (\text{Gl. 145})$$

$$II = \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \hat{F}_{ki} \psi_{kl1} \cos(iS\theta + kR\theta) \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) r dr d\theta \quad (\text{Gl. 146})$$

Somit lässt sich die Differentialgleichung wie in (Gl. 147) anschreiben. Dadurch ist es möglich die Gleichung getrennt für *I* und *II* zu lösen und im Anschluss wieder zu einer Gesamtlösung zusammensetzen.

$$\frac{\partial^2 T_{mn1}}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \cdot T_{mn1} = \frac{1}{2m''A} \cdot (I + II) \quad (\text{Gl. 147})$$

Dazu sind zu Beginn die beiden Integrale in (Gl. 145) und (Gl. 146) auszuwerten und im Anschluss die inhomogenen Differentialgleichungen mithilfe eines Störgliedansatzes zu lösen. Für die beiden Glieder erhält man somit die in (Gl. 148) und (Gl. 149) dargestellten Teillösungen der Differentialgleichung.

$$T_{mn1I} = \frac{r_a w_{mn}(r_a)}{4m''A} \left[\frac{\hat{F}_{ki} \cos((m - iS + kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m - iS + kR)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((m + iS - kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m + iS - kR)\Omega]^2} \right] \quad (\text{Gl. 148})$$

$$T_{mn1II} = \frac{r_a w_{mn}(r_a)}{4m''A} \left[\frac{\hat{F}_{ki} \cos((m - iS - kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m - iS - kR)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((m + iS + kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m + iS + kR)\Omega]^2} \right] \quad (\text{Gl. 149})$$

Diese Lösungen können nun aufsummiert werden und im Anschluss in den ursprünglichen Ansatz rückeingesetzt werden. Dabei setzt sich T_{mn1} wie in (Gl. 150) aus der homogenen Lösung sowie den beiden partikulären Teillösungen zusammen.

$$T_{mn1} = T_{mn1h} + T_{mn1I} + T_{mn1II} \quad (\text{Gl. 150})$$

Die Lösung für T_{mn1} wird nun in den Ansatz (Gl. 140) eingesetzt und über alle m und n aufsummiert. Somit ergibt sich für die Bewegungsgleichung die erste Teillösung $w_1(r, \theta, t)$, welche in (Gl. 151) angeführt ist.

$$w_1(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn}(r) \cos(m\theta) [A_1 \cos(\omega_{mn}t) + B_1 \sin(\omega_{mn}t)] \frac{r_a}{4m''A} w_{mn}(r_a) \cdot \left\{ \left[\frac{\hat{F}_{ki} \cos((m - iS - kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m - iS - kR)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((m + iS + kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m + iS + kR)\Omega]^2} \right] + \left[\frac{\hat{F}_{ki} \cos((m - iS + kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m - iS + kR)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((m + iS - kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m + iS - kR)\Omega]^2} \right] \right\} \quad (\text{Gl. 151})$$

Nach dem analogen Vorgehen muss auch $w_2(r, \theta, t)$ bestimmt werden. Hat man beide Teillösungen der Differentialgleichung bestimmt und können diese anhand von (Gl. 152) zu der Gesamtlösung zusammengefasst werden.

$$w(r, \theta, t) = w_1(r, \theta, t) + w_2(r, \theta, t) \quad (\text{Gl. 152})$$

Bei einer erzwungenen Schwingung ist es möglich, dass Resonanz auftritt d.h., dass die Frequenz der Anregung mit einer Eigenfrequenz der Struktur übereinstimmt. Theoretisch würde dabei die Amplitude der Schwingung gegen unendlich gehen. Betrachtet man nun die Teillösung $w_1(r, \theta, t)$ in (Gl. 151) so ist ersichtlich, dass dies nur möglich ist, wenn einer der Nenner Null wird. Somit lassen sich aus (Gl. 151) vier Resonanzbedingungen ermitteln, wobei nur eine davon erfüllt sein muss, damit Resonanz auftritt. Für einen Turbinenrotor mit R über den Umfang verteilten Turbinenschaufeln und S wirkenden Erregerkräften erhält man die in (Gl. 153) bis (Gl. 156) angeführten Resonanzbedingungen.

$$\omega_{mn}^2 - [(m - iS - kR)\Omega]^2 = 0 \quad (\text{Gl. 153})$$

$$\omega_{mn}^2 - [(m + iS + kR)\Omega]^2 = 0 \quad (\text{Gl. 154})$$

$$\omega_{mn}^2 - [(m - iS + kR)\Omega]^2 = 0 \quad (\text{Gl. 155})$$

$$\omega_{mn}^2 - [(m + iS - kR)\Omega]^2 = 0 \quad (\text{Gl. 156})$$

Die inhomogene Lösung der Differentialgleichung stellt somit die Grundlage für die Resonanzuntersuchung mithilfe des Campbell- als auch des Interferenz-Diagramms dar.

3.3.3.3 Eigenformen von kreisrunden Scheiben und Platten

In den vorhergehenden Abschnitten wurden die Grundlagen für die Scheiben- und Plattenschwingungen näher erklärt. In diesem Abschnitt soll jetzt allgemeiner erklärt werden, wie sich die Schwingungseigenformen charakterisieren lassen. Dabei liegt der Fokus wieder auf kreisrunden Bauteilen. Die Schwingungen von rotationssymmetrischen Bauteilen und somit ihren Eigenformen lassen sich anhand von zwei Kriterien genau einteilen. Dazu lassen sie sich einerseits anhand der Schwingungsart, d.h. ob axiale, radiale oder tangentiale Schwingungen zu der Eigenform geführt haben, und andererseits anhand der Knotenkreise und Knotendurchmesser genau beschreiben.

Bei der Schwingungsart kann in die drei bereits genannten Typen unterschieden werden. Bei axialen Schwingungen handelt es sich um Plattenschwingungen, d.h. es kommt zu Schwingungen und somit Durchbiegungen aus der Plattenebene heraus. Bei den radialen als auch tangentialen Schwingungen handelt es sich um Scheibenschwingungen, d.h. die Scheibe schwingt in der Ebene. Dabei kommt es zu Verformungen in radialer Richtung als auch in Umfangsrichtung. Somit lassen sich auch die Eigenformen anhand des Schwingungstyps bezeichnen. In Abbildung 25 sind die drei Schwingungsarten bzw. Typen von Eigenformen dargestellt. [18]

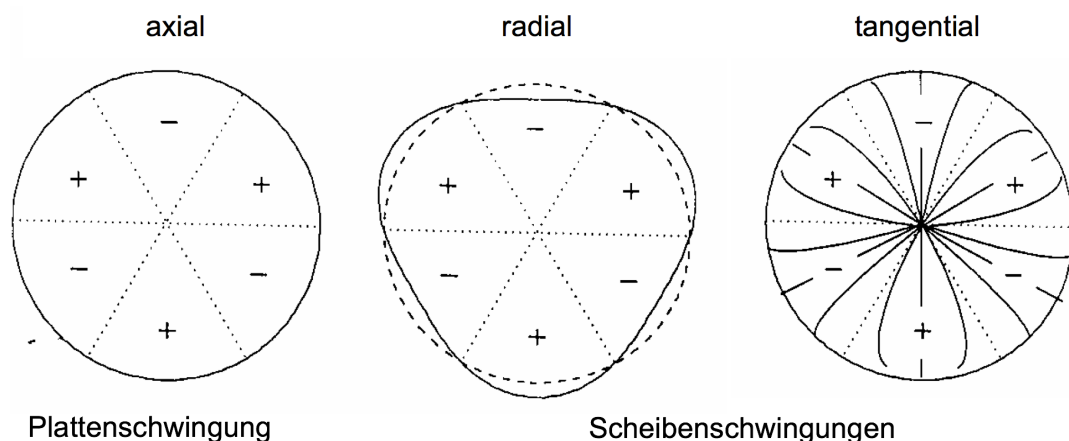


Abbildung 25: Scheiben- und Platteneigenformen [18]

Das zweite Kriterium zur Beschreibung der Eigenformen ist die Anzahl der Knotendurchmesser (Nodal Diameter) und Knotenkreise (Nodal Circles). Dabei beschreibt der Nodal Diameter (ND) wie viele radiale Knotenlinien eine Eigenform besitzt und die Nodal Circle (NC) Anzahl wie viele Knotenkreise eine Eigenform hat. Betrachtet man dies beispielhaft an einer Plattenschwingung, entsprechen die Knotendurchmesser den Nullstellen der Umfangseigenfunktionen, d.h. $\cos(m\theta)$ und $\sin(m\theta)$. Die Knotenkreise entsprechen den Nullstellen der radialen Eigenfunktionen, d.h. den Nulldurchgängen der Bessel'schen Funktionen. Aus den Lösungen der Bewegungsgleichungen ist somit ersichtlich, dass die Anzahl der Knotendurchmesser und jene der Knotenkreise eine natürliche Zahl beginnend mit Null sein müssen. Bei kontinuierlichen Systemen, d.h. Kontinuumsschwingern, kann die Anzahl der Knotenlinien und -kreise zwischen null und theoretisch unendlich liegen.

Anhand der Knotenkreisanzahl können die Eigenformen zu sogenannten Eigenformfamilien bzw. Mode-Familien zusammengefasst werden. Eine Modefamilie beinhaltet dabei jene Moden mit der gleichen Schwingungsform (z.B. axial) und derselben Nodal Circle Anzahl n . [18] Bei Kontinuumsschwingern treten theoretisch unendlich viele Mode-Familien auf, da Eigenformen mit unendlich vielen Knotenkreisen existieren.

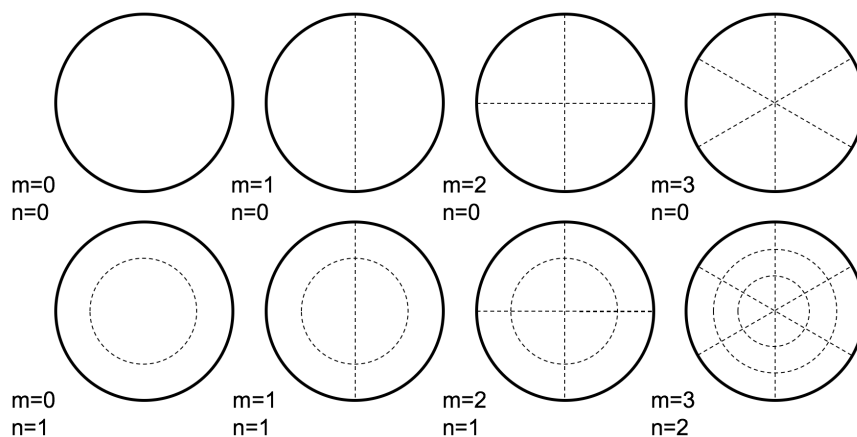


Abbildung 26: Knotenlinien und Knotenkreise [41]

Abbildung 26 zeigt wie sich verschiedene Eigenformen einer kreisrunden Platte darstellen. Die strichlierten Linien und Kreise stellen dabei genau die Knotendurchmesser m und -kreise n dar, die durch Aufstreuen von Sand sichtbar gemacht werden können bzw. bei der Visualisierung der numerischen Ergebnisse zu erkennen sind. Bei der numerischen Untersuchung treten Moden immer paarweise auf. Dies ist bedingt durch die Aufteilung der Eigenfunktionen wie in „Anhang B-3.1: Homogene Lösung“ in den $\cos(m\theta)$ und $\sin(m\theta)$ Anteil. Dies ist bei allen Eigenformen, ausgenommen dem sogenannten Umbrella-Mode $m=0$ und $n=0$, der Fall. Die beiden Moden haben die gleiche Frequenz, aber eine um den Winkel $\frac{\pi}{2m}$ unterschiedliche Phasenlage.

Hat die Struktur, z.B. kreisrunde Platte, eine über den Umfang veränderliche Steifigkeit bzw. Unregelmäßigkeiten tritt ein Moden-Paar mit verschobener Frequenz auf, d.h. die gleiche Eigenform mit unterschiedlicher Orientierung besitzt zwei eng beieinanderliegende Eigenfrequenzen. Grund für diese Moden-Paare sind Bohrungen und ähnliche Konstruktionselemente oder unter anderen Umständen auch Materialinhomogenitäten, die zu einer umfangsveränderlichen Steifigkeit führen. [18]

3.3.4 Bladed Disks

Bladed Disks bzw. beschaufelte „Scheiben“ sind schwingungsfähige Systeme, die aus einem Grundkörper und den über den Umfang verteilten Schaufeln bestehen. Beispielhaft sind Turbinenrotoren solche „Bladed Disks“. Dabei handelt es sich um einen Kontinuumsschwinger, der unendlich viele Eigenfrequenzen und somit Eigenformen besitzt.

Schwingt der Turbinenrotor so schwingen seine Einzelkomponenten. Dies führt dazu, dass sich die Eigenformen aus der Verschiebung der gesamten Struktur zusammensetzen. In manchen Fällen ähnelt dabei die Eigenform und die Eigenfrequenz jener der einzelnen raumfixierten Schaufeln, in anderen Fällen einer Eigenform der Rotorscheibe bzw. des Grundkörpers. Die Eigenform der Struktur wird dann hauptsächlich durch die Verschiebung (bzw. Gestaltänderungsenergie) der Schaufel bzw. des Grundkörpers bestimmt. Wird die Eigenform durch die Bewegung der Schaufeln dominiert, spricht man somit von schaufeldominanten Moden, wird diese von der Bewegung der Rotorscheibe dominiert, spricht man von scheibendominanten Moden. Die dahingehende Unterscheidung erleichtert die Interpretation sowie den Sprachgebrauch.

Da es sich um einen Kontinuumsschwinger handelt treten unendlich viele schaufeldominante und scheibendominante Moden auf. Das bedeutet bei den schaufeldominanten Moden, dass die Ähnlichkeit zu unendlich vielen Schaufeleigenformen besteht. Der zur Beschreibung der Eigenform verwendete Nodal Diameter ist aber eine Funktion der endlichen Schaufelanzahl und somit auch endlich. Der Nodal Diameter muss auch hier wieder eine natürliche Zahl größer oder gleich Null sein. Dies fordert eine Unterscheidung zwischen Rotoren mit einer geraden und einer ungeraden Schaufelanzahl. Daraus folgen die beiden in (Gl. 157) und (Gl. 158) angeführten Bedingungen für den größtmöglichen Nodal-Diameter m_{max} der schaufeldominanten Moden. In Abbildung 27 a) und b) sind zwei Beispiele für schaufeldominante Eigenformen eines Turbinenrotors mit 72 Schaufeln dargestellt [18]

$$m_{max} = \begin{cases} \frac{R}{2} & \text{gerade Schaufelanzahl } N \end{cases} \quad (\text{Gl. 157})$$

$$\begin{cases} \frac{R-1}{2} & \text{ungerade Schaufelanzahl } N \end{cases} \quad (\text{Gl. 158})$$

Diese Limitierung besteht bei den scheibendominanten Moden nicht. Theoretisch würden dabei unendlich viele Eigenformen auftreten und die Nodal-Diameter- sowie Nodal-Circle-Anzahl gegen unendlich gehen. Somit würde der Nodal-Diameter der scheibendominanten Moden den maximalen Nodal-Diameter der schaufeldominanten Moden übersteigen können. In der Praxis werden bei den scheibendominanten Moden die Eigenformen vernachlässigt die höhere Nodal-Diameter besitzen als die durch (Gl. 157) und (Gl. 158) bestimmten maximalen Nodal-Diameter der schaufeldominanten Moden. [18] In Abbildung 27 c) und d) sind wieder zwei scheibendominante Eigenformen eines Turbinenrotors dargestellt. Dabei ist ersichtlich, dass durch die Schwingungen der Rotorscheibe den Schaufeln der Nodal-Diameter der Scheibe aufgeprägt wird.

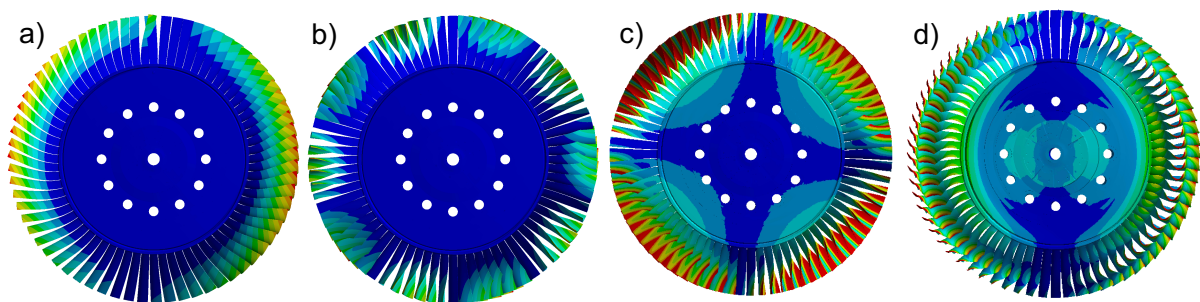


Abbildung 27: Eigenformen Turbinenrotor [29]

Die schaufel- und die scheibendominanten Eigenformen lassen sich zu den sogenannten Modefamilien zusammenfassen. Bei den scheibendominanten Moden wird, wie auch schon in Kapitel 3.3.3, die Knotenkreisanzahl zum Zusammenfassen in Modefamilien verwendet. Die schaufeldominanten Eigenformen können anhand der Schaufeleigenformen zu Modefamilien zusammengefasst werden, die Nodal Circle Anzahl wird hier nicht verwendet. [18]

3.4 Blade-Passing Excitation

Bei Turbomaschinen spielen eine Vielzahl von Strömungseffekten eine wichtige Rolle. So kommt es zu Wirbeln, Strömungsablösungen, Nachlaufströmungen und vielen mehr. [20] In diesem Abschnitt wird aus der Vielzahl die Nachlaufströmung insbesondere die Schaufelnachlaufströmung herausgegriffen und die Auswirkungen auf eine schwingungsfähige Struktur beschrieben.

Durch Reibungseffekte bildet sich an der Schaufeloberfläche eine Grenzschicht aus, die zur Verzögerung der Strömung in Wandnähe führt (direkt an der Schaufeloberfläche ist die Geschwindigkeit entsprechend der Grenzschichttheorie gleich null). Auf Grund der endlichen Schaufellänge treffen die Strömungen von der Druckseite und der Saugseite an der Schaufelhinterkante zusammen. Durch Fluidreibung mit den Nachbarschichten werden die Bereiche mit niedrigeren Strömungsgeschwindigkeiten wieder beschleunigt. Im Bereich hinter der Schaufel kommt es dadurch zu einer ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung, der sogenannten Nachlaufdelle. Dies ist in Abbildung 28 b) dargestellt. Je größer der Abstand zu der Schaufel wird, desto kleiner werden die Nachlaufdellen. [19]

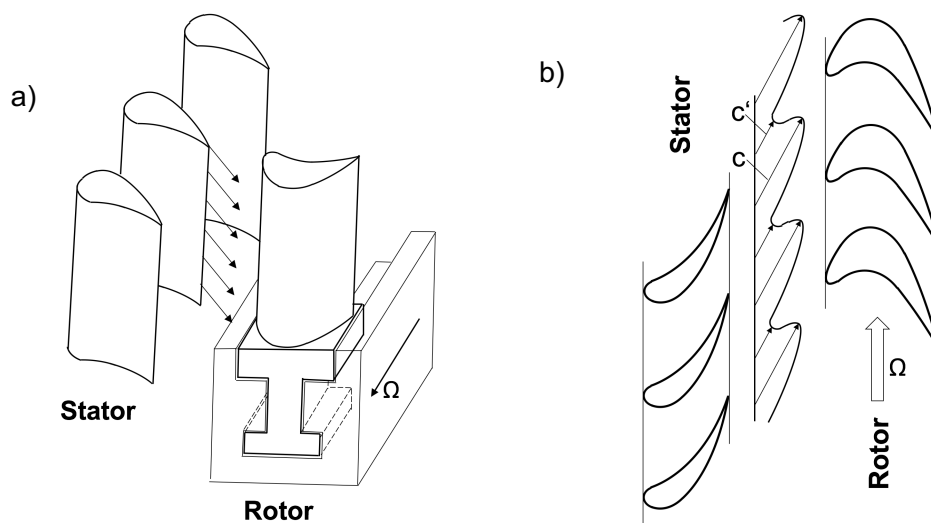


Abbildung 28: Blade-Passing Excitation [18] [19]

Bei Turbinen läuft aufgrund ihres Aufbaus der Rotor immer in der Nachlaufzone des vorgeschalteten Stators (Abbildung 28 a). Durch die noch nicht ausgeglichenen Geschwindigkeitsunterschiede in der Strömung, wie in Abbildung 28 b) dargestellt, kommt es zu einer Anregung der Schaufeln. [19] Dies ist bedingt durch eine zyklische Änderung der Absolutgeschwindigkeit c und somit ihre Umfangskomponente c_u am Eintritt zum Turbinenrotor. Dies führt in weiterer Folge zu einer schwankenden Schaufelbelastung, die zu der erwähnten Anregung der Rotorschaukeln führt.

Betrachtet man diese veränderliche Geschwindigkeit anhand der Euler'schen Turbomaschinenhauptgleichung (Gl. 159), so ist ersichtlich, dass eine schwankende Geschwindigkeit c_{u1} am Rotoreintritt zu einer Schwankung der umgesetzten Energie und somit der Schaufelbelastung führt.

$$h_{tot} = u_1 \cdot c_{u1} - u_2 \cdot c_{u2} \quad (\text{Gl. 159})$$

Die aufgrund des Schaufelnachlaufs bedingte Anregung wird in der Literatur dabei häufig als sogenannte „Blade-Passing Excitation“ bezeichnet. [18] Besitzt nun ein betrachteter Stator S Leitschaufeln, so existiert hinter jeder Schaufel eine Nachlaufdüse. Rotiert hinter diesem Stator der Rotor, so erfährt jede der R Rotorschaukel S Schwankungen der Schaufelkraft pro Rotorumdrehung. Die Frequenz der Erregung lässt sich somit anhand der in (Gl. 160) dargestellten Gleichung errechnen. Sie ist eine Funktion der Rotordrehzahl sowie der Schaufelanzahl des vorgeschalteten Stators.

$$f_e = \frac{S \cdot n_{BP}}{60} \quad \begin{array}{l} f_e \dots \text{Erregerfrequenz in Hz} \\ n_{BP} \dots \text{Rotordrehzahl in min}^{-1} \\ S \dots \text{Schaufelanzahl/Anzahl der Unterbrechungen} \end{array} \quad (\text{Gl. 160})$$

Die Anregung des Rotors ist aber nicht nur durch stromaufwärtsliegende Schaufeln möglich, sondern auch durch den Potentialeffekt von stromabwärtsliegender Schaufeln. Dabei kommt es durch den Staudruck der Strömung an der Schaufelvorderkante zu einer Inhomogenität der Geschwindigkeitsverteilung in ähnlicher Form zum Schaufelnachlauf. Auch dabei kommt es zu einer drehzahlabhängigen Anregung des Rotors.

3.5 Diagramme zur Untersuchung von Schwingungsinteraktionen

In diesem Kapitel werden zwei Diagramme behandelt, die sich zur Untersuchung der in Kapitel 3.4 beschriebenen aerodynamischen Schwingungsanregung eignen. Dazu werden hier das Campbell-Diagramm sowie das Interferenz-Diagramm näher behandelt. Beide Diagramme eignen sich dazu Aussagen über möglicherweise auftretende Resonanzprobleme von schwingungsfähigen Systemen zu treffen.

3.5.1 Campbell-Diagramm

Das nach Wilfred Campbell benannte Diagramm ist heutzutage Stand der Technik um Resonanzeffekte / -erscheinungen bei rotierenden schwingungsfähigen Strukturen ermitteln und beurteilen zu können.

Im Campbell-Diagramm sind die Eigenfrequenzen (Ordinate) über die Drehzahl (Abszisse) der zu untersuchenden Struktur aufgetragen. Die Eigenfrequenzen der schwingungsfähigen Systeme können sich dabei über den Drehzahlbereich verändern. Dafür verantwortlich sind die Fliehkräfte und Kreiseffekte, welche die Steifigkeiten des Systems verändern können. Im Campbell-Diagramm wird zwischen Moden mit zunehmender und fallender Eigenfrequenz sowie jenen Moden mit konstanter Eigenfrequenz unterschieden. Letztere stellen sich als parallele Geraden zur Abszisse dar. Die Eigenfrequenzen der beiden anderen sind Funktionen der Drehzahl. In Abbildung 29 ist der prinzipielle Aufbau eines Campbell-Diagramms dargestellt. Dabei sind die drei möglichen Moden abgebildet. [21]

Die Moden mit steigender Eigenfrequenz bei zunehmender Drehzahl sind bedingt durch den „Stress Stiffening“ – Effekt. Durch steigende Zentrifugalkräfte und der somit steigenden Schaufelbelastung verschiebt sich die Eigenfrequenz hin zu einem höheren Niveau. [21] Die Moden mit fallender Eigenfrequenz bei zunehmender Drehzahl, sind durch den sogenannten „Spin Softening“- Effekt bedingt. Dabei kommt es aufgrund der Zentrifugalkräfte zu einer Änderung der Geometrie des Bauteils und somit einer Abnahme der Steifigkeit. [22]

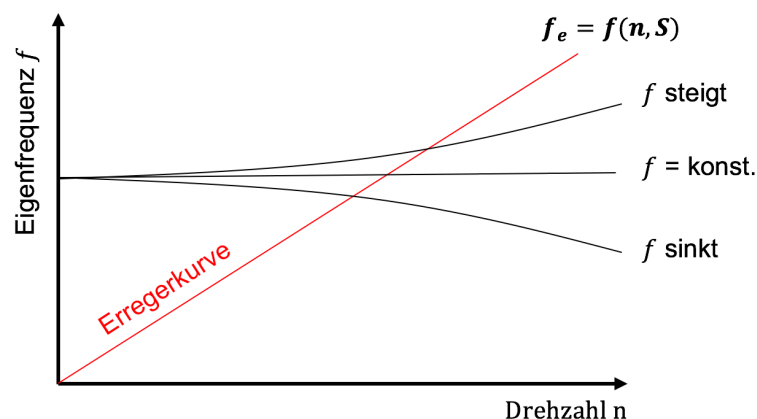


Abbildung 29: Aufbau Campbell-Diagramm [21]

In Abbildung 29 ist ein beispielhaftes Campbell-Diagramm dargestellt. Die schwarzen Linien sind dabei die drei Möglichkeiten für veränderliche Eigenfrequenzen des betrachteten Systems. Die rote Linie ist eine sogenannte Erregerkurve, eine Linie zur Darstellung einer drehzahlabhängigen Erregerfrequenz im Campbell-Diagramm. Diese stellt sich als Strahl durch den Ursprung dar. [21]

Zu diesen drehzahlabhängigen Anregfrequenzen kommt es durch zyklisch auftretende Kraftwirkungen. Bei Turbomaschinen spielt dabei der in Kapitel 3.4 beschriebene strömungstechnische Effekt der Blade-Passing Excitation eine wesentliche Rolle. Die aufgrund des Schaufelnachlaufs bzw. des Potentialeffekts verursachten Schwankungen der Schaufelbelastung führt zu einer drehzahlabhängigen bzw. strukturabhängigen Anregung. Die Frequenz der dadurch bedingten Anregung, auch als Blade-Passing Frequency bezeichnet, lässt sich anhand der aus [23] entnommenen Gleichung (Gl. 161) berechnen. Anhand der Gleichung ist ersichtlich, dass die Blade-Passing Frequency einerseits von der Drehzahl der Maschine n_{BP} (Drehzahlabhängigkeit) und somit vom Betriebspunkt abhängt und andererseits von der Schaufelanzahl des stromaufwärts bzw. stromabwärts liegenden Schaufelgitters S (Strukturabhängigkeit) abhängt. [23]

$$f_e = \frac{S * n_{BP}}{60} \quad \begin{array}{l} f_e \dots \text{Erregerfrequenz} \\ n_{BP} \dots \text{Rotordrehzahl in rpm} \\ S \dots \text{Schaufelanzahl bzw. Engine Order} \end{array} \quad (\text{Gl. 161})$$

Die Engine Order S dient dazu höherharmonische Anregfrequenzen in das Campbell-Diagramm aufzunehmen. Diese höherharmonische Anregung ist beispielhaft durch die Leitschaufelanzahl des Stators oder die Schaufelanzahl einer nachfolgenden Schaufelreihe bedingt. Dies ermöglicht es, systemabhängige Parameter in das Campbell-Diagramm mit aufzunehmen und somit Erkenntnisse über eventuell auftretende Resonanzen zu erlangen.

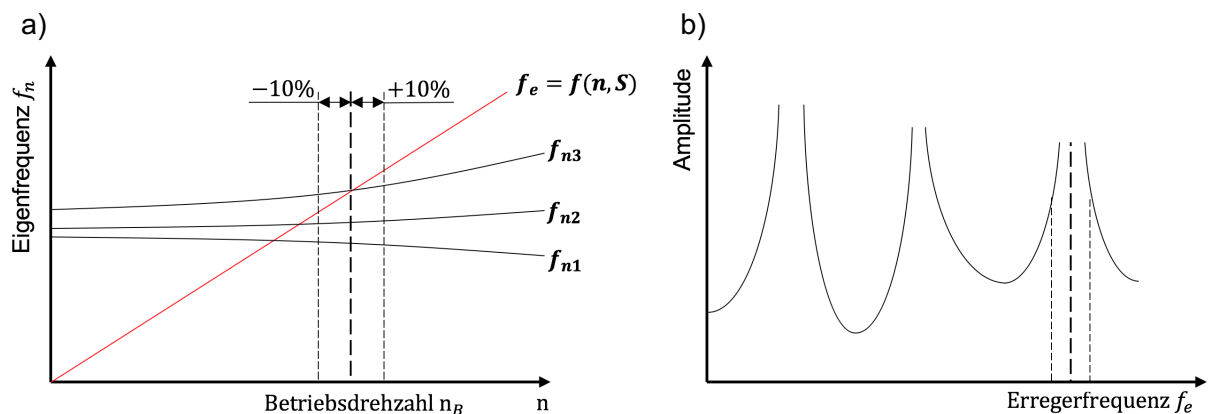


Abbildung 30: Anregung einer Eigenfrequenz [21]

Im Campbell Diagramm sind Resonanzen durch den Schnittpunkt zwischen einer Eigenfrequenz und einer Erregerfrequenz bzw. Engine Order gekennzeichnet. Das in Abbildung 30 a) beispielhaft angeführte Campbell-Diagramm zeigt, dass beim gewählten Betriebspunkt (schwarze, dicke strichlierte Linie) ein Schnittpunkt zwischen der Engine Order (rot) und der Eigenfrequenz f_{n3} auftritt. Somit würde in diesem Fall Resonanz auftreten. Folglich kann das Übereinstimmen der Anrege- mit der Eigenfrequenz als Resonanzbedingung im Campbell-Diagramm angesehen werden. [24] Diese Resonanzbedingung kann somit mit der aus [24] entnommenen Gleichung (Gl. 162) beschrieben werden. Die Übereinstimmung der Eigenfrequenz mit der Anregefrequenz bzw. Erregerfrequenz führt somit zu einer starken Überhöhung der Amplitude. Dies ist beispielhaft am in Abbildung 30 b) dargestellten Amplitudenverhältnis eines allgemeinen Schwingers mit mehreren Eigenfrequenzen zu sehen. Durch die dicke strichlierte schwarze Linie ist die Amplitudenzunahme bei Resonanz ersichtlich.

$$f_e = f_n \quad \begin{array}{l} f_e \dots \text{Anregefrequenz} \\ f_n \dots \text{Eigenfrequenz} \end{array} \quad (\text{Gl. 162})$$

Bei technischen Systemen ist die exakte Übereinstimmung der Anregefrequenz mit der Eigenfrequenz nicht erforderlich um zu einer erheblichen Amplitudenzunahme zu führen. Bereits eine gewisse Nähe der beiden Frequenzen ist ausreichend, damit es zu einem starken Anwachsen des Schwingungsausschlags kommt. Dies ist in Abbildung 30 b) anhand der beiden dünnen strichlierten Linien ersichtlich. Je näher die Anregefrequenz mit der Eigenfrequenz zusammenliegt, desto stärker ist die Anregung und somit die Amplitudenzunahme. Diese Gegebenheit führt dazu, dass auch Eigenfrequenzen stärker angeregt werden, ohne dass im Betriebspunkt ein direkter Schnittpunkt zwischen Anregekurve und Eigenfrequenz vorliegt. Anhand von Abbildung 30 a) kann somit gezeigt werden, dass die Eigenfrequenzen, die innerhalb des durch die beiden dünn strichlierten Linien begrenzten Bereichs, einen Schnittpunkt mit der Engine Order besitzen, stärker angeregt werden und die Amplitude wesentlich zunimmt. [21]

3.5.2 Interferenz-Diagramm

Das Interferenz-Diagramm ist ein Hilfsmittel zur Untersuchung von Resonanzeffekten von rotierenden periodischen Strukturen wie z.B. kreisrunden Platten. [25] Die nachfolgenden Betrachtungen bauen auf Kapitel „3.3.3 Scheiben und Platten“ sowie der dazugehörigen Herleitung im Abschnitt „Anhang B: Schwingung einer kreisrunden Platte“ auf.

3.5.2.1 Begriffsklärung

In der Literatur gibt es für das Interferenz-Diagramm unterschiedlichste Bezeichnungen, häufig zu finden sind „Singh's Advanced Frequency Evaluation“- (SAFE) [25] oder „Zig-Zag shaped excitations in nodal diameters versus frequency“- (ZZENF) Diagramm [26]. Dabei gibt es je nach Autor auch noch unterschiedlichste Auffassungen hinsichtlich der genauen Bezeichnungen.

Oft wird das SAFE-Diagramm, wie in Abbildung 31, als 3D-Diagramm verstanden, bei dem die Eigenfrequenzen über die Rotationsgeschwindigkeit und den Nodal Diameter aufgetragen sind. Die Projektion in die einzelnen Ebenen führt dabei einerseits zum Campbell-Diagramm (Eigenfrequenz - Rotationsgeschwindigkeit) und andererseits zum Interferenz-Diagramm (Eigenfrequenz - Nodal Diameter). [42] Häufig wird auch nur die Projektion in die Eigenfrequenz-Nodal Diameter Ebene, d.h. das Interferenz-Diagramm, als SAFE-Diagramm bezeichnet. Generell ist in der Literatur keine einheitliche Bezeichnung zu finden. In den nachfolgenden Abschnitten wird unter dem Begriff „Interferenz-Diagramm“ die Projektion in die Eigenfrequenz - Nodal Diameter Ebene verstanden.

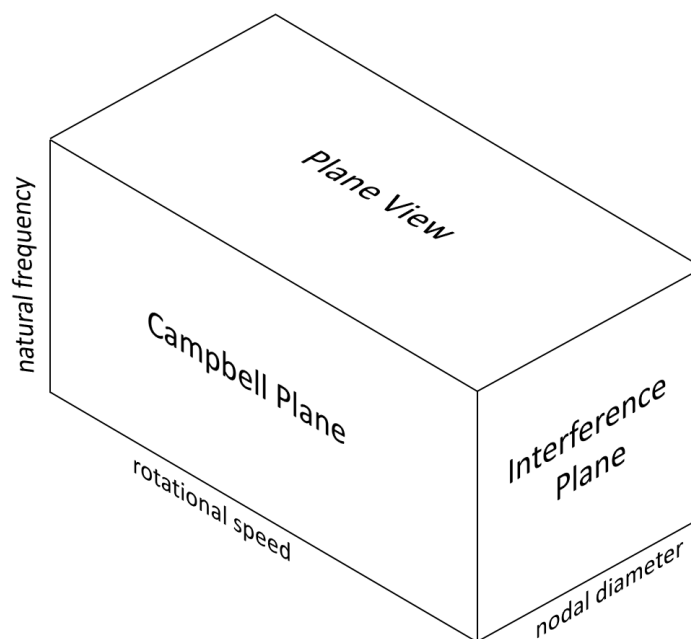


Abbildung 31: Verbindung SAFE- mit Campbell-Diagramm [25]

3.5.2.2 Grundlegende Überlegungen

Als Grundlage für das Interferenz-Diagramm dient die Überlegung, dass eine Übereinstimmung der Eigenfrequenz mit der Erregerfrequenz nicht zwingend zu Resonanz führen muss. Damit Resonanz auftreten kann, muss auch die Phasenlage des schwingenden Systems mit jener der Anregung übereinstimmen. D.h. im Interferenzdiagramm gibt es zwei Bedingungen damit es zu Resonanz kommen kann. Eine alleinige Frequenzübereinstimmung, wie sie beim Campbell-Diagramm erforderlich ist, kann, muss aber nicht zu einem Resonanzfall führen. Aus dieser Gegebenheit hat das Interferenz-Diagramm eine besondere Bedeutung bei der Optimierung von Verdichtern und Turbinen um hohe Beanspruchungen der Beschauelung durch Resonanzeffekte und das dadurch erhöhte Schwingungsniveau zu vermeiden. [24]

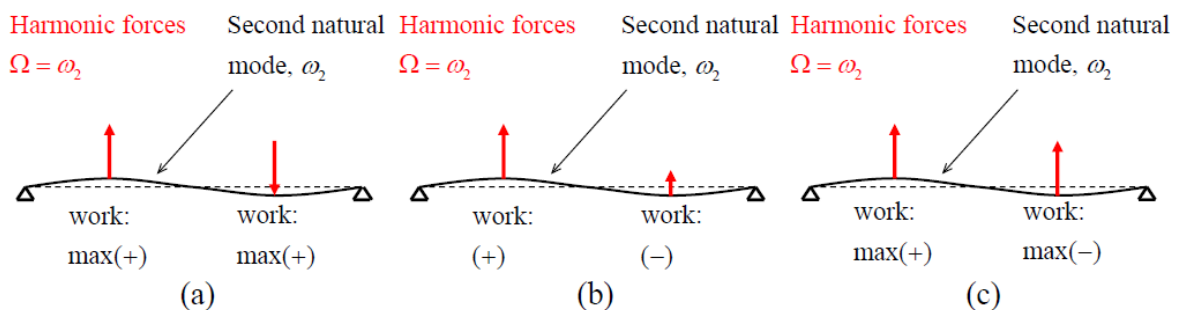


Abbildung 32: Resonanzbedingungen a) volle, b) teilweise und c) keine Resonanz [24]

Abbildung 32 dient der Erklärung der beim Interferenz-Diagramm hinzugefügten Resonanzbedingung der gleichen Phasenlage. Die roten Pfeile zeigen die auf den Balken wirkenden Erregerkräfte. Für die Erklärung wird nun angenommen, dass die Erregerfrequenz der Eigenfrequenz des Balkens entspricht. Somit ist die erste der beiden Resonanzbedingungen erfüllt. Nun ist es erforderlich zu ermitteln, ob die Phasenlage der Erregung mit der Schwingung des Systems übereinstimmt. Dazu sind in Abbildung 32 drei verschiedene Fälle dargestellt. In a) ist dabei ersichtlich, dass die Kräfte mit der Schwingung in Phase sind. Das bedeutet, beide Resonanzbedingungen für das Interferenz-Diagramm wären erfüllt. In b) stimmt die Phasenlage teilweise überein, d.h. es gibt eine Phasenverschiebung. Daraus kann gefolgert werden, dass die Amplituden der Schwingung zwar zunehmen, aber keine Resonanz vorliegt. In c) schwingt die Anregung gegenphasig zu dem Balken. Somit ist die zweite Resonanzbedingung nicht erfüllt. [24]

3.5.2.3 Aufbau des Interferenz-Diagramms

Da mit dem Interferenz-Diagramm die Struktur auf Resonanzfälle untersucht werden soll, werden neben den modalen Eigenschaften (Eigenfrequenzen und Eigenform) auch Anregemechanismen im Diagramm dargestellt. In diesem Abschnitt wird Schritt für Schritt der Aufbau des Interferenzdiagramms für eine Turbinenstufe mit R Schaufeln unter

Berücksichtigung möglicher Anregungen durch im Strömungskanal befindlicher Bauteile erklärt. Die nachfolgenden Erklärungen basieren auf Wildheim [26] [27] sowie der im Abschnitt 3.3.3.2 hergeleiteten Zusammenhänge. In Abbildung 33 ist dazu ein möglicher Aufbau eines Interferenz-Diagramms dargestellt.

Auf den Achsen des Diagramms ist einerseits der Nodal-Diameter (Abszisse) als Kenngröße der Eigenform und andererseits die Eigenfrequenz (Ordinate) aufgetragen. Beide gemeinsam lassen eine eindeutige Definition des Schwingungsmodes zu. Die in Abbildung 33 fett gezeichneten schwarzen Linien fassen die einzelnen Moden (schwarze Punkte) zu den Modefamilien zusammen. Bei einem Turbinenrotor unterscheidet man dabei schaufeldominante und scheibendominante Modefamilien. Bei den schaufeldominanten Moden werden die Eigenformen der Schaufel als Kriterium für die Modefamilienzugehörigkeit gewählt, bei den scheibendominanten Moden die Anzahl der auf der Rotorscheibe ausgebildeten Knotenkreise.

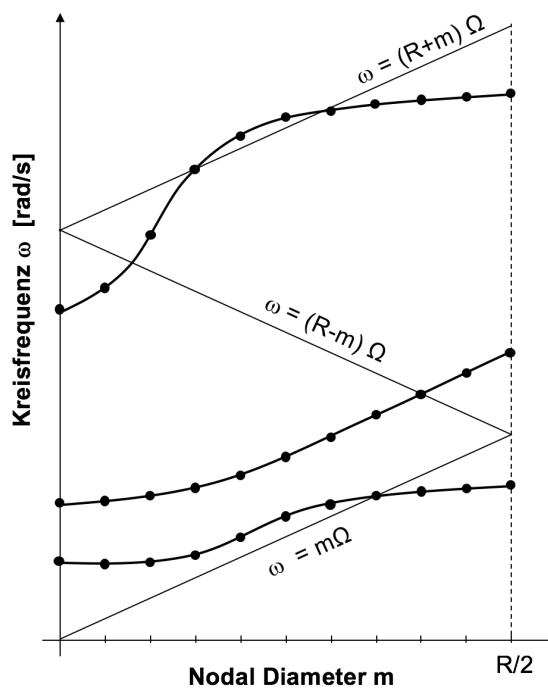


Abbildung 33: Interferenz-Diagramm mit zickzackförmiger Anregungslinie [26]

Beim in Abbildung 33 dargestellten Interferenz-Diagramm beschreibt die zickzack geformte Linie die Anregung, daraus folgt auch die Bezeichnung ZZENF-Diagramm (**Z**ick-**Z**ack-shaped **E**xcitation in **N**odal Diameter versus **F**requency Diagram). Kommt es zu einem Schnittpunkt zwischen den Zick-Zack-Linien und einem Mode (schwarzer Punkt) kommt es zu Resonanz. Das bedeutet, dass die Eigenfrequenz und die Erregerfrequenz übereinstimmen und die Erregung phasengleich mit dem betrachteten System schwingt. [26]

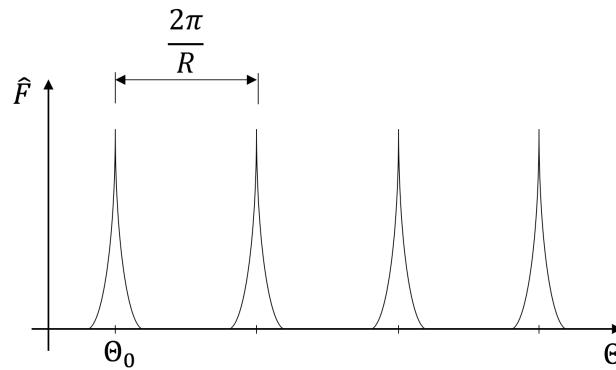


Abbildung 34: Anregekraft einer beschauelten Scheibe über Umfangswinkel

Diese Zick-Zack-Linie in Abbildung 33 folgt aus der Lösung der Bewegungsgleichung für eine erzwungene Schwingung. Bei der Erregung handelt es sich dabei um die eine mit der Kreisfrequenz Ω rotierende Einzelkraft. Diese wirkt wie schon in „Anhang B-3.2: Inhomogene Lösung der Differentialgleichung“ nur direkt an den Schaufelpositionen θ . Die Kraftwirkung lässt sich somit, wie in Abbildung 34 dargestellt, mittels der Dirca-Funktion und der Fourier-Reihenentwicklung, wie in (Gl. 163), darstellen.

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{F}_k \cdot \cos(k \cdot R \cdot \theta) \cdot \delta(\theta - \Omega t) \quad (\text{Gl. 163})$$

Löst man für diese Erregung die Bewegungsgleichung folgt der in (Gl. 164) dargestellte Zusammenhang für die Durchbiegungsfunktion $w(\theta, t)$ über den Umfang. Die Durchbiegungsfunktion in radialer Richtung wurde für die Betrachtung nach Wildheim [26] nicht näher betrachtet.

$$w(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\hat{F}_{ki} \cos \left\{ m \left[\theta + \left(\frac{R}{m-1} \right) \Omega t \right] \right\}}{\omega_m^2 - [(kR + m)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos \left\{ m \left[\theta - \left(\frac{R}{m+1} \right) \Omega t \right] \right\}}{\omega_m^2 - [(kR - m)\Omega]^2} \right] \quad (\text{Gl. 164})$$

Bei Resonanz müsste die Durchbiegung gegen unendlich streben. Das ist nur möglich, wenn einer der beiden Nenner verschwindet. Somit lassen sich aus der (Gl. 164) zwei Resonanzbedingungen ableiten. Diese können anhand der in (Gl. 165) dargestellten Gleichung beschrieben werden.

$$\omega_m = (kR \pm m)\Omega \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Gl. 165})$$

Dabei ist R die Schaufelanzahl des Rotors, k ein von Null bis unendlich laufender harmonischer Index und m der Nodal-Diameter. Anhand der Gleichung für die Resonanzbedingungen kann somit die Zick-Zack-Linie in das Interferenz-Diagramm eingezeichnet werden. Somit ist auch erkennbar, dass ein Schnittpunkt im Interferenz-Diagramm mit der Erfüllung der Resonanzbedingungen einhergeht.

Anhand dieser Gleichung (Gl. 164) ist es möglich zu ermitteln, in welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit sich die Wellen bzw. Moden bei Resonanz in der Struktur bewegen. Dabei kann man vorwärtswandernde und rückwärtswandernde Wellen bzw. Moden mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten unterscheiden. Wildheim hat dazu in seinem Paper „Excitation of Rotationally Periodic Structures“ [26] drei Beispiele zur Interpretation der Richtung sowie der Geschwindigkeit der Wellen gebracht, die nachfolgend angeführt sind.

„ 1. $k = 0$; $\omega_m = m\Omega$: Dabei handelt es sich um eine vorwärtswandernde (im Vergleich zur Bewegung der Kraft) Welle mit der Winkelgeschwindigkeit Ω . D.h. die Welle folgt der Kraft.

2. $k = 1$; $\omega_m = (R - m)\Omega$: Der Ausbreitungsfaktor ist $\cos\left\{m\left[\theta + \left(\frac{R}{m-1}\right)\Omega t\right]\right\}$ und das ist eine rückwärtswandernde Welle, da $m < R$ ist. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Welle ist $\left(\frac{R}{m-1}\right)\Omega$. Für große R und kleine m kann die Winkelgeschwindigkeit ein Vielfaches von Ω werden.

3. $k = 1$; $\omega_m = (R - m)\Omega$: Der Ausbreitungsfaktor ist $\cos\left\{m\left[\theta - \left(\frac{R}{m+1}\right)\Omega t\right]\right\}$ und es handelt sich um eine vorwärtswandernde Welle mit der Winkelgeschwindigkeit $\left(\frac{R}{m+1}\right)\Omega$. “ [26]

Da bei einem Turbinenrotor zumeist ein Stator mit S Leitschaufeln vorgeschaltet ist, läuft nicht eine einzelne Erregerkraft um, sondern bedingt durch die Blade-Passing Excitation S Erregerkräfte. Um diese Umfangsverteilung der Erregerkräfte zu beschreiben lässt sich der bereits angeführte Zusammenhang (Gl. 163) durch eine weitere Fourier-Reihen-Entwicklung auf die Form von (Gl. 166) überführen. Die genaue Beschreibung ist „Anhang B-3.2: Inhomogene Lösung der Differentialgleichung“ zu entnehmen.

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} \cdot \cos(i \cdot S \cdot \theta) \cdot \cos(k \cdot R \cdot \theta) \cdot \delta(\theta - \Omega t) \quad (\text{Gl. 166})$$

Löst man mit dieser Erregerkraft die Bewegungsgleichung folgt für die Umfangsfunktion der Durchbiegung der in (Gl. 167) dargestellte Zusammenhang. Auch hier wird die radiale Funktion der Durchbiegung vernachlässigt.

$$w(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\hat{F}_{ki} \cos((iS + kR - m)\Omega t)}{\omega_m^2 - [(iS + kR - m)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((iS + kR + m)\Omega t)}{\omega_m^2 - [(iS + kR + m)\Omega]^2} \right. \\ \left. + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((iS - kR - m)\Omega t)}{\omega_m^2 - [(iS - kR - m)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((iS - kR + m)\Omega t)}{\omega_m^2 - [(iS - kR + m)\Omega]^2} \right] \quad (\text{Gl. 167})$$

Bei Resonanz würde die Durchbiegung wieder gegen unendlich gehen, dies ist nur möglich, wenn einer der Nenner in der Gleichung (Gl. 167) verschwindet. Somit erhält man für die Anregung mit S Erregerkräften die vier Resonanzbedingungen (Gl. 168) bis (Gl. 171). Eine dieser Gleichungen muss erfüllt sein, damit es zu Resonanz kommt.

$$\omega_m = (iS + kR - m)\Omega \quad (\text{Gl. 168})$$

$$\omega_m = (iS + kR + m)\Omega \quad (\text{Gl. 169})$$

$$\omega_m = (iS - kR - m)\Omega \quad (\text{Gl. 170})$$

$$\omega_m = (iS - kR + m)\Omega \quad (\text{Gl. 171})$$

Wendet man diese Resonanzbedingungen wieder an um die Zick-Zack-Linie im Interferenz-Diagramm zu erstellen, so verschiebt sich der Beginn der ersten Zick-Zack-Linie um $iS\Omega$ nach oben. Somit lässt sich das Interferenz-Diagramm wie in Abbildung 35 erstellen.

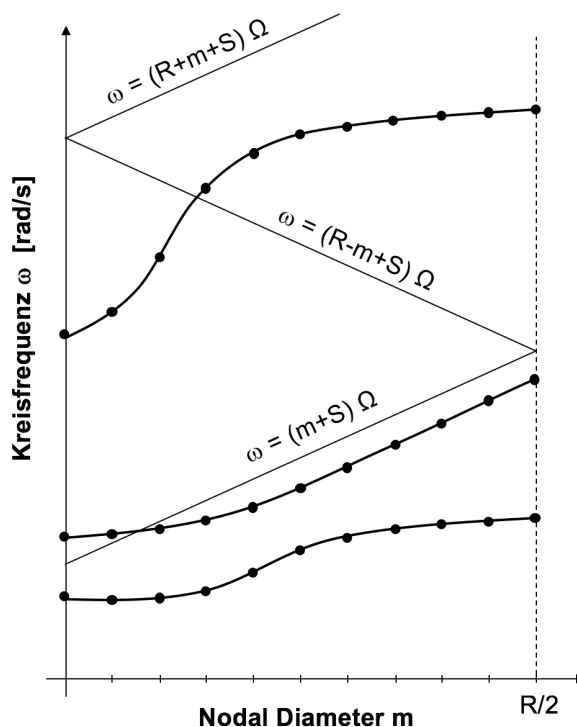


Abbildung 35: Interferenz-Diagramm mit Anregungslinien [26]

Kommt es hier wieder zu einem Schnittpunkt zwischen einer der Zick-Zack-Linien und einem Mode so sind auch hier die Resonanzbedingungen erfüllt.

3.5.2.4 Ausführungsformen des Interferenz-Diagramms

Im Interferenz-Diagramm werden die Eigenfrequenzen über den dazugehörigen Nodal Diameter aufgetragen. Dabei werden die einzelnen Eigenformen meist zu den Modfamilien zusammengefasst. Diese werden häufig als Linien oder auch nur als diskrete Punkte dargestellt. Wie schon erwähnt, muss die Eigenfrequenz eines Modes genau mit der Anregungsfrequenz übereinstimmen, d.h. es muss einen Schnittpunkt geben, damit es zu einem Resonanzfall kommt. Jedoch lassen die unterschiedlichen Darstellungsformen Fehler bei der Interpretation der Ergebnisse zu.

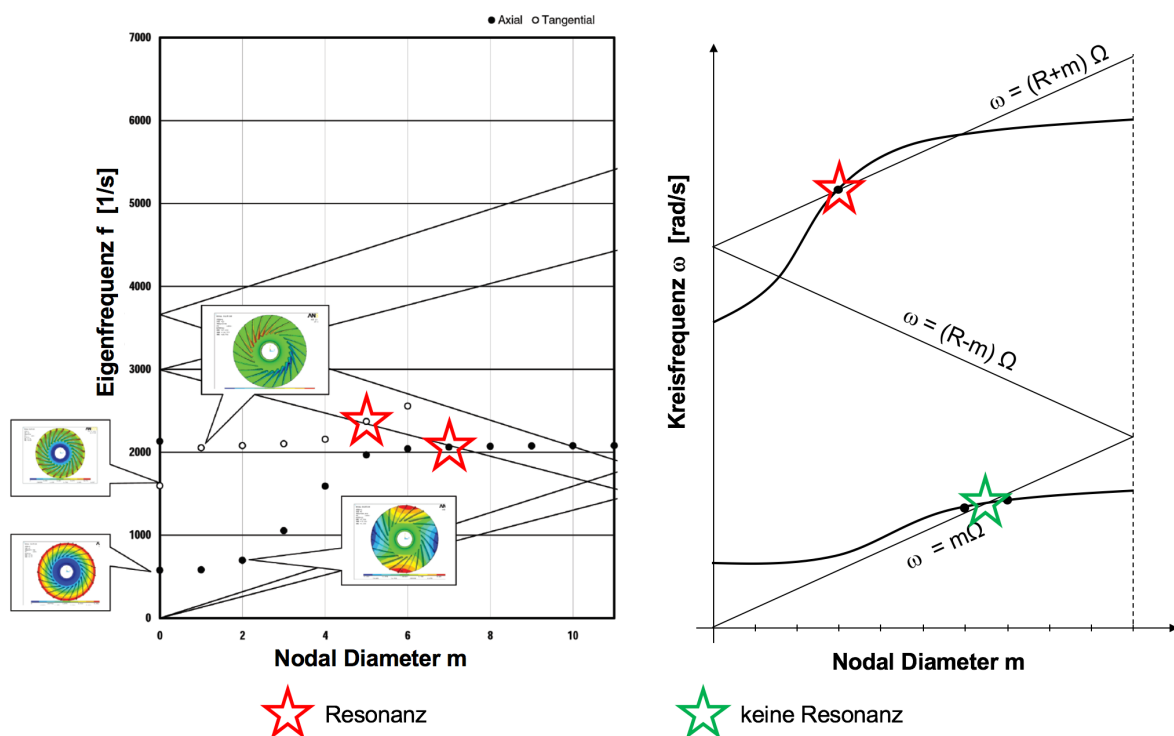


Abbildung 36: Mode-Familien [26] [28]

In Abbildung 36 ist der bereits erwähnte Spielraum für falsche Interpretationen hinsichtlich Resonanz dargestellt. Betrachtet man das linke Interferenz-Diagramm, so sind nur die jeweiligen Eigenfrequenzen über den jeweiligen Nodal Diameter aufgetragen. Die beiden rot gekennzeichneten Schnittpunkte führen dabei zu Resonanzen. Im Gegensatz dazu sind im rechten Interferenz-Diagramm die Mode-Familien als kontinuierliche Linien aufgetragen. Die beiden auftretenden Schnittpunkte, können, müssen aber nicht zu Resonanz führen. Der rot markierte Punkt führt dabei zu Resonanz, da dort genau der Nodal Diameter $m=2$ (beispielhaft) angeregt wird. Betrachtet man nun jedoch den grün markierten Schnittpunkt, so ist ersichtlich, dass hier keinesfalls Resonanz auftreten kann, da der Schnittpunkt zwischen zwei möglichen ND's liegt, d.h. eine solche Eigenform nicht existieren kann. Grundsätzlich kann gesagt werden, dass die Form mit diskreten Punkten etwas schwieriger zu lesen ist, jedoch weniger Spielraum für falsche Interpretationen zulässt.

4. Numerische Charakterisierung des HSL-Rotors

Auf Basis der numerischen Charakterisierung, die in Schitter [29] durchgeführt wurde, wird der High Stage Loading (HSL) Rotor in diesem Abschnitt im Detail untersucht. Die wesentlichen Unterschiede sind in der Herangehensweise an die modale Charakterisierung. Wurde in Schitter [29] das Gesamtsystem betrachtet, so soll hier geklärt werden, welche Systemkomponente, d.h. entweder Beschaufelung oder Rotorscheibe, ausschlaggebend für die auftretenden Schwingungen sind. Die gewonnenen Informationen sollen einerseits in einem Campbell-Diagramm des 72-Schaufel-Modells (72BI-Modell) und andererseits in Interferenz-Diagrammen verarbeitet werden. Daraus sollen in späterer Folge Aufschlüsse über strukturelle Resonanz, bedingt durch externe Anregung, gewonnen, sowie die sich im Betrieb einstellenden Schwingungsformen ermittelt werden. Für das nachfolgende Kapitel ist die Bezeichnung Rotorscheibe bzw. Scheibe nicht konform mit der Definition Scheibe/Platte aus Kapitel 3.3.3, sondern entstammt der Form- bzw. Namensgebung.

4.1 Systembeschreibung

In diesem Abschnitt wird der Aufbau des betrachteten HSL Rotors, das verwendete Simulationsmodell sowie die untersuchte Prüfstandkonfiguration erläutert. Dadurch soll in den nachfolgenden Abschnitten nachvollzogen werden können, welche Systemkomponente gerade betrachtet wird und warum die jeweiligen Randbedingungen gewählt wurden.

4.1.1 Aufbau des Rotors

Der in Abbildung 37 abgebildete HSL-Rotor besteht aus 72 über den Umfang verteilten Aluminiumschaufeln, die in der aus Stahl gefertigten Rotorscheibe mittels eines Hammerkopfes eingehängt und mit dieser verkeilt sind. Die letzte eingesetzte Schaufel, die sogenannte Schlossschaufel, ist dabei mittels eines Bolzens mit der Rotorscheibe verbunden.

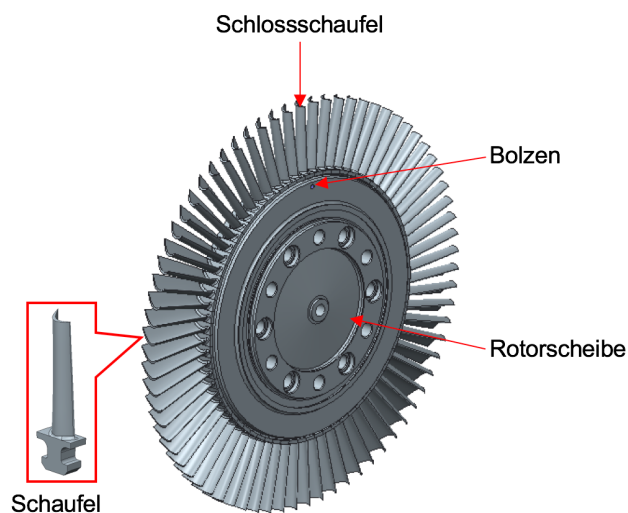


Abbildung 37: Aufbau HSL Rotor

In Abbildung 38 sind die wichtigsten Details der Schaufel-Scheibe-Verbindung dargestellt. Dabei zeigt Abbildung 38 a) die Verbindung der Schaufeln mit der Rotorscheibe. Durch die unter den Schaufeln befindlichen Keile werden die Schaufeln auch im Stillstand gegen die Rotorscheibe gepresst. Dies unterscheidet die Verbindung wesentlich von anderen Hammerkopfverbindungen, bei denen die Schaufeln lose in die Rotorscheibe eingehängt sind und erst im Betrieb durch die Fliehkräfte an die Rotorscheibe angepresst werden. In Abbildung 38 b) ist die Bolzenverbindung der Schlossschaufel mit der Rotorscheibe dargestellt. Diese ist erforderlich, da die Rotorscheibe eine Ausnehmung zum Einhängen der anderen Schaufel besitzt. Somit ist auch der Schaufelfuß entsprechend der Ausnehmung geformt und mit einer Bohrung versehen.

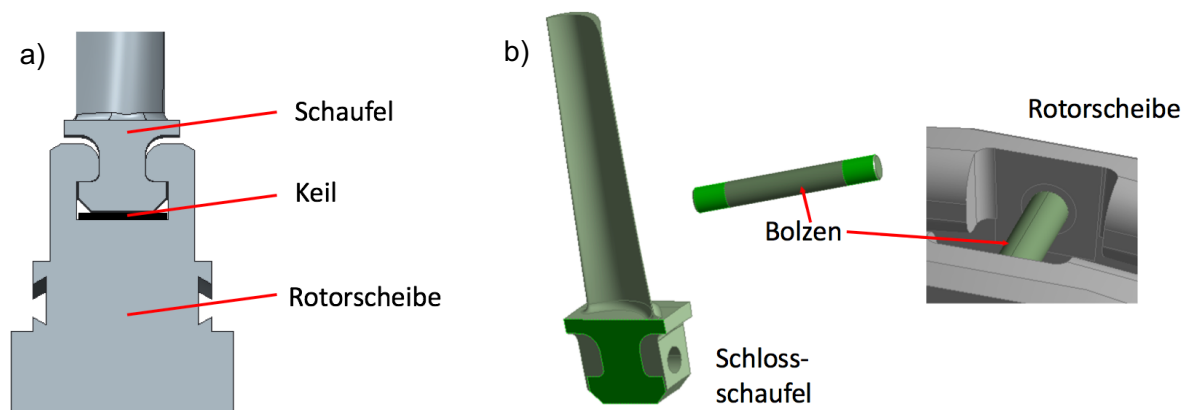


Abbildung 38: Schaufel-Scheibe-Verbindung

In Abbildung 39 sind die Kontakte der Schaufeln zueinander bzw. der Schaufeln zur Scheibe dargestellt. In a) ist der Kontakt zwischen einer Schaufel und der Rotorscheibe dargestellt. Diese berührt die Rotorscheibe dabei seitlich am Schaufelfuß als auch am Hammerkopf. In b) ist der Kontakt der Schaufeln zueinander dargestellt. Diese berühren sich dabei flächig am Schaufelfuß. Auch hier besteht bei der Schlossschaufel wieder ein Unterschied zu allen anderen Schaufeln. Die Kontaktfläche zwischen der Schlossschaufel und der benachbarten Schaufel ist in Abbildung 38 b) ersichtlich.

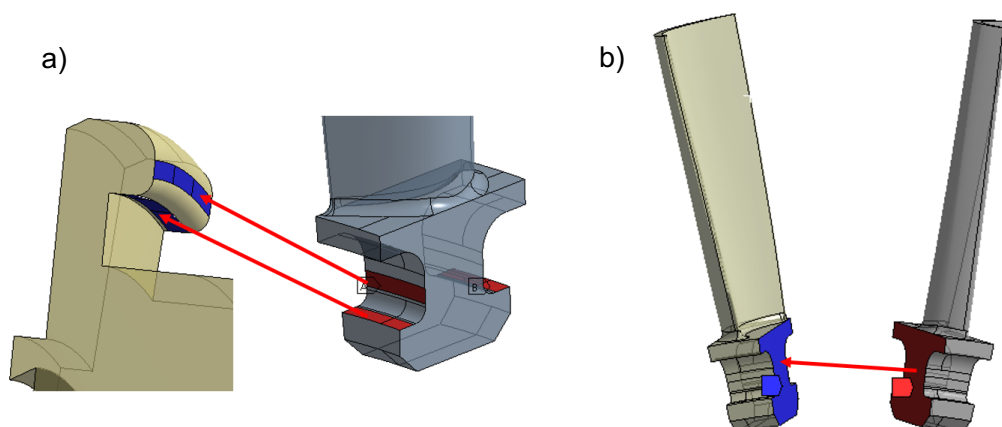


Abbildung 39: Kontaktflächen Schaufel-Scheibe bzw. Schaufel-Schaukel

Wie schon erwähnt, wurde die Rotorscheibe des HSL-Rotors aus Stahl gefertigt, die Schaufeln hingegen aus Aluminium. Die Werkstoffdaten, die im Rahmen der numerischen Modalanalyse verwendet wurden, sind in Tabelle 2 angeführt.

Tabelle 2: Materialpaarung

	Stahl (Scheibe)	Aluminium (Schaufeln)
Elastizitätsmodul	200.000 MPa	71.000 MPa
Schubmodul	76.923 MPa	26.692 MPa
Dichte	7.850 kg/m ³	2.770 kg/m ³
Poisson Zahl	0,3	0,33

4.1.2 Prüfstandaufbau

Da im Rahmen dieser Arbeit der Fokus auf der Untersuchung von Resonanzeffekten liegt, ist es erforderlich, neben dem Turbinenrotor auch den Prüfstand näher zu betrachten. Die Betrachtung beschränkt sich dabei auf den Strömungskanal in unmittelbarer Nähe zum Turbinenrotor.

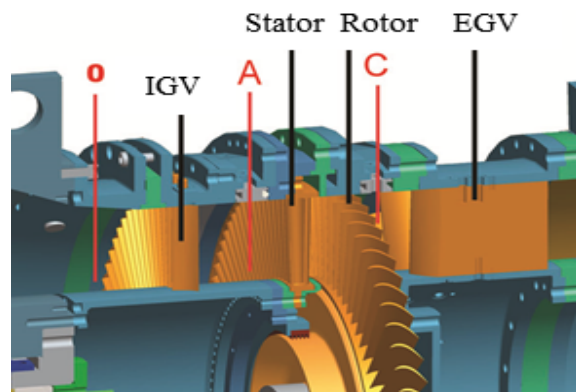


Abbildung 40: Prüfstandkonfiguration [1]

In Abbildung 40 ist der untersuchte Prüfstandaufbau dargestellt. Das Arbeitsmedium tritt dabei über die Inlet Guide Vanes (IGV) in den Untersuchungsbereich ein und wird im Stator umgelenkt und beschleunigt. Der mit dem Strömungsmedium beaufschlagte Rotor entzieht dem Medium Energie. Nach dem Austritt aus dem Rotor verlässt das Arbeitsmedium den Bereich über die Exit Guide Vanes (EGV) des Turbine Exit Casing (TEC). Die Schaufelanzahlen der in die Untersuchung miteinbezogenen Systemkomponenten sind in Tabelle 3 angeführt.

Tabelle 3: Schaufelanzahlen

Systemkomponente	Schaufelanzahl
Stator	96
Rotor	72
Turbine Exit Casing (StandardTEC)	15

4.2 Eingrenzung der Untersuchung

Bei der Untersuchung der Turbine im Rahmen von AdMoNt wurden eine Vielzahl von Betriebspunkten und Stator-TEC-Kombinationen betrachtet. Da eine ganzheitliche Betrachtung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, wird nur ein Betriebspunkt sowie eine Stator-TEC-Kombination näher untersucht. Der dazu gewählte Betriebspunkt ist der „**A**erodynamical **D**esign **P**oint“ (ADP) bei einer Betriebsdrehzahl von 3400 min^{-1} . Die genaue Definition des Betriebspunktes ist aus Schönleitner [30] zu entnehmen. Die nachfolgenden Betrachtungen wurden auf die Stator-TEC-Kombination, bestehend aus einem Stator mit 96 Leitschaufeln, sowie des Turbinenaustrittsgehäuses (StandardTEC) mit 15 Leitschaufeln, eingeschränkt.

Des Weiteren werden in den folgenden Abschnitten nur Schwingungen im Frequenzbereich 0 Hz bis 10.000 Hz betrachtet, da besonders in diesem Bereich viele Frequenzen durch die Interaktion Rotor-Stator und Rotor-TEC angeregt werden. Die nachfolgend ausgeführten Interferenz-Diagramme wurden aus Gründen der Vollständigkeit für alle Betriebspunkte sowie für Stillstand erstellt. Die zusätzlichen Diagramme finden sich im „Anhang C-2: Interferenz-Diagramme“.

4.3 Vorgehensweise bei der numerischen Untersuchung

Um die modale Charakterisierung des HSL Rotors zu vervollständigen, werden zuerst die beiden Teilkomponenten, Schaufel und Rotorscheibe, untersucht. Erst nach der Erfassung der modalen Eigenschaften der Systemkomponenten wird das Gesamtsystem des HSL Rotors in die Betrachtung miteinbezogen. Grund für dieses schrittweise Vorgehen ist, einerseits Anhaltswerte für die Eigenfrequenzen zu erhalten und andererseits durch die Eigenformen die Moden zu den Modefamilien zusammenfassen zu können.

Im Rahmen der einzelnen Teiluntersuchungen werden jeweils das Campbell-Diagramm und das Interferenz-Diagramm erstellt und ausgewertet. Zudem wird jeweils auf die Modellbildung und Vernetzung eingegangen. Bei den Teilmodellen wird zudem die Netzunabhängigkeitsstudie angeführt. Für die nachfolgend verwendeten Interferenzdiagramme findet sich in „Anhang C-1: Grundlegendes zum Interferenz-Diagramm“ eine detaillierte Beschreibung der Anregungen.

4.4 Teilsystem Schaufel

Die Schaufel wurde bereits im Rahmen von Schitter [29] untersucht. Dort diente sie der ersten Abschätzung der Rotoreigenfrequenz. Für die Schaufel wurde zudem das Campbell-Diagramm, erstellt welches nachfolgend angeführt ist. Die Erkenntnisse aus diesem Abschnitt sollen die spätere Interpretation des Gesamtmodells unterstützen und Anhaltswerte für die schaufeldominanten Eigenfrequenzen liefern. Für eine bessere Verständlichkeit ist nachfolgend das Simulationsmodell samt Randbedingungen und Netz näher beschrieben.

4.4.1 Simulationsmodell

Das Einschaufelmodell (1BI-Modell) stellt das einfachste aller in dieser Arbeit behandelten Simulationsmodelle dar. In diesem Abschnitt wird das verwendete Modell samt den simulationsrelevanten Details näher erklärt. Dazu sind in Abbildung 41 das Modell an sich, die Randbedingungen sowie das Netz dargestellt.

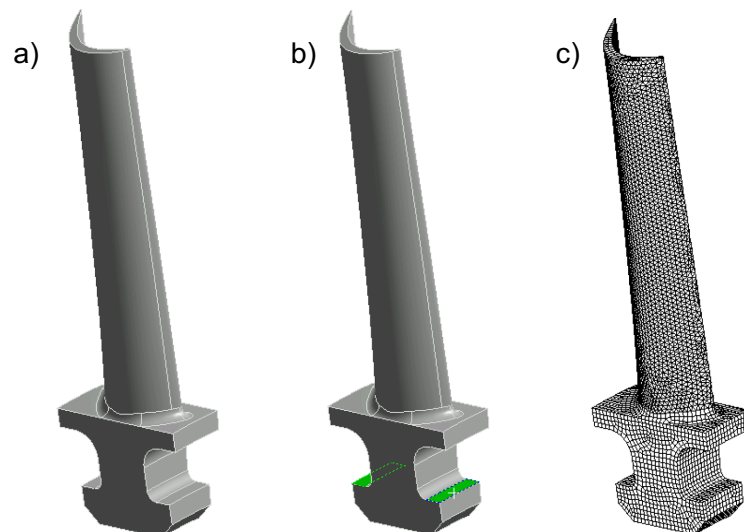


Abbildung 41: 1BI-Modell

In Abbildung 41 a) ist das verwendete Modell des 1BI-Modells dargestellt. Dabei handelt es sich um ein Einzelteil und somit sind keine Kontaktbedingungen zu anderen Systemkomponenten erforderlich. Für die aus Aluminium gefertigte Schaufel wurden die Werkstoffkennwerte aus Tabelle 2 verwendet.

Anhand der Randbedingungen wurde der Kontakt zur Rotorscheibe nachgebildet. Dazu wurden die in Abbildung 41 b) grün markierten Flächen mit einer „Fixed Support“-Bedingung versehen. Diese soll den Kontakt der mit der Rotorscheibe verkeilten Schaufel abbilden.

Für das Rechengitter wurde bereits für Schitter [29] eine Netzunabhängigkeitsstudie durchgeführt. Damit wurde gezeigt werden, dass die Simulationsergebnisse bei geeigneter Parameterwahl unabhängig von der Elementgröße sowie der verwendeten Vernetzungsmethode sind. Dabei wurden einerseits die „Hex-Dominant“-Methode, bei der vorrangig viereckige Elemente verwendet werden, und andererseits die „Tetraeder“-Methode, die dreieckige Elemente verwendet, angewandt und die Elementgrößen zwischen 0,5 mm und 2,0 mm variiert. Ferner wurden auch „Tetraeder“-Elementen mit einer Größe von 2,5 mm miteinbezogen, da diese in späterer Folge beim Gesamtmodell des HSL-Rotors verwendet werden sollten.

Tabelle 4: Netzunabhängigkeitsstudie

	„Tetraeder“-Methode				„Hex-Dominant“-Methode		
	0,5 mm	1,0 mm	2,0 mm	2,5 mm	0,5 mm	1,0 mm	2,0 mm
1. EF	923 Hz	923 Hz	925 Hz	925 Hz	921 Hz	923 Hz	917 Hz
2. EF	1648 Hz	1649 Hz	1655 Hz	1657 Hz	1648 Hz	1648 Hz	1658 Hz
3. EF	2678 Hz	2679 Hz	2686 Hz	2689 Hz	2681 Hz	2678 Hz	2690 Hz
4. EF	4228 Hz	4232 Hz	4239 Hz	4243 Hz	4223 Hz	4229 Hz	4205 Hz
5. EF	5404 Hz	5409 Hz	5433 Hz	5447 Hz	5411 Hz	5405 Hz	5447 Hz
6. EF	8190 Hz	8190 Hz	8223 Hz	8279 Hz	8213 Hz	8180 Hz	8241 Hz
7. EF	8991 Hz	8999 Hz	9031 Hz	9050 Hz	8984 Hz	8995 Hz	8967 Hz
8. EF	9965 Hz	9975 Hz	9998 Hz	10066 Hz	9970 Hz	9968 Hz	9997 Hz

In Tabelle 4 sind die Ergebnisse der Netzunabhängigkeitsstudie dargestellt. Dabei wird deutlich, dass insbesondere bei Vernetzungsgrößen kleiner gleich 1,0 mm nur minimalste Unterschiede im Promillebereich auftreten. Die Netze mit Elementen größer 1,0 mm führen besonders bei hohen Frequenzen zu Ergebnissen, die maximal ein Prozent von den feineren Gittern abweichen. Daraus folgt, dass die Simulationsergebnisse für Netze kleiner 1,0 mm Elementgröße von den gewählten Methoden und Parametern unabhängig sind. Netze von über 1,0 mm Elementgröße führen zu geringen Abweichungen, können aber gerade bei großen Modellen verwendet werden, um die Elementanzahl zu minimieren.

Für das hier untersuchte Modell wurde somit mit der Methode „Hex-Dominant“ und 1,0 mm großen Elementen vernetzt. Das verwendete Netz ist in Abbildung 41 c) dargestellt. Da die Schaufel in dieser Simulation als Einzelteil betrachtet wird und somit kein Kontakt zu anderen Elementen besteht, war keine Verfeinerung von Kontaktbereichen erforderlich.

4.4.2 Eigenformen 1BI-Modell

In diesem Abschnitt sind die Simulationsergebnisse des 1BI-Modells im Untersuchungsbereich bis 10.000 Hz angeführt. Bei den Schwingungen kommt es aufgrund der Schaufelgeometrie zur Kopplung von Biegung und Torsion. [15] Dadurch werden immer sogenannte Koppelmoden angeregt. Bei den ersten Eigenformen bzw. niedrigen Eigenfrequenzen kann noch eine Unterscheidung in die jeweilige Hauptverformungsart erfolgen, ab einer bestimmten Eigenfrequenz ist dies nicht mehr möglich.

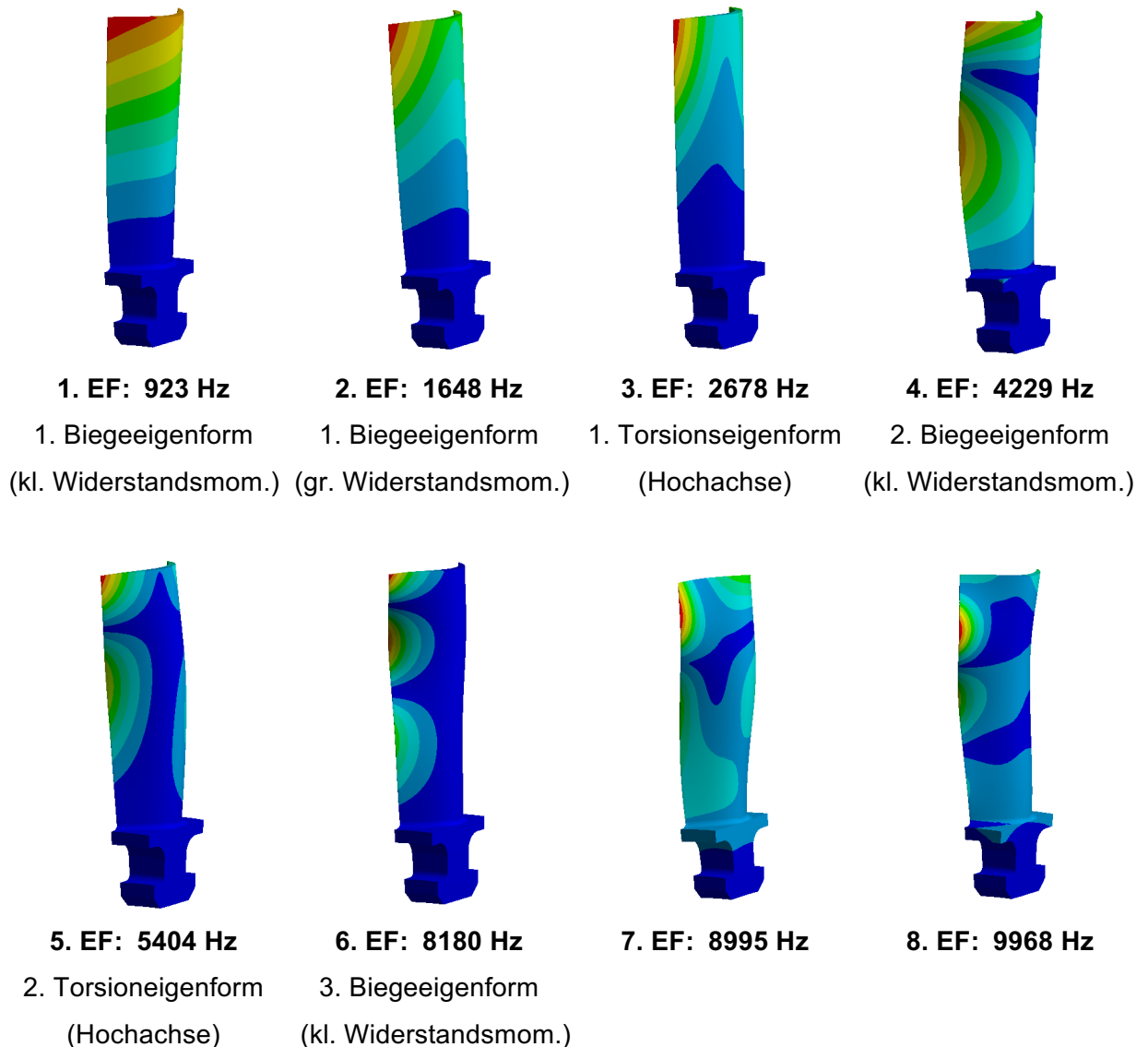


Abbildung 42: Eigenformen des 1BI-Modells

In Abbildung 42 sind die Eigenformen sowie die Eigenfrequenzen der ersten acht Moden dargestellt. Dabei wurden die Verschiebungen in den Grafiken dargestellt.

4.4.3 Campbell-Diagramm

Das aus Schitter [29] übernommene Campbell-Diagramm stellt die veränderlichen Eigenfrequenzen des Systems über den Drehzahlbereich dar. Die grün eingezeichneten Linien sind dabei die Engine Orders (EO), d.h. die drehzahlabhängigen Anregungen des Stators (EO 96) und des TEC's (EO15). Die schwarzen Linien sind die über die Drehzahl veränderlichen Eigenfrequenzen des Systems. Die rotbraune Linie kennzeichnet den Betriebspunkt bei 3400 min^{-1} . Die beiden rotbraun Linien strichlierten begrenzen den Bereich von $\pm 300 \text{ min}^{-1}$, in dem ein Schnittpunkt mit der Anregelinie zu einem starken Anwachsen der Amplitude führt.

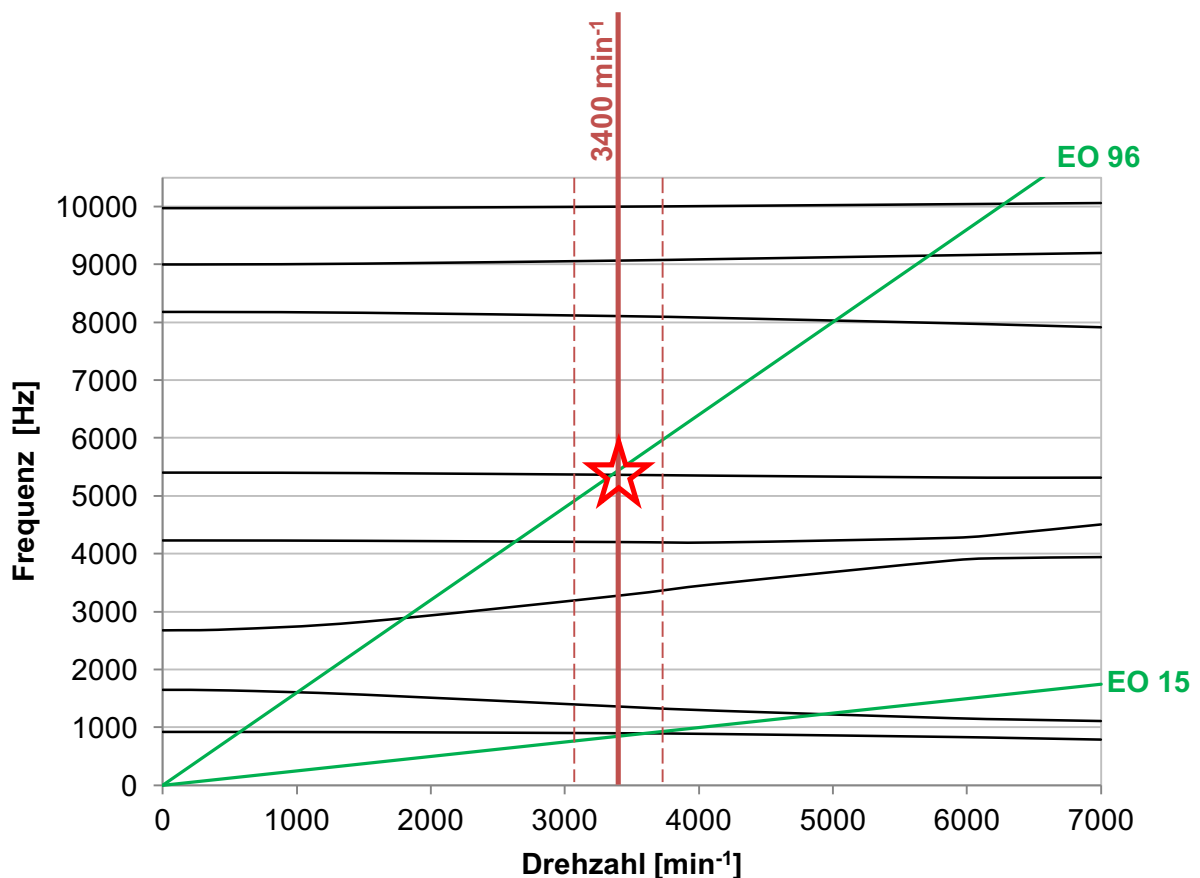


Abbildung 43: Campbell-Diagramm 1BI-Modell [29]

In Abbildung 43 kommt es bei dem gewählten Betriebspunkt von 3400 min^{-1} zu einem direkten Schnittpunkt zwischen der drehzahlabhängigen Anregung aufgrund des Stators (EO 96) und der 5. Eigenfrequenz der Schaufel. Dies würde zu Resonanz und einer starken Zunahme der Schwingungsamplitude führen. Des Weiteren schneidet die Anregekurve des TEC's (EO15) in unmittelbarer Nähe zum Betriebspunkt die erste Eigenfrequenz der Schaufel. Dies würde des Weiteren zu einer erheblichen Zunahme der Schwingungsamplitude der ersten Eigenfrequenz führen.

Tabelle 5: Eigenfrequenzen 1Bl-Campbell Diagramm

	Drehzahl [min^{-1}]					Schwingungsform
	0	3400	4140	5900	6300	
1 .EF	923 Hz	900 Hz	886 Hz	834 Hz	818 Hz	Biegemode
2 .EF	1648 Hz	1360 Hz	1287 Hz	1158 Hz	1138 Hz	Biegemode
3 .EF	2677 Hz	3274 Hz	3479 Hz	3883 Hz	3920 Hz	Torsionsmode
4. EF	4229 Hz	4202 Hz	4196 Hz	4275 Hz	4344 Hz	Biegemode
5.EF	5404 Hz	5367 Hz	5352 Hz	5321 Hz	5317 Hz	Torsionsmode
6. EF	8180 Hz	8107 Hz	8075 Hz	7980 Hz	7955 Hz	Biegemode
7. EF	8995 Hz	9062 Hz	9088 Hz	9154 Hz	9169 Hz	Koppelmode
8. EF	9968 Hz	9992 Hz	10004 Hz	10034 Hz	10041 Hz	Koppelmode

In dem in Abbildung 43 dargestellten Campbell-Diagramm und der dazugehörigen Tabelle 5 ist ersichtlich, dass sowohl Moden mit über die Drehzahl steigender als auch fallender Eigenfrequenz existieren. Jene Moden mit zunehmender Eigenfrequenz bei steigender Drehzahl sind auf den Effekt des „Stress Stiffening“ zurückzuführen. Durch die Fliehkräfte nimmt die Steifigkeit der Schaufeln zu und somit steigen auch jene Eigenfrequenzen. Die bei einer Drehzahlzunahme sinkenden Eigenfrequenzen sind bedingt durch den „Spin Softening“-Effekt. Dies ist auf eine Abnahme der Schaufelsteifigkeit zurückzuführen, die durch Schaufellängung bzw. Entwindung der Schaufel bedingt sein kann.

4.4.4 Interferenz-Diagramm

Das Interferenz-Diagramm in Abbildung 44 dient als Erweiterung der bestehenden Daten. Die Schaufeleigenformen lassen sich nicht wie Platteneigenformen anhand des Nodal Diameters beschreiben, da dieser bei den Schaufeln nicht existieren. Da im Interferenz-Diagramm aber die Eigenfrequenzen über den Nodal Diameter aufgetragen werden, wird angenommen, dass die Eigenfrequenz konstant ist. Die farbigen Linien (grün, rot, gelb, ...) stellen dabei die Eigenfrequenzen der Schaufel über den Nodal-Diameter dar. Die schwarze Volllinie ist der Anregemechanismus bedingt durch den Stator, die strichlierte Linie jener des stromabwärtsliegenden TEC's. Für die genaue Beschreibung der Anregemechanismen wird auf „Anhang C-1: Grundlegendes zum Interferenz-Diagramm“ verwiesen.

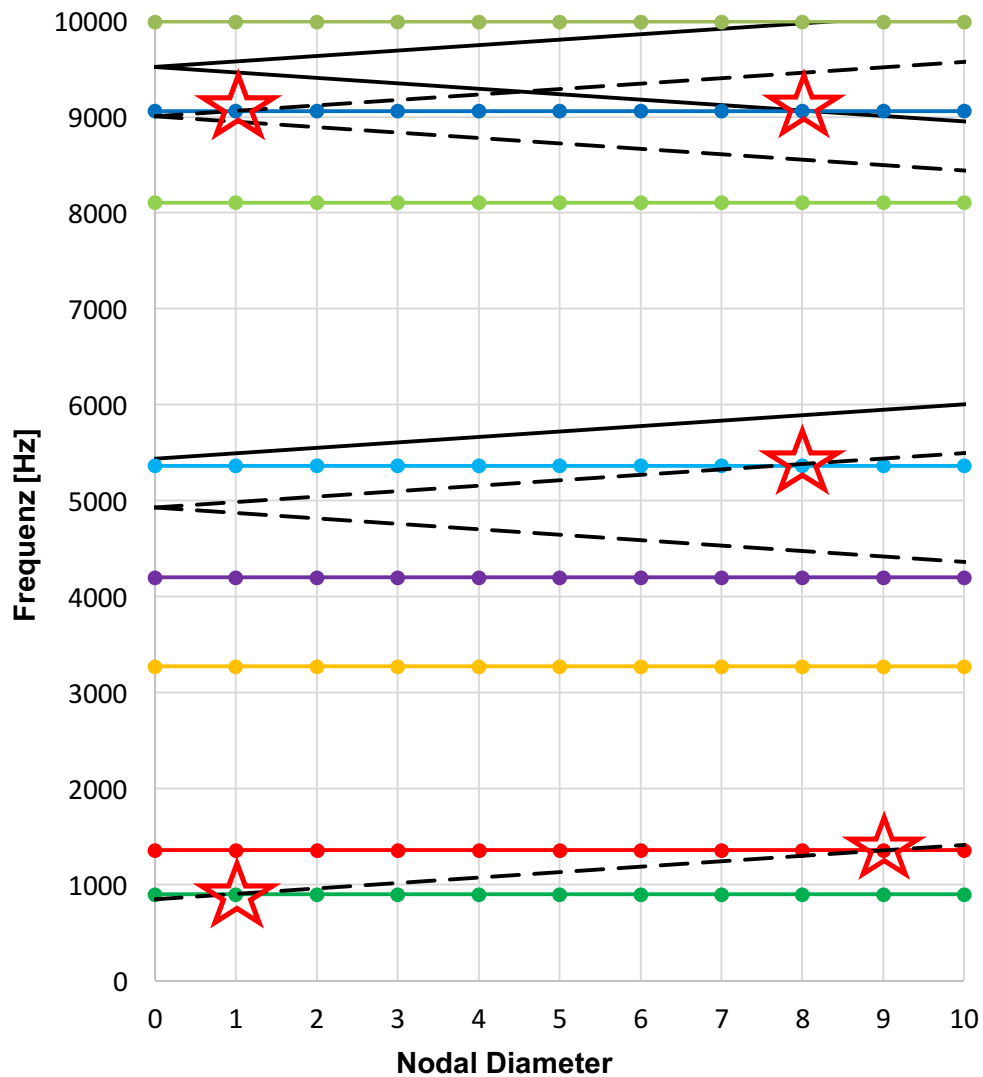


Abbildung 44: Interferenz-Diagramm Schaufel (Betriebspunkt ADP)

Im Interferenz-Diagramm ergeben sich fünf Schnittpunkte zwischen den Eigenfrequenzen und den Anregelinien. Anhand des Interferenz-Diagramms kann somit auf fünf angeregte Resonanzen der Schaufel geschlossen werden.

4.4.5 Zusammenfassung der Ergebnisse Schaufel

Anhand der beiden Diagramme in Abbildung 43 und Abbildung 44 konnte auf mehrere Resonanzstellen geschlossen werden. Erkennbar ist, dass der direkte Schnittpunkt im Campbell-Diagramm auch deutlich im Interferenz-Diagramm zu erkennen ist. Die Ergebnisse der Schaufel unterstützen in späterer Folge die Auffindung der schaufeldominanten Moden des Gesamtsystems und die Einteilung der Moden in die sogenannten Modfamilien. Anhand der Ergebnisse kann eine erste Abschätzung über mögliche Resonanzstellen getroffen werden.

4.5 Teilsystem Rotorscheibe

Die Rotorscheibe, nachfolgend oftmals nur als Scheibe bezeichnet, ist neben der Beschaukelung der zweite Hauptbestandteil des Rotors und besitzt aufgrund der großen Masse einen wesentlichen Einfluss auf die modale Charakteristik des Systems. Sie dient dabei neben der Befestigung des Rotors am Prüfstand auch der Aufnahme der Schaufeln. Als prüfstandabhängiges Systemelement wird die Scheibe nicht bis ins Detail untersucht, dennoch ist es erforderlich, die modalen Eigenschaften für die spätere Untersuchung des Gesamtsystems zu erfassen. Nachfolgend wird auf die Modellbildung sowie die Simulationsparameter näher eingegangen. Die Bezeichnung Rotorscheibe bzw. Scheibe ist nicht mit der Definition Scheibe/Platte konform, sie folgt auch der Form- bzw. der Namensgebung.

4.5.1 Modellbildung und Simulationsparameter

In diesem Abschnitt wird auf die Modellbildung, die Vernetzung sowie die erforderlichen Randbedingungen bei der Modalanalyse der Rotorscheibe eingegangen. An dem zur Simulation verwendeten Modell wurden keine Vereinfachungen durchgeführt, da dies zu Unterschieden in der Systemcharakteristik führen könnte. Für die aus Stahl gefertigte Rotorscheibe wurden die Werkstoffkennwerte aus Tabelle 2 in der Simulation verwendet.

Bei dem Modell wurden, wie in Abbildung 45 a) ersichtlich, die zentrische Bohrung und die beiden zugehörigen Stirnflächen mit Randbedingungen belegt. Dazu wurde die Bedingung „frictionless“-Support gewählt. Um die zentrische Bohrung wurde für die Erstellung des Campbell-Diagramms auch die Drehbewegung definiert.

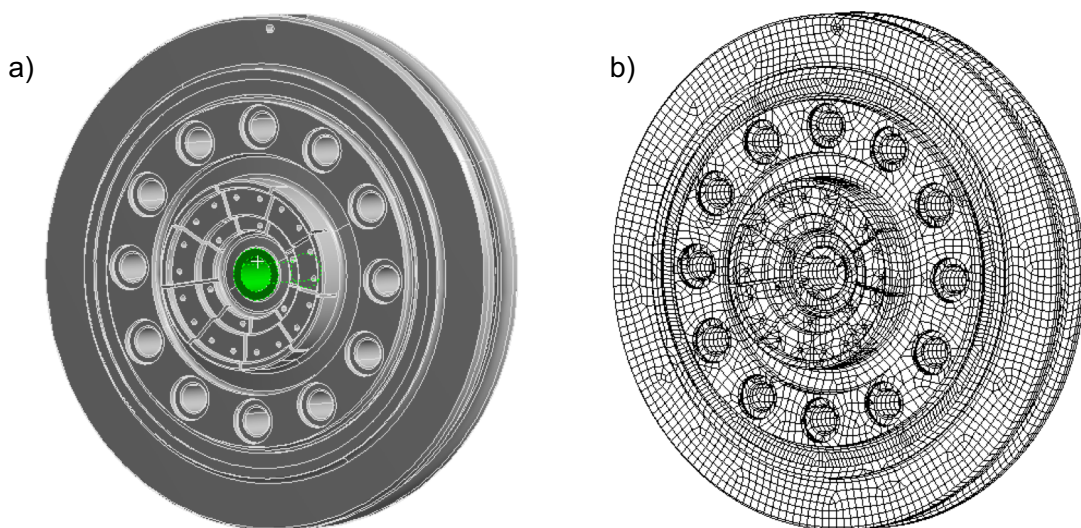


Abbildung 45: Netz und Randbedingungen Scheibe

Bei der Wahl der Netzparameter wurde schon, wie beim 1BI-Modell, eine Netzunabhängigkeitsstudie durchgeführt. Dabei wurde neben der Vernetzungsmethode auch die Netzgröße variiert. Zu diesem Zweck wurden Gitterelemente mit einer Größe von 3,0 mm, 5,0 mm sowie 10,0 mm verwendet.

Tabelle 6: Netzunabhängigkeitsstudie Rotorscheibe

	„Tetraeder“-Methode			„Hex-Dominant“-Methode		
	3,0 mm	5,0 mm	10,0 mm	3,0 mm	5,0 mm	10,0 mm
1. EF	2780 Hz	2784 Hz	2795 Hz	2780 Hz	2780 Hz	2794 Hz
2. EF	4421 Hz	4429 Hz	4449 Hz	4420 Hz	4420 Hz	4442 Hz
3. EF	4918 Hz	4928 Hz	4960 Hz	4915 Hz	4915 Hz	4935 Hz
4. EF	6640 Hz	6663 Hz	6726 Hz	6635 Hz	6636 Hz	6699 Hz
5. EF	7045 Hz	7075 Hz	7166 Hz	7038 Hz	7038 Hz	7116 Hz
6. EF	8039 Hz	8074 Hz	8717 Hz	8032 Hz	8034 Hz	8123 Hz
7. EF	8622 Hz	8676 Hz	8884 Hz	8611 Hz	8612 Hz	8796 Hz
8. EF	9381 Hz	9422 Hz	9542 Hz	9371 Hz	9374 Hz	9485 Hz

In Tabelle 6 sind die Ergebnisse der Netzunabhängigkeitsstudie dargestellt. Dabei hat sich ergeben, dass die Simulationsergebnisse mit der Methode „Hex-Dominant“ erstellten Netze und einer Elementgröße kleiner gleich 5,0 mm unabhängig von den Netzparametern sind. Bei der Vernetzung mit Tetraeder-Elementen ist es mit den gewählten Parametern nicht möglich eine vollständige Unabhängigkeit vom Rechengitter zu erreichen. Erst bei einer feineren Netzgröße würde diese Unabhängigkeit erreicht werden. Da aber damit die Elementanzahl stark zunimmt, wird diese Methode nicht zur Vernetzung der Rotorscheibe verwendet.

Aufgrund der durchgeführten Netzuntersuchung wurde die Rotorscheibe somit ganzheitlich mit 5 mm großen Netzelementen und der Methode „Hex Dominant“ vernetzt. Dies führt zu einer Unabhängigkeit der Simulationsergebnisse vom Netz. Da es sich bei der Scheibe um ein Einzelteil handelt, waren, analog zur Schaufel, keine Verfeinerung aufgrund der entfallenden Kontaktbereiche erforderlich. Das in Abbildung 45 b) dargestellte Netz der Rotorscheibe besteht aus insgesamt 116.708 Elementen und 339.381 Knoten.

4.5.2 Systemcharakterisierung

Die auftretenden Eigenformen lassen sich bei der Rotorscheibe anhand der Schwingungsform (axial, tangential oder radial) sowie der Nodal-Circle- und Nodal-Diameter-Anzahl beschreiben. Im Rahmen der Arbeit liegt der Fokus auf den Plattenschwingungen, d.h. den axialen Schwingungsformen. Die tangentialen und radialen Eigenformen werden bei der nachfolgenden Auswertung vernachlässigt. Die betrachtete Rotorscheibe des HSL-Rotors besitzt eine über den Umfang veränderliche Steifigkeit, bedingt durch die über den Umfang verteilten Bohrungen. Dies führt dazu, dass die auftretenden Modenpaare (gleiche Eigenform aber phasenverschoben) einen geringen Frequenzunterschied besitzen. In Abbildung 46 sind beispielhaft vier Eigenformen mit unterschiedlichen Nodal Diametern und Nodal Circle Anzahlen dargestellt. Alle im Untersuchungsbereich von 0-10 kHz auftretenden Eigenformen sind in „Anhang C-3: Scheibenmoden“ gesammelt angeführt.

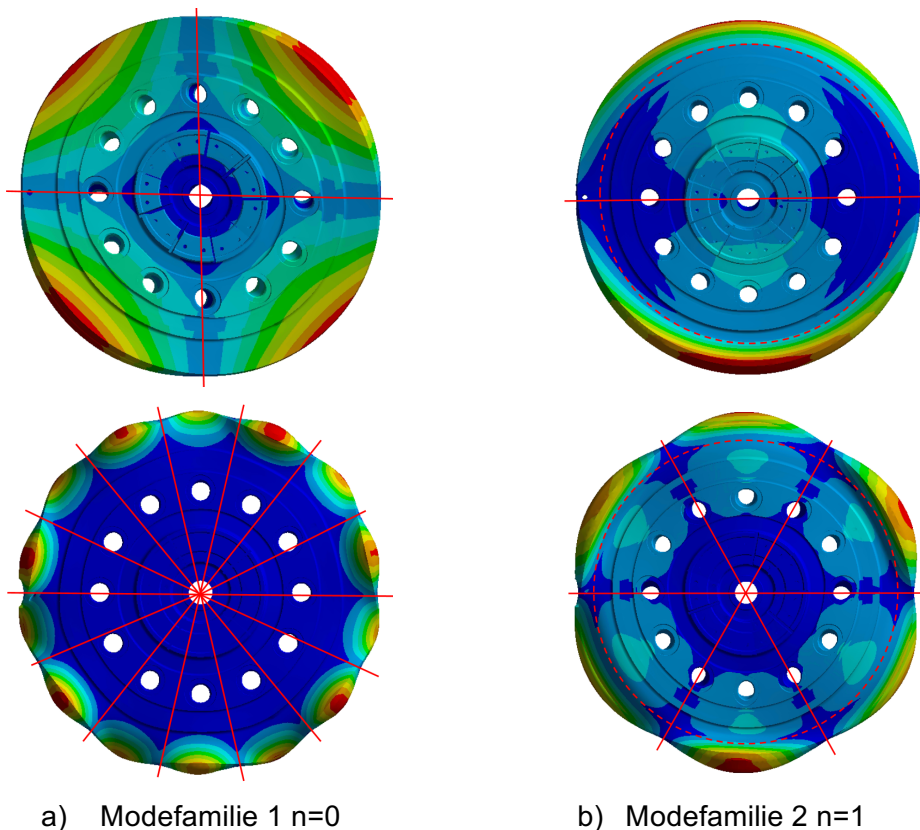


Abbildung 46: Beispielhafte Einteilung in Modefamilien

Die auftretenden Eigenformen einer Scheibe lassen sich anhand der Nodal Circle Anzahl n zu Modefamilien zusammenfassen. Die Rotorscheibe ist ein Kontinuumschwinger mit theoretisch unendlich vielen Eigenformen und somit Knotenkreisen und Knotendurchmessern. Im untersuchten Frequenzbereich bis 10.000 Hz traten Eigenformen mit keinem sowie mit einem Knotenkreis ($n=0$ bzw. $n=1$) auf. Somit besitzt die Rotorscheibe in diesem Frequenzbereich zwei Modefamilien, die in Abbildung 46 a) bzw. b) dargestellt sind. Der maximal aufgetretene Nodal Diameter liegt bei $m=6$.

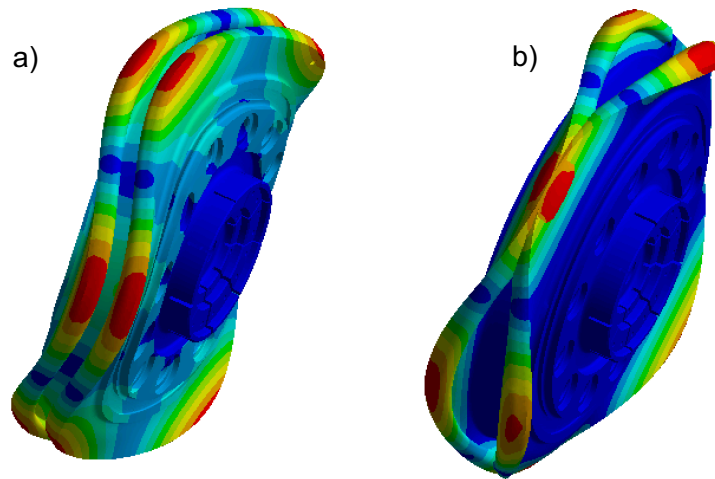


Abbildung 47: Modenauswahl

Bei der Simulation haben sich unterschiedlichste Eigenformen ausgebildet. Bei der Auswertung wurden nur jene mitberücksichtigt, die wie in Abbildung 47 a) im Bereich der Schaufelaufnahme eine gleichphasige Schwingung aufgewiesen haben. Eigenformen, die, wie in Abbildung 47 b), eine gegenphasige Schwingung aufgewiesen haben, wurden nicht berücksichtigt. Der Grund dafür liegt in der Beschaffenheit des Gesamtsystems. Die Schaufeln füllen den Zwischenraum aus und somit wird angenommen, dass keine gegenphasigen Schwingungen möglich sind.

4.5.3 Campbell-Diagramm

In Abbildung 48 ist das Campbell-Diagramm der Rotorscheibe dargestellt. Dabei stellen die schwarzen Linien drehzahlabhängige Eigenfrequenzen dar. Die beiden grünen sind die Anregekurven des Stators (mit Engine Order 96, EO96) und des TEC's (mit Engine Order 15, EO15), die sich anhand der beiden Gleichungen (Gl. 172) und (Gl. 173) beschreiben lassen. Dabei ist f_e die Erregerfrequenz bedingt durch die Blade-Passing Excitation und n die Drehzahl, 96 bzw. 15 sind die Leitschaufelanzahlen des Stators bzw. des Rotors.

$$f_{eEO96} = \frac{96 * n}{60} \quad (\text{Gl. 172})$$

$$f_{eEO15} = \frac{15 * n}{60} \quad (\text{Gl. 173})$$

Die dicke rotbraune Linie kennzeichnet den Betriebspunkt, die beiden rotbraun strichlierten Linien markieren den Bereich von $\pm 300 \text{ min}^{-1}$ in dem ein Schnittpunkt mit der Engine Order zu einer starken Amplitudenüberhöhung führt.

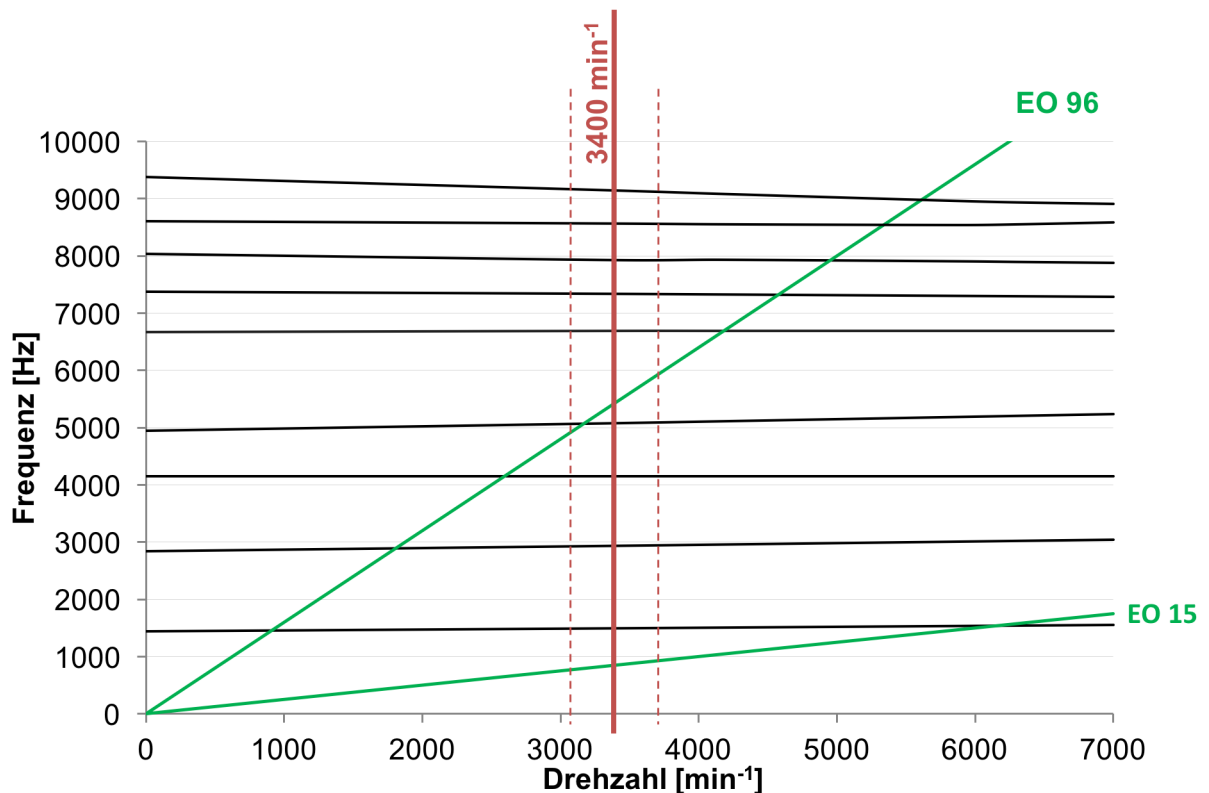


Abbildung 48: Campbell-Diagramm Scheibe

Im Campbell-Diagramm kommt es bei Betriebsdrehzahl zu keinem Schnittpunkt zwischen einer Erregung und einer Eigenfrequenz. Dennoch wird die 4. Eigenfrequenz in unmittelbarer Nähe zum Betriebspunkt von der Anregekurve EO 96 geschnitten. Dadurch ist anzunehmen, dass durch die Nähe der Eigenfrequenz zur Erregerfrequenz die Amplitude stark anwächst.

Tabelle 7: Daten zum Campbell-Diagramm Rotorscheibe

	Drehzahl [min^{-1}]					Schwingungsform		
	0	3400	4140	5900	6300	NC	ND	Form
1. EF	1441 Hz	1496 Hz	1508 Hz	1538 Hz	1545 Hz	0	1	axial
2. EF	2841 Hz	2937 Hz	2959 Hz	3012 Hz	3024 Hz	0	2	axial
3. EF	4150 Hz	4150 Hz	4150 Hz	4150 Hz	4150 Hz	1	0	axial
4. EF	4946 Hz	5076 Hz	5107 Hz	5184 Hz	5201 Hz	0	3	axial
5. EF	6664 Hz	6692 Hz	6692 Hz	6692 Hz	6692 Hz	0	4	axial
6. EF	7369 Hz	7335 Hz	7325 Hz	7302 Hz	7297 Hz	1	1	axial
7. EF	8034 Hz	7925 Hz	7931 Hz	7903 Hz	7893 Hz	0	5	axial
8. EF	8610 Hz	8564 Hz	8550 Hz	8535 Hz	8549 Hz	1	2	axial
9. EF	9375 Hz	9141 Hz	9083 Hz	8959 Hz	8936 Hz	0	6	axial

Die zum Campbell-Diagramm gehörenden Daten sind in Tabelle 7 angeführt. Dabei wurden in der rechten Spalte „Schwingungsformen“ die zugehörigen Eigenformen anhand der Schwingungsart sowie der Nodal-Diameter-Anzahl als auch der Nodal-Circle-Anzahl näher beschrieben.

4.5.4 Interferenz-Diagramm

In Abbildung 49 ist das Interferenz-Diagramm der Rotorscheibe dargestellt. Die beiden farbigen Linien (grün, rot) stellen dabei die Eigenfrequenzen der Scheibe, aufgetragen über den Nodal-Diameter, dar. Die rote Linie beschreibt dabei die Modefamilie 1 mit einer Nodal-Circle-Anzahl $n=0$, die grüne Linie Modefamilie 2 mit $n=1$. Die schwarze Volllinie ist die Anregung bedingt durch den Stator, die strichlierte Linie jene des stromabwärtsliegenden TEC's. Für die genaue Beschreibung der Anregung wird auf „Anhang C-1: Grundlegendes zum Interferenz-Diagramm“ verwiesen.

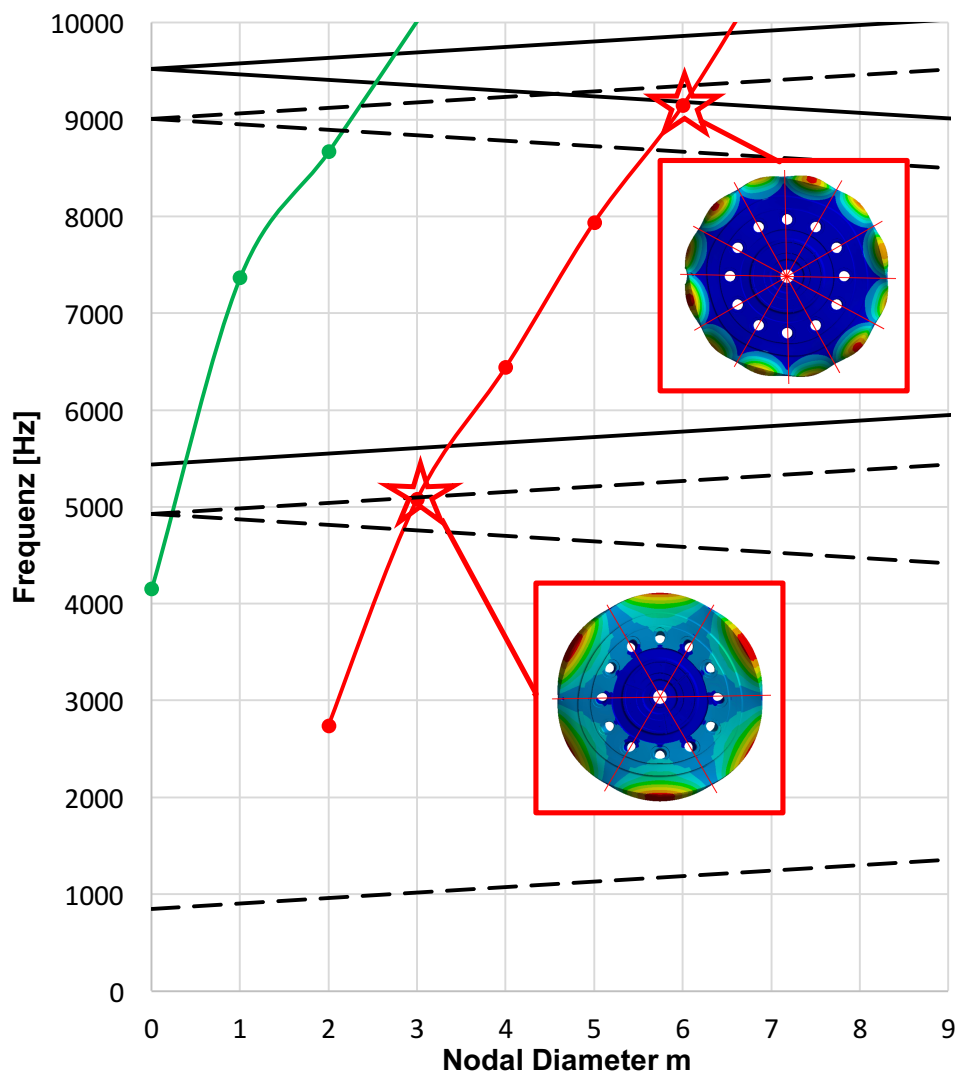


Abbildung 49: Interferenz-Diagramm Scheibe (Betriebspunkt ADP)

Im in Abbildung 49 dargestellten Interferenz-Diagramm kommt es zu zwei Schnittpunkten zwischen einer Zick-Zack-Linie und einer Modelfamilie. Dabei wird ein Mode ($m=6$, $n=0$) durch den Stator und der andere durch das StandardTEC ($m=3$, $n=0$) angeregt. Die beiden angeregten Moden gehören zur selben Modelfamilie (Modelfamilie1) mit einer Nodal Circle Anzahl von $n=0$. In Tabelle 8 sind die beiden Eigenfrequenzen mit den zugehörigen Anregefrequenzen angeführt.

Tabelle 8: Resonanz der Scheibe (Disk-Alone)

		Eigenfrequenz	Anregfrequenz
Modelfamilie 1	ND=3	$f_{30} = 5076 \text{ Hz}$	$f_m = 5100 \text{ Hz}$
Modelfamilie 1	ND=6	$f_{60} = 9141 \text{ Hz}$	$f_m = 9123 \text{ Hz}$

In Tabelle 8 ist ersichtlich, dass die Frequenzunterschiede zwischen Anregung und der jeweiligen Eigenfrequenz sehr gering sind. Technisch gesehen kommt es in beiden Fällen zu Resonanz, da der Frequenzunterschied zu vernachlässigen ist. Dies ist dadurch bedingt, dass die Amplitude der erzwungenen Schwingungen bereits in der Nähe der Resonanzstellen sehr stark zunimmt. Die beiden angeregten Eigenformen sind direkt im Interferenz-Diagramm dargestellt.

4.5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse Scheibe

Aus dem Campbell- sowie dem Interferenz-Diagramm konnten einige Resonanzstellen ermittelt werden. Dabei zeigte sich im Campbell-Diagramm ein Schnittpunkt zwischen der 4. Eigenfrequenz und der Engine Order EO96 des Stators im Nahebereich des Betriebspunktes. Im Interferenz-Diagramm hat sich gezeigt, dass es zu zwei Schnittpunkten zwischen den Zick-Zack-Linien und Eigenformen kam. Ein Schnittpunkt trat zwischen der Anregung des TEC's und dem Mode $m=3$ $n=0$ (4. Eigenfrequenz) und ein weiterer zwischen der Anregung des Stators und dem Mode $m=6$ $n=0$ auf. Da das Interferenz-Diagramm neben der Frequenzübereinstimmung auch die Übereinstimmung der Phasenlage zwischen Schwingung und Anregung fordert, wird angenommen, dass die 4. Eigenfrequenz hauptsächlich durch eine höherharmonische Anregung des TEC's erregt wird.

Resonanz bei:	$f_{30} = 5071 \text{ Hz}$	StandardTEC (EO15)
	$f_{60} = 9141 \text{ Hz}$	Stator (EO96)

Die Untersuchung der Rotorscheibe unterstützt das Auffinden der scheidendominanten Eigenformen des Gesamtsystems. Zudem konnten Anhaltswerte für die scheidendominanten Eigenfrequenzen des Gesamtsystems gefunden werden. Des Weiteren sind diese Erkenntnisse für die Prüfstandscharakteristik von großer Bedeutung, da ähnliche bzw. die gleiche Scheibengeometrie/n auch in anderen Projekten verwendet wird / werden und somit die gewonnenen Ergebnisse auf diese Projekte übergeleitet werden können.

4.6 72BI-Modell

Das 72-Schaufel-Modell (72BI-Modell) entspricht dem im Prüfstand verwendeten und untersuchten HSL-Rotor. Das Ziel dieser Untersuchung ist es, die modale Charakterisierung zu vervollständigen und festzustellen, von welcher Systemkomponente (Schaufel oder Scheibe) die Schwingungen ausgehen. In den nachfolgenden Punkten wird auf die Modellaufbereitung, die Systemcharakterisierung anhand der auftretenden Moden/-familien sowie die Resonanzuntersuchung mit Hilfe der Campbell- und Interferenz-Diagramme eingegangen. Durch die beiden Diagramme soll auf Resonanzeffekte, bedingt durch externe Erregung, geschlossen werden.

4.6.1 Modellaufbereitung und Vernetzung des 72BI-Modells

Nachfolgend werden die Modellbildung, die Kontaktbedingungen, die Randbedingungen sowie die Vernetzungsparameter für das verwendete Modell erläutert. Für zusätzliche Informationen wird auf Schitter [29] verwiesen.

Das in Abbildung 50 dargestellte 72BI-Modell besteht im Gegensatz zu den vorangegangenen Modellen nicht mehr aus einem Einzelteil, sondern ist eine Baugruppe mit 74 Bauteilen (ohne Keile). Dies führt dazu, dass bei diesem Modell erstmals die Kontakte zwischen den einzelnen Systemkomponenten definiert werden müssen. Somit war es im Rahmen der Modellaufbereitung erforderlich, die Kontaktflächen der einzelnen Systemkomponenten aneinander anzupassen, da diese aufgrund der Importgeometrie nicht deckungsgleich waren. Des Weiteren wurden bei der Rotorscheibe Rundungen und Phasen entfernt sowie einige M6 Gewindebohrungen verschlossen. Dies hatte den Zweck bei der Vernetzung in diesen Bereichen gröber auflösen zu können und somit die Elementanzahl zu reduzieren. Im Rahmen der Simulation wurden die in Tabelle 2 angeführten Werkstoffkennwerte für die Schaufel (Aluminium) und die Rotorscheibe (Stahl) verwendet.

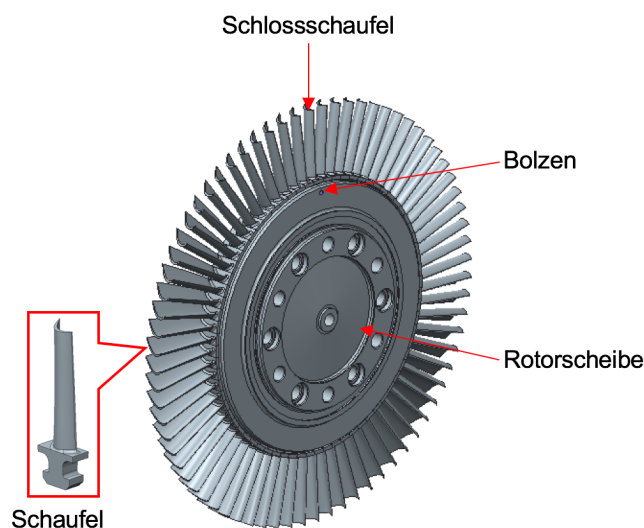


Abbildung 50: 72BI-Modell

Wie bereits beschrieben, besteht der Rotor aus 72 über den Umfang verteilten Schaufeln, die mittels Hammerkopf in der Rotorscheibe eingehängt und mit dieser verkeilt sind. Diese Konfiguration mit den verkeilt Schaufeln führt dazu, dass nur minimalste bzw. keine Relativbewegungen zwischen der Rotorscheibe und den Schaufeln im Betrieb auftreten können. Somit kann als gute Näherung angenommen werden, dass an den Kontaktflächen keine Relativbewegungen auftreten. Dies bedeutet für die Simulation, dass die Kontakte zwischen den Systemkomponenten mit der Kontaktformulierung „Bonded“ definiert werden können. In Abbildung 51 sind die mit Kontaktbedingungen belegten Flächen dargestellt.

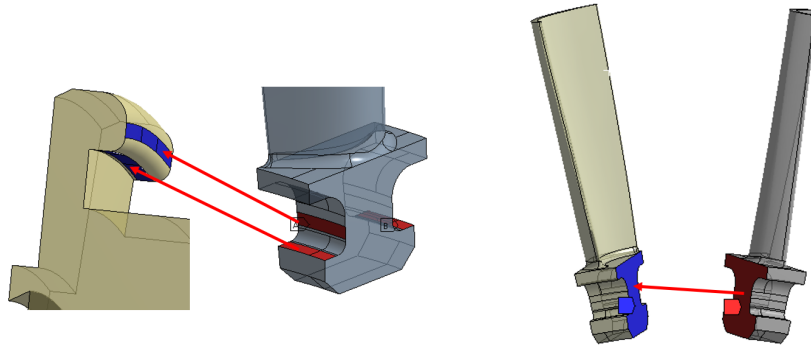


Abbildung 51: Kontaktflächen zwischen den Einzelkomponenten

Die Schlossschaufel ist im Prinzip mit den gleichen Haft- bzw. Kontaktbedingungen versehen wie jede andere Schaufel. Das bedeutet der Kontakt zu den Nachbarschaufeln wurde auch mit einer „Bonded“-Bedingung definiert. Die „Bonded“-Bedingung am Schaufelfuß wurde hier auf den Kontakt des Bolzens zur Schlossschaufelbohrung sowie den Kontakt Bolzen zu Rotorscheibe übertragen. Zu einer besseren Verständlichkeit sind in Abbildung 52 die Kontaktflächen an der Schlossschaufel bzw. jene am Bolzen dargestellt. Die hellgrüne Fläche an der Schaufel zeigt die Kontaktflächen zu den Nachbarschaufeln. Jene am Bolzen zeigt den Kontakt zur Rotorscheibe. Die dunkelgrüne Fläche am Bolzen ist die Kontaktfläche zur Schlossschaufel.

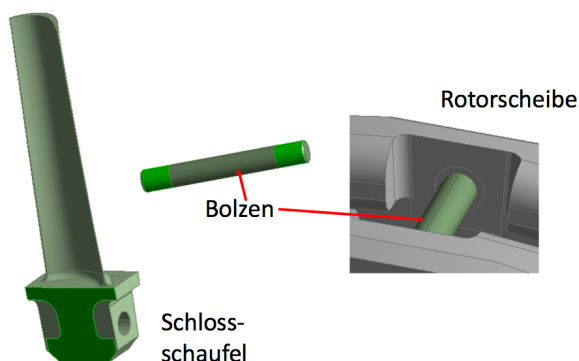


Abbildung 52: Kontaktflächen Schlossschaufel

Im Unterschied zur Rotorscheibe wurde hier an der zentralen Bohrung keine „Frictionless“-, sondern eine „Remote-Displacement“-Bedingung, wie in Abbildung 53 grün dargestellt, verwendet. Dabei wurden alle Bewegungen außer Rotordrehung gesperrt.

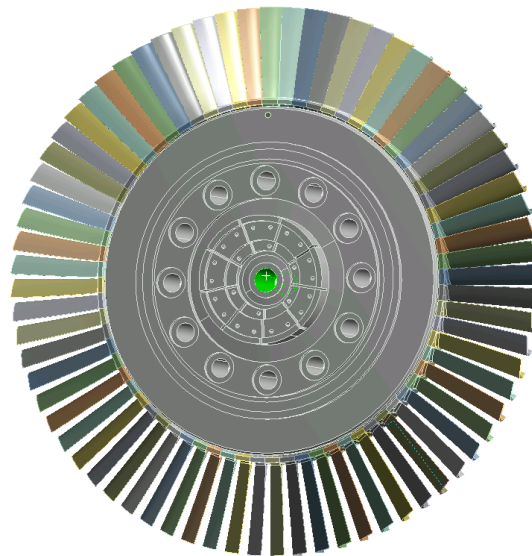


Abbildung 53: Remote Displacement an der zentralen Bohrung

Aufbauend auf den Netzunabhängigkeitsstudien der Teilsysteme wurden die Netzparameter für das Gesamtmodell gewählt. Die Scheibe wurde mit der „Hex-Dominant“-Methode mit einer Elementgröße von 5,0 mm vernetzt, die Schaufeln mit 2,5 mm großen „Tetraeder“-Elementen. Diese Auswahl wurde getroffen, um die Elementanzahl des 72BI-Modells zu minimieren aber dennoch eine netzunabhängige Lösung zu erhalten. Wesentlicher Unterschied beim Netz des 72BI-Modells zu den Teilsystemen sind die Verfeinerungen und aneinander orientierte Netze in den Kontaktbereichen. Dazu wurden die Kontakte der Schaufeln zueinander sowie die Kontaktbereiche Schaufeln-Rotorscheibe mit 2,0 mm großen „Mapped Surface“-Elementen aufgelöst. Die Kontaktflächen Schlossschaufel zu Bolzen, Bolzen zu Rotorscheibe sowie der Kontakt Schlossschaufel Rotorscheibe wurden mit 1,0 mm großen „Mapped Surface“-Elementen vernetzt. Das in Abbildung 54 dargestellte vernetzte 72BI-Modell besteht aus 686.731 Netzelementen.

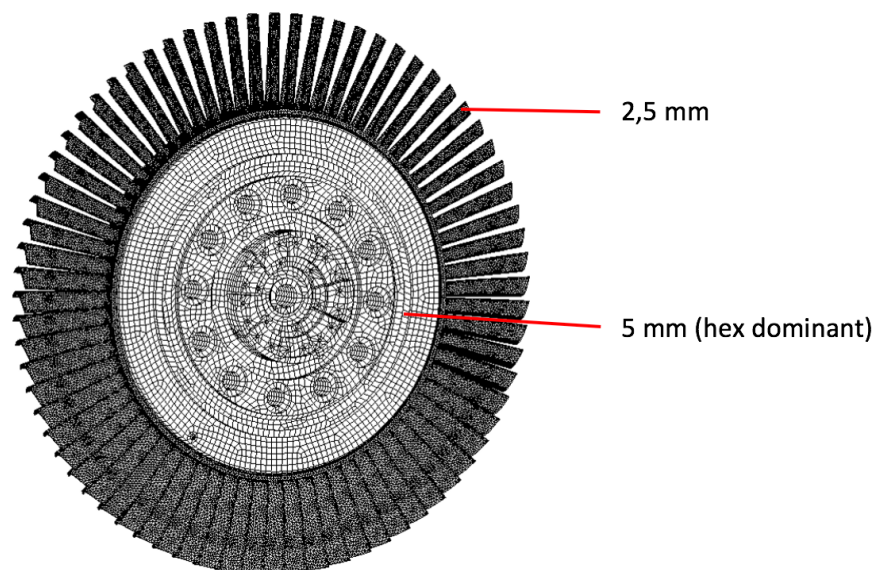


Abbildung 54: Netzgitter 72BI-Modell

4.6.2 Systemcharakterisierung

Das 72BI-Modell ist eine beschauelte „Scheibe“, die aus einer Rotorscheibe und 72 über den Umfang verteilten Rotorschaukeln besteht. Bei manchen Eigenformen dominiert die Bewegung der Schaufel, bei anderen jene der Rotorscheibe. So lassen sich je nach dominierendem Bauteil die Moden in schaufeldominante Moden, wie in Abbildung 55 a), und in scheidendominante Moden, Abbildung 55 b), unterscheiden. Diese Unterscheidung bedeutet aber nicht, dass bei z.B. schaufeldominanten Moden nur die Schaufeln schwingen, es schwingt der gesamte Rotor nur die Schaufeln dominieren die Schwingungen. Betrachtet man Abbildung 55 b) ist ersichtlich, dass durch die Schwingung der Rotorscheibe die Schaufeln ebenfalls angeregt werden. Durch die Rotorscheibe kommt es zu einer Fußpunktanregung der Rotorschaukeln. Dem Schaufelkranz wird somit der Nodal Diameter der Rotorscheibe aufgeprägt.

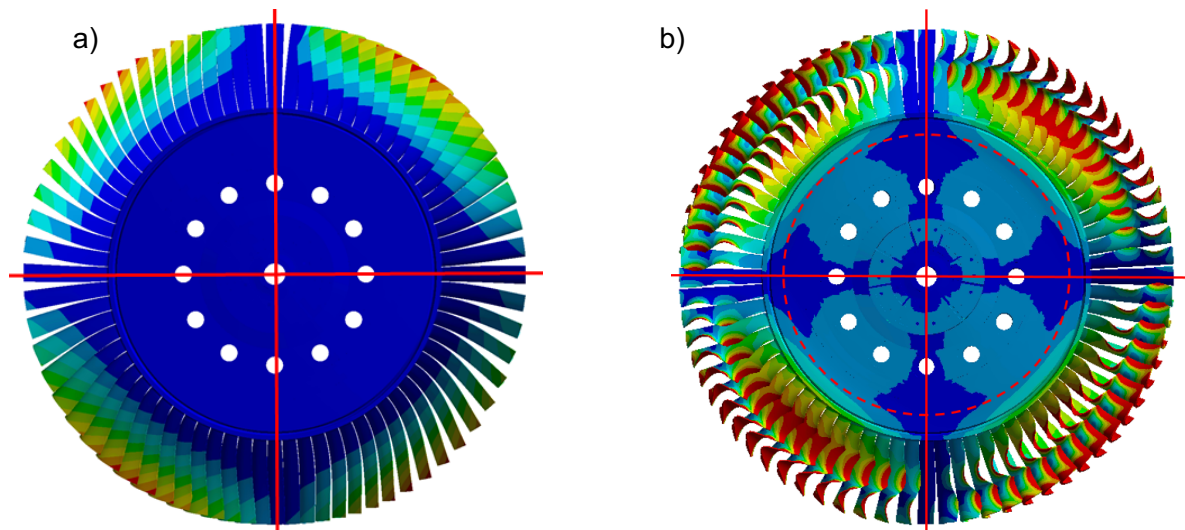
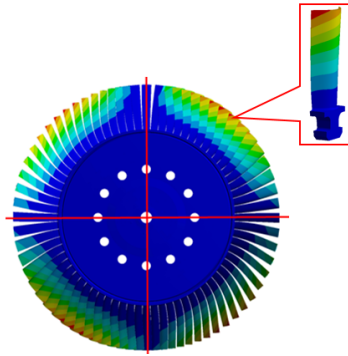
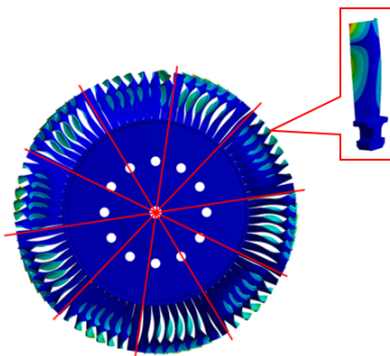


Abbildung 55: schaufel- und scheidendominante Moden

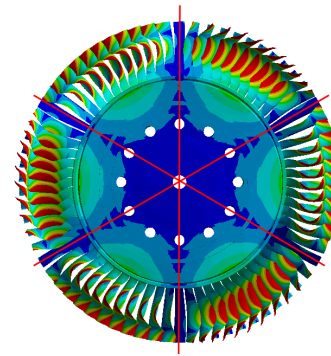
Anhand dieser Unterteilung in schaufeldominante sowie in scheidendominante Moden lassen sich die Eigenformen zu Modefamilien zusammenfassen. Bei den schaufeldominanten Moden erfolgt die Zusammenfassung anhand der sich ausbildenden Schaufeleigenformen. Die scheidendominanten Moden werden anhand der Nodal-Circle-Anzahl n zu den Modefamilien zusammengefasst. In Abbildung 56 sind beispielhaft einige Eigenformen unterschiedlichster Modefamilien dargestellt. Die Visualisierung der Eigenformen erfolgt wie in der gesamten Arbeit anhand der Verschiebung. Alle auftretenden Modefamilien sowie Eigenformen des 72BI-Modells sind im Anhang unter „Anhang C-4: Eigenformen Rotor“ angeführt.

Schaufeldominante Modefamilien

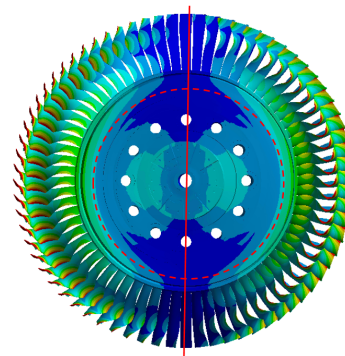
1. schaufeldominante Modefamilie



6. schaufeldominante Modefamilie

Scheibendominante Modefamilien

3. scheibendominante Modefamilie n=0



2. Scheibendominante Modefamilie n=1

Abbildung 56: Vergleich der Modefamilien

Die einzelnen Eigenformen innerhalb einer Modefamilie lassen sich anhand der Nodal-Diameter-Anzahl m unterscheiden. Bei den schaufeldominanten Moden ist der maximal mögliche Nodal-Diameter eine Funktion der Schaufelanzahl und lässt sich anhand (Gl. 174) berechnen. Dadurch folgt, dass eine schaufeldominante Modefamilie maximal 37 Eigenformen ($m=0\dots36$) beinhalten kann.

$$m_{max} = \frac{R}{2} = \frac{72}{2} = 36 \quad (\text{Gl. 174})$$

Bei den scheibendominanten Moden gilt diese Grenze theoretisch nicht. Jede scheibendominante Modefamilie (d.h. Nodal-Circle-Anzahl n ist konstant) würde unendlich viele Moden beinhalten. In der Praxis wird jedoch angenommen, dass bei den scheibendominanten Moden auch maximal 37 Eigenformen in einer Modefamilie enthalten sind. Dies ist dadurch bedingt, da die Schaufeln die Eigenform beeinflussen und höhere Nodal-Diameter bei der Auswertung nicht mehr erkennbar sind.

Insgesamt sind bei der Auswertung sechs schaufeldominante sowie drei scheibendominante Modefamilien aufgetreten. Dabei gab es zwei scheibendominante Modefamilien mit einer Nodal-Circle-Anzahl von $n=0$. Dabei handelt es sich in beiden Fällen um axiale Schwingungen der Rotorscheibe.

4.6.3 Campbell-Diagramm

Das in Abbildung 57 dargestellte Campbell-Diagramm beinhaltet sowohl die scheiben- (rot) als auch die schaufeldominanten Moden (schwarz). Die schaufeldominanten Modenfamilien stellen sich im Campbell-Diagramm als schwarzes Linienbündel dar. Dabei liegen die Frequenzen teils so eng zusammen, dass aufgrund der Skalierung nicht mehr eine bestimmte Eigenfrequenz herausgelesen werden kann. Die in rot dargestellten scheibendominanten Moden treten meist als Modepaare auf und können somit auch eindeutig abgelesen werden. Die beiden grünen Linien sind die Anregekurven des Stators (EO 96) und des TEC's (EO 15), die sich anhand der beiden Gleichungen (Gl. 175) und (Gl. 176) beschreiben lassen. Dabei ist f_e die Blade-Passing Frequency und n die Drehzahl.

$$f_{eEO96} = \frac{96 * n}{60} \quad (\text{Gl. 175})$$

$$f_{eEO15} = \frac{15 * n}{60} \quad (\text{Gl. 176})$$

Die rotbraune Linie kennzeichnet den Betriebspunkt, die rotbraun strichlierten Linien begrenzen den Bereich von $\pm 300 \text{ min}^{-1}$, in dem ein Schnittpunkt zu einer starken Amplitudenzunahme führt.

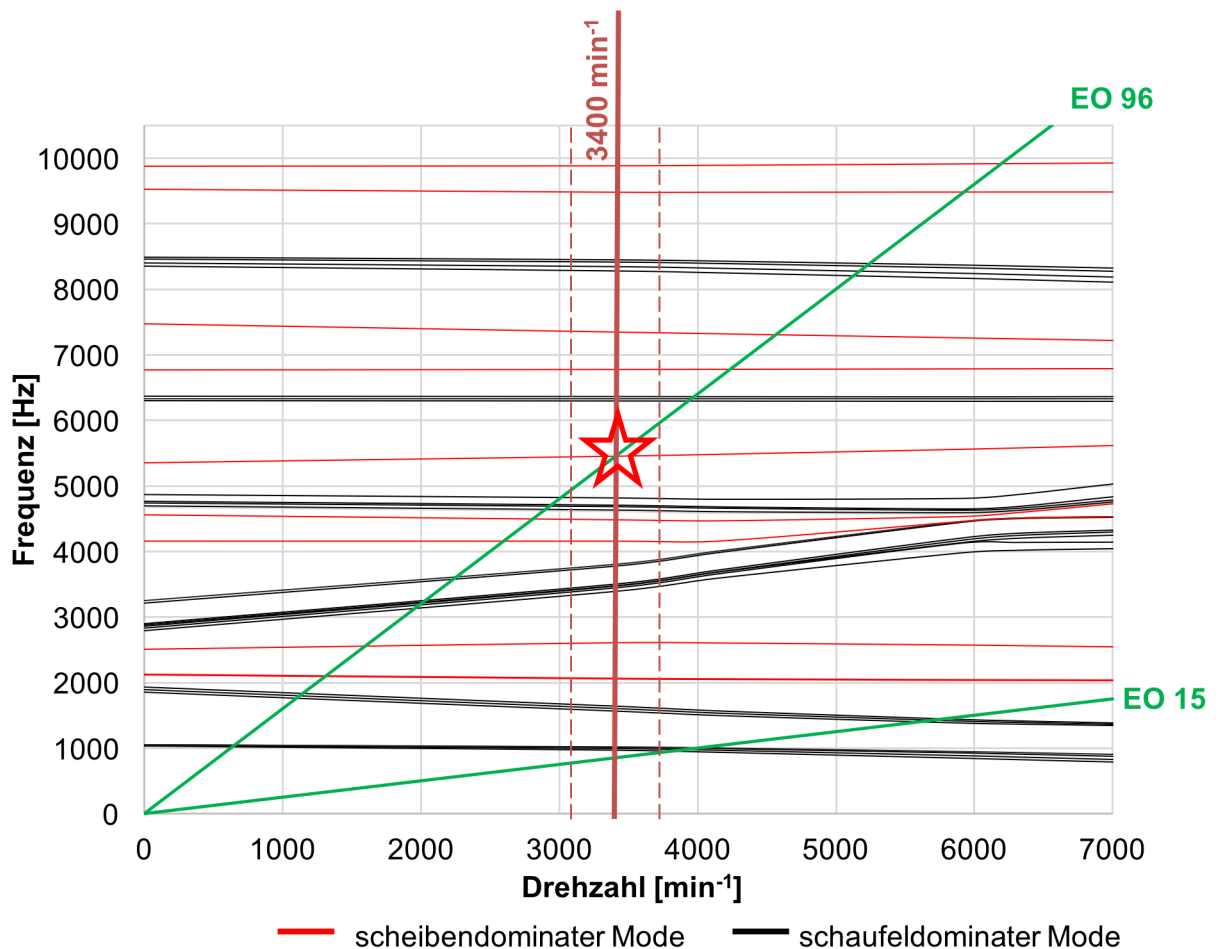


Abbildung 57: Campbell-Diagramm 72BI-Modell

Im Campbell-Diagramm kommt es zu einem Schnittpunkt zwischen der Engine Order des Stators (EO96) und einer scheibendominanten Eigenfrequenz des Rotors. Der dabei angeregte Mode hat eine Nodal Circle Anzahl von $n=0$ und einen Nodal Diameter von $m=3$. Innerhalb des Bereichs von $\pm 300 \text{ min}^{-1}$ kommt es zu keinem weiteren Schnittpunkt zwischen einer Engine Order und einer Eigenfrequenz.

In Tabelle 9 sind die zum Campbell-Diagramm gehörigen Daten angeführt. Dabei wurden die Eigenfrequenzen bei verschiedenen Drehzahlen (Stützstellen) aufgelistet. Zudem werden die Eigenformen einerseits mit der Nodal Diameter und Nodal Circle Anzahl und andererseits der Dominanz (schaufel- oder scheibendominanter Mode) und der Schwingungsform beschrieben.

Tabelle 9: Daten Campbell-Diagramm 72BI-Modell

Drehzahl [min^{-1}]					Schwingungsform				
0	3400	4140	5900	6300	NC	ND	Dominanz	Form	
1038 Hz	972 Hz	940 Hz	848 Hz	826 Hz	-	1	Schaufel	1. Biegeeigenform der Schaufel (kl. Widerstandsmom.)	
1047 Hz	999 Hz	973 Hz	892 Hz	871 Hz	-	2	Schaufel		
1049 Hz	1005 Hz	982 Hz	907 Hz	885 Hz	-	3	Schaufel		
1049 Hz	1006 Hz	984 Hz	909 Hz	889 Hz	-	4	Schaufel		
1050 Hz	1007 Hz	986 Hz	913 Hz	894 Hz	-	5	Schaufel		
1050 Hz	1008 Hz	987 Hz	915 Hz	896 Hz	-	6	Schaufel		
1050 Hz	1009 Hz	988 Hz	918 Hz	900 Hz	-	7	Schaufel		
1775 Hz	1528 Hz	1467 Hz	1380 Hz	1365 Hz	-	2	Schaufel	1. Biegeeigenform der Schaufel (gr. Widerstandsmoment)	
1856 Hz	1567 Hz	1499 Hz	1385 Hz	1369 Hz	-	3	Schaufel		
1878 Hz	1587 Hz	1518 Hz	1399 Hz	1380 Hz	-	4	Schaufel		
1894 Hz	1603 Hz	1533 Hz	1410 Hz	1390 Hz	-	5	Schaufel		
1909 Hz	1617 Hz	1546 Hz	1421 Hz	1400 Hz	-	6	Schaufel		
1923 Hz	1632 Hz	1560 Hz	1432 Hz	1411 Hz	-	7	Schaufel		
1938 Hz	1647 Hz	1574 Hz	1444 Hz	1422 Hz	-	8	Schaufel		
1951 Hz	1661 Hz	1588 Hz	1455 Hz	1433 Hz	-	9	Schaufel	1. Torsionseigenform der Schaufel	
1964 Hz	1674 Hz	1601 Hz	1467 Hz	1444 Hz	-	10	Schaufel		
2122 Hz	2060 Hz	2051 Hz	2038 Hz	2036 Hz	0	0	Scheibe		axial
2513 Hz	2609 Hz	2606 Hz	2576 Hz	2567 Hz	0	2	Scheibe		axial
2794 Hz	3391 Hz	3592 Hz	3976 Hz	4016 Hz	-	3	Schaufel		
2832 Hz	3443 Hz	3655 Hz	4123 Hz	4135 Hz	-	4	Schaufel		
2857 Hz	3469 Hz	3682 Hz	4132 Hz	4199 Hz	-	5	Schaufel		
2882 Hz	3483 Hz	3693 Hz	4172 Hz	4246 Hz	-	1	Schaufel		
2892 Hz	3494 Hz	3708 Hz	4196 Hz	4269 Hz	-	6	Schaufel		
2905 Hz	3516 Hz	3731 Hz	4219 Hz	4291 Hz	-	7	Schaufel		
2931 Hz	3540 Hz	3754 Hz	4228 Hz	4302 Hz	-	8	Schaufel		
2958 Hz	3565 Hz	3769 Hz	4245 Hz	4320 Hz	-	9	Schaufel		
2995 Hz	3588 Hz	3797 Hz	4265 Hz	4344 Hz	-	10	Schaufel		
4157 Hz	4156 Hz	4156 Hz	4460 Hz	4515 Hz	0	1	Scheibe	axial	
4558 Hz	4481 Hz	4465 Hz	4531 Hz	4590 Hz	0	3	Scheibe	axial	

4678 Hz	4613 Hz	4589 Hz	4581 Hz	4619 Hz	-	4	Schaufel	2. Biegeeigenform der Schaufel (kl. Widerstandsmom.)
4699 Hz	4636 Hz	4611 Hz	4596 Hz	4629 Hz	-	5	Schaufel	
4711 Hz	4649 Hz	4624 Hz	4602 Hz	4633 Hz	-	6	Schaufel	
4722 Hz	4661 Hz	4638 Hz	4614 Hz	4643 Hz	-	7	Schaufel	
4732 Hz	4670 Hz	4645 Hz	4618 Hz	4650 Hz	-	8	Schaufel	
4740 Hz	4680 Hz	4654 Hz	4625 Hz	4652 Hz	-	9	Schaufel	
4742 Hz	4684 Hz	4661 Hz	4631 Hz	4658 Hz	-	1	Schaufel	
4750 Hz	4692 Hz	4669 Hz	4637 Hz	4665 Hz	-	2	Schaufel	
5355 Hz	5455 Hz	5483 Hz	5559 Hz	5578 Hz	0	3	Scheibe	
6300 Hz	6297 Hz	6296 Hz	6294 Hz	6293 Hz	-	2	Schaufel	2. Biege- eigenform der Schaufel
6315 Hz	6309 Hz	6307 Hz	6302 Hz	6301 Hz	-	4	Schaufel	
6316 Hz	6313 Hz	6312 Hz	6311 Hz	6311 Hz	-	3	Schaufel	
6321 Hz	6318 Hz	6317 Hz	6315 Hz	6314 Hz	-	5	Schaufel	
6770 Hz	6778 Hz	6781 Hz	6789 Hz	6791 Hz	1	0	Scheibe	axial
7472 Hz	7345 Hz	7319 Hz	7256 Hz	7241 Hz	0	4	Scheibe	axial
7744 Hz	7712 Hz	7703 Hz	7701 Hz	7712 Hz	1	1	Scheibe	axial
8356 Hz	8281 Hz	8252 Hz	8168 Hz	8146 Hz	-	5	Schaufel	Allg. Eigenform der Schaufel
8404 Hz	8347 Hz	8321 Hz	8244 Hz	8223 Hz	-	6	Schaufel	
8421 Hz	8370 Hz	8345 Hz	8274 Hz	8255 Hz	-	7	Schaufel	
8433 Hz	8384 Hz	8360 Hz	8290 Hz	8271 Hz	-	8	Schaufel	
8441 Hz	8393 Hz	8370 Hz	8300 Hz	8282 Hz	-	9	Schaufel	
8536 Hz	8504 Hz	8490 Hz	8446 Hz	8434 Hz	0	4	Scheibe	axial
9525 Hz	9486 Hz	9485 Hz	9488 Hz	9488 Hz	0	5	Scheibe	axial
9882 Hz	9888 Hz	9895 Hz	9914 Hz	9919 Hz	1	2	Scheibe	axial

4.6.3.1 Analyse des Campbell-Diagramms 72BI-Modell

Bei der Untersuchung des Campbell-Diagramms (Abbildung 57) wurde ersichtlich, dass beim betrachteten Betriebspunkt ADP (3400 min^{-1}) ein Schnittpunkt zwischen EO96 (Stator) und einer Eigenfrequenz des Rotors auftritt. Die EO96 schneidet dabei genau die Eigenfrequenzkurve eines scheibendominanten Modes und führt zu Resonanz. Anhand der Resonanzbedingungen soll nachfolgend gezeigt werden, dass in diesem Schnittpunkt die Resonanzbedingung des Campbell-Diagramms erfüllt ist.

Betriebsdrehzahl: $n_{ADP} = 3400 \text{ min}^{-1}$

Anregung: $f_{eEO96} = \frac{3400}{60} \text{ s}^{-1} * 96 = 5440 \text{ Hz}$ $\omega_n \approx \omega_F$

Eigenfrequenz: $f_{30} = 5455 \text{ Hz}$

Anhand der rechnerischen Überprüfung ist ersichtlich, dass die Eigenfrequenz des Rotors und jene der durch den Stator bedingten Anregung nicht exakt übereinstimmen. Durch den geringen Frequenzunterschied kommt es aber technisch gesehen zu Resonanz. Dies ist bedingt durch die Nähe der Erregerfrequenz zur Eigenfrequenz und der dadurch bedingten starken Amplitudenüberhöhung.

4.6.3.2 Schlussfolgerungen aus dem Campbell-Diagramm 72Bl-Modell

Aus dem Campbell-Diagramm ist ersichtlich, dass es für die betrachtete Stator-TEC-Kombination bei dem Betriebspunkt ADP zu einem Resonanzfall kommt. Auch rechnerisch ist die Resonanzbedingung des Campbell-Diagramms erfüllt. Dabei wird durch die Stator-Rotor-Interaktion ein Scheibenmode des Rotors angeregt.

Resonanz bei: $f_{30} = 5455 \text{ Hz}$

Dennoch kann aus dieser Schlussfolgerung nicht eindeutig gesagt werden, dass es auch zu einer Resonanz kommen muss. Durch die Resonanzbedingungen des Campbell-Diagramms ist nicht überprüft, ob die Phasenlage der Anregung auch mit jener des Rotors übereinstimmt. Diese, durch den Stator angeregte, Resonanz kann im ersten Zuge als bestimmt angesehen werden, dennoch ist es erforderlich diese im Interferenz-Diagramm zu überprüfen.

4.6.4 Interferenz-Diagramm

In diesem Abschnitt wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit die Modefamilien in zwei separate Diagramme aufgeteilt. Dabei finden sich im ersten die schaufeldominanten und im zweiten die scheidendominanten Modefamilien. Nur anhand beider Diagramme zusammen ist es möglich, alle auftretenden Resonanzstellen zu ermitteln.

In den in Abbildung 58 und Abbildung 59 dargestellten Interferenz-Diagrammen sind die Eigenfrequenzen über den Nodal-Diameter aufgetragen. Dabei werden die zu einer Modefamilie gehörenden Eigenformen mittels farbiger Linien (grün, rot, ...) zu den Modefamilien zusammengefasst. Die schwarze Volllinie ist die Anregung bedingt durch den Stator, die strichlierte Linie jene des stromabwärtsliegenden TEC's. Für die genaue Beschreibung der Anregung wird auf „Anhang C-1: Grundlegendes zum Interferenz-Diagramm“ verwiesen.

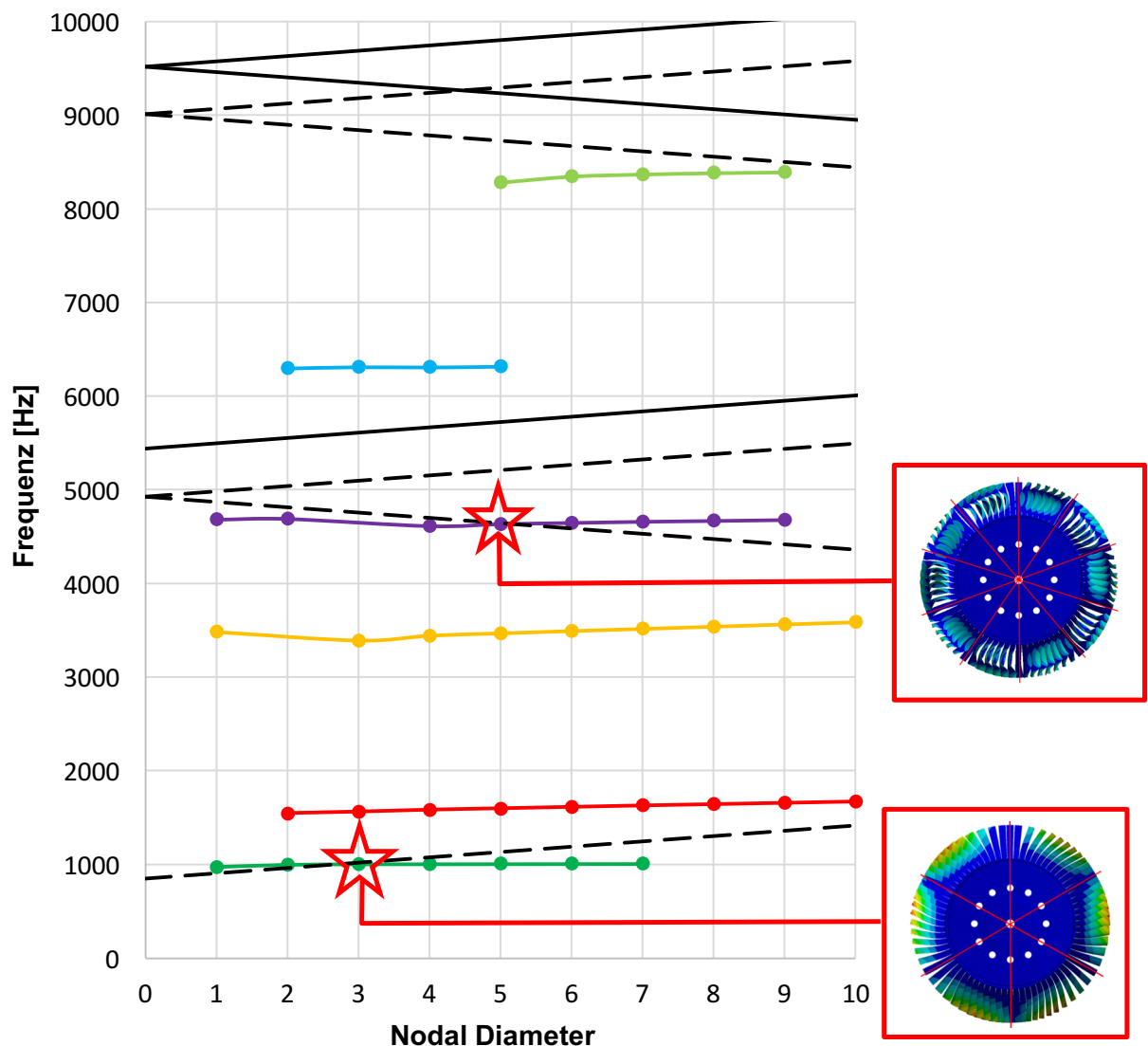


Abbildung 58: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Schaufeldominante Moden, ADP)

Anhand des in Abbildung 58 angeführten Interferenz-Diagramms können mehrere Schnittpunkte zwischen der Anregung des StandardTEC und den schaufeldominanten Modenfamilien ermittelt werden. Durch das TEC wird dabei ein Mode der ersten schaufeldominanten Modenfamilie mit einem Nodal-Diameter von $m=3$ und einer der vierten schaufeldominanten Modenfamilie mit $m=5$ angeregt. In Tabelle 10 sind die schaufeldominanten Moden mit der zugehörigen Anregungsfrequenz angeführt. Durch die Zugehörigkeit zu unterschiedlichen Modenfamilien unterscheiden sich die beiden Moden neben der Nodal-Diameter-Anzahl auch noch in der als Unterscheidungsmerkmal herangezogenen Schaufeleigenform.

Tabelle 10: Resonanzstellen der Beschau felung

		Eigenfrequenz	Anregungsfrequenz
schaufeldom. Modenfamilie 1	m=3	$f_{3-} = 1005 \text{ Hz}$	$f_m = 1020 \text{ Hz}$
schaufeldom. Modenfamilie 4	m=5	$f_{5-} = 4635 \text{ Hz}$	$f_m = 4646 \text{ Hz}$

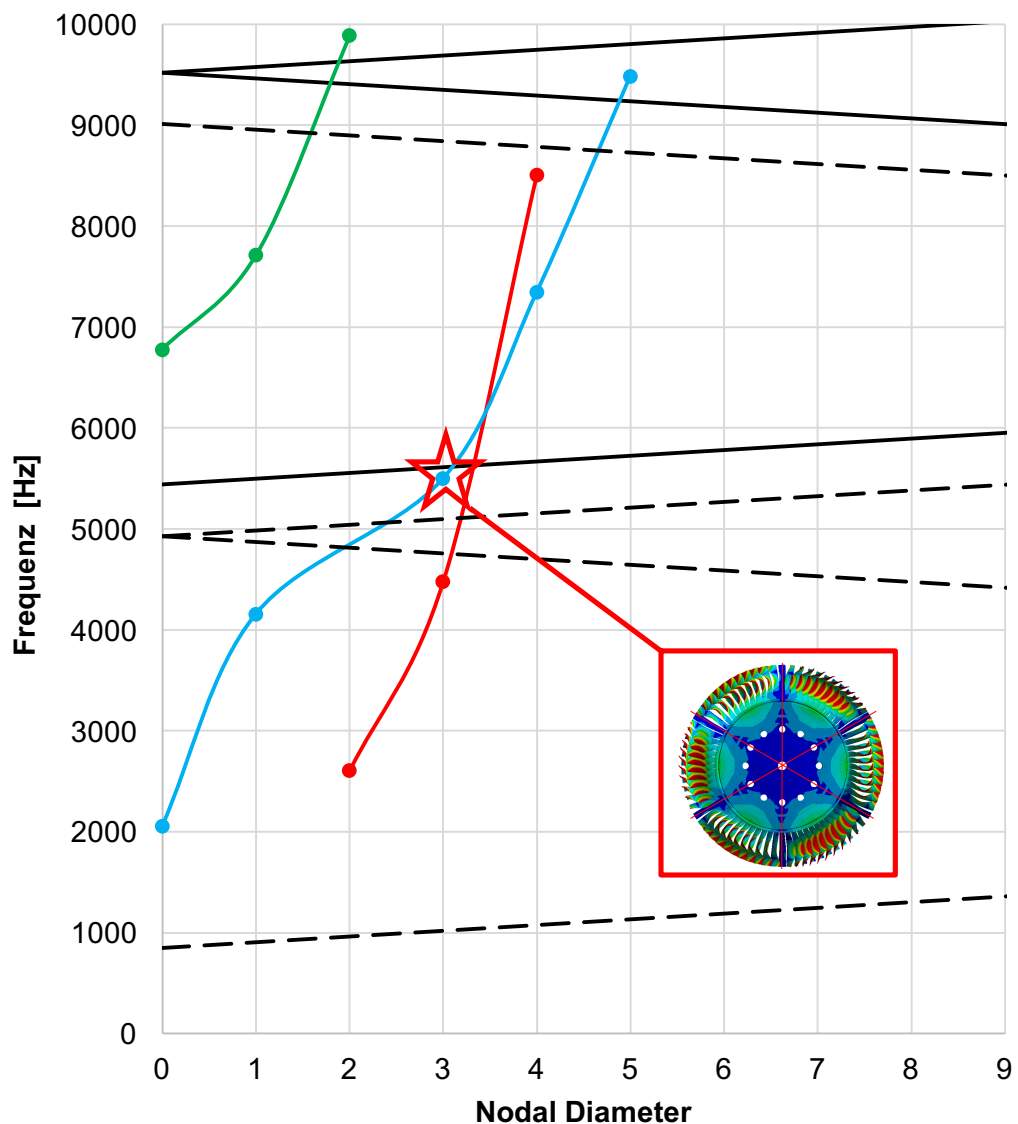


Abbildung 59: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Scheibendominante Moden, ADP)

Auch im Interferenz-Diagramm der scheibendominanten Moden (Abbildung 59) kommt es zu einem annähernden Schnittpunkt zwischen einer Modefamilie (scheibendominante Modefamilie 2) und in diesem Fall der Anregung des Stators. Das ist jener Mode, der auch beim Campbell-Diagramm als mögliche Resonanz identifiziert wurde. Tabelle 11 zeigt die Eigenfrequenz des angeregten scheibendominanten Modes sowie die Anregungsfrequenz durch den Stator.

Tabelle 11: Resonanz der Scheibe

		Eigenfrequenz	Anregungsfrequenz
scheibendom. Modefamilie 2	ND=3	$f_{30} = 5455 \text{ Hz}$	$f_m = 5610 \text{ Hz}$

4.6.4.1 Analyse der Interferenz-Diagramme 72BI-Modell

In diesem Abschnitt werden die Schnittpunkte mit den aus Kapitel 3.3.3.2 stammenden Resonanzbedingungen überprüft. Die dafür benötigten Parameter sind nachfolgend angeführt. Um die ermittelten Schnittpunkte mit den im Theorieteil hergeleiteten Resonanzbedingungen überprüfen zu können, ist die Kreisfrequenz mittels (Gl. 177) in die Frequenz überzuführen.

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad (\text{Gl. 177})$$

Betriebsdrehzahl: $n_{ADP} = 3400 \text{ min}^{-1} = 56,67 \text{ s}^{-1}$

Statorschaufelzahl: $S_{Stator} = 96$

StandardTEC-Schaufelzahl: $S_{TEC} = 15$

Rotorschaufelanzahl: $R = 72$

Scheibendominanter Mode:

Im Interferenz-Diagramm der Scheibe (Abbildung 59) tritt ein Schnittpunkt bzw. ein annähernder Schnittpunkt zwischen einer Eigenfrequenz und der Anregung des Stators auf. Wie bereits erwähnt, kommt es auch bei einer geringen Abweichung zwischen der Eigenfrequenz und der Anregungsfrequenz zu einer starken Zunahme der Amplitude. Nachfolgend wird die Eigenfrequenz des angeregten Modes mit der Resonanzbedingung verglichen.

Indizes $k = 0$

$i = 1$

Nodal Diameter: $m = 3$

Anregung: $f_m = (i \cdot S_{Stator} + k \cdot R + m)n_{ADP} = (96 + 0 + 3)n_{ADP} = 5610 \text{ Hz}$

Eigenfrequenz: $f_{30} = 5455 \text{ Hz}$

$$f_{30} \approx f_m$$

Durch die annähernde Übereinstimmung der Erregerfrequenz mit der Eigenfrequenz kann die Resonanzbedingung als erfüllt betrachtet werden. Es stimmen sowohl Frequenz (annähernd) als auch Phasenlage überein und somit kommt es zu einer Amplitudenüberhöhung. Der dabei angeregte Mode ist ein scheibendominanter Mode mit $m=3$ und $n=0$. Die Abweichung zwischen der Anregung und der Eigenfrequenz beträgt 155 Hz. Diese Nähe der Frequenzen führt zu einer starken Zunahme der Amplitude.

Schaufeldominante Moden:

Wie in Abbildung 58 ersichtlich, sind im Schaufel-Interferenz-Diagramm zwei Schnittpunkte zwischen einer Modedefamilie und der Anregung aufgetreten. Dabei kam es zu einem Schnittpunkt zwischen der Modedefamilie 1 und der Anregung sowie zwischen der Modedefamilie 4 und der Anregung. Die Überprüfungen, ob die Resonanzbedingungen erfüllt sind, müssen folglich für beide Schnittpunkte getrennt durchgeführt werden.

Der erste betrachtete schaufeldominante Mode besitzt einen Nodal Diameter von $m=3$ und gehört durch die ausgebildete Schaufeleigenform zur schaufeldominanten Modedefamilie 1.

<u>Index</u>	$k = 0$
	$i = 1$
<u>Nodal Diameter:</u>	$m = 3$
<u>Anregung:</u>	$f_m = (i \cdot S_{TEC} + k \cdot R + m)n_{ADP} = (15 + 0 + 3)n_{ADP} = 1020 \text{ Hz}$
<u>Eigenfrequenz:</u>	$f_{3-} = 1005 \text{ Hz}$

$$f_{3-} \approx f_m$$

Die Resonanzbedingung für den ersten schaufeldominanten Mode ist erfüllt. Die Abweichung zwischen der Eigenfrequenz und der Erregerfrequenz ist mit 15 Hz vernachlässigbar gering. Der zweite schaufeldominante Mode besitzt einen Nodal Diameter von $m=5$ und ist aufgrund der Schaufeleigenform Teil der vierten schaufeldominanten Modedefamilie.

<u>Index</u>	$k = 1$
	$i = 1$
<u>Nodal Diameter:</u>	$m = 5$
<u>Anregung:</u>	$f_m = (i \cdot S_{TEC} + k \cdot R - m)n_{ADP} = (15 + 72 - 5)n_{ADP} = 4646 \text{ Hz}$
<u>Eigenfrequenz:</u>	$f_{5-} = 4635 \text{ Hz}$

$$f_{5-} \approx f_m$$

Auch bei diesem schaufeldominanten Mode ist die Resonanzbedingung erfüllt. Mit einer Abweichung von nur 9 Hz liegen die Erregerfrequenz und die Eigenfrequenz sehr nah beieinander. Auch hier kann faktisch von einer Übereinstimmung gesprochen werden.

4.6.5 Schlussfolgerungen zum 72BI-Modell

Anhand der oben durchgeführten Auswertung ist ersichtlich, dass es zusätzlich zu dem aus dem Campbell-Diagramm bekannten Moden noch zwei weitere Nodal Diameter Anregungen gibt. Dieses Ergebnis bedeutet, dass sich im Betrieb nicht ein eindeutiger Mode einstellt, sondern eine Überlagerung dieser drei.

	$\omega_1 = 1005 \text{ Hz}$	Schaufel (EO15)
Resonanz bei:	$\omega_2 = 4635 \text{ Hz}$	Schaufel (EO15)
	$\omega_3 = 5455 \text{ Hz}$	Scheibe (EO 96)

Die oben angeführten Resonanzstellen treten nur bei der untersuchten Konfiguration Stator (96 Vanes) und StandardTEC (15 Vanes) auf. Das TEC regt bei dieser Konfiguration die beiden schaufeldominanten Moden bei 1005 Hz und bei 4635 Hz an. Die erste angeregte Schaufelmode ist ein mit der Drehfrequenz des Rotors zum scheibenfesten Koordinatensystem vorwärtsrotierender Mode. Der zweite schaufeldominante Mode ist ein rückwärtsdrehender Mode, d.h. er bewegt sich gegen die Drehrichtung des Rotors. Beim scheibendominanten Mode wird ersichtlich, dass auch dieser ein vorwärtsdrehender mit Rotor-Drehfrequenz ist. Der scheibendominante Mode ist jener, der durch den Stator angeregt wird. Die drei auftretenden Moden sind in Abbildung 60 visualisiert.

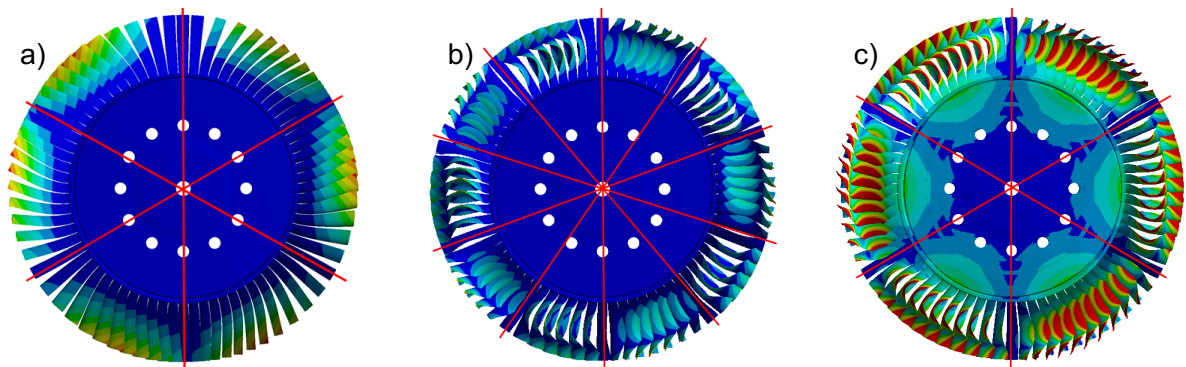


Abbildung 60: Eigenformen der angeregten Moden a) 1005 Hz b) 4635 Hz c) 5435 Hz

4.7 Zusammenfassung der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der vorangegangenen modalen Charakterisierung des HSL-Rotors zusammengefasst und interpretiert. Das Ziel dieses Abschnittes war es, durch Campbell- und Interferenz-Diagramme mögliche Resonanzstellen zu finden und die Ursache dieser zu ermitteln sowie Aufschlüsse zu erhalten, durch welches Bauteil der Rotor angeregt wird.

Hauptsächlich soll hier auf die Ergebnisse des 72BI-Modells eingegangen werden, da dieses als Gesamtmodell alle (schaufeldominanten- und scheidendominanten-) Eigenfrequenzen berücksichtigt und somit Aussagen über das Gesamtsystem gewonnen werden können. Die Erkenntnisse aus den Teilsystemen Schaufel sowie Scheibe werden angeführt, da diese maßgeblich für die Interpretation der Ergebnisse von Bedeutung sind.

4.7.1 Einschaufelmodell

Die Untersuchung des 1BI-Modells lieferte im Campbell-Diagramm genau eine Resonanzstelle bei 5450 Hz. Diese hat sich auch beim 72BI-Modell ergeben, stellte sich dort aber als scheidendominanter Mode heraus. Das Interferenz-Diagramm lieferte mehrere mögliche Resonanzen.

Die Modalanalyse der Schaufel ist eine erste Abschätzung der Schaufeleigenfrequenzen und dient für das Gesamtmodell zur Identifikation der schaufeldominanten Moden. Mit den verwendeten Randbedingungen können die schaufeldominanten Eigenfrequenzen/-formen des Gesamtrotors bis auf einen Unterschied von 3 bis 4% durch das 1BI-Modell angenähert werden. Somit eignet sich das 1BI-Modell zur schnellen Abschätzung hinsichtlich der schaufeldominanten Eigenfrequenzen. Aussagen über mögliche Resonanzeffekte können nur bedingt getroffen werden. Ferner dienen die Simulationsergebnisse des 1BI-Modells der Zuordnung der schaufeldominanten Moden zu den Modefamilien.

4.7.2 Rotorscheibe

Die Untersuchung der Rotorscheibe als Einzelbauteil ist ein wesentlicher Abschnitt der Arbeit, da die daraus gewonnenen Erkenntnisse dazu dienen, in späterer Folge den Einfluss der Scheibe auf die Gesamtsystemcharakteristik interpretieren zu können.

Resonanz bei:

$f_{30} = 5156 \text{ Hz}$	StandardTEC (EO15)
$f_{60} = 9141 \text{ Hz}$	Stator (EO96)

Im Interferenz-Diagramm der Scheibe (Abbildung 49) haben sich zwei Resonanzstellen ergeben, die oben angeführt wurden.

Die Abschätzung der scheibendominanten Eigenfrequenzen ist durch die Rotorscheibe nur bedingt möglich. Die durchgeführte Modalanalyse dient als Hilfestellung für die nachfolgende Interpretation der Ergebnisse des Gesamtmodells. Die erhaltenen Eigenformen dienen einerseits der Identifikation der scheibendominanten Moden im Gesamtmodell als auch der Einteilung der Eigenformen in die scheibendominanten Modfamilien.

4.7.3 72BI-Modell

Durch dieses Modell ist es möglich, Resonanzeffekte ausfindig zu machen und Aussagen über die Ursachen der Resonanz zu tätigen. Zudem ist es möglich die gewonnenen Daten mit Messergebnissen eines Versuchs zu vergleichen und die Simulation dadurch zu validieren.

	$f_{3-} = 1005 \text{ Hz}$	Schaufel (EO15)
Resonanz bei:	$f_{5-} = 4635 \text{ Hz}$	Schaufel (EO15)
	$f_{30} = 5455 \text{ Hz}$	Scheibe (EO 96)

Durch das Campbell- und das Interferenz-Diagramm war es möglich, drei Resonanzstellen zu ermitteln. Der scheibendominante Mode bei 5455 Hz zeigte sich sowohl im Campbell-Diagramm als auch im Interferenz-Diagramm. Die angeregten schaufeldominanten Moden zeigten sich nur im Interferenz-Diagramm. Anhand dieser Gegebenheit ist erkennbar, dass das Campbell-Diagramm nicht alle Schnittpunkte/Resonanzstellen zeigt. Die angeregten schaufeldominanten Moden treten nur bei der Kombination Stator mit 96 Vanes und dem StandardTEC mit 15 Vanes sowie einer Drehzahl von 3400 min^{-1} auf. Bei einem anderen Turbinenausstrittsgehäuse sind die Diagramme den geänderten Leitschaufelanzahlen anzupassen. Der durch den Stator angeregte scheibendominante Mode wird bei einer Drehzahl von 3400 min^{-1} immer zur Resonanz angeregt. Im „Anhang C-2: Interferenz-Diagramme“ befinden sich zusätzliche Interferenz-Diagramme für unterschiedliche Betriebspunkte.

4.7.4 Anmerkungen

Anhand der erhaltenen Ergebnisse ist es möglich, die Versuchsergebnisse des HSL-Rotors zu interpretieren und dadurch die Ursache der Anregung zu identifizieren sowie die angeregten Schwingungsformen zuzuordnen. Dazu ist es erforderlich die Messergebnisse mit den Simulationsergebnissen zu vergleichen.

4.8 Vergleich zum Versuch

In diesem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse mit dem Versuch verglichen. Der Versuch wurde von F. Schönleitner durchgeführt und ausgewertet. Detaillierte Informationen zu der experimentellen Untersuchung finden sich in [30]. Um zu zeigen, dass sich die Simulation mit dem Versuch deckt, wird nachfolgend die numerische Untersuchung mit dem Versuch verglichen. Dabei werden die Erkenntnisse aus den Campbell- und Interferenz-Diagrammen genutzt, um die Messergebnisse zu interpretieren und festzustellen, welche Systemkomponente zur Anregung des Rotors führt. Für die Vergleichbarkeit der Ergebnisse wurde auch hier der Betriebspunkt ADP [30] herangezogen.

Bei der Untersuchung wurden die Dehnungen am drehenden Rotor mittels auf den Schaufelsaugseiten angeordneter Dehnmesstreifen gemessen. Nach einer Fourier Transformation (FFT) wurden die Dehnungsamplituden über die Frequenz dargestellt. Um bei der Messung die relevanten Schwingungskomponenten aufnehmen zu können wurden die DMS, wie in Abbildung 61, am Rotor appliziert. Details zum DMS-Setup finden sich in [31]. Ein einzelner DMS konnte nicht alle Schwingungskomponenten aufnehmen und somit ist es möglich, dass nicht alle Eigenfrequenzen im Frequenzspektrum dieses DMS ersichtlich sind. Somit wurden für den Abgleich der Ergebnisse DMS #3 sowie DMS #10 (Abbildung 61) herangezogen.

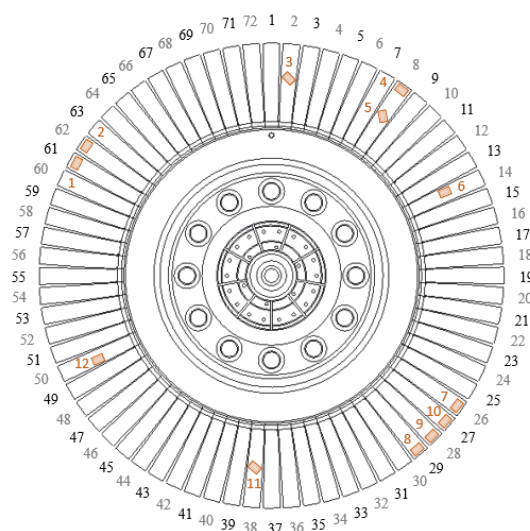


Abbildung 61: Position der DMS [31]

Beim diesem Abgleich der Simulationsergebnisse mit den Versuchsergebnissen wurde kein Amplitudenvergleich durchgeführt. Der Fokus des Vergleichs lag auf den angeregten Frequenzen und nicht auf der Amplitude. Zudem handelt es sich bei den Simulationsergebnissen um Eigenschwingungen, d.h. normierte Amplitudenverläufe, die nicht mit der Messung verglichen werden können.

4.8.1 Messergebnisse

Im Spektrum von DMS #3, dargestellt in Abbildung 62, sind der vom StandardTEC angeregte schaufeldominante Mode bei ca. 1000 Hz sowie der vom Stator angeregte scheidendominante Mode bei ca. 5500 Hz deutlich ersichtlich.

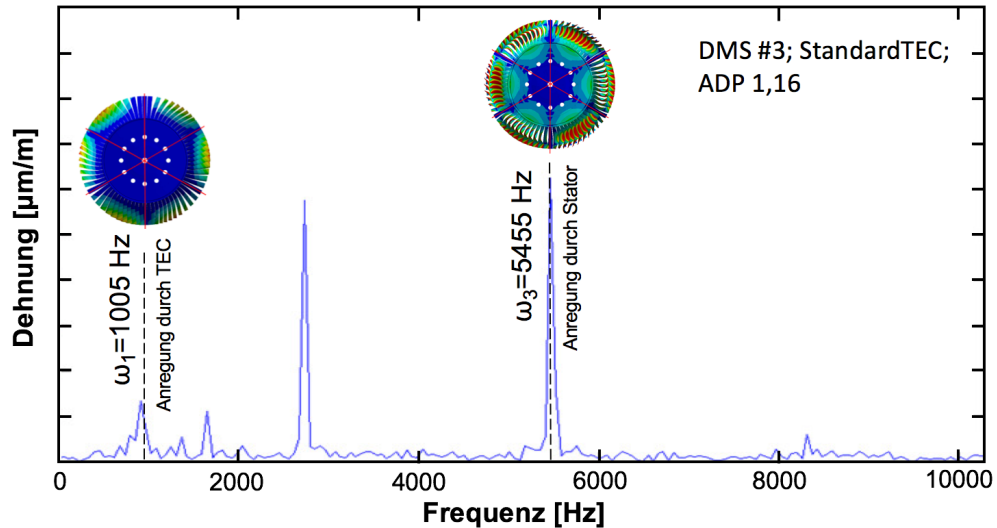


Abbildung 62: Spektrum DMS #3 StandardTEC ADP [31]

Der in der aus der Simulation bekannte schaufeldominante Mode bei 4635 Hz war nicht im Spektrum von DMS #3 sichtbar, da der Dehnmessstreifen genau in einem Bereich der Schaufel ist, an dem die Dehnung sehr klein ist. Bei der Betrachtung des in Abbildung 63 dargestellten Spektrums von DMS #10 wurde auch der dritte Mode ersichtlich.

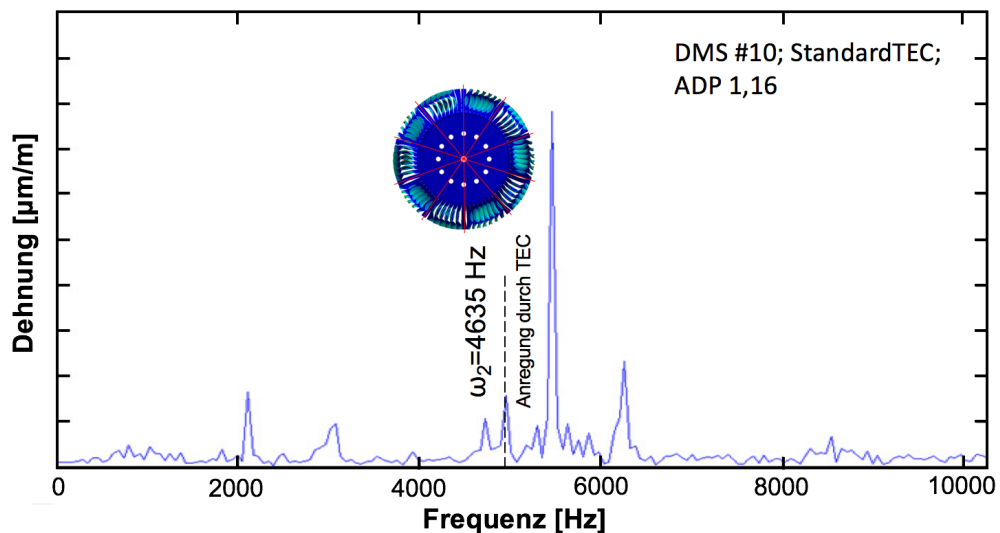


Abbildung 63: Spektrum DMS #10 StandardTEC ADP [31]

In beiden Spektren war es nicht möglich einige Schwingungsauslässe anhand der Simulation zuzuordnen. Diese könnten durch andere nicht in die Untersuchung miteinbezogenen Prüfstandkomponenten angeregt worden sein.

4.8.2 Interpretation der Ergebnisse

Durch die numerische Simulation des Rotors war es möglich, einige Ausschläge in den Messergebnissen die dazugehörigen Schwingungsformen zuzuordnen. Dennoch ist es nicht immer möglich alle Ausschläge klar zuzuordnen. Insbesondere jene bei 2100 Hz, 2700 Hz und 6200 Hz konnten hinsichtlich ihrer Anregung nicht klar zugeordnet werden. Diese können beispielsweise durch die am Prüfstand befindliche Wasserbremse (12 Schaufeln) oder die Inlet Guide Vanes (83 Schaufeln) angeregt werden, die aber in der Untersuchung nicht mitberücksichtigt wurden.

Durch die Erkenntnisse aus der numerischen Studie konnten zwei schaufeldominante Moden, bei 1005 Hz bzw. 4635 Hz und ein scheibendominanter Mode bei 5455 Hz identifiziert werden. Diese Moden waren in den Messergebnissen stark ausgeprägt und konnten somit durch den Abgleich der Ergebnisse zugeordnet werden.

Die Ergebnisse der Simulation sowie jenen aus dem Versuch weisen kleine Unterschiede auf. Dies ist einerseits durch die Modellbildung in der Simulation andererseits durch Mistuning-Effekte im Versuch bedingt. Im Großen und Ganzen wurden durch die Simulation einige Resonanzstellen ausfindig gemacht. Wichtig war, durch die Simulation festzustellen, um welche Moden es sich handelt und wodurch diese Moden angeregt wurden. Durch den Vergleich der beiden Ergebnisse war es zudem möglich, den Messergebnissen die angeregten Eigenformen zuzuordnen.

Die Qualität der numerischen Ergebnisse ist sehr hoch. Dadurch war es möglich, Rückschlüsse auf das Schwingungsverhalten des Rotors zu ziehen. Das angestrebte Ziel, auftretende Schwingungseffekte erklären zu können, wurde durch die FE-Analyse erreicht.

5. Erweiterte Untersuchung der Schaufeleigenfrequenz

Bei der Untersuchung der Schaufeleigenfrequenzen kommen bei den ersten Abschätzungen oft Teilmodelle, insbesondere Einschaufelmodelle (1BI-Modelle), zum Einsatz. Bei der Betrachtung der Schaufeln wird klar, dass besonders die Randbedingungen bzw. die Einspannung und deren Steifigkeit/Verformungsmöglichkeit Einfluss auf die Eigenfrequenzen besitzen. Dazu werden in diesem Abschnitt unterschiedliche Einspannbedingungen untersucht, um das 1BI-Modell für zukünftige Simulationen weiter zu optimieren. Des Weiteren hat die Steifigkeit der Rotorscheibe einen wesentlichen Einfluss auf die Eigenfrequenzen der Schaufeln, da diese entscheidend für die Nachgiebigkeit der Schaufelbefestigung ist. Aus diesem Grund wird der Einfluss der variierenden Scheibensteifigkeiten auf die Eigenfrequenzen näher untersucht. Diese veränderlichen Steifigkeiten sind einerseits durch die Geometrie der Rotorscheibe an sich und andererseits durch produktionsbedingte Werkstofftoleranzen bedingt. Bei den Werkstofftoleranzen spielen hier besonders Schwankungen beim Elastizitätsmodul eine wichtige Rolle. Deswegen wird in diesem Abschnitt der Einfluss der Scheibensteifigkeit auf die Schaufeleigenfrequenz bei variierenden Werkstoffkennwerten untersucht. Zudem wird die Veränderlichkeit der Schaufeleigenfrequenz über den Umfang der Rotorscheibe, bedingt durch geometriebedingte Steifigkeitsschwankungen, näher betrachtet.

5.1 Erweiterte Untersuchung des 1BI-Modells

Das 1BI-Modell ist gut geeignet um die Schaufeleigenfrequenzen schnell abschätzen zu können. Dies wurde bereits in Schitter [29] gezeigt und evaluiert. Aus diesem Grund wird nachfolgend näher auf dieses Modell eingegangen. Wie schon erwähnt, besitzen bei Teilmodellen die Rand- bzw. Einspannungsbedingungen einen großen Einfluss auf die Eigenfrequenzen. So ist eine sorgfältige Wahl der verwendeten Bedingung unerlässlich, um eine ausreichende Genauigkeit erzielen zu können.

5.1.1 1BI-Modell

Das 1BI-Modell wurde bereits in Schitter [29] ausführlich behandelt. In Abbildung 64 a) ist das zugrundeliegende 3D-Modell und in b) das für die Untersuchung verwendete Netz dargestellt. Die Schaufel wurde dabei mit 1 mm großen „Hex-Dominant“ Netzelementen, d.h. vorrangig rechteckigen Netzelementen, vernetzt. Da bei diesem Modell keine Kontakte zu anderen Bauteilen bestehen, waren keine Verfeinerungen oder „Mapped Surfaces“ notwendig. Näheres zu diesem Modell ist in Kapitel 4.4 zu finden.

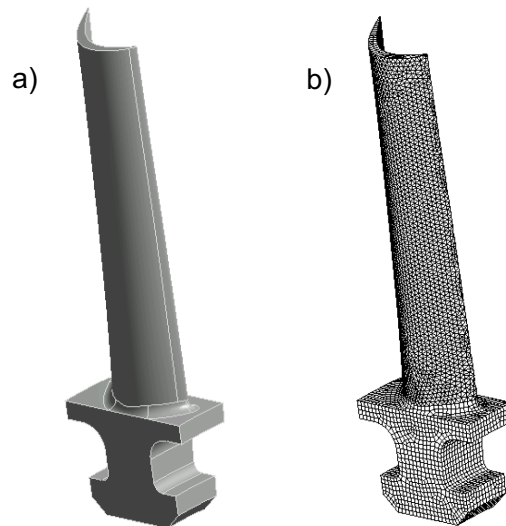


Abbildung 64: 1BI-Modell a) 3D-Modell b) Netz

5.1.2 Vergleich Rand- / Einspannungsbedingungen

Da die numerische Abbildung der realen Einspannung einen wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisse (in diesem Fall Eigenfrequenzen) hat und somit über die Güte der Simulationsergebnisse entscheidet, soll in diesem Abschnitt das 1BI-Modell näher untersucht werden. Dabei wird der Fokus darauf gelegt, wie die unterschiedlichen Einspannsituationen die Eigenfrequenzen der Schaufel beeinflussen. Der Beweggrund für diese Untersuchung ist, da das ursprüngliche 1BI-Modell, wie es schon in Schitter [29] eingehend betrachtet wurde, relativ große Abweichungen zwischen Simulations- und Versuchsergebnissen bei höheren Eigenfrequenzen aufwies. Ziel dieser Untersuchung ist es, die Einspannungsbedingungen weiter zu optimieren, um das Modell auf die Ergebnisse der von Traussnig [32] durchgeführten experimentellen Modalanalyse abzustimmen. Aus diesem Grund werden die Ergebnisse in weiterer Folge mit jenen des Versuchs gegenübergestellt.

5.1.2.1 Einspannungsbedingungen

Um das Modell von der ursprünglichen Konfiguration mit der Einspannung am Schaufelfuß an die Situation im Rotor annähern zu können, wurde das Modell schrittweise mit zusätzlichen Randbedingungen versehen. Einerseits wurde dabei der Kontakt zur Rotorscheibe und andererseits der Kontakt zu den benachbarten Schaufeln in das Modell mit aufgenommen.

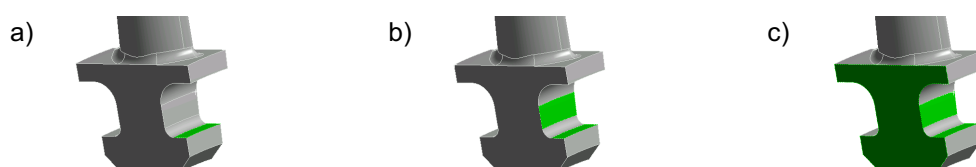


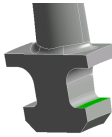


Abbildung 65: Einspannungsvarianten

In Abbildung 65 sind die drei verwendeten Einspannungsvarianten dargestellt. Dabei zeigt a) das ursprüngliche 1BI-Modell, b) jene Variante, die den seitlichen Kontakt zur Rotorscheibe mitberücksichtigt und c) jene, die zusätzlich noch den Kontakt zu den benachbarten Schaufeln mit in die Simulation aufnimmt. Die Einspannung des Schaufelfußes wurde dabei, wie schon bei der ursprünglichen Untersuchung, mit einer „Fixed Support“ Bedingung versehen. Der Kontakt zur Rotorscheibe bzw. jener zu den benachbarten Schaufeln wurde jeweils durch eine „Frictionless“-Bedingung abgebildet. Diese Bedingungen könnten auch nachgiebig gestaltet werden, dafür wären jedoch weitergehende Untersuchungen zu der Kontaktsteifigkeit erforderlich.

5.1.2.2 Ergebnisse und Vergleich

Die Auswertung und der Vergleich der Einspannungsvarianten zueinander wurde bis 10.000 Hz durchgeführt. Dabei wurden in Tabelle 12 die ersten sieben Eigenfrequenzen gegenübergestellt. Die dazugehörigen Eigenformen sind in Abschnitt 4.4.2 dargestellt. Die in Kapitel 4.4.2 angeführte 8. Eigenfrequenz wurde hier nicht weiter betrachtet, da die Eigenfrequenzen weit über den Untersuchungsbereich bis 10.000 Hz hinausgehen.

Tabelle 12: Vergleich Randbedingungen 1BI-Modell

	Einspannung		
	Schaufelfuß 	Schaufelfuß + Seitenflächen 	Schaufelfuß + Seitenflächen + Stirnfläche 
1.EF	923 Hz	925 Hz	1037 Hz
2.EF	1648 Hz	1744 Hz	1870 Hz
3.EF	2678 Hz	2781 Hz	2849 Hz
4.EF	4429 Hz	4303 Hz	4693 Hz
5.EF	5404 Hz	5420 Hz	6293 Hz
6.EF	8180 Hz	8285 Hz	8325 Hz
7.EF	8995 Hz	9179 Hz	10462 Hz

Aufgrund der Ergebnisse wird ersichtlich, dass besonders bei höheren Frequenzen große Unterschiede zwischen den Eigenfrequenzen bestehen. Diese sind bedingt durch die unterschiedlichen Verformungsmöglichkeiten im Bereich des Hammerkopfes. Die Einspannung am Schaufelfuß, den Seitenflächen und den Stirnflächen schränkt die Verformung wesentlich mehr ein als eine alleinige Einspannung am Schaufelfuß.

5.1.2.3 Vergleich der unterschiedlichen Einspannungen zum Versuch

Ziel der Untersuchung ist eine bessere Annäherung der Simulationsergebnisse an die Daten der experimentellen Modalanalyse. In den folgenden Diagrammen sind die Ergebnisse der Simulationen mit jenen, von Traussnig [32] ermittelten Versuchsdaten gegenübergestellt.

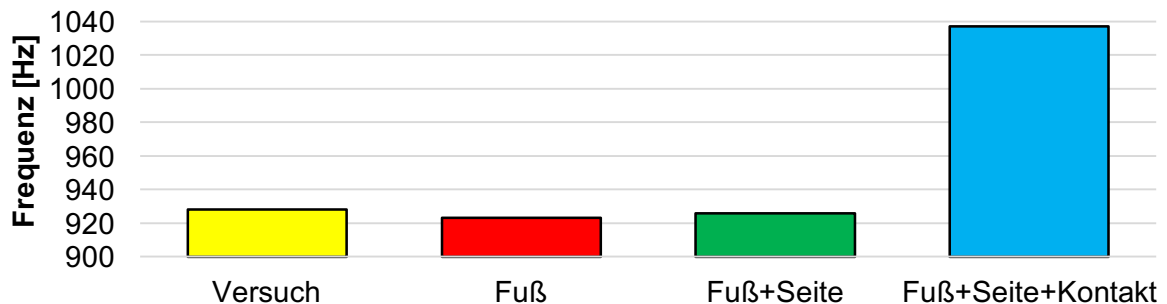


Abbildung 66: Vergleich 1.EF

Die erste Eigenfrequenz ist ein Biegemode um das kleine Widerstandsmoment der Schaufel. Bei einer Betrachtung der Schaufel am Rotor würde diese in Umfangsrichtung verformt. Bei der ersten Eigenfrequenz wird durch die Einspannung der Schaufel am Fuß und an der Berührfläche zur Scheibe (Variante b) die beste Annäherung erzielt. Die zusätzliche Einspannung an der Kontaktfläche zu den benachbarten Schaufeln (Variante c) führt zu einer großen Abweichung (ca. 10%) vom Versuch. Der Grund dafür liegt in der zu hohen Kontaktsteifigkeit der gewählten Randbedingungen.

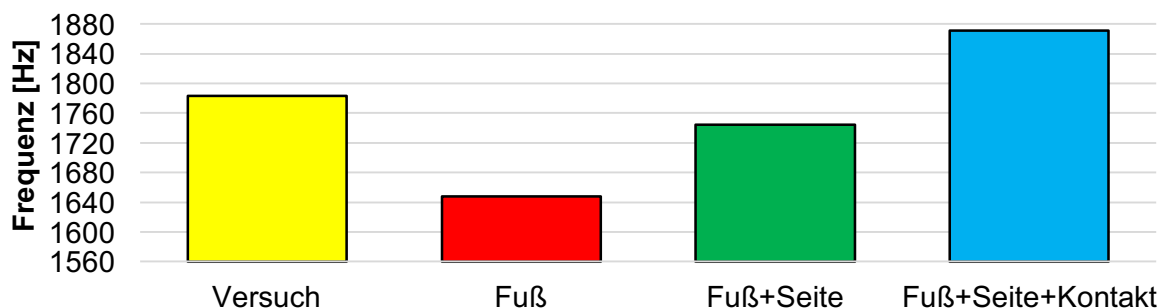


Abbildung 67: Vergleich 2.EF

Die zweite Eigenfrequenz ist ebenfalls ein Biegemode, jedoch jener um das große Widerstandsmoment. D.h. die Biegung erfolgt in axialer Richtung des Rotors. Bei dieser Eigenfrequenz ist wieder die Variante b) die beste Näherung der Versuchsergebnisse, jedoch weichen die Ergebnisse der Variante c) nicht mehr so stark vom Versuch ab. Die größte Abweichung lieferte hier die ursprünglich untersuchte Einspannbedingung (Variante a) mit einem Unterschied der Eigenfrequenz von ca. 140 Hz bzw. 7%. Hier besitzt die ursprünglich betrachtete Variante keine Randbedingung in die Hauptverformungsrichtung. Die freie Schaufellänge ist somit größer als im Versuch und folglich die Eigenfrequenz zu klein.

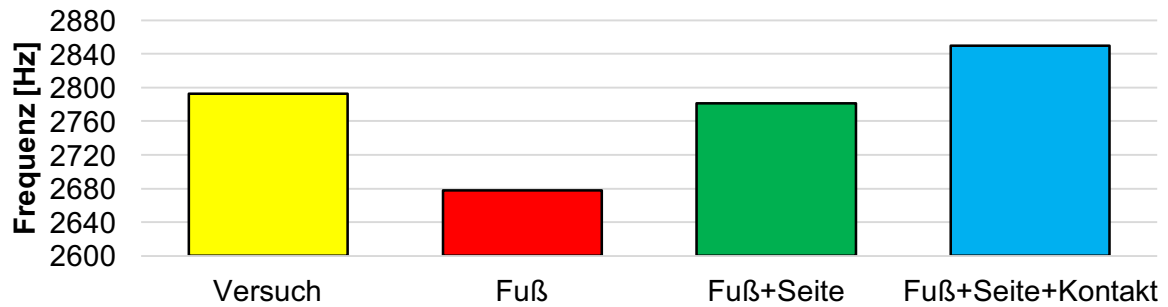


Abbildung 68: Vergleich 3.EF

Die dritte Eigenfrequenz ist die erste Torsionseigenform um die Hochachse. Wie schon bei den vorangegangenen Eigenfrequenzen lieferte die Variante b) die besten Ergebnisse, da die Einspannung sehr gut die Randbedingungen im Rotor trifft. Die Variante c) lieferte hier ein sehr gutes Ergebnis mit einer Abweichung von lediglich 2%. Durch eine Untersuchung der Kontaktsteifigkeit könnten die Eigenfrequenzen an den Versuch angenähert werden.

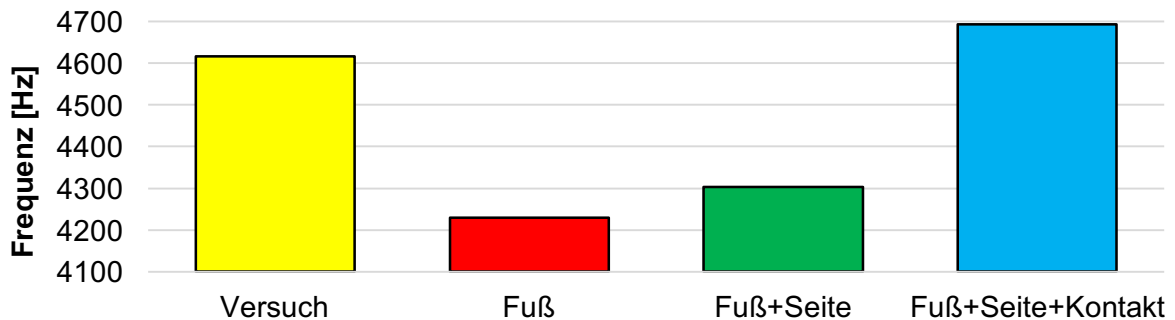


Abbildung 69: Vergleich 4.EF

Die vierte und somit letzte Eigenfrequenz, die mit den Versuchsergebnissen abgeglichen werden kann, ist die zweite Biegeeigenform um das kleine Widerstandsmoment. Bei der 2. Biegung lieferte erstmals die Variante c) das beste Ergebnis. Die Varianten a) sowie b) weisen Abweichungen von ca. 5 bis 8% zum Versuchsergebnis auf. Bei dieser Eigenfrequenz besitzen die in a) und b) gewählten Randbedingungen eine zu geringe Steifigkeit, die zu den hohen Abweichungen führen.

5.1.2.4 Interpretation der Ergebnisse

Grundsätzlich kann gesagt werden, dass alle Ergebnisse für eine erste Betrachtung der Größenordnung der Eigenfrequenzen gut geeignet sind. Jedoch streuen die Ergebnisse doch mitunter in einem breiten Spektrum. Sollte das 1BI-Modell für eine genaue Untersuchung verwendet werden, ist eine abgewandelte Version der Variante c) zu empfehlen. Einerseits ist eine Anpassung der Berührungsflächen der Schaufel zur Scheibe erforderlich und andererseits müssen die Randbedingungen an den Kontaktflächen Schaufel-Scheibe bzw. Schaufel-Schaufel als nachgiebig definiert werden. Ist eine Klassifizierung mit einer Genauigkeit von $\pm 5\%$ erforderlich, ist Variante b) ausreichend.

5.2 Einfluss der Scheibensteifigkeit auf die Schaufeleigenfrequenz

Bei der Untersuchung der Schaufeleigenfrequenz in Abhängigkeit von der Scheibensteifigkeit wurden zwei unterschiedliche Herangehensweisen gewählt. Einerseits wurde ein modifiziertes Einschaufelmodell (1BI-Modell) herangezogen und die Werkstoffkennwerte der Rotorscheibe variiert. Andererseits kam ein 5-Schaufel-Modell (5BI-Modell) und das Gesamtmodell (72BI-Modell) zum Einsatz, um die Veränderlichkeit der Schaufeleigenfrequenz über den Umfang der Rotorscheibe zu untersuchen. Die Untersuchungen wurde als statische Modalanalysen durchgeführt (ohne Drehzahl).

5.2.1 Modifiziertes 1BI-Modell

5.2.1.1 Modellbildung

Um den Einfluss der Rotorscheibensteifigkeit auf die Schaufel simulieren zu können, wurde ein Ausschnitt aus der Rotorscheibe an die einzelnen Schaufeln angepasst. Das verwendete Modell ist in Abbildung 70 a) dargestellt. Der Kontakt zwischen dem Rotorscheibenausschnitt und der Schaufel wurde mittels „Bonded“-Bedingungen definiert. Die Definition der Kontaktflächen erfolgte dabei wie in Abbildung 51 dargestellt. Als Rand- bzw. Symmetriebedingung kam ein „Frictionless“-Support im Bereich der Schnittflächen zum Einsatz. Dabei wurden wie in Abbildung 70 b) ersichtlich, die Schnittfläche der Rotorscheibe als auch die Schaufelkontaktfläche mit dieser Randbedingung belegt. Das Modell wurde mit der Methode „Hex-Dominant“ vernetzt. Die Schaufel und der Scheibenkopf wurden mit einer Elementgröße von 1,0 mm und der Rest der Scheibe mit 2,0 mm vernetzt. Zudem wurde der Kontakt zwischen Rotorscheibe und Schaufel mit einem 1,0 mm „Mapped Surface“ Netzgitter versehen. Das Netz ist in Abbildung 70 c) dargestellt.

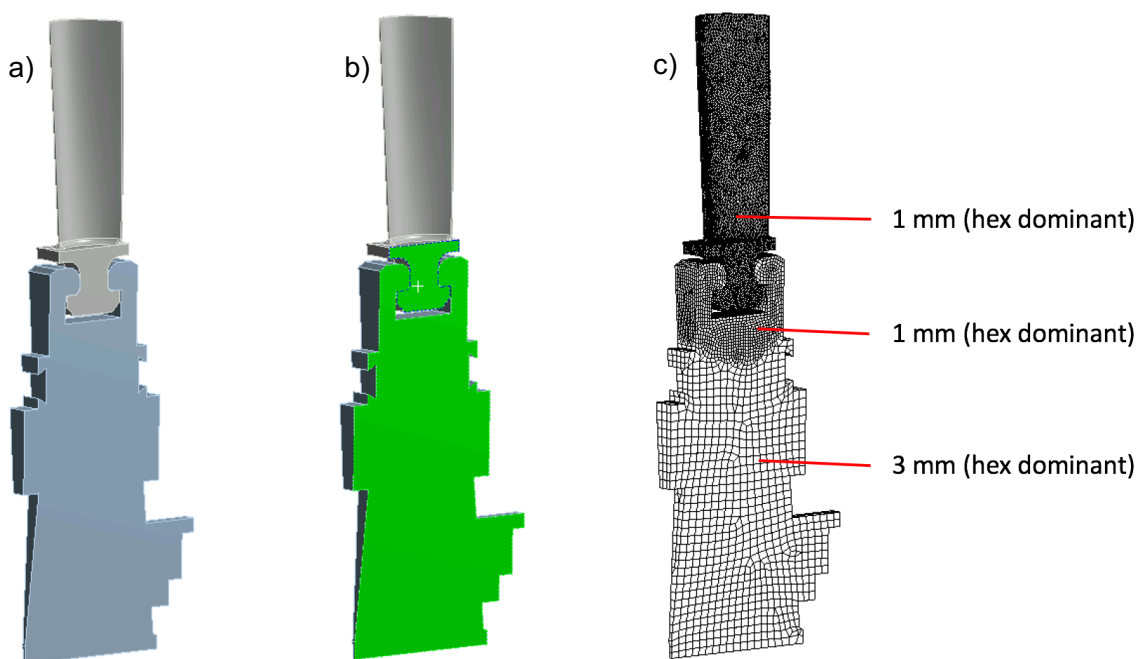


Abbildung 70: Modifiziertes 1BI-Modell

5.2.1.2 Veränderliche Scheibensteifigkeit

Als gebräuchliches Mittel für die Simulation einer veränderlichen Scheibensteifigkeit hat sich bei anderen Projekten gezeigt, dass durch eine Veränderung des Elastizitätsmoduls der Scheibe die gewünschten Effekte erzielt werden können. Zudem kommt es beim E-Modul zwischen den einzelnen Stahlsorten sowie den einzelnen Produktionschargen zu erheblichen Schwankungen. Beim modifizierten 1BI-Modell wurde aus diesen Gründen der E-Modul ausgehend von 210.000 MPa um $\pm 15\%$ in Schritten von 1000 MPa geändert. Durch diese Variation soll gezeigt werden, wie sich die Eigenfrequenz des betrachteten Systems verändert.

5.2.1.3 Ergebnisse der Simulation

In den Diagrammen ist die Eigenfrequenz über den E-Modul aufgetragen. Die Daten zu den Diagrammen sind im „Anhang D: Einfluss der Scheibensteifigkeit“ angeführt. Neben den Diagrammen sind die zugehörigen Eigenformen dargestellt.

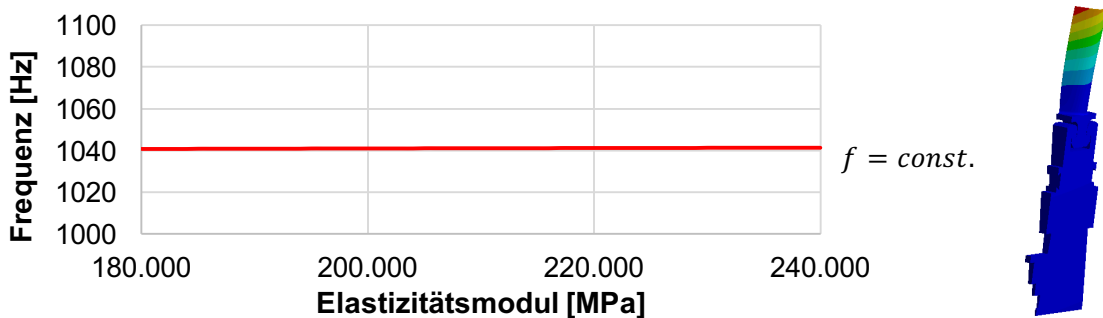


Abbildung 71: 1. Eigenfrequenz

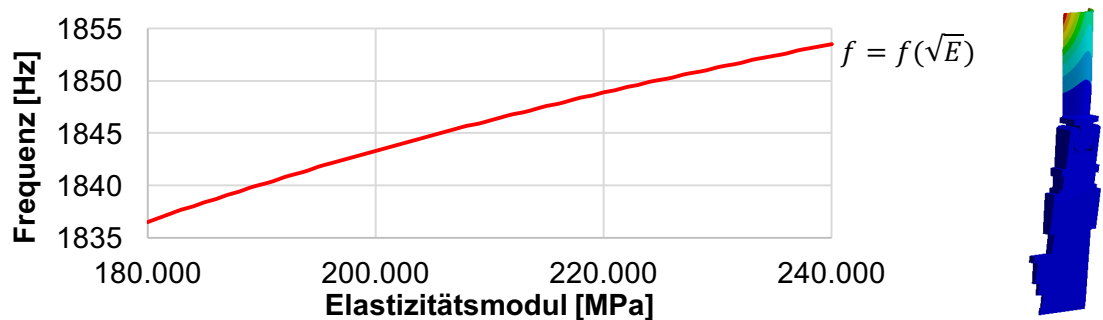


Abbildung 72: 2. Eigenfrequenz

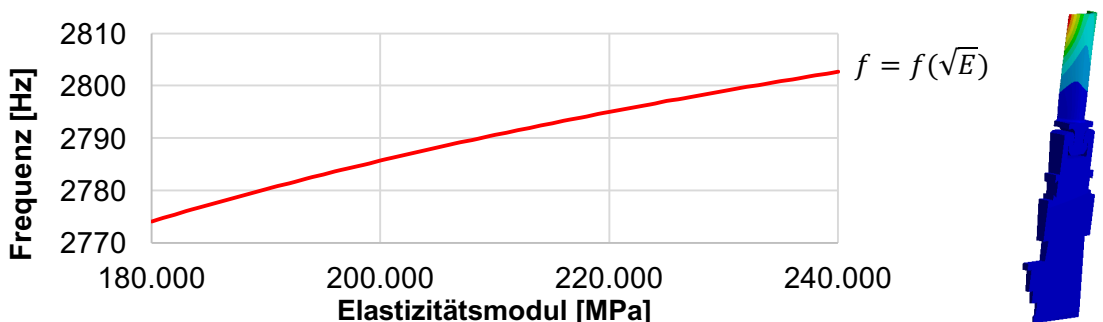


Abbildung 73: 3. Eigenfrequenz

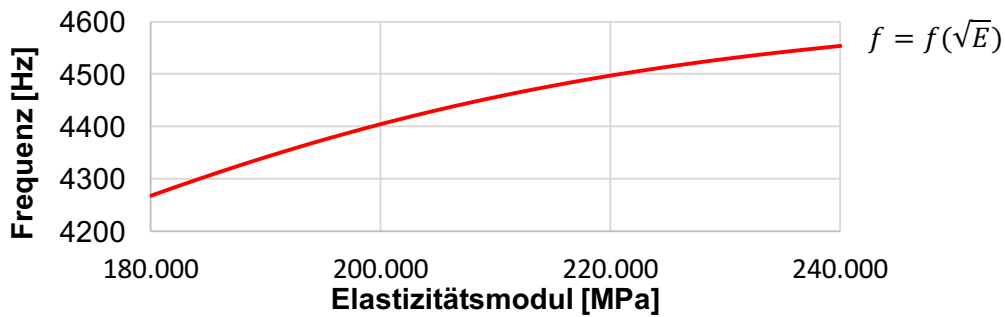


Abbildung 74: 4. Eigenfrequenz

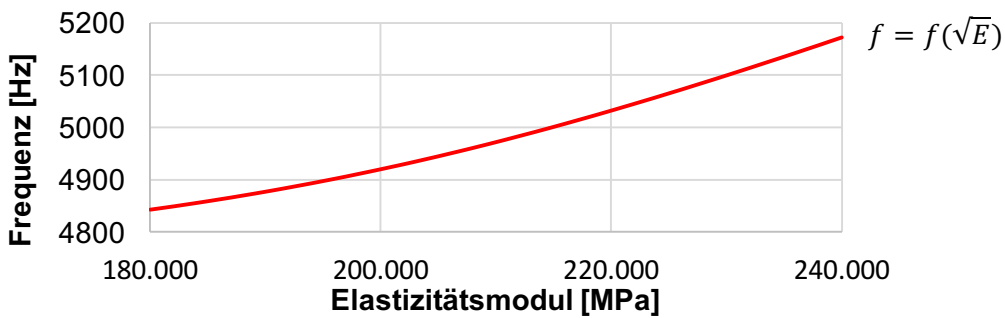


Abbildung 75: 5. Eigenfrequenz

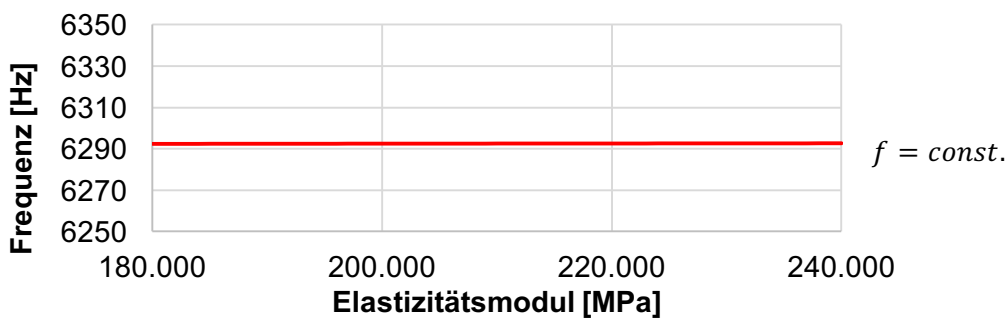


Abbildung 76: 6. Eigenfrequenz

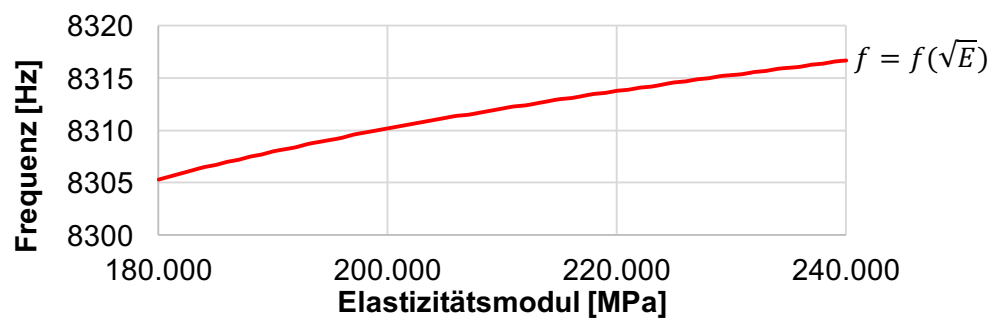


Abbildung 77: 7. Eigenfrequenz

Bei den in Abbildung 71 bis Abbildung 77 dargestellten Eigenformen ist die Verschiebung visualisiert. Dabei kommt es im Bereich der Schaufel zu großen Verschiebungen, im Bereich der Scheibe zu kleinen. Aus der farblichen Darstellung ist nicht ersichtlich, dass auch der Scheibenausschnitt mitschwingt.

5.2.1.4 Interpretation der Ergebnisse

Anhand dieses Modells ist es sehr gut möglich die Veränderlichkeit der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit des E-Moduls abzubilden. Dieses Modell stellt natürlich, wie alle Teilmodelle, eine sehr starke Vereinfachung dar, dennoch hat auch dieses Modell seine Vorzüge aber natürlich auch seine Nachteile.

Durch die Variation des E-Moduls kann die Veränderung der Steifigkeit über den Umfang virtuell abgebildet werden. Ferner ist es durch diese Konfiguration auch möglich, die garantierten Lieferqualitäten (z.B. E-Modul von 198.000-212.000 MPa) zu berücksichtigen. Allein diese Gegebenheit zeigt, dass dieses Modell zur schnellen Bewertung des Materialeinflusses von Bedeutung ist, da dies zu erheblichen Unterschieden in der modalen Systemcharakteristik führen kann.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung zeigen den Trend, dass eine Zunahme des E-Moduls, d.h. steigende Steifigkeit, zu einem Anstieg der Eigenfrequenzen führt. Dies entspricht genau den Erwartungen, die anhand der Frequenzgleichung (Gl. 178) [6] eines Einmassenschwingers getroffen werden können.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \begin{array}{l} \omega_0 \dots \text{Eigenkreisfrequenz} \\ k \dots \text{Steifigkeit} \\ m \dots \text{Masse} \end{array} \quad (\text{Gl. 178})$$

Bei gleichbleibender Masse m und Zunahme der Steifigkeit k (bei dieser Untersuchung der E-Modul) ergeben sich die oben angeführten Ergebnisse. Dabei hat die Scheibe nicht auf jeden Mode den gleich starken Einfluss. Einige, insbesondere die Biegemoden um die kleine Trägheitsachse der Schaufel d.h. 1. EF dargestellt in Abbildung 71 sowie 6. EF dargestellt in Abbildung 76, sind durch die Steifigkeit wenig beeinflusst (0,5 Hz Anstieg über 60.000 MPa). Die anderen Moden, d.h. Biegemoden um die große Trägheitsachse bzw. die Torsionsmoden, weisen einen erheblichen Einfluss, der mehr als 100 Hz betragen kann, auf.

Um den Einfluss des E-Moduls auch bei der ersten und sechsten Eigenfrequenz darstellen zu können, wäre eine nachgiebige Modellierung der Randbedingung erforderlich. Dazu müssten die verwendeten „frictionless“-Bedingungen durch einen „elastic“-Support ersetzt werden. Dafür wären weitere Untersuchungen erforderlich um die Steifigkeiten zu ermitteln. Dies würde dazu führen, dass eine weitere Variable in die Simulation einfließen würde.

5.2.2 5BI-Modell

In diesem Abschnitt wird das 5-Schaufelmodell (5BI-Modell) zur Untersuchung der Veränderlichkeit der Schaufeleigenfrequenzen über den Umfang verwendet. Dabei soll festgestellt werden, wie sich die Eigenfrequenzen abhängig von der umfangsveränderlichen Steifigkeit verschieben. Zu der Untersuchung wurde das in Schitter [29] verwendete 5BI-Modell herangezogen.

5.2.2.1 Simulationsmodell

Das bereits in Schitter [29] verwendete 5BI-Modell ist ein Ausschnitt aus der Rotorscheibe mit fünf Schaufeln. In Abbildung 78 a) ist das verwendete Modell samt der nachfolgend benötigten Schaufelnummerierung dargestellt. Um die Eigenfrequenzen der einzelnen Schaufeln feststellen zu können, wurden bei der Simulation vier Schaufeln unterdrückt und wie in Abbildung 78 b) nur eine Schaufel im Modell belassen.

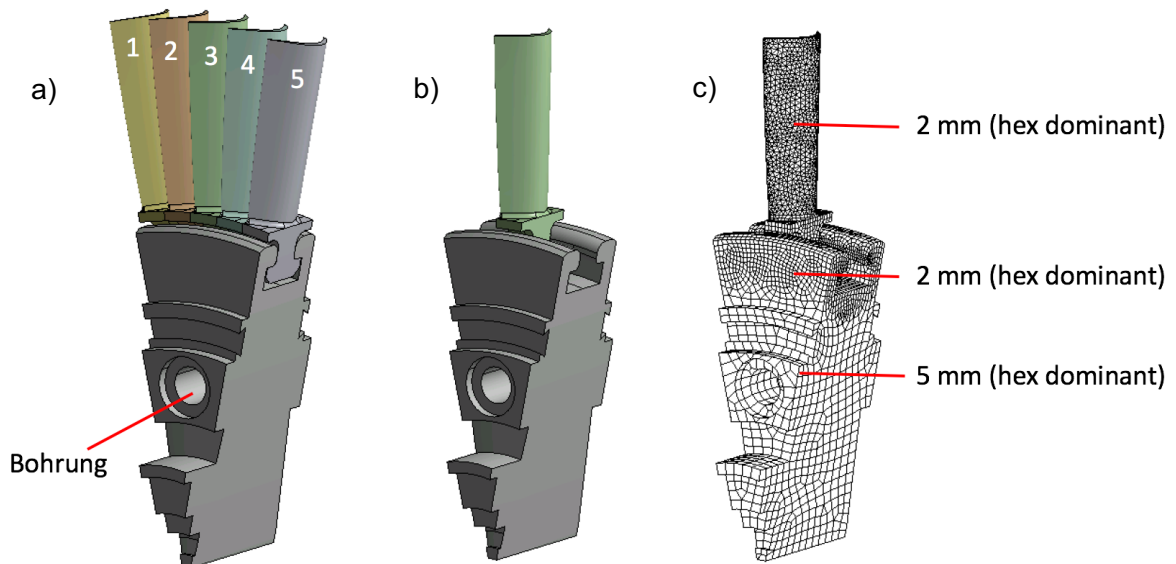


Abbildung 78: 5BI-Modell mit Schaufelnummerierung

Die Kontaktbedingungen zwischen der Rotorscheibe und der verbliebenen Schaufel wurden mit der Kontaktformulierung „Bonded“ definiert. Die Definition der Kontaktflächen erfolgte dabei analog zu den vorangegangenen Modellen. Dies ist in Abbildung 51 dargestellt.

Die Vernetzung erfolgte aufbauend auf den Netzunabhängigkeitsstudien. Dazu wurden die Schaufeln als auch der Ausschnitt der Rotorscheibe mit der Methode „Hex-Dominant“ vernetzt. Bei der Rotorscheibe wurde der Grundkörper mit 5,0 mm großen Elementen aufgelöst und im Bereich der Schaufelbefestigung auf 2,0 mm verfeinert. Im Kontaktbereich zu den Schaufeln befindet sich ein sogenanntes „Mapped Surface“, also ein am Konterpart orientiertes Netz mit der Elementgröße von 1,0 mm. Die Schaufeln sind wie schon Teile der Scheibe mit 2,0 mm aufgelöst und wiederum im Kontaktbereich auf 1,0 mm verfeinert und auf die Scheibe ausgerichtet.

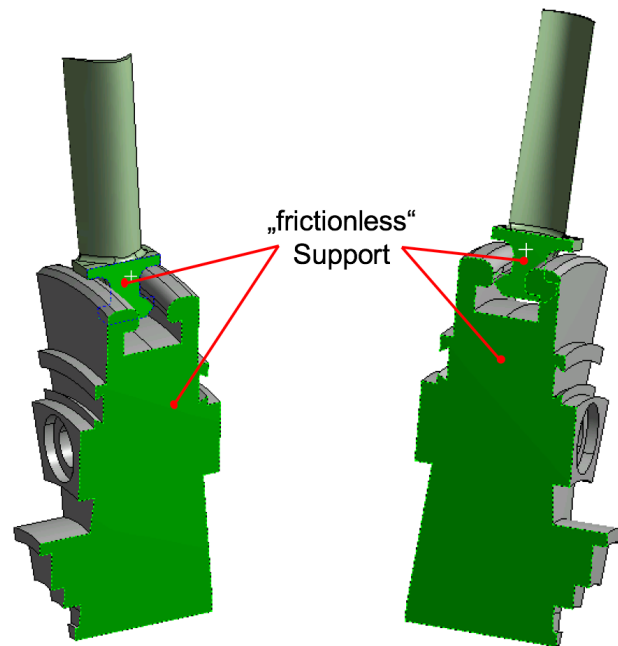


Abbildung 79: Randbedingungen 5Bl-Modell

Als Symmetrie- bzw. Randbedingung wurde auch hier wieder ein „frictionless“-Support verwendet. Dabei wurden jeweils die Schnittflächen der Rotorscheibe als auch die Kontaktflächen der im Modell verbleibenden Schaufel mit der Bedingung versehen. Für die Schaufeln sowie den Rotorscheibenausschnitt wurden Werkstoffkennwerte aus Tabelle 2 herangezogen.

Bei dieser Simulation wurden insgesamt fünf Modelle verwendet. Je eines für jede Schaufel, um somit die Veränderlichkeit der Schaufeleigenfrequenz abhängig von der Lage am Modell zu ermitteln. Eine Veränderung der Materialkennwerte wie in 5.1 erfolgte hierbei nicht.

5.2.2.2 Ergebnisse der Simulation

In den in Abbildung 81 bis Abbildung 86 dargestellten Diagrammen sind die Ergebnisse der Simulation visualisiert. Dabei ist die Eigenfrequenz über die Schaufeln aufgetragen. Die dazugehörigen Simulationsergebnisse (-werte) sind wiederum im „Anhang D: Einfluss der Scheibensteifigkeit“ tabellarisch aufgeführt.

Bei der Auswertung wurden die jeweiligen Schaufeleigenformen gesucht und die sich dabei einstellende Eigenfrequenz aufgezeichnet. In Abbildung 80 ist beispielhaft für die erste Eigenfrequenz die dazugehörigen Eigenformen graphisch dargestellt. Dabei ist ersichtlich, dass die Eigenform der Schaufeln über den Umfang ident ist. In der Grafik ist, wie bei den vorangegangenen Abschnitten, die Verschiebung dargestellt.

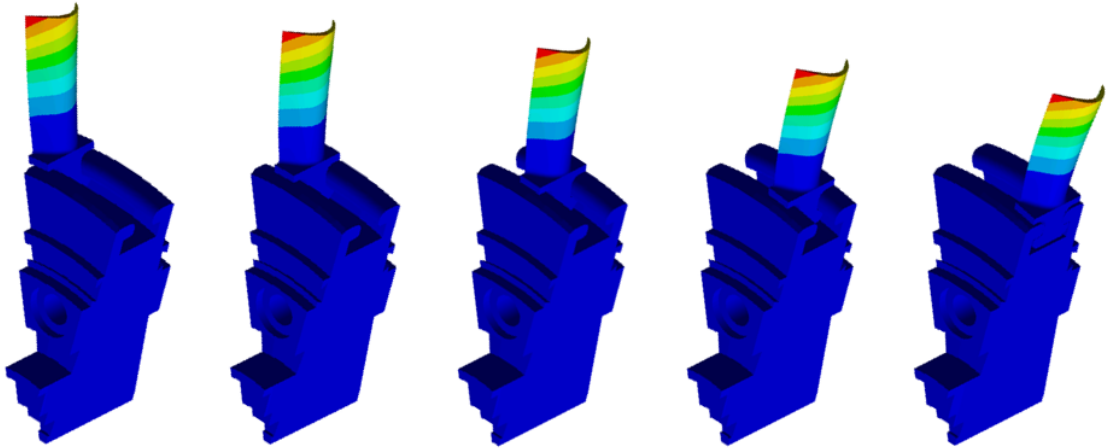


Abbildung 80: Darstellung der 1. Eigenfrequenz

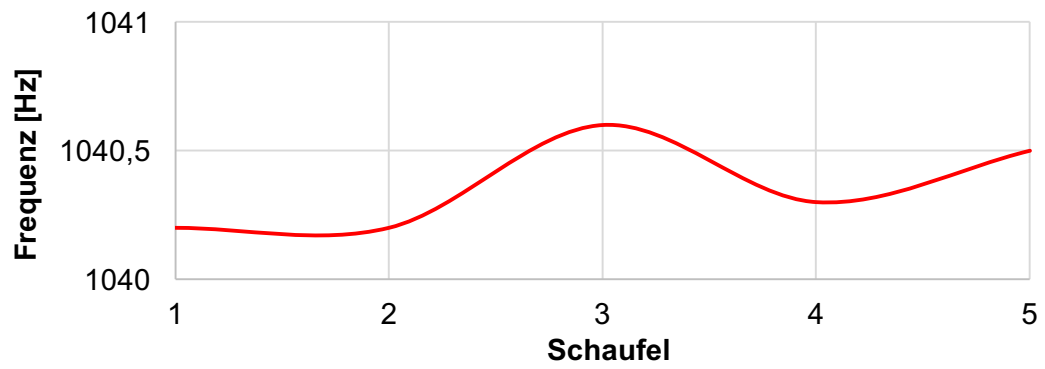


Abbildung 81: 1. Eigenfrequenz 5BI-Modell

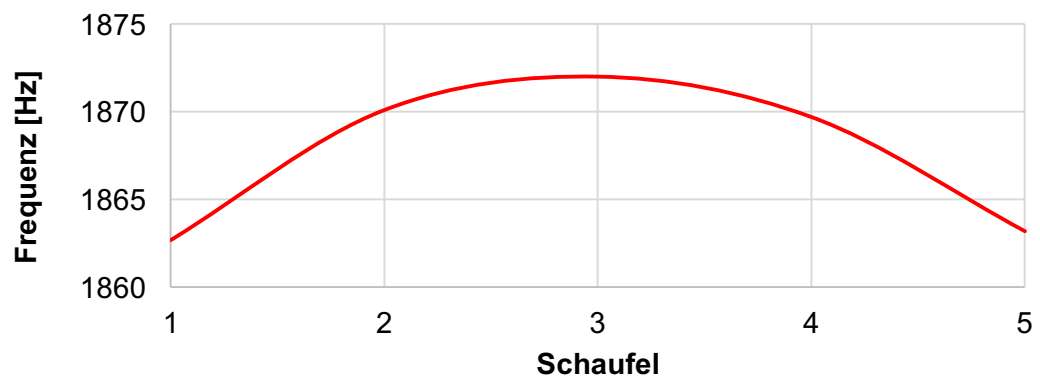


Abbildung 82: 2. Eigenfrequenz 5BI-Modell

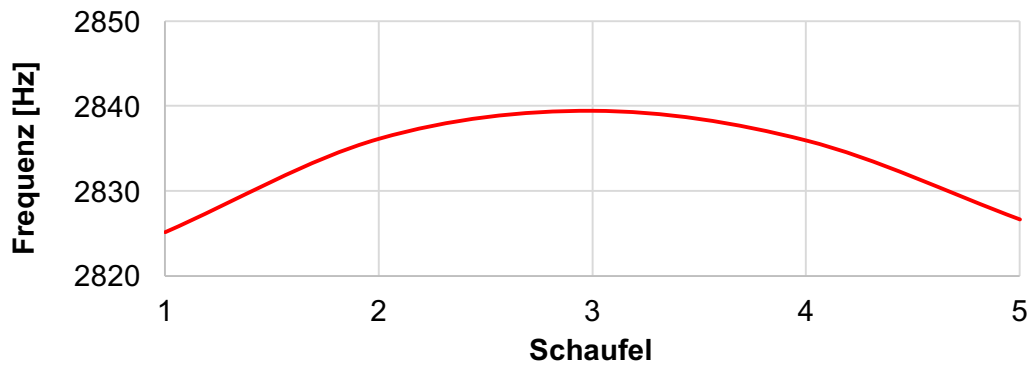


Abbildung 83: 3. Eigenfrequenz 5BI-Modell

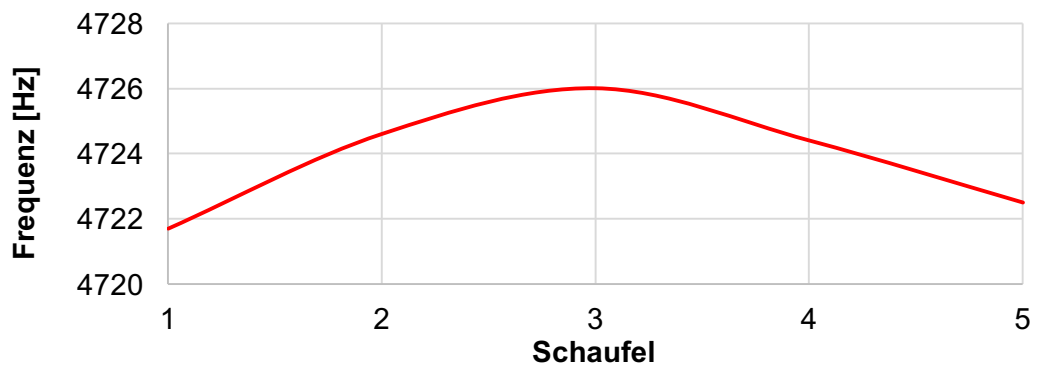


Abbildung 84: 4. Eigenfrequenz 5BI-Modell

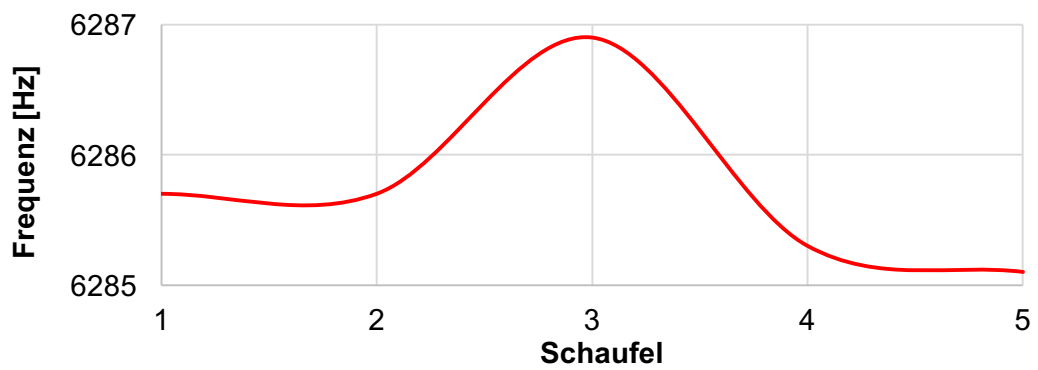


Abbildung 85: 5. Eigenfrequenz 5BI-Modell

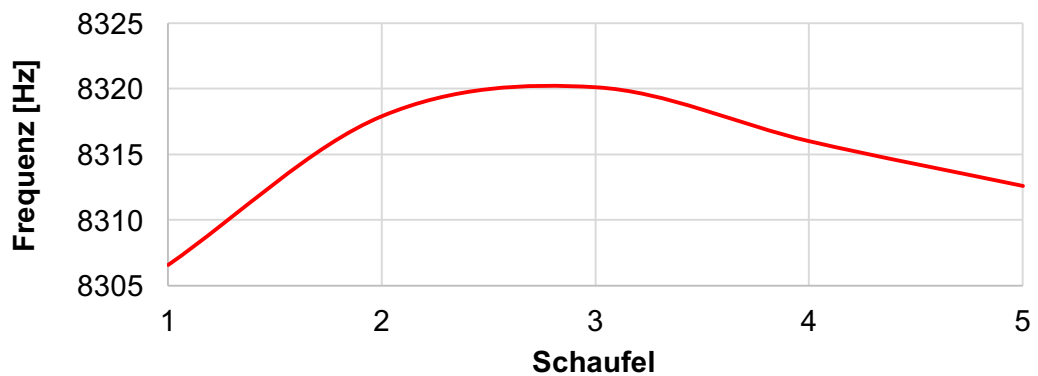


Abbildung 86: 6. Eigenfrequenz 5BI-Modell

5.2.2.3 Interpretation der Ergebnisse

Bei diesem Modell weisen alle Eigenfrequenzen den selben Trend auf. Die Eigenfrequenz nimmt von der 1. Schaufel, d.h. vom Rand, zur 3. Schaufel (Mitte, direkt über der Bohrung) hin zu und fällt hin zur am Rand befindlichen 5. Schaufel wieder ab.

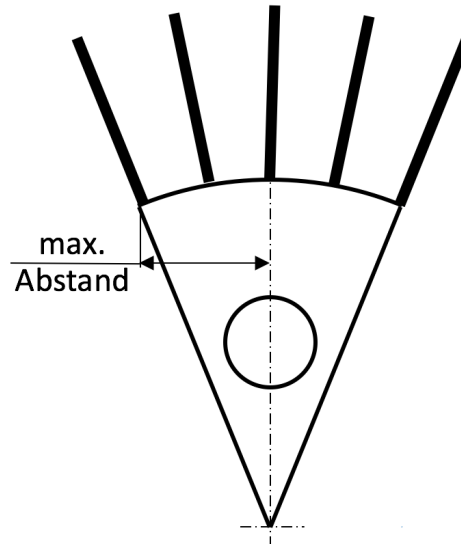


Abbildung 87: Scheibeneinfluss auf Eigenfrequenz der Schaufeln

Somit zeigt sich, dass die Steifigkeit über der Bohrung am höchsten ist und hin zum Rand wieder abfällt. Daraus kann geschlossen werden, dass der Abstand der Schaufel zu der Bohrung einen wesentlichen Einfluss besitzt. Auf die Schaufel direkt oberhalb der Bohrung wirken lediglich Kräfte. Bei den Schaufeln außerhalb des Zentrums kommt ein weiteres Moment durch den steigenden Abstand zu der Bohrung hinzu. Dies führt zu einer Abnahme der Steifigkeit. In Abbildung 87 ist der steigende Abstand ersichtlich. Dabei besitzen die beiden Schaufeln am Rand (Schaufel 1 und 5) den maximalen Abstand. Somit ist in diesem Bereich auch die Steifigkeit auf einem Minimum.

Dieses Modell, falls das Gesamtmodell (Abschnitt 5.2.3) ein ähnliches Ergebnis liefert, ist für eine rasche Abschätzung des Scheibensteifigkeitseinflusses sehr gut geeignet. Zu berücksichtigen ist jedoch, dass bei der Simulation wieder die am Rand befindlichen Schaufeln zu Unstetigkeiten führen können, da diese durch die Modellierung der Symmetriebedingung in Umfangsrichtung nicht nachgiebig sind. Dieser Effekt lässt sich, wie schon beim modifizierten 1BI-Modell, anhand der 1. und der 5. Eigenfrequenz (Biegemoden um das kleine Widerstandsmoment) erkennen.

5.2.3 Gesamtmodell

Da beim 5-Schaufelmodell (5BI-Modell) Randbedingungen verwendet werden mussten, die möglicherweise zu Abweichungen geführt haben, wurde aus Vergleichszwecken das 72-Schaufelmodell (72BI-Modell) herangezogen. Das hier verwendete Modell basiert im Wesentlichen auf dem in Kapitel 4.6 beschriebenen Rotormodell.

5.2.3.1 Simulationsmodell

Als Grundlage wurde das in Schitter [29] sowie in Kapitel 4.6 verwendete 72BI-Modell mit der Kontaktformulierung „Bonded“ verwendet. Um die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen vom Umfang ermitteln zu können wurden insgesamt neun Schaufeln untersucht. Diese wurden so gewählt, dass sich die Schlossschaufel nicht im Bereich der betrachteten Schaufeln befindet. Der Grund dafür liegt in der veränderten Geometrie der Schlossschaufel, die keinen direkten Vergleich zum 5BI-Modell zulassen würde. Das verwendete Modell samt Schaufelnummerierung ist in Abbildung 88 a) dargestellt. Bei der Simulation ist wiederum nur eine Schaufel im Modell verblieben.

Die Kontaktbedingungen sowie die gewählten Vernetzungsparameter sind gleich wie in Schitter [29] bzw. in Kapitel 4.6. Nachfolgend werden diese kurz zusammengefasst angegeben. Der Kontakt zwischen den Schaufeln und der Rotorscheibe, wie in Abbildung 51, sind mit „Bonded“-Bedingungen definiert. Auf die Definition des Schaufelkontakts zueinander konnte hier verzichtet werden, da diese auf Grund der einzelnen im Modell verbleibenden Schaufel nicht existent ist. Die Vernetzung erfolgte analog zu Kapitel 4.6 mit 5,0 mm großen „Hex-Dominant“ Elementen auf der Rotorscheibe und 2,5 mm großen „Tetraeder“-Elementen bei den Schaufeln. Die Kontaktbereiche wurden auch hier wieder mit einem 2,0 mm „Mapped Surface“ vernetzt.

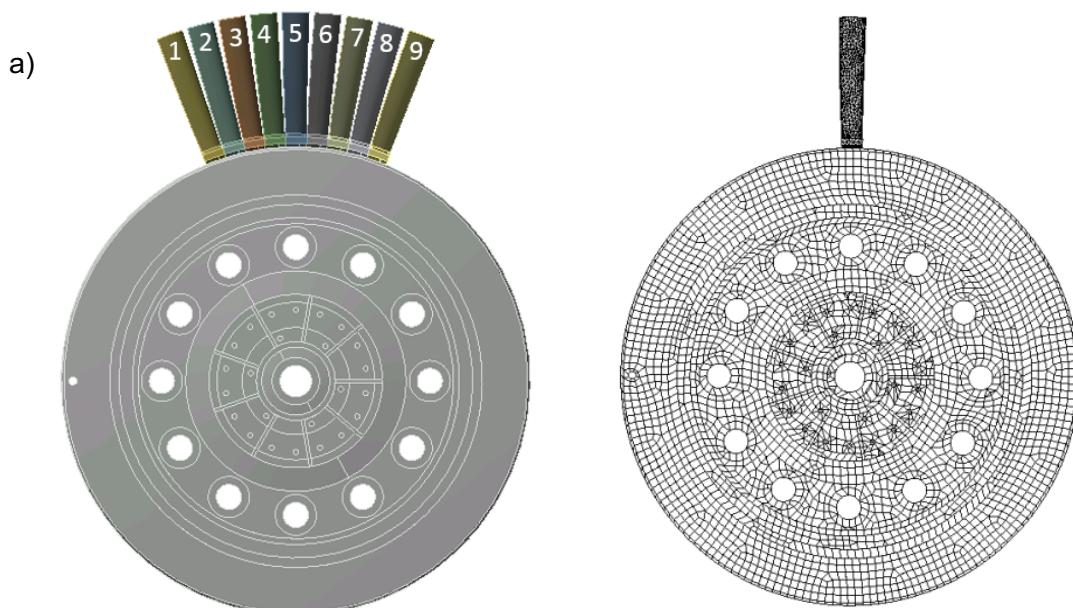


Abbildung 88: Gesamtmodell

5.2.3.2 Ergebnisse der Simulation

Die Auswertung erfolgte auch hier wieder hinsichtlich der Eigenformen der Schaufel. Bei den neun Modellen wurden die Eigenfrequenzen der einzelnen Moden ermittelt und bei gleicher Schaufeleigenform in ein Diagramm eingetragen. In Abbildung 89 sind drei Eigenformen dargestellt. a) zeigt dabei Schaufel 1, b) Schaufel 5 und c) Schaufel 9. In der Grafik wurde wiederum die Verschiebung dargestellt.

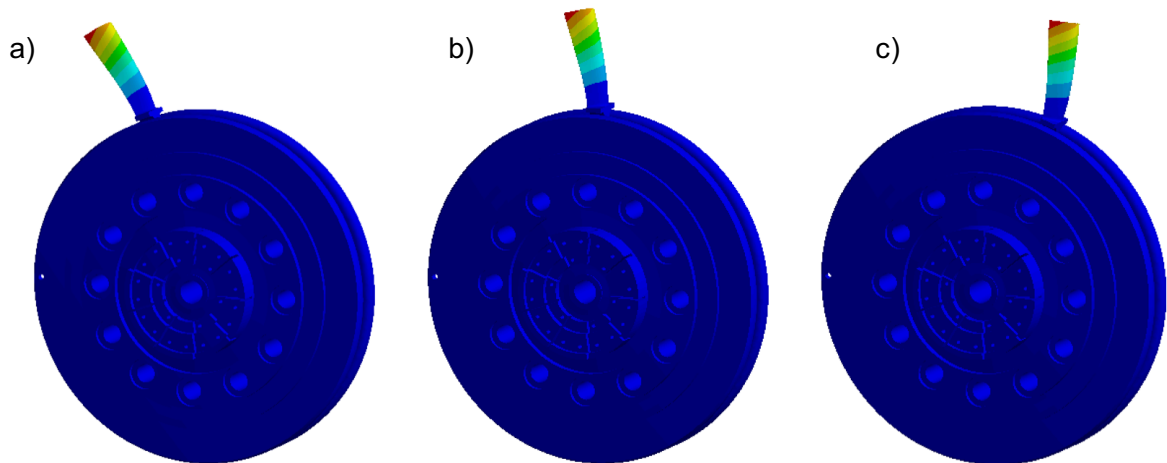


Abbildung 89: Eigenformen Gesamtmodell

Die folgenden Diagramme (Abbildung 90 bis Abbildung 95) zeigen die Simulationsergebnisse. Dabei wurde die Eigenfrequenz über die am Umfang verteilten Schaufeln dargestellt.

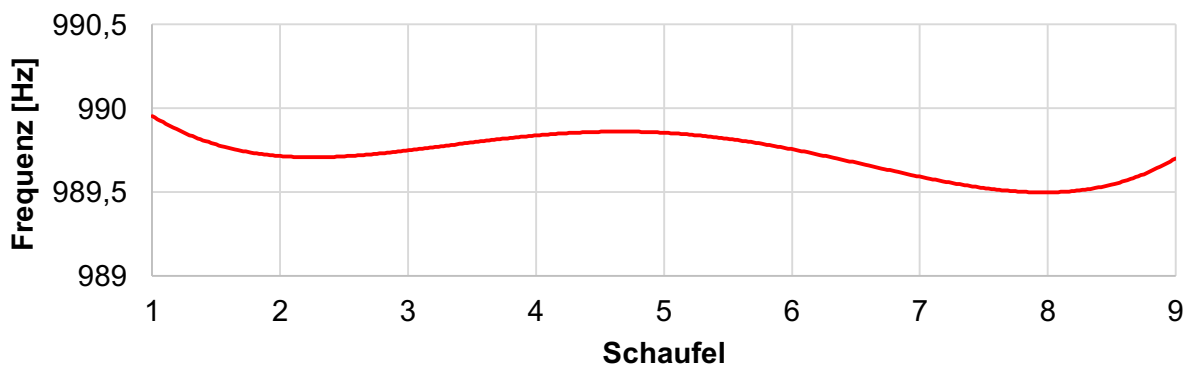


Abbildung 90: 1. Eigenfrequenz Gesamtmodell

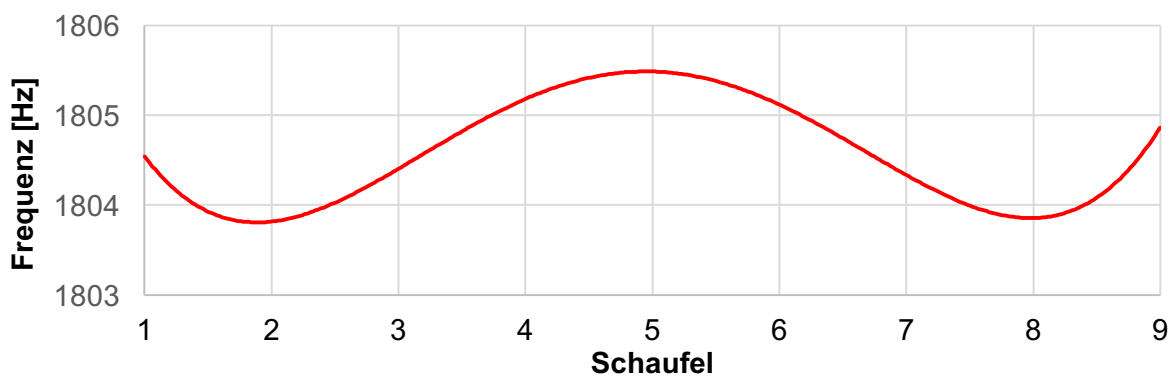


Abbildung 91: 2. Eigenfrequenz Gesamtmodell

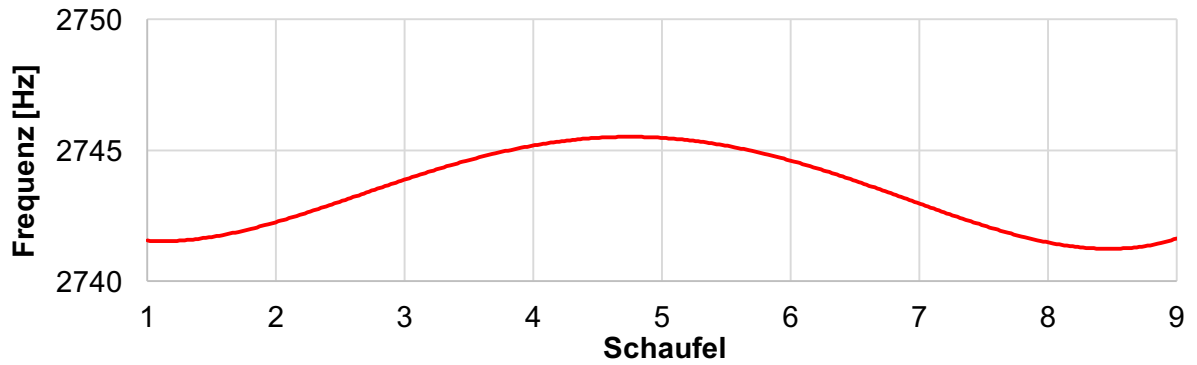


Abbildung 92: 3. Eigenfrequenz Gesamtmodell

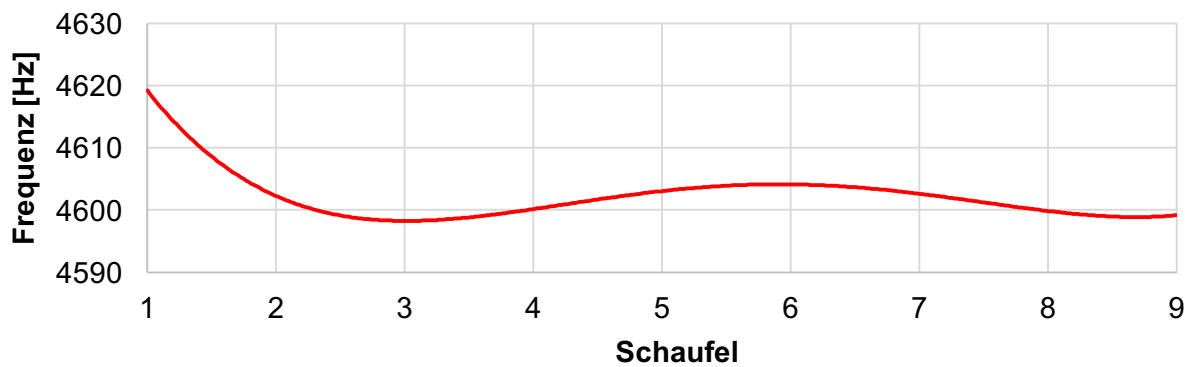


Abbildung 93: 4. Eigenfrequenz Gesamtmodell

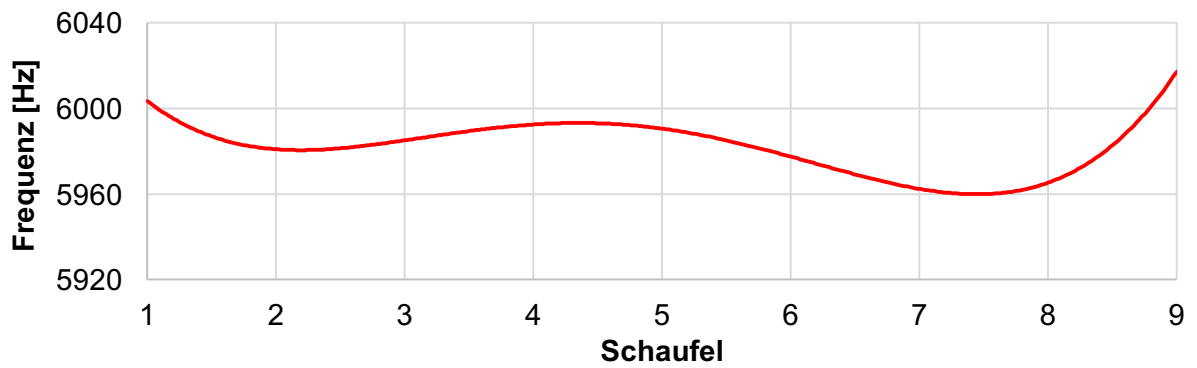


Abbildung 94: 5. Eigenfrequenz Gesamtmodell

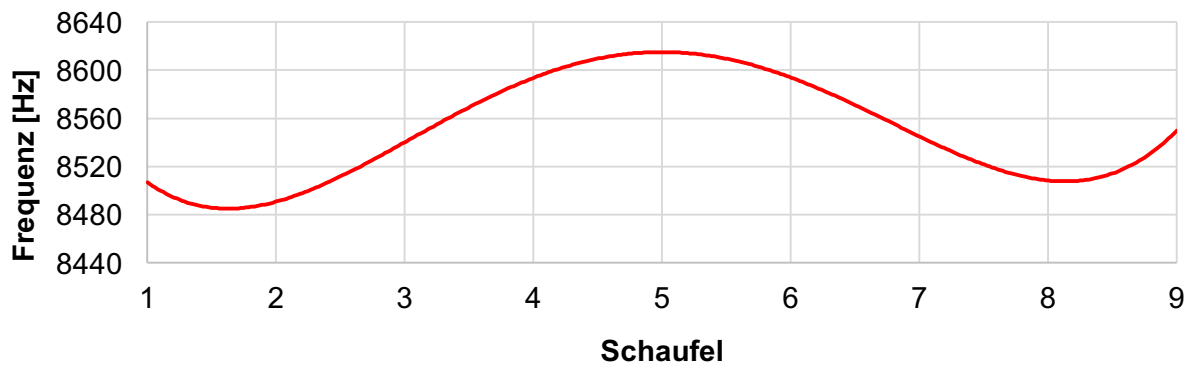


Abbildung 95: 6. Eigenfrequenz Gesamtmodell

5.2.3.3 Interpretation der Ergebnisse

Die Ergebnisse des Gesamtmodells, dargestellt in Abbildung 90 bis Abbildung 95, zeigen den selben Trend als jene des 5BI-Modells. Die Eigenfrequenzen steigen hin zur Bohrung an und fallen danach wieder ab. Die Eigenfrequenzen unterscheiden sich teils sehr von denen des 5BI-Modells.

Aus diesen Ergebnissen kann schlussgefolgert werden, dass einerseits die Rotorscheibe über den Bohrungen die höchste Steifigkeit besitzt und zwischen den Bohrungen ein Steifigkeitsminimum aufweist und andererseits lässt sich erkennen, dass für eine qualitative Abschätzung der Veränderlichkeit der Schaufeleigenfrequenz über den Scheibenumfang das 5BI-Modell sehr gut geeignet ist. Die beim 5BI-Modell angeführten Fehler, durch die am Rand befindlichen Schaufeln, konnten hier vermieden werden, da keine Symmetriebedingungen erforderlich waren.

Die in diesem Abschnitt erhaltenen Ergebnisse zeigen die Veränderlichkeit der Schaufeleigenfrequenzen über den Umfang auf. Bei der Durchführung einer experimentellen Modalanalyse (Anhang E: Experimentelle Modalanalyse) und der Untersuchung aller über den Umfang verteilten Schaufeln wäre es möglich, dass diese Schwankung ersichtlich würde. Anhand der Simulation ist somit bekannt, dass diese aufgrund der umfangsveränderlichen Rotorscheibensteifigkeit zustande kommt.

6. Verdichterstudie [28]

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Studie „Resonance Identification for Impellers“ [28] von Singh, Thakur, Sullivan und Donald, die im Rahmen des 32. Turbomachinery Symposiums (2003) veröffentlicht wurde. In den nachfolgenden Seiten wird die dort durchgeführte Untersuchung wiederholt. Dabei wird überblicksmäßig auf die Modellbildung, die Netzgenerierung sowie die Einspannbedingungen eingegangen. Auf die Auswertung wird detaillierter eingegangen, besonders hinsichtlich der Interferenz-Diagramme. Ziel der Studie ist es, die von Singh et. al. gewählten Ansätze für die Interferenz-Diagramme besser zu verstehen und diese auf den HSL Rotor überzuleiten.

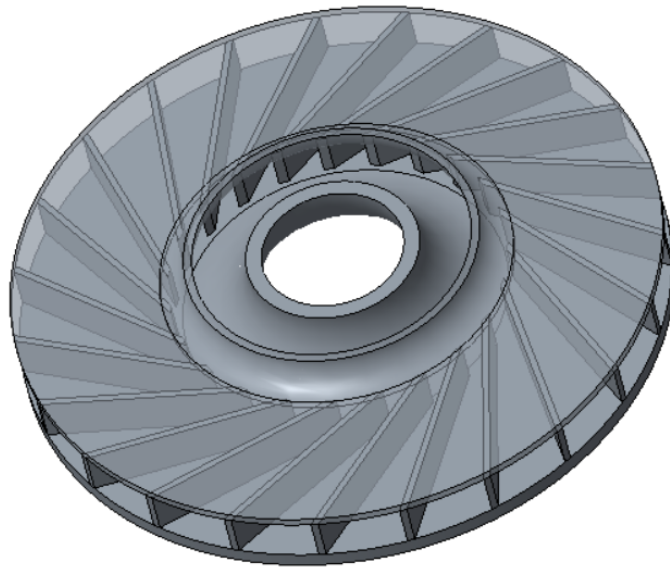


Abbildung 96: Radialverdichter

Im Rahmen dieser Studie wurde ein 23-schaufeliger Radialverdichter angelehnt an Singh [28] modal charakterisiert. Die Beschaukelung des Verdichters erfolgte dabei durch gerade, nicht gekrümmte Schaufeln, die gleichmäßig über den Umfang verteilt sind. Die Abmessungen (in Studie nicht erwähnt) wurden so gewählt, dass die Proportionen, mit dem von Singh verwendeten Verdichter, übereinstimmen.

Anzumerken ist, dass die Untersuchung für den beschriebenen Verdichter durchgeführt wurde um Aufschlüsse zu den Interferenz-Diagrammen zu erlangen. Die unter Singh [28] getätigten Untersuchungen zur Verbesserung der Struktur wurde nicht weiterverfolgt, da der verwendete Verdichter nicht auf einem realen Bauteil basiert.

6.1 Modellbildung, Vernetzung und Einspannbedingungen

Für die Charakterisierung des Verdichters wird ähnlich vorgegangen wie beim HSL Rotor. Anfänglich wurde eine Schaufel und die Nabenscheibe berechnet und im Anschluss die Ergebnisse als Grundlage für den Verdichter ohne Deckscheibe (Teilmodell) und den Verdichter mit Deckscheibe (Gesamtmodell) genutzt. Der simulierte Verdichter ist einem in der Realität eingesetzten Radialverdichterrad nachempfunden, d.h. das Verdichterrad wurde als Guss- bzw. Schweißbauteil gefertigt und ist somit als einzelnes Bauteil und nicht als Baugruppe, wie der HSL Rotor, anzusehen. Dieses Detail spielt bei der Modellbildung und den damit verbundenen Überlegungen eine wesentliche Rolle, auf die beim jeweiligen Modell näher eingegangen wird.

Ausgehend vom gesamten Verdichter wurde durch Singh das Modell immer weiter heruntergebrochen und in seine Einzelteile wie z.B. die Nabenscheibe oder die Schaufeln zerlegt. Grundlegend wird auch hier der Unterschied zwischen schaufeldominanten Moden und scheidendominanten Moden betrachtet, um in späterer Folge die Charakterisierung des Verdichters vollständig durchführen zu können.

6.1.1 Verdichter mit Deckscheibe

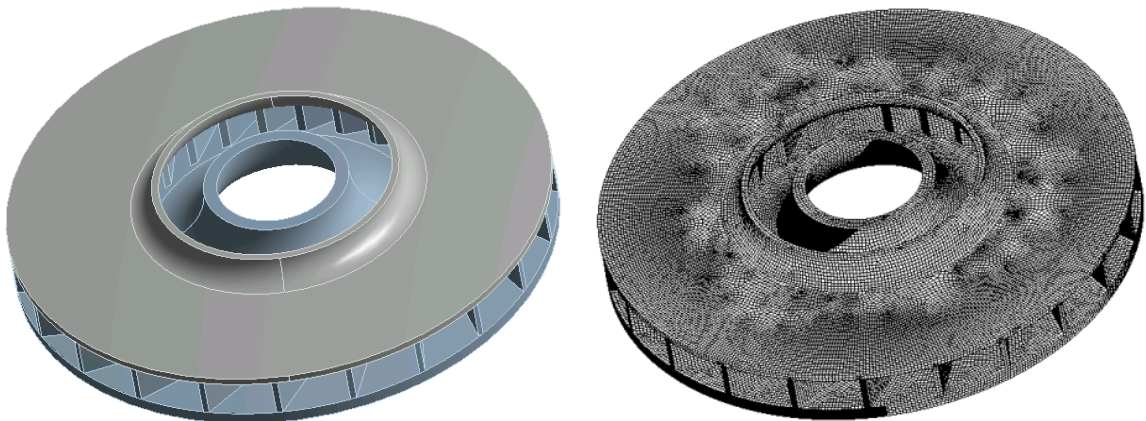


Abbildung 97: Verdichter (links Modell und rechts Netz)

Das ursprüngliche Modell, also der gesamte Verdichter, besteht, wie schon erwähnt, aus einem Teil. Um jedoch die auftretenden Schaufelschwingungen beurteilen zu können, wurde der Verdichter für die Simulation geteilt ausgeführt. Die Deckscheibe wurde dabei als separates Teil angenommen und mittels einer „bonded“ Bedingung mit den Schaufeln verbunden (Abbildung 98). Somit erscheint der Verdichter in der Simulation wieder als Einzelteil, da die Kontaktflächen starr miteinander verbunden sind.

Beim Vernetzen wurden (Naben- und Deckscheibe) mit 5 mm und die Schaufeln mit 3,5 mm großen Netzelementen vernetzt. Zusätzlich kam bei den Kontaktflächen ein „Mapped Surface“ mit 2 mm großen Netzelementen zum Einsatz. In Abbildung 97 (rechts) ist das vernetzte Verdichterlaufrad dargestellt. Die Vernetzung des Verdichters erfolgte mit der Methode „Hex Dominant“, d.h. es werden vorrangig viereckige Gitterelemente verwendet und nur bei Bedarf dreieckige Elemente. Insgesamt besteht das Modell aus 348.962 Netzelementen mit 1.209.733 Knoten.

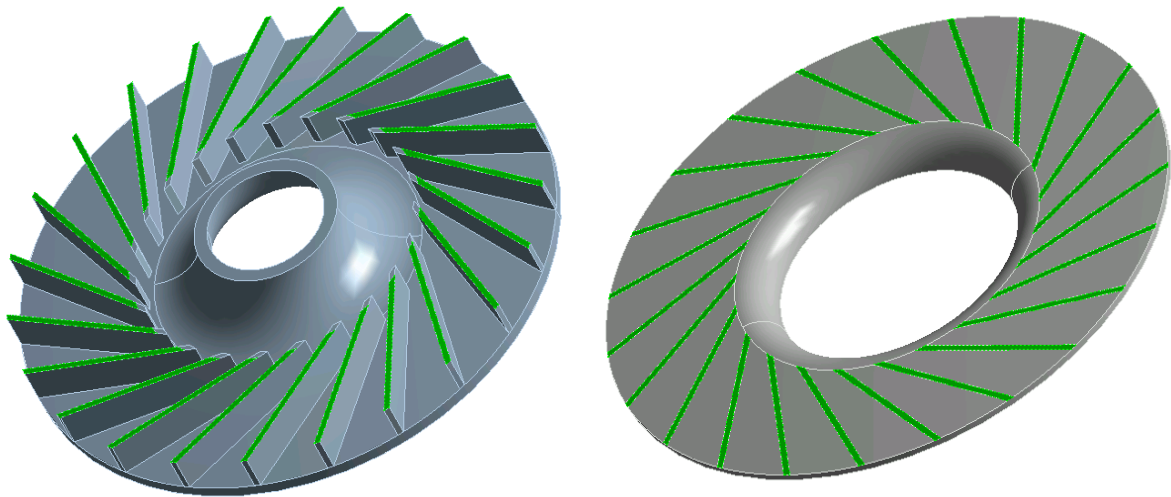


Abbildung 98: Kontaktflächen Schaufeln mit Deckplatte

6.1.2 Verdichter ohne Deckscheibe

Bei dem in Abbildung 99 dargestellten Modell wurde die Deckplatte weggelassen und der Verdichter in dieser offenen Konfiguration betrachtet. Darauf entfiel der wesentliche Aufbereitungsaufwand, da einerseits keine Flächenaufbereitung erforderlich war und ferner auch auf die Definition der Kontaktbedingungen verzichtet werden konnte.

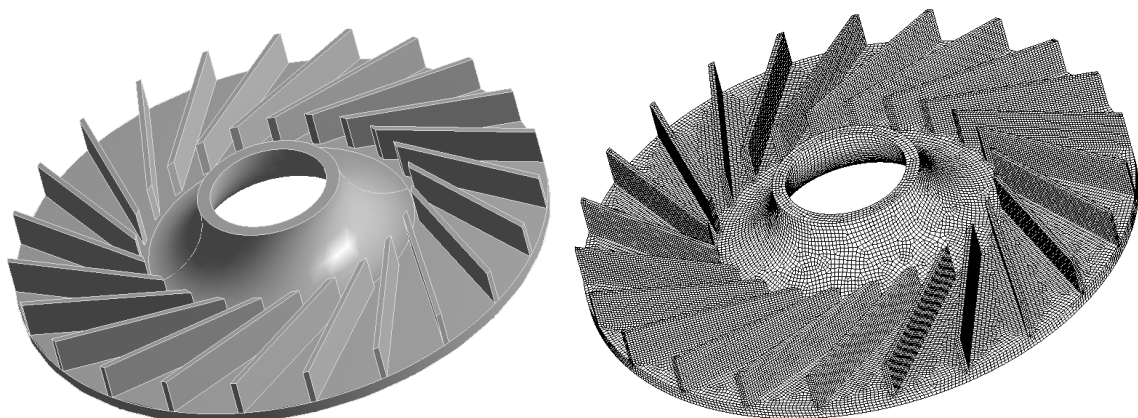


Abbildung 99: Offener Verdichter (rechts Modell und links Netz)

Die Parameter des Netzes wurden gleich gewählt wie jene beim Verdichter mit Deckscheibe. Lediglich das „Mapped Surface“ konnte aufgrund der offenen Bauweise weggelassen werden. Das Modell besteht aus 183.013 Netzelementen mit insgesamt 710.932 Knoten.

6.1.3 Nabenscheibe

Die Nabenscheibe ohne Beschaukelung, wie in Abbildung 100 ersichtlich, dient zur vollständigen Charakterisierung der modalen Eigenschaften. Wird die Platte in einer ihrer Eigenfrequenzen angeregt, pflanzt sich diese Schwingung in die Schaufeln fort und regt diese auch zur Schwingung an. Die Platte wurde dabei mit den gleichen Parametern, wie bereits bei den vorhergegangenen Modellen, vernetzt, d.h. Netzelemente mit einer Größe von 5 mm. Auch hier wurde wieder die „Hex Dominant“ Vernetzungsmethode verwendet. Das Rechenetz des untersuchte Modells der Nabenscheibe besteht aus 120.019 Elementen mit 439.364 Knoten.

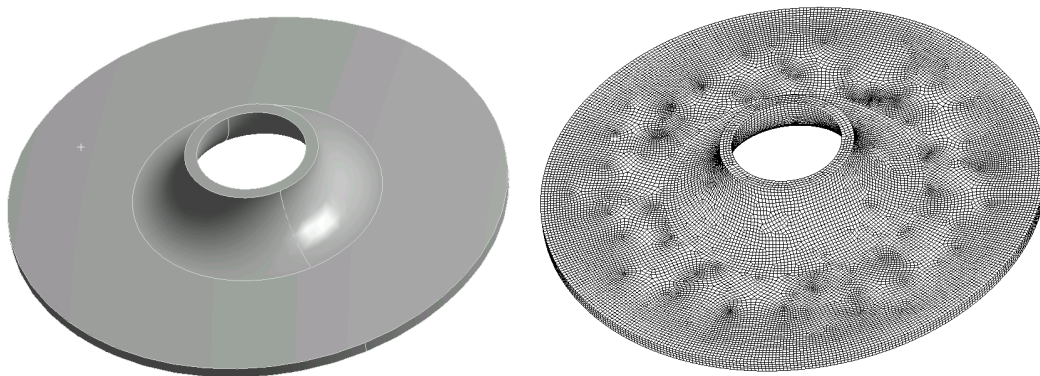


Abbildung 100: Grundplatte (rechts Modell und links Netz)

Die Deckscheibe wurde dabei vernachlässigt, da diese eine geringere Masse und somit einen geringen Einfluss auf die Systemcharakteristik besitzt.

6.1.4 Schaufelmodell

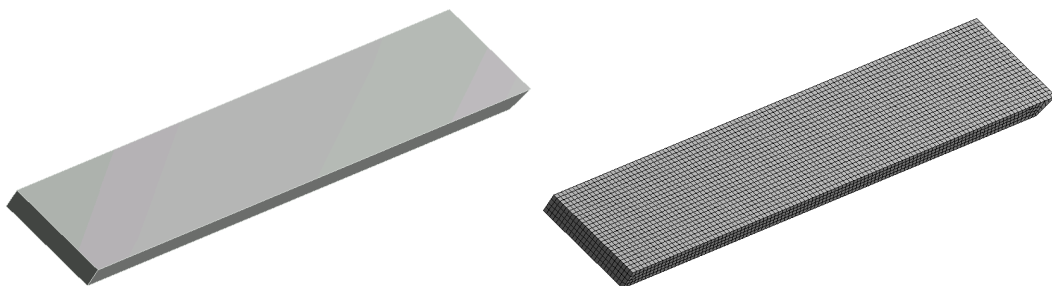


Abbildung 101: Schaufel (rechts Modell und links Netz)

Wie bereits im Abschnitt 6.1 wurde auch das Schaufelmodell, wie in Abbildung 101 ersichtlich, für die schnelle und genaue Charakterisierung hinsichtlich der Schaufelmoden eingeführt. Hierbei wird ferner zwischen zwei Teilmodellen unterschieden. Einerseits jenes der beidseitig eingespannten Schaufel, die näherungsweise der Situation im Verdichter mit Deckscheibe entspricht, und andererseits jenes der einseitig eingespannten Schaufel, die dem Verdichter ohne Deckscheibe entspricht. Beide Teilmodelle mit der Art und Lage der Einspannung sind in Abbildung 102 ersichtlich. Als Randbedingung kam eine „fixed“-Support-Bedingung zum Einsatz.

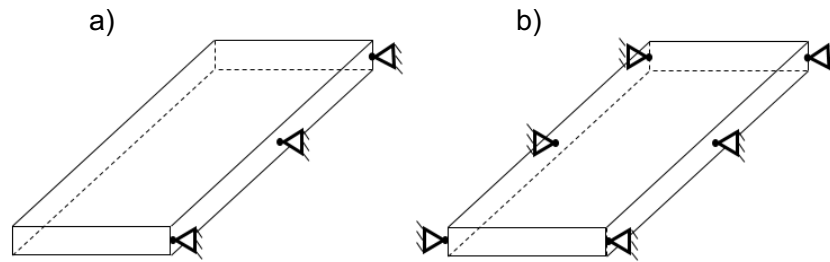


Abbildung 102: Einspannung der Schaufeln a) einseitig b) beidseitig

Die Vernetzung der Schaufeln erfolgte dabei mit 2 mm großen würfelförmigen Netzelementen. Somit wurde die Detailstudie der Schaufeln feiner aufgelöst als in den Gesamtmodellen. Der Grund hierfür liegt in der einfachen Form, den geringen Abmessungen und somit der geringen Anzahl an Netzelementen. Das Gitter des Schaufelmodells besteht aus 12.197 Elementen mit 56.591 Knoten.

6.2 Auswertung

Bei der Auswertung wird umgekehrt vorgegangen wie bei der Modellbildung. Ausgehend von den Teilmodellen der Schaufel und der Nabenscheibe werden die Verdichtermodelle (mit und ohne Deckscheibe) charakterisiert. Wesentlich für dieses Vorgehen ist, dass die Unterscheidung zwischen schaufeldominanten und scheidendominanten Moden getroffen werden muss, um den Verdichter vollständig zu charakterisieren.

6.2.1 Maximaler Nodal Diameter

Nach der gängigen Literatur (z.B. Wildheim, Singh etc.) lassen sich die maximal möglichen Nodal Diameter aus der Schaufelanzahl des Verdichters/Rotors bestimmen. Der hier beispielhaft ausgewertete Verdichter hat 23 Verdichterschaufeln, d.h. eine ungerade Schaufelzahl. Im Folgenden wird exemplarisch für den Verdichter die max. ND-Zahl errechnet.

$$R = 23 \text{ Schaufeln} \qquad m_{max} = \frac{R-1}{2} = 11$$

Anhand dieser Gleichung wurde gezeigt, dass max. ein ND von 11 möglich ist. Höhere ND's werden folglich bei der Auswertung nicht berücksichtigt, wären aber theoretisch bei den scheidendominanten Moden möglich.

6.2.2 Schaufel

Wie im Kapitel „6.1 Modellbildung, Vernetzung und Einspannbedingungen“ beschrieben, unterscheidet man beim Schaufelmodell jene Variante mit einseitiger Einspannung (offener Verdichter) und jene mit beidseitiger Einspannung (geschlossener Verdichter).

Grundlegend haben beide Modelle unterschiedliche Eigenformen, bedingt durch die unterschiedlichen Einspannungen, ferner liegen auch die Eigenfrequenzen der beidseitig eingespannten Modellvariante beträchtlich höher. Abbildung 103 zeigt die Unterschiede in den Eigenformen der ein- und beidseitigen Einspannung.

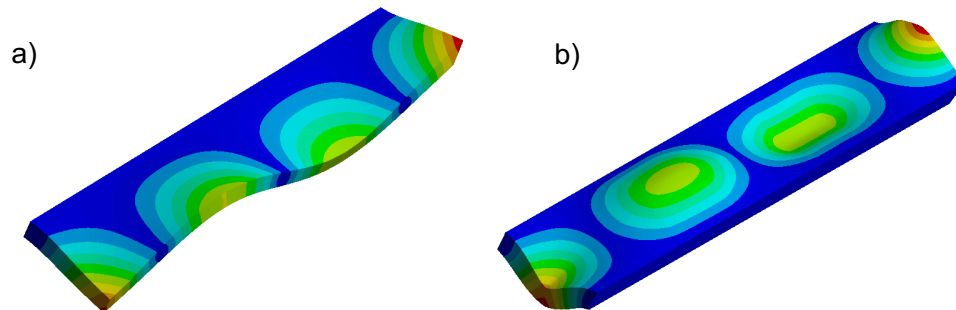


Abbildung 103: 4. Schaufeleigenform a) einseitig eingespannt b) beidseitig eingespannt

Die Auswertung erfolgte im Rahmen der Untersuchung für die ersten sieben Eigenformen. Dabei beginnen jene der einseitig eingespannten Schaufel bei 2353 Hz und gehen bis 11561 Hz. Jene Frequenzen der beidseitig eingespannten Schaufel starten erst bei 13484 Hz und steigen bis 20507 Hz an. D.h. die beidseitige Einspannung führt zu einer Steifigkeitserhöhung des Modells und somit zu höheren Frequenzen. In Tabelle 13 sind die Eigenfrequenzen beider Teilmodelle angeführt.

Tabelle 13: Eigenfrequenzen Verdichterschaukeln in Hz

	1. EF	2. EF	3. EF	4. EF	5.EF	6.EF	7.EF
einseitig eingespannt	2353	2608	3364	4577	6318	8652	11561
beidseitig eingespannt	13484	13776	14241	15000	16321	18161	20507

6.2.3 Nabenscheibe

Bei der Nabenscheibe gibt es einige Unterscheidungskriterien hinsichtlich der Eigenformen. Dabei werden im Wesentlichen axiale, radiale und tangentiale Moden unterschieden. Die radialen sowie tangentialen Moden wurden im Rahmen der Studie vernachlässigt und die auftretenden Effekte nur anhand der axialen Scheibenmoden untersucht.

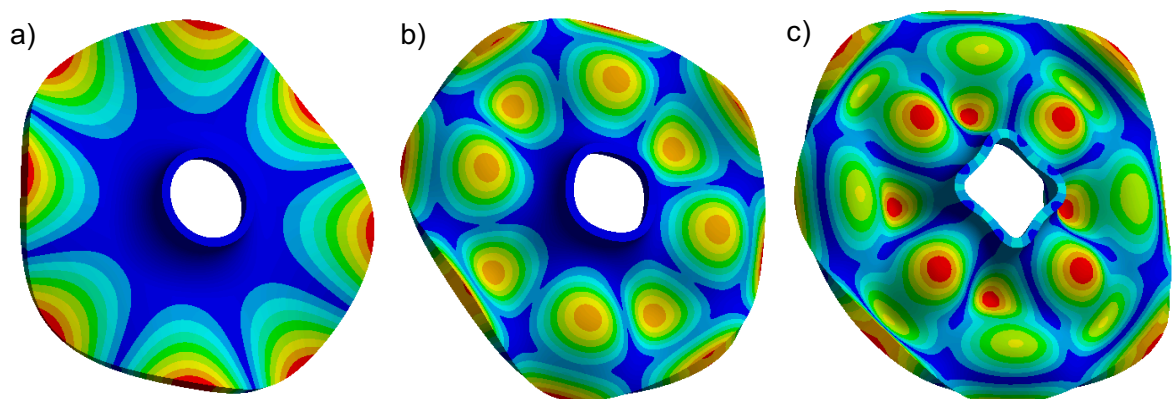


Abbildung 104: Eigenformen der Nabenscheibe mit $m=4$ a) $n=0$ b) $n=1$ c) $n=2$

In Abbildung 104 sind beispielhaft unterschiedliche Eigenformen der Nabenscheibe dargestellt. Diese unterscheiden sich anhand des Nodal Diameters m sowie des Nodal Circles n , das sind Kontenkreise, die grundsätzlich von null bis unendlich gehen können. Im Rahmen dieser Arbeit dienten die Knotenkreise der Zuordnung der Moden zu den Modefamilien. Dabei wurden nur die ersten drei Modefamilien ausgewertet ($n=0-2$). Alle höheren Moden waren, insbesondere bei dem betrachteten Verdichter, nicht mehr eindeutig ausgebildet und somit wurden diese bei der Untersuchung vernachlässigt.

Tabelle 14: Eigenfrequenzen Nabenscheibe in Hz

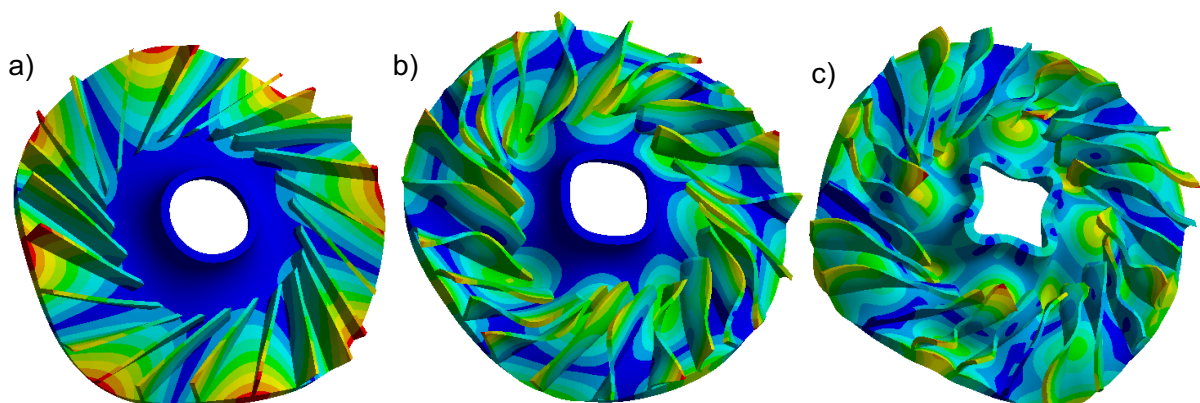
	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10	m=11
n=0	-	0,6	239	455	744	1114	1559	2072	2647	3284	3977	4726
n=1	414	698	1350	2061	2641	3278	4010	4830	5730	6699	7729	8820
n=2	1923	2237	3028	3877	5174	6101	7013	8005	9094	10270	11526	12841

In Tabelle 14 wurden die Eigenfrequenzen der axialen Eigenformen sortiert nach Nodal Diameter und Nodal Circle zusammengefasst. Die erste Eigenform der Modefamilie NC=0 wurde bei der Simulation nicht ausgebildet.

6.2.4 Verdichter ohne Deckscheibe

Zur Charakterisierung dieses Modells wurden die bereits ausgewerteten Schaufel- und Nabenscheibeneigenformen herangezogen. Dabei erfolgte die Unterscheidung nach schaufel- und scheibendominanten Moden. Die Zuordnung zu den Modefamilien erfolgte bei den schaufeldominanten Moden anhand der Schaufeleigenform, bei den scheibendominanten Moden wurde die Nodal Circle Anzahl herangezogen.

Die Plattenmoden sind grundsätzlich jene, die bei der Grundplatte auch aufgetreten sind. Die Schwierigkeit bei der Auswertung liegt insbesondere darin, dass bei höheren Frequenzen, $m > 7$ und einer $n > 0$ die Moden nicht mehr vollständig oder nicht mehr deutlich ausgebildet wurden. In Abbildung 105 sind beispielhaft die Moden mit dem Nodal Diameter $m=4$ der unterschiedlichen Modefamilien angeführt.

Abbildung 105: Scheibendominante Moden mit $m=4$ a) $n=0$ b) $n=1$ c) $n=2$

Ferner haben sich bei der Simulation auch die bereits erwähnten schaufeldominanten Moden ausgebildet. In Abbildung 106 sind beispielhaft drei unterschiedliche Nodal Diameter m der dritten schaufeldominanten Modenfamilie angeführt. Die Betrachtung der schaufeldominanten Moden wurde nicht weiter fortgeführt, da diese Erkenntnisse bereits durch das Schaufelmodell gewonnen werden konnten.

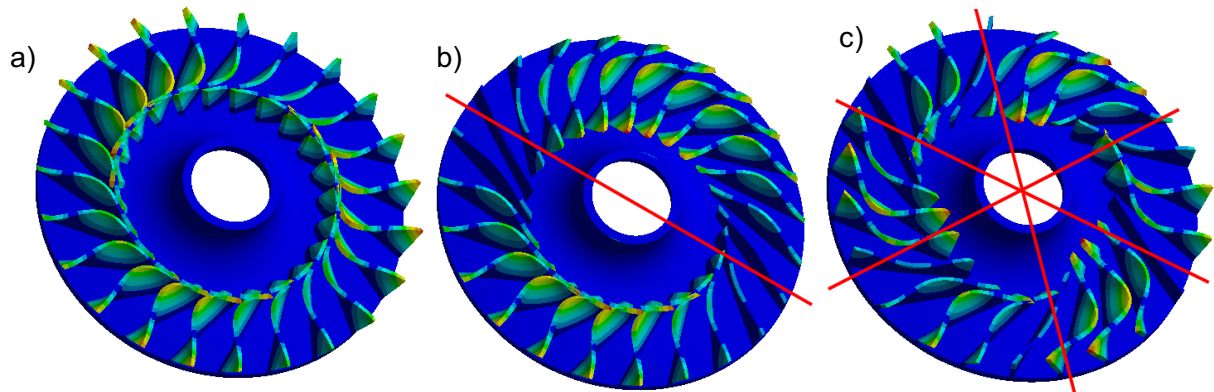


Abbildung 106: Schaufeldominante Moden a) $m=0$ b) $m=1$ c) $m=3$

Tabelle 15: Eigenfrequenzen offener Verdichter in Hz

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$	$m=10$	$m=11$
$n=0$	-	-	243	483	779	1131	1503	1802	2921	3509	4035	4529
$n=1$	437	797	1409	2781	3394	4218	4908	5815	6666	7617	8409	9215
$n=2$	2623	2980	3820	5348	6651	7077	7905	8944	9618	10415	-	-

6.2.5 Verdichter mit Deckscheibe

Der Verdichter ist, wie im Kapitel „6.1 Modellbildung, Vernetzung und Randbedingungen“ erklärt, zweiteilig ausgeführt. Wie schon beim Verdichter ohne Deckscheibe kann auch hier wieder zwischen schaufel- und scheidendominanten Moden unterschieden werden. Die schaufeldominanten Moden wurden auch hier wieder vernachlässigt. In Abbildung 107 ist die Ausbildung eines Modes mit und ohne ausgeblendeter Deckscheibe ersichtlich.

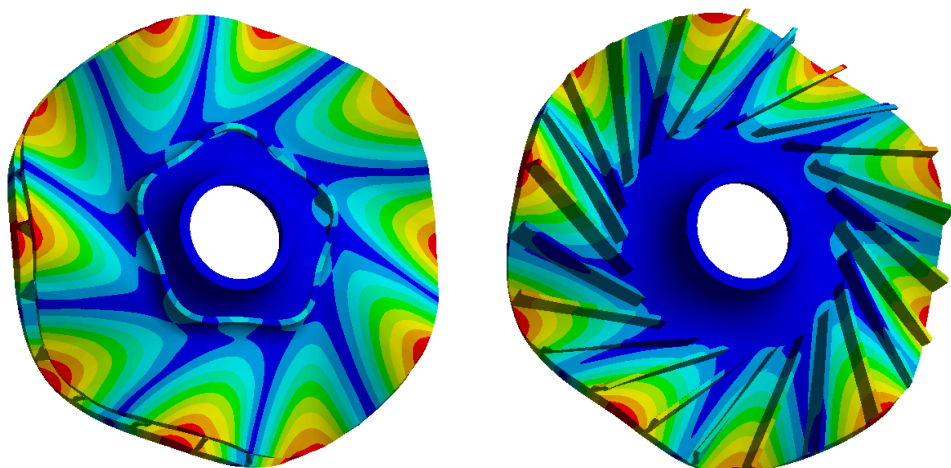


Abbildung 107: Geschlossener Verdichter mit und ohne Deckplatte

Die Abbildung 108 zeigt auch hier wiederum beispielhaft die drei unterschiedlichen Typen von scheibendominanten Eigenformen des Verdichters. In Verbindung mit der Deckscheibe wurden einige Moden nicht mehr eindeutig ausgebildet bzw. konnten nicht identifiziert werden. Aus diesem Grund sind in Tabelle 16 mehrere Eigenfrequenzen nicht eingetragen.

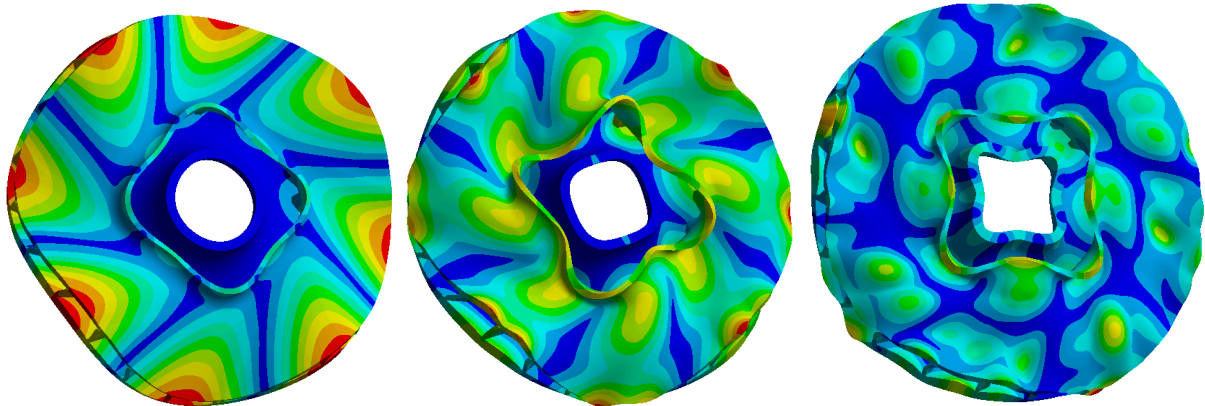


Abbildung 108: Geschlossener Verdichter mit $m=4$ a) $n=0$ b) $n=1$ c) $n=2$

Tabelle 16: Eigenfrequenzen geschlossener Verdichter in Hz

	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10	m=11
n=0	-	-	446	969	1457	1924	2392	2874	3370	3853	4639	4999
n=1	898	1029	2043	2774	3795	4637	5638	6356	7030	8317	8875	9304
n=2	-	3372	4169	-	7288	7905	9106	9933	10689	-	-	-

6.3 Interferenz Diagramme

Im folgenden Abschnitt sind die Ergebnisse der FE-Berechnung nach den sogenannten Mode-Familien graphisch zusammengefasst. Durch die Interferenz-Diagramme können Aufschlüsse gewonnen werden, welche Moden bei unterschiedlichen Drehzahlen angeregt werden ($n_1=7800 \text{ min}^{-1}$ und $n_2=9700 \text{ min}^{-1}$). Die Gleichungen der Zick-Zack-Geraden sind direkt in den Diagrammen angeführt. R repräsentiert dabei die Anzahl der Schaufeln, m ist eine Laufvariable und steht für den Nodal Diameter.

6.3.1 Verdichterschaufel

Im in Abbildung 109 dargestellten Interferenz-Diagramm sind die Eigenfrequenzen der einseitig eingespannten Schaufeln (farbige Linien) dargestellt. Die Frequenzen wurden dabei als über die auf der Abszisse aufgetragenen Nodal Diameter als konstant angenommen. Dies ist dadurch bedingt, dass bei der Schaufel keine Nodal Diameter wie bei der Schwingung z.B. der Nabenscheibe ausgebildet werden. Da der dabei auftretende Frequenzunterschied zwischen den einzelnen Eigenformen nur sehr gering ist, kann die Frequenz näherungsweise als konstant angenommen werden.

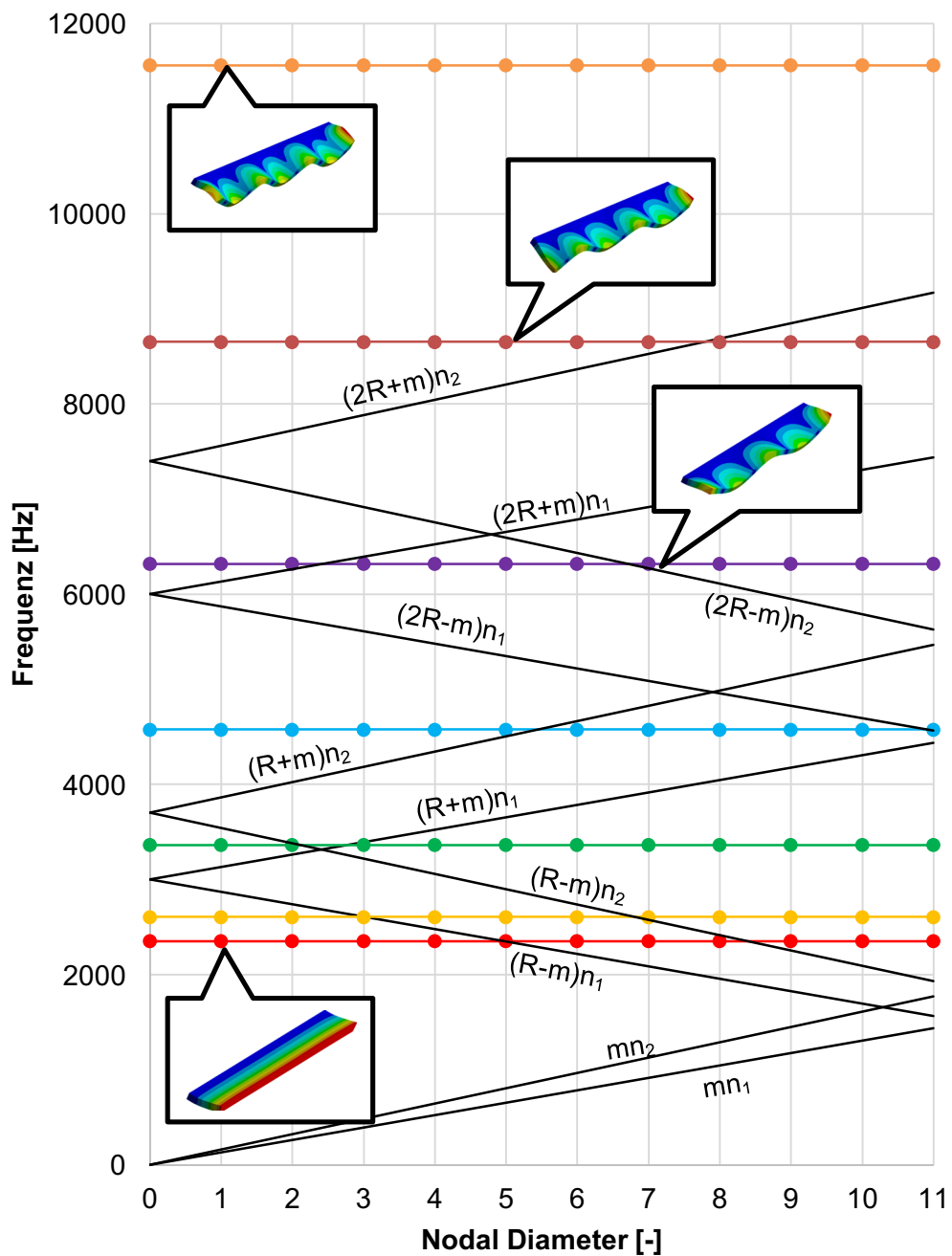


Abbildung 109: Interferenz-Diagramm einseitig eingespannte Schaufel

Die Zick-Zack geformten Linien stellen hier die Anregungen dar. Dabei wird zwischen zwei unterschiedlichen Anregungen mit $n_1=7800 \text{ min}^{-1}$ und $n_2=9700 \text{ min}^{-1}$ unterschieden.

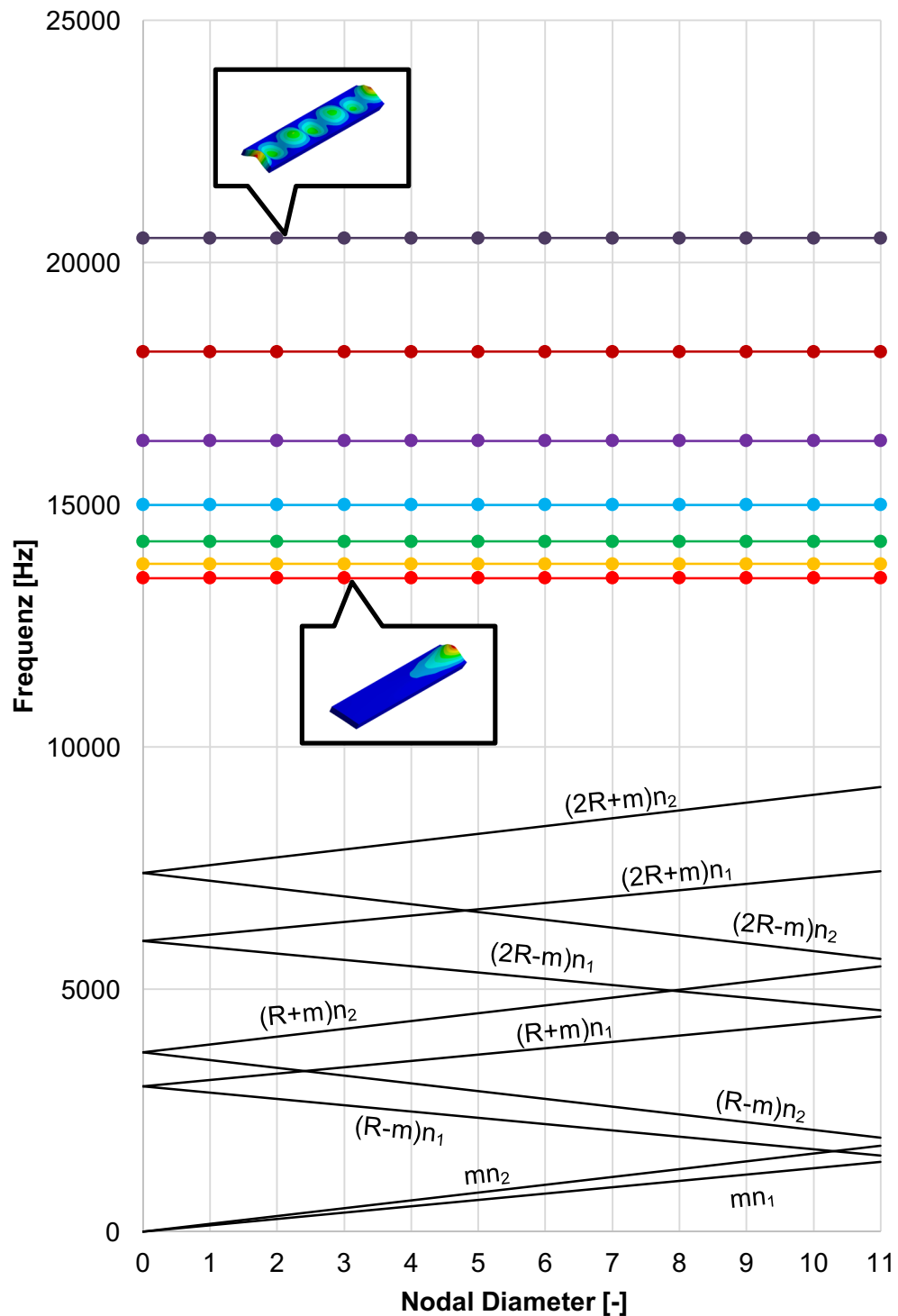


Abbildung 110: Interferenz-Diagramm beidseitig eingespannte Schaufel

In Abbildung 110 ist das Interferenz-Diagramm der beidseitig eingespannten Schaufel dargestellt. Analog zu dem Interferenz-Diagramm der einseitig eingespannten Schaufel sind auch hier die einzelnen Schaufeleigenfrequenzen über den Nodaldiameter als konstant angenommen.

6.3.2 Nabenscheibe

Im in Abbildung 111 dargestellten Interferenz-Diagramm sind die Eigenfrequenzen der Nabenscheibe als Punkte über den Nodal Diameter aufgetragen. Die farbigen Verbindungslinien zeigen die jeweilige Zugehörigkeit der Eigenform zu einer der drei Modefamilien. Die rote Linie kennzeichnet dabei die Modefamilie mit keinem Knotenkreis ($n=0$), die blaue jene mit einem ($n=1$) und die grüne jene mit zwei ($n=2$) Knotenkreise. Auch hier spiegeln die Zick-Zack-Linien die Anregung des Systems wieder.

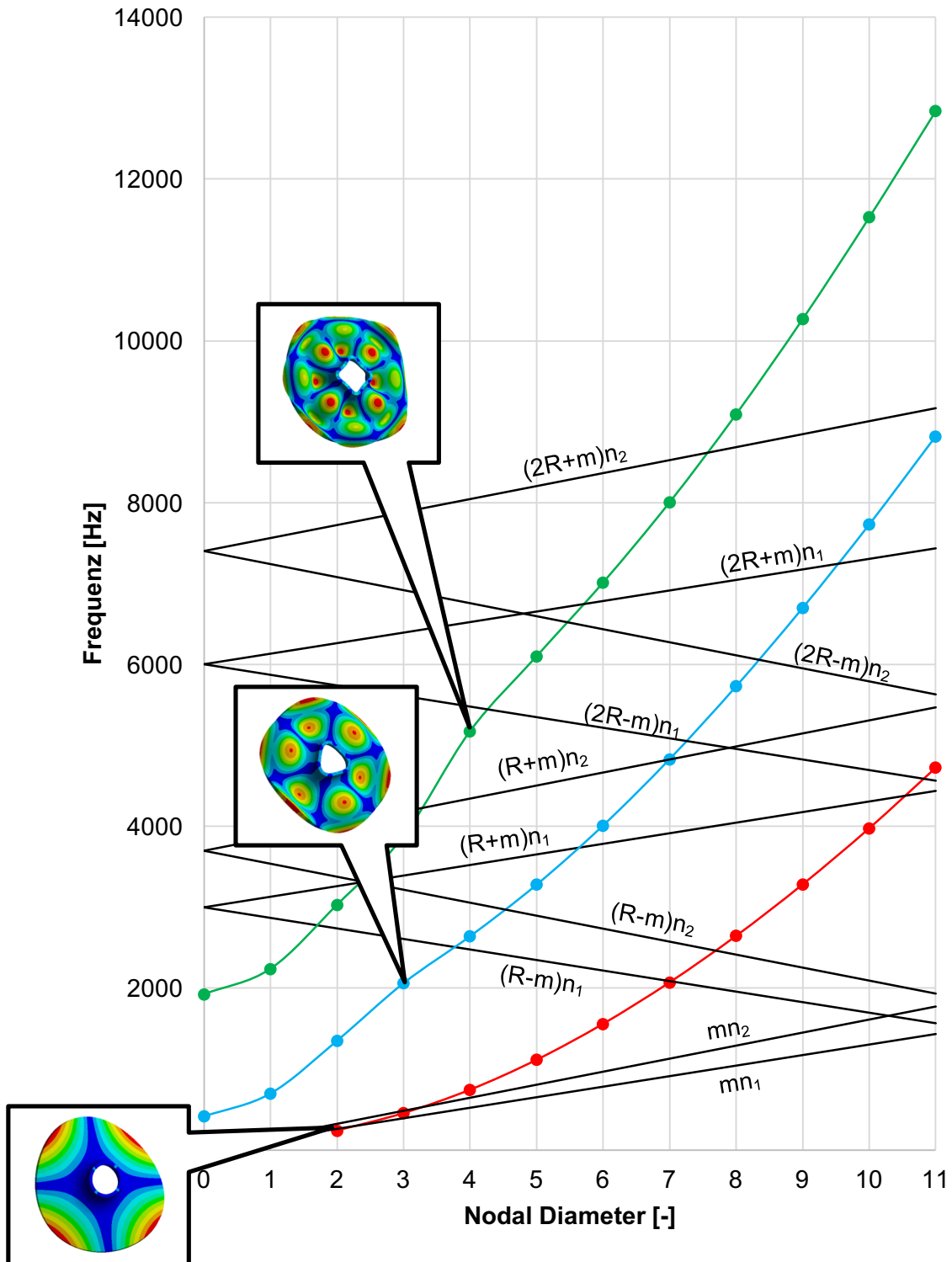


Abbildung 111: Interferenz-Diagramm Nabenscheibe

6.3.3 Verdichter ohne Deckscheibe

In Abbildung 112 ist das Interferenz-Diagramm des Verdichters ohne Deckscheibe dargestellt. Dabei wurden nur die scheidendominanten Moden im Diagramm dargestellt. Die Zusammenfassung zu den einzelnen Modefamilien erfolgte analog zur Nabenscheibe anhand der Nodal Circle Anzahl.

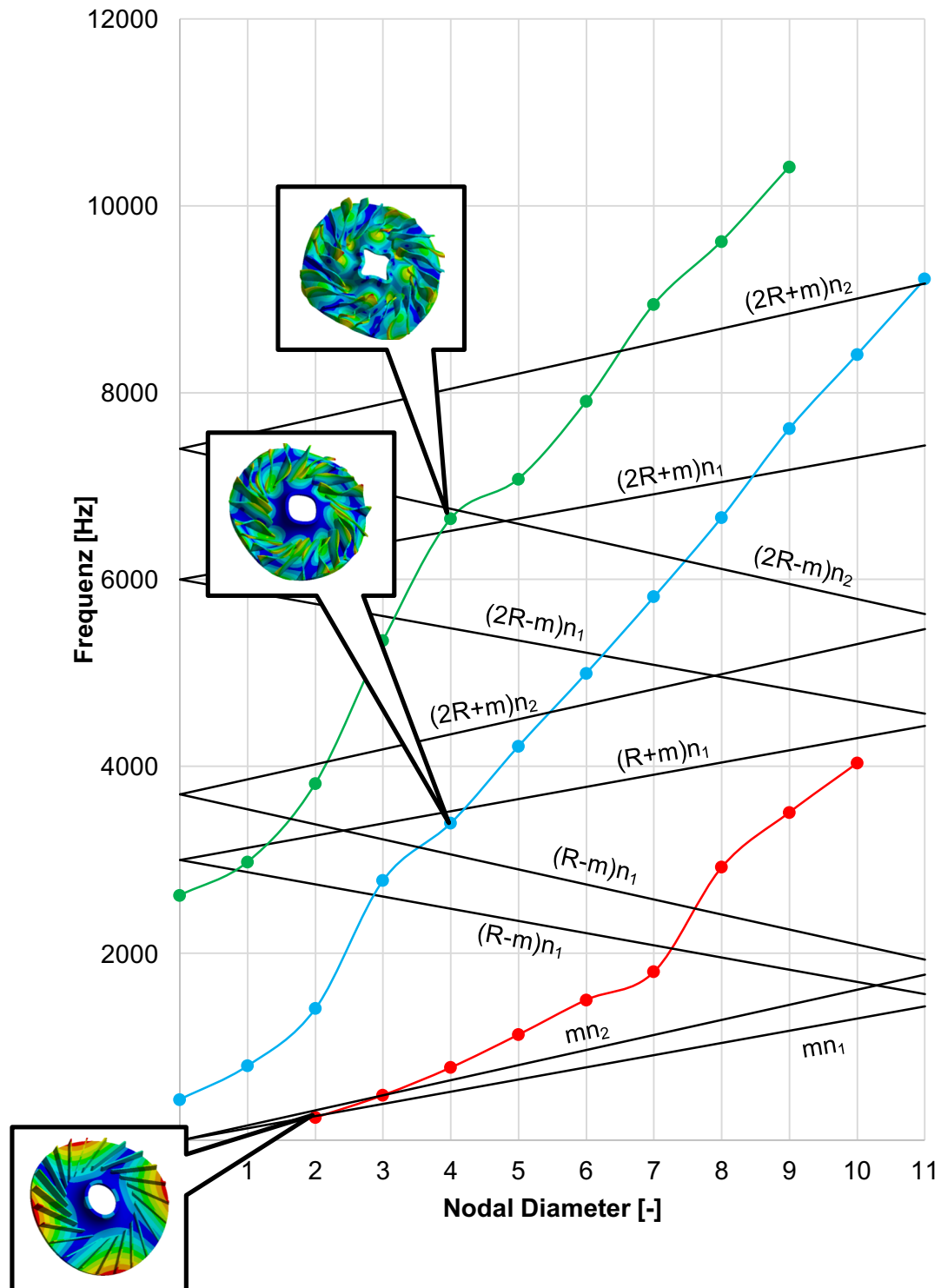


Abbildung 112: Interferenz-Diagramm Verdichter ohne Deckscheibe

6.3.4 Verdichter mit Deckscheibe

Das Interferenz-Diagramm des Verdichters mit Deckscheibe wurde analog zu jenem der Nabenscheibe aufgebaut. Dabei zeigt das in Abbildung 113 dargestellte Interferenz-Diagramm nur die scheidendominanten Moden. Die Zuordnung zu den Modefamilien erfolgte analog zur Nabenscheibe anhand der Nodal Circle Anzahl. D.h. die rote Linie sind Eigenformen mit keinem, die blaue einem und die grüne mit zwei Knotenkreisen.

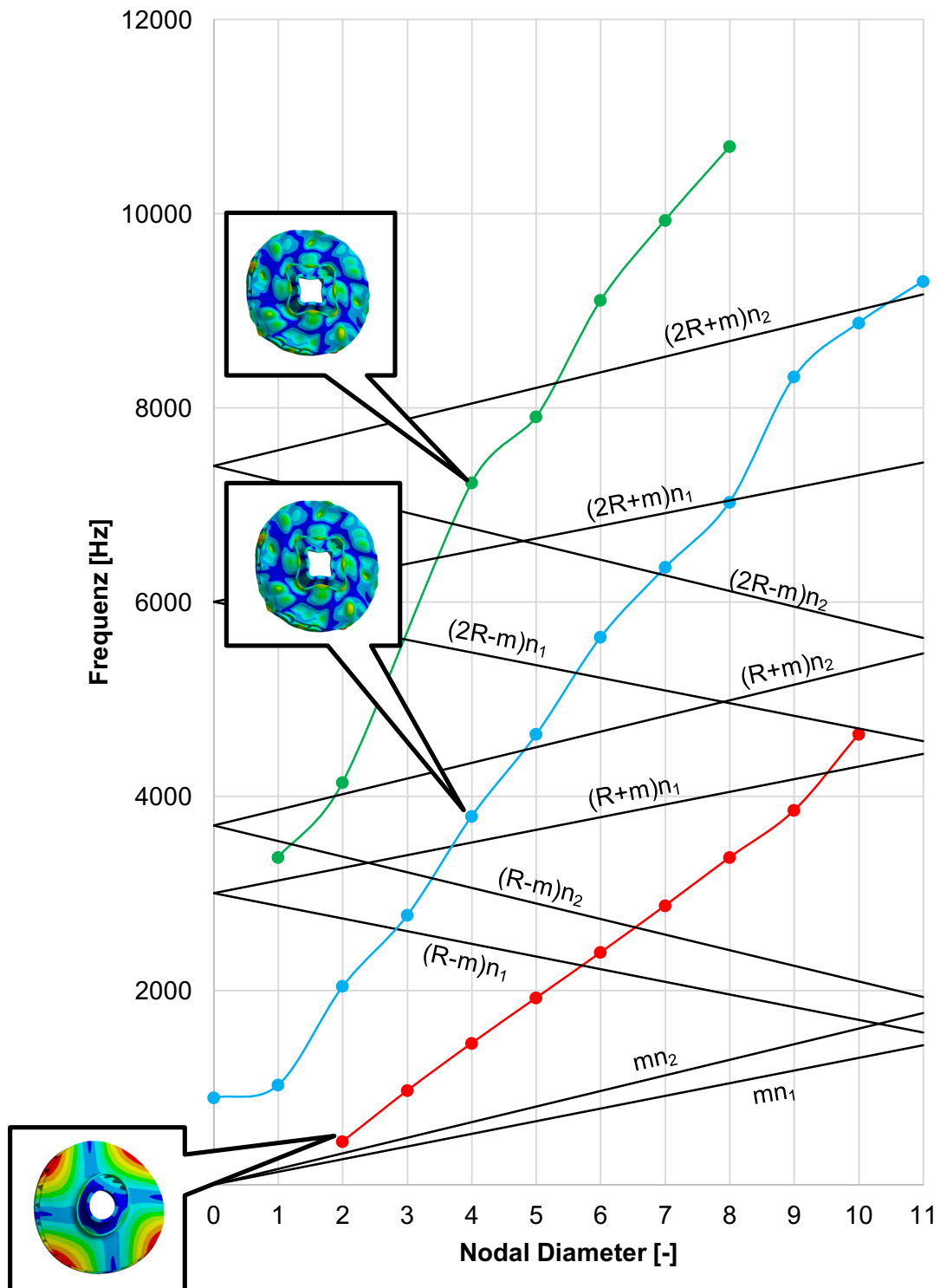


Abbildung 113: Interferenz-Diagramm Verdichter mit Deckscheibe

6.4 Zusammenfassung und Interpretation

Die in der Studie von Singh, Thakur, Sullivan und Donald [28] gewonnenen Erkenntnisse, hinsichtlich der Anregung von Moden während des Betriebs, konnten in der wiederholten Studie ebenfalls erzielt werden. Dennoch haben sich bei höheren Moden wesentliche Unterschiede in den Ergebnissen ergeben. Dies liegt einerseits in der verwendeten Geometrie des Verdichters und andererseits in den viel feiner aufgelösten Modellen, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurden.

Die Anregung der Schaufelmoden (Einzelschaufel) ist insbesondere beim Verdichter mit Deckscheibe nur von geringer Bedeutung, da dieser eine relativ hohe Steifigkeit durch die geschlossene Form besitzt und somit die Eigenfrequenzen die Engine Order (Anregung) im betrachteten Bereich nicht schneidet. Beim Verdichter ohne Deckscheibe sind die Eigenfrequenzen niedriger und so hat die Anregung sehr wohl eine Bedeutung, da diese durch die erste umlauffrequente EO angeregt werden.

Wie schon von Singh durchgeführt, wären auch bei diesem Verdichter Abänderungen in der Geometrie und der Beschaukelung von Nöten, um die auftretenden Resonanzeffekte und die dadurch bedingte hohe Bauteilbelastung aufgrund der starken Zunahme der Amplitude zu eliminieren.

Grundlegend wurde aber das Ziel der Verdichterstudie erreicht, um das vorhandene Wissen zur detaillierten Studie des HSL Rotors zu erweitern und zu vertiefen.

7. Zusammenfassung

Das wesentliche Ziel dieser Arbeit war es, ausgehend von der numerischen Modalanalyse, die Interferenz- und Campbell-Diagramme für den HSL-Rotor zu erstellen, um daraus auf Resonanzeffekte zu schließen. Anhand der aus der Simulation ermittelten Resonanzeffekte konnten im Anschluss die vorhandenen Versuchsdaten interpretiert werden. Des Weiteren wurden nähere Untersuchungen im Bereich des Einschaufelmodells durchgeführt, um die Ergebnislösung noch weiter zu steigern. Zudem wurde der Einfluss der Rotorscheibe auf die Eigenfrequenzen bzw. auf die Schaufeln näher betrachtet.

Im ersten Teil wurde die modale Charakterisierung sowie eine Resonanzuntersuchung des HSL Rotors durchgeführt. Dazu wurde neben dem Gesamtmodell auch die Rotorscheibe ohne Beschauung und eine einzelne Schaufel untersucht. Bei der modalen Charakterisierung wurden die Moden in schaufeldominante und scheibendominante aufgeteilt. Anhand der Ergebnisse aus der modalen Charakterisierung wurden die Campbell- und Interferenz-Diagramme erstellt, um Erkenntnisse über die Rotoranregung zu erlangen. Dabei wurde der Einfluss des Stators (96 Leitschaufeln) und des Turbine Exit Casings (15 Schaufeln) näher untersucht. Die Untersuchung der Teilmodelle, Rotorscheibe und Schaufel, unterstützte dabei wesentlich die Auswertung und Interpretation des Gesamtmodells. Mit Hilfe der Campbell- und Interferenz-Diagramme konnten beim Gesamtmodell drei Eigenfrequenzen ermittelt werden, die durch den Stator bzw. das TEC zu Resonanz angeregt werden. Dabei wurden zwei schaufeldominante Moden (1005 Hz und 4635 Hz) durch das Turbine Exit Casing und ein scheibendominanter Mode (5455 Hz) durch den Stator zu Resonanzschwingungen angeregt. Mit Hilfe der Simulationsergebnisse konnten der gemessenen Eigenfrequenzen die entsprechenden Eigenformen zugeordnet werden.

Im Rahmen des zweiten Teils wurde näher auf das Einschaufelmodell eingegangen. Dabei wurden drei unterschiedliche Einspannvariationen am Schaufelfuß simuliert. Das Ziel dieser Simulation war es, die Ergebnislösung noch weiter zu steigern. Die Ergebnisse wurden mit dem von Traussnig durchgeführten Modalversuch [32] verglichen. Anhand dieses Vergleichs zeigte sich, dass die Schaufel mit nachgebildetem Rotorscheibenkontakt die Ergebnisse noch besser annäherte, als durch das ursprünglich verwendete Modell. Dadurch wurde für nachfolgende Projekte die Grundlage geschaffen mittels Einschaufelmodelle die Eigenfrequenzen der schaufeldominanten Moden des Gesamtmodells mit geringer Abweichung abzuschätzen.

Zum Abschluss des den HSL-Rotor betreffenden Simulationsteils wurde der Einfluss der Rotorscheibe auf die Schaufel näher betrachtet. Dazu wurde ein modifiziertes 1BI-Modell, ein 5BI-Modell und das Gesamtmodell herangezogen. Durch das modifizierte 1BI-Modell war es möglich, Einflüsse des E-Moduls (bedingt durch schwankende Lieferqualitäten) näher zu untersuchen. Dabei war ersichtlich, dass die Eigenfrequenzen durch die Unterschiede in der Steifigkeit sehr stark schwanken. Zudem wurde durch das 5BI-Modell und das Gesamtmodell die Veränderlichkeit der Eigenfrequenzen über den Umfang der Rotorscheibe untersucht. Anhand der beiden Modelle wurde festgestellt, dass die Eigenfrequenzen hin zu den Bohrungen ansteigen und anschließend wieder abfallen. Diese Simulation war insbesondere für die Erkenntnisse über den Einfluss der Umfangssteifigkeit von großer Bedeutung. Bei einem durchgeführten Modalversuch würden sich diese schwankenden Eigenfrequenzen unter Umständen zeigen. Durch die hier durchgeführte Untersuchung ist es möglich, die Schwankungen hinsichtlich ihrer Herkunft zu interpretieren.

Im letzten Teil dieser Arbeit wurde eine Studie von Murari Singh et. al. [28] wiederholt. Dies diente wesentlich als Interpretationshilfe für die Überleitung des Interferenz-Diagramms auf den HSL Rotor. In diesem Abschnitt wurde ein Modell eines Radialverdichters modal charakterisiert und die Interferenz-Diagramme erstellt. Dabei war es von Bedeutung, die Vorgehensweise zur Erstellung der Interferenz-Diagramme zu verstehen und wie die von Wildheim durchgeführten Überlegungen in das Interferenz-Diagramm miteinbezogen werden können.

Abschließend kann gesagt werden, dass das Ziel der Arbeit erreicht wurde. Es konnten neben mehreren auftretenden Resonanzeffekten auch Erkenntnisse über verbesserte 1BI-Modelle sowie Steifigkeitseinflüsse gewonnen werden.

8. Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Solvertypen [10].....	26
Tabelle 2: Materialpaarung.....	66
Tabelle 3: Schaufelanzahlen	66
Tabelle 4: Netzunabhängigkeitsstudie	69
Tabelle 5: Eigenfrequenzen 1BI-Campbell Diagramm	72
Tabelle 6: Netzunabhängigkeitsstudie Rotorscheibe	75
Tabelle 7: Daten zum Campbell-Diagramm Rotorscheibe	78
Tabelle 8: Resonanz der Scheibe (Disk-Alone)	80
Tabelle 9: Daten Campbell-Diagramm 72BI-Modell	87
Tabelle 10: Resonanzstellen der Beschau felung	91
Tabelle 11: Resonanz der Scheibe	92
Tabelle 12: Vergleich Randbedingungen 1BI-Modell	102
Tabelle 13: Eigenfrequenzen Verdichterschaufeln in Hz	123
Tabelle 14: Eigenfrequenzen Nabenscheibe in Hz	124
Tabelle 15: Eigenfrequenzen offener Verdichter in Hz.....	125
Tabelle 16: Eigenfrequenzen geschlossener Verdichter in Hz.....	126

9. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: CAD-Modell HSL Rotor für numerische Modalanalyse	2
Abbildung 2: Prüfstandkonfiguration [1]	3
Abbildung 3: Elementformen [3]	5
Abbildung 4: Diskretisierung einer Biegelinie [33]	5
Abbildung 5: Elementtypen a) linear SOLID 185 b) quadratisch SOLID 186 [4]	6
Abbildung 6: Vorgehensweise FEM [34]	6
Abbildung 7: Einmassenschwinger [6]	8
Abbildung 8: freie Schwingung des ungedämpften Einmassenschwingers [35]	9
Abbildung 9: freie gedämpfte Schwingung eines Einmassenschwingers [36]	12
Abbildung 10: Mehrmassenschwinger mit zwei Freiheitsgraden [6]	13
Abbildung 11: Modale Transformation [8]	18
Abbildung 12: Vorgehen numerische Modalanalyse [9]	21
Abbildung 13: Modellbildung [9]	22
Abbildung 14: Lösung [9]	23
Abbildung 15: Auswertung [9]	25
Abbildung 16: Balkenelement [8]	29
Abbildung 17: Biegeeigenformen eines Balkens [14]	35
Abbildung 18: Balkeneigenformen [14]	35
Abbildung 19: Schwingung eines Balkens unter Fliehkräfteinfluss [15]	36
Abbildung 20: rechteckige und kreisrunde Scheibe	39
Abbildung 21: rechteckige und kreisrunde Platte [17]	40
Abbildung 22: freigeschnittenes Plattenelement [40]	40
Abbildung 23: eingespannte kreisrunde Platte	42
Abbildung 24: Eigenfunktionen und Eigenformen [44]	44
Abbildung 25: Scheiben- und Platteneigenformen [18]	48
Abbildung 26: Knotenlinien und Knotenkreise [41]	49
Abbildung 27: Eigenformen Turbinenrotor [29]	51
Abbildung 28: Blade-Passing Excitation [18] [19]	52
Abbildung 29: Aufbau Campbell-Diagramm [21]	54
Abbildung 30: Anregung einer Eigenfrequenz [21]	55
Abbildung 31: Verbindung SAFE- mit Campbell-Diagramm [25]	57
Abbildung 32: Resonanzbedingungen a) volle, b) teilweise und c) keine Resonanz [24]	58
Abbildung 33: Interferenz-Diagramm mit Zickzackförmiger Anregungslinie [26]	59
Abbildung 34: Anregekraft einer beschauelten Scheibe über Umfangswinkel	60
Abbildung 35: Interferenz-Diagramm mit Anregungslinien [26]	62
Abbildung 36: Mode-Familien [26] [28]	63

Abbildung 37: Aufbau HSL Rotor	64
Abbildung 38: Schaufel-Scheibe-Verbindung.....	65
Abbildung 39: Kontaktflächen Schaufel-Scheibe bzw. Schaufel-Schaufel.....	65
Abbildung 40: Prüfstandkonfiguration [1]	66
Abbildung 41: 1BI-Modell	68
Abbildung 42: Eigenformen des 1BI-Modells	70
Abbildung 43: Campbell-Diagramm 1BI-Modell [29]	71
Abbildung 44: Interferenz-Diagramm Schaufel (Betriebspunkt ADP).....	73
Abbildung 45: Netz und Randbedingungen Scheibe.....	74
Abbildung 46: Beispielhafte Einteilung in Modefamilien.....	76
Abbildung 47: Modenauswahl	77
Abbildung 48: Campbell-Diagramm Scheibe	78
Abbildung 49: Interferenz-Diagramm Scheibe (Betriebspunkt ADP).....	79
Abbildung 50: 72BI-Modell	81
Abbildung 51: Kontaktflächen zwischen den Einzelkomponenten	82
Abbildung 52: Kontaktflächen Schlossschaufel.....	82
Abbildung 53: Remote Displacement an der zentrischen Bohrung	83
Abbildung 54: Netzgitter 72BI-Modell	83
Abbildung 55: schaufel- und scheidendominante Moden.....	84
Abbildung 56: Vergleich der Modefamilien	85
Abbildung 57: Campbell-Diagramm 72BI-Modell	86
Abbildung 58: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Schaufeldominante Moden, ADP).....	90
Abbildung 59: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Scheidendominante Moden, ADP).....	91
Abbildung 60: Eigenformen der angeregten Moden a) 1005 Hz b) 4635 Hz c) 5435 Hz	94
Abbildung 61: Position der DMS [31]	97
Abbildung 62: Spektrum DMS #3 StandardTEC ADP [31].....	98
Abbildung 63: Spektrum DMS #10 StandardTEC ADP [31].....	98
Abbildung 64: 1BI-Modell a) 3D-Modell b) Netz	101
Abbildung 65: Einspannungsvarianten	101
Abbildung 66: Vergleich 1.EF	103
Abbildung 67: Vergleich 2.EF	103
Abbildung 68: Vergleich 3.EF	104
Abbildung 69: Vergleich 4.EF	104
Abbildung 70: Modifiziertes 1BI-Modell	105
Abbildung 71: 1. Eigenfrequenz	106
Abbildung 72: 2. Eigenfrequenz	106
Abbildung 73: 3. Eigenfrequenz	106

Abbildung 74: 4. Eigenfrequenz	107
Abbildung 75: 5. Eigenfrequenz	107
Abbildung 76: 6. Eigenfrequenz	107
Abbildung 77: 7. Eigenfrequenz	107
Abbildung 78: 5BI-Modell mit Schaufelnummerierung	109
Abbildung 79: Randbedingungen 5BI-Modell	110
Abbildung 80: Darstellung der 1. Eigenfrequenz	111
Abbildung 81: 1. Eigenfrequenz 5BI-Modell	111
Abbildung 82: 2. Eigenfrequenz 5BI-Modell	111
Abbildung 83: 3. Eigenfrequenz 5BI-Modell	112
Abbildung 84: 4. Eigenfrequenz 5BI-Modell	112
Abbildung 85: 5. Eigenfrequenz 5BI-Modell	112
Abbildung 86: 6. Eigenfrequenz 5BI-Modell	112
Abbildung 87: Scheibeneinfluss auf Eigenfrequenz der Schaufeln	113
Abbildung 88: Gesamtmodell	114
Abbildung 89: Eigenformen Gesamtmodell	115
Abbildung 90: 1. Eigenfrequenz Gesamtmodell	115
Abbildung 91: 2. Eigenfrequenz Gesamtmodell	115
Abbildung 92: 3. Eigenfrequenz Gesamtmodell	116
Abbildung 93: 4. Eigenfrequenz Gesamtmodell	116
Abbildung 94: 5. Eigenfrequenz Gesamtmodell	116
Abbildung 95: 6. Eigenfrequenz Gesamtmodell	116
Abbildung 96: Radialverdichter	118
Abbildung 97: Verdichter (links Modell und rechts Netz).....	119
Abbildung 98: Kontaktflächen Schaufeln mit Deckplatte	120
Abbildung 99: Offener Verdichter (rechts Modell und links Netz).....	120
Abbildung 100: Grundplatte (rechts Modell und links Netz)	121
Abbildung 101: Schaufel (rechts Modell und links Netz)	121
Abbildung 102: Einspannung der Schaufeln a) einseitig b) beidseitig	122
Abbildung 103: 4. Schaufeleigenform a) einseitig eingespannt b) beidseitig eingespannt ..	123
Abbildung 104: Eigenformen der Nabenscheibe mit $m=4$ a) $n=0$ b) $n=1$ c) $n=2$	123
Abbildung 105: Scheibendominante Moden mit $m=4$ a) $n=0$ b) $n=1$ c) $n=2$	124
Abbildung 106: Schaufeldominante Moden a) $m=0$ b) $m=1$ c) $m=3$	125
Abbildung 107: Geschlossener Verdichter mit und ohne Deckplatte	125
Abbildung 108: Geschlossener Verdichter mit $m=4$ a) $n=0$ b) $n=1$ c) $n=2$	126
Abbildung 109: Interferenz-Diagramm einseitig eingespannte Schaufel.....	127
Abbildung 110: Interferenz-Diagramm beidseitig eingespannte Schaufel.....	128

Abbildung 111: Interferenz-Diagramm Nabenscheibe	129
Abbildung 112: Interferenz-Diagramm Verdichter ohne Deckscheibe	130
Abbildung 113: Interferenz-Diagramm Verdichter mit Deckscheibe.....	131
Abbildung 114: rechteckige und kreisrunde Platte [17]	XX
Abbildung 115: Freigeschnittenes Plattenelement [40]	XX
Abbildung 116: Kreisrunde Platte	XXIV
Abbildung 117: eingespannte kreisrunde Platte	XXV
Abbildung 118: Bessel'sche Funktionen [43].....	XXVIII
Abbildung 119: Bessel'sche Funktionen [43].....	XXIX
Abbildung 120: Eigenfunktionen [44].....	XXXIII
Abbildung 121: Skizze Rotor	XXXIV
Abbildung 122: Amplitude der Kraftwirkung	XXXVI
Abbildung 123: Engine Orders im Interferenz-Diagramm	XLIII
Abbildung 124: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (ADP).....	XLIV
Abbildung 125: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (ADP).....	XLV
Abbildung 126: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Stillstand)	XLVI
Abbildung 127: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Stillstand)	XLVII
Abbildung 128: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Approach).....	XLVIII
Abbildung 129: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Approach).....	XLIX
Abbildung 130: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Cutback).....	L
Abbildung 131: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Cutback).....	LI
Abbildung 132: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Sideline)	LII
Abbildung 133: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Sideline)	LIII
Abbildung 135: Prinzipieller Versuchsaufbau	LXV
Abbildung 136: Rotor mit DMS-Position und Schaufelnummerierung.....	LXVI
Abbildung 137: Messpunkte an den Schaufeln	LXVII
Abbildung 138: Impulshammer.....	LXVIII
Abbildung 139: Versuchsdurchführung	LXIX
Abbildung 140: Platzverhältnisse	LXX

10. Literaturverzeichnis

Printmedien

- [1] Schoenleitner F., Selic T., Traussnig L., Heitmeir F., Marn A.; "Experimental Blade Vibration Measurements on Rotating Turbomachinery"; Präsentation; 20th Blade Mechanics Seminar; Switzerland; 2015
- [2] Mathiak F.; „Die Methode der Finiten Elemente“; Skriptum; Hochschule Neubrandenburg; Deutschland; 2010
- [3] Wittel F.; „Eine kurze Einführung in die Finite Elemente Methode“; Skriptum; ETH Zürich; Institut für Baustoffe; Schweiz; 2010
- [4] ANSYS Inc.; „ANSYS Documentation – Element Library“; ANSYS Mechanical ADPL; 2016
- [5] Dietsche K.H; „Automotive Handbook“, 7th Edition; Robert Bosch GmbH; Ploching 2010
- [6] Ewins D. J.; „Modal Testing: Theory and Practice“; 1. Auflage; Research Study Press LTD; London; 1984
- [7] Marn. A.; „Maschinendynamik I“; Skriptum zur Übung; Technische Universität Graz; 2016
- [8] Marn. A.; „Maschinendynamik II“; Skriptum zur Vorlesung; Technische Universität Graz; 2017
- [9] ANSYS Inc.; „ANSYS Documentation –Modal Analysis“; ANSYS Mechanical ADPL; 2017
- [10] ANSYS Inc.; „ANSYS Documentation - Eigenvalue and Eigenvector Extraction“; ANSYS Mechanical ADPL; 2017
- [11] ANSYS Inc.; „ANSYS Documentation – Boundary Conditions“; ANSYS Mechanical ADPL; 2017
- [12] ANSYS Inc.; “ANSYS Mechanical Structural Nonlinearities - Lecture 3: Introduction to Contact”; 2010
- [13] Dubbel H.; „Dubbel-Taschenbuch für den Maschinenbau“; 23. Auflage; Springer Verlag; Heidelberg; Deutschland; 2011
- [14] Ott A., Prem M., Schitter C., Weinbauer G.; „Schwingungsanalyse von Biegebalken und Turbinenschaufeln“; Laborprotokoll; Technische Universität Graz; 2016
- [15] Magnus K., Popp K., Sextro W.; „Schwingungen“; 8. Auflage; Vieweg+Teuber Verlag; Wiesbaden; Deutschland, 2008
- [16] Wauer J.; „Kontinuumsschwingungen“; 2. Auflage; Springer Vieweg Verlag; Wiesbaden; Deutschland; 2014
- [17] Celigoj C.; „2d-Bauteile“; Vorlesungsskript; Technische Universität Graz; 2016

- [18] Karman Institute; „Basics of Blade and Disk Vibration“; Präsentation; 1999
- [19] Heitmeir F.; „Thermische Turbomaschinen Vertiefung“; 12. Auflage; Vorlesungsskriptum; Technische Universität Graz; 2015
- [20] Heitmeir F.; „Thermische Turbomaschinen Grundlagen“; Vorlesungsskriptum; Technische Universität Graz; 2015
- [21] Marn A., „Rotordynamik“; Skriptum zur Vorlesung; Technische Universität Graz; 2015
- [22] Stelzmann U., Groth C., Müller G.; „FEM für Praktiker - Band 2: Strukturdynamik“; 5. Auflage; expert verlag; Renningen; Deutschland; 2008
- [23] Norton M., Karczub D.; „Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers“; 2. Auflage; Cambridge University Press; Cambridge; 2003
- [24] Bertini L., Monelli B., Neri P., Santus C., Guglielmo A.; „Explanation and Application of the SAFE Diagram“; Paper; RASD 2013; Pisa; 2013
- [25] Singh M., Vargo J., Schiffer D., Dello J.; „SAFE Diagram – A Design and Reliability Tool for Turbine Blading“; Paper; Dresser-Rand; 2002
- [26] Wildheim S.J.; „Excitation of Rotationally Periodic Structures“; Paper, ASME, 1979
- [27] Wildheim S.J.; „Dynamics of Circumferentially Periodic Structures“; Dissertation; Universität Linköping; 1981
- [28] Singh M., Thakur B., Sullivan W., Donald G.; „Resonance Identification for Impellers“; Paper; Thirty-Second Turbomachinery Symposium; 2003
- [29] Schitter C.; „Numerische Charakterisierung der modalen Eigenschaften eines Niederdruckturbinenrotors“; Bachelorarbeit; Technische Universität Graz; 2015
- [30] Schönleitner F.; „Schwingungsanregung verschiedener Turbinenaustrittsgehäuse zukünftiger Flugtriebwerkskonzepte“; Dissertation; Technische Universität Graz; 2016
- [31] Schönleitner F.; „Experimental Aeroelastic Investigations of a low pressure turbine (AdMoNt)“; Präsentation; Technische Universität Graz; 2016
- [32] Traussnig L., "Charakterisierung der modalen Eigenschaften einer Niederdruckturbinenbeschaufelung", Diplomarbeit, Technische Universität München, 2014

Onlinequellen

- [33] Vorgerechnet; „Finite Elemente Methode“; <http://www.vorgerech.net/wp-content/uploads/PDFs/FEM.pdf>; [Datum des Zugriffs: 13.05.2016]
- [34] ETH Zürich; Delpero T., Lepoittevin G., Sanchez A.; „Finite Elemente Modelling with Ansys“; [https://www1.ethz.ch/structures/education/bachelor/Strukturlabor/FS11PDFs/FEM with Ansys - Introduction.pdf](https://www1.ethz.ch/structures/education/bachelor/Strukturlabor/FS11PDFs/FEM%20with%20Ansys%20-%20Introduction.pdf); [Datum des Zugriffs: 18.05.2016]
- [35] Humboldt Universität zu Berlin; „Freie Schwingungen“; <http://people.physik.hu-berlin.de/~mitdank/dist/scriptenm/freieschwingung.htm>; [Datum des Zugriffs: 20.09.2017]
- [36] Physikunterricht Online; „Gedämpfte Schwingung“; <http://physikunterricht-online.de/jahrgang-11/gedaempfte-schwingungen/>; [Datum des Zugriffs: 20.09.2017]
- [37] SHARCNet; „ANSYS basics: Solver“; https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/enus/help/ans_thry/thy_tool13.html#eltqrdampCSD; [Datum des Zugriffs: 08.09.2017]
- [38] Universität Hannover; „Experimentelle Schwingungsanalyse“; https://www.ids.uni-hannover.de/fileadmin/IDS/ids_lehre/AML/2014-04-10_Skript_Version2-6.pdf; [Datum des Zugriffs: 29.05.2017]
- [39] Müller W. H.; „Balkenschwingungen“; https://www.ifm.tu-berlin.de/fileadmin/fg49/lehre1415/KontiMech/Tutorien/06_Loesungsblatt.pdf; [Datum des Zugriffs: 29.09.2017]
- [40] Wandinger J.; „Herleitung der Bewegungsgleichung einer Platte“; http://wandinger.userweb.mwn.de/LA_Elastodynamik_2/v4_1.pdf; [Datum des Zugriffs: 29.09.2017]
- [41] Drums; „Eigenformen“; <http://www.drums.org/djembefaq/v20a.htm>; [Datum des Zugriffs: 11.05.2016]
- [42] KTH Royal Institut of Technology; „SAFE-Diagram“; http://www.energy.kth.se/compedu/webcompedu/WebHelp/S5_Aeroelasticity/B1_Introduction_to_Aeroelasticity/C3_Bladed_Disk_Vibrations/S5B1C3_files/Safe_diagram.htm; [Datum des Zugriffs: 20.04.2016]
- [43] Wikipedia; „Besselsche Differentialgleichung“; http://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung; [Datum des Zugriffs: 20.09.2017]
- [44] Bettermarks; „Cosinus und Sinus“; <https://de.bettermarks.com/mathe/die-winkelfunktionen-sinus-und-kosinus/>; [Datum des Zugriffs: 20.09.2017]
- [45] Polytec GmbH; http://www.polytec.com/fileadmin/user_uploads/Applications/Polytec_Tutorial/Documents/OM_AN_InFocus_0107_Tutorial_Modalanalyse_D.pdf; [Datum des Zugriffs: 18.08.2015]

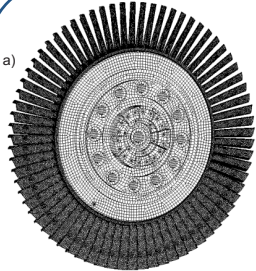
Anhang A: Veröffentlichung

In diesem Abschnitt werden alle Veröffentlichungen, die in Zusammenhang mit dieser Arbeit stehen, angeführt. Dazu zählt einerseits das Poster für die ASME TurboExpo 2016 sowie das Paper von Herrn DI Dr. Schönleitner.


ABSTRACT

In Order to be able to predict the vibration characteristics under operating conditions of any structure a detailed knowledge of the modal characteristics is essential. Therefore **numerical simulations** considering sub-modeling are sufficient to get a fast and accurate overview of the **modal characteristics**. Based on a **low pressure turbine rotor** which is under investigation in the subsonic test turbine facility for aerodynamic, acoustic and aeroelastic investigations (STTF-AAAI) at Graz University of Technology, this poster presents different numerical models to show the **influence of the rotor disc regarding the modal characteristics of the rotor blading**. The investigation provides the fully assembled turbine rotor as well as sub models of the rotor with three or five blades. In addition the numerical findings are taken to evaluate the rig test results. These Rig Tests are part of the first projects in the area of blade vibration measurements during the operation under engine representative conditions at Graz University of Technology. The eigenfrequencies as well as the mode shapes help to assign rig test results caused by the disc or the blading. In addition to the mentioned investigation of the influence of the disc, **Campbell charts and Interference charts** are used to get a detailed knowledge of **resonance effects caused by the rig assembly**.


FE – MODELS




699434 Elements (72BL)
„Fully assembled Rotor“




(1BL)
4% Elements with respect to 72BL „single blade“



7% (3BL)



8% (3BL-H)

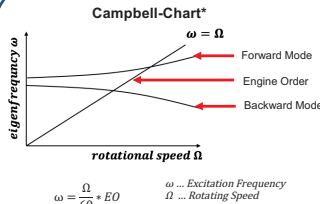


12% (5BL)

- Fully assembled Low Pressure Turbine Rotor
- Simplified Models (1 to 5 Blade Sub-Models)
- Hexagonal dominated Mesh (Quad Elements)
- Boundary Condition: bonded (Blisk)

THEORETICAL BACKGROUND

Campbell-Chart*



$\omega = \Omega$

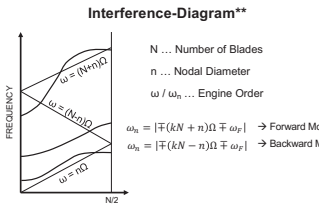
$\omega = \frac{\Omega}{60} + EO$

$\omega \dots$ Excitation Frequency
 $\Omega \dots$ Rotating Speed
 $EO \dots$ Engine Order

- Intersection of EO and Eigenfrequency → Resonance Effects
- Forward / Backward Travelling Modes
- Engine Order characterize the Excitation by e.g. Interaction Modes

*Source: Rotordynamics, A. Marn, TU Graz

Interference-Diagram**



$\omega = (N+n)\Omega$

$\omega = (N-n)\Omega$

$\omega = n\Omega$

NODAL DIAMETER

N ... Number of Blades
n ... Nodal Diameter
 $\omega / \omega_n \dots$ Engine Order

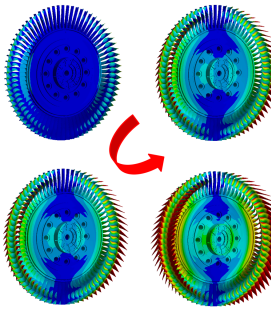
$\omega_n = | \mp (kN + n) \Omega \mp \omega_f | \rightarrow$ Forward Mode
 $\omega_n = | \mp (kN - n) \Omega \mp \omega_f | \rightarrow$ Backward Mode

- Knowledge about occurring ND's, rotation speed and direction (forward or backward rotation)
- Max. ND: N=odd → $ND_{max} = (N-1)/2$
N=even → $ND_{max} = N/2$

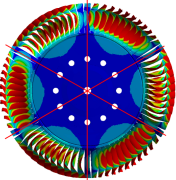
**Source: Excitation of Rotationally Periodic Structures, S.J. Wildheim, 1979

DISC AFFECTING ROTOR BLADING

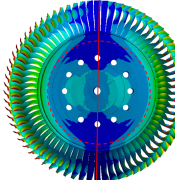
- Different Types of Disc Mode Shapes (Nodal Circles & Nodal Diameters)
- Disc Vibration → Strong Influence on the overall System Characteristics
- Blade Root Excitation due to Disc Oscillation
- Disc Modes depending on Rotordesign
- Blade Vibration caused by Disc Vibration



TIME SNAPSHOTS; ND=1

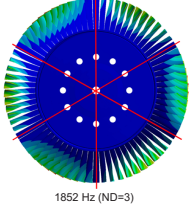


Nodal Diameter = 3
Nodal Circle = 0

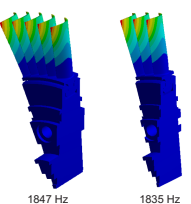


Nodal Diameter = 1
Nodal Circle = 1

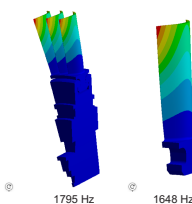
MODE SHAPES



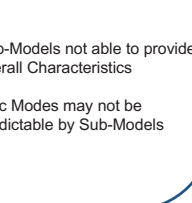
1852 Hz (ND=3)



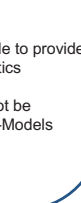
1847 Hz



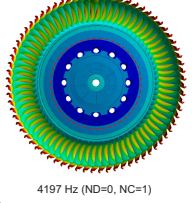
1835 Hz



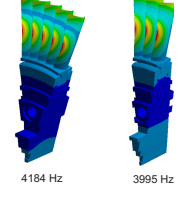
1795 Hz



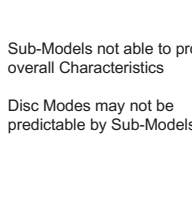
1648 Hz



4197 Hz (ND=0, NC=1)



4184 Hz



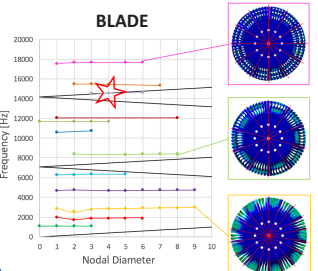
3995 Hz

- Sub-Models not able to provide overall Characteristics
- Disc Modes may not be predictable by Sub-Models

INTERFERENCE DIAGRAM (72Bl-Modell)

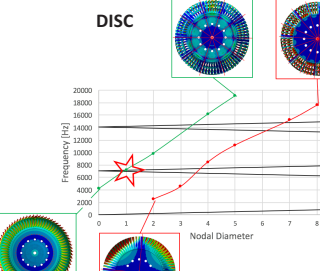
- 72 Blades → max. Nodal Diameter $ND_{max} = 36$
- Blade-alone Modes and Disc-alone Modes
- Within a Speed Range from 3400rpm to 6300 rpm several Modes occur (Examples highlighted in the Chart of 5900 rpm)
- Intersection indicates Nodal Diameter Pattern and the corresponding Rotating Speed as well as the Rotating Direction (Inclined Lines)

BLADE



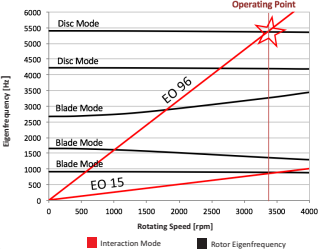
Rotating Speed: 5900 rpm

DISC



EXPERIMENTAL RESULTS – INTERACTION MODES

- Campbell Chart → Resonance Crossing at 5400Hz
Stator-Rotor Interaction (Rotating Speed 3400 rpm)
- Experimental Test Results → Numerical Campbell Chart confirmed
- Resonance resulting from a Disc Mode → Stator Wake causes Forced Response of the Blading



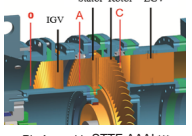
Operating Point

EO 96

EO 15

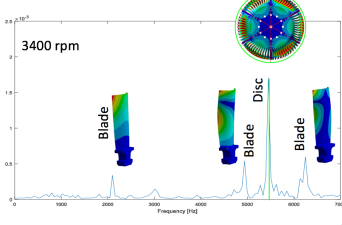
■ Interaction Mode ■ Rotor Eigenfrequency

***Source: Schoenleiber, Selic, Traussing, Heitmeir, Marn, „Experimental Blade Vibration Measurements on Rotating Turbomachinery,“ 20th Blade Mechanics Seminar, 2015, Winterthur, Switzerland



Rig Assembly STTF-AAAI ***

EO 96 → Stator, 96 Guide Vanes (Downstream Effect)
EO 15 → Turbine Exit Casing, 15 Vanes (Upstream Effect)



3400 rpm



- Sub Modeling:
 - Not all Modes predictable
 - Adaption of the Boundary Conditions often required
- Campbell Chart & Experimental Results
 - Numerical Analysis confirmed by Rig Test Results

CONCLUSION

- Disc Modes
 - Strong Influence on Overall System Characteristics
 - Blade Root Excitation due to Disc Oscillation
- Interference Charts:
 - Evaluation of Mode Shapes occurring at Operating Conditions possible



GT2016-56067

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE UPSTREAM EFFECT OF DIFFERENT LOW PRESSURE TURBINE EXIT GUIDE VANE DESIGNS ON ROTOR BLADE VIBRATION

F. Schönleitner, T. Selic, C. Schitter, F. Heitmeir, A. Marn
Graz University of Technology
Graz, Austria

ABSTRACT

Exit guide vanes of turbine exit casings are designed to meet aerodynamic, structural and acoustic criteria. New low pressure turbine architectures of aero engines try to optimize components weight in order to decrease the fuel consumption and reduce noise emissions. For this purpose different designs of turbine exit guide vanes (TEGV) exist which vary geometry as well as the number of vanes in the casing. In the subsonic test turbine facility at the Institute for Thermal Turbomachinery and Machine Dynamics of Graz University of Technology, which represents a 1 ½ low pressure turbine stage, the upstream effect of these innovative turbine exit casings (TEC) designs is under investigation. Up to now the influence of the turbine exit casing in relation to the aerodynamic vibration excitation of the rotor blading is not well known. For rotor blade vibration measurements a telemetry system in combination with strain gauges is applied. The present paper is a report of blade vibration measurements within a rotating system in the area of low pressure turbines under engine relevant operating conditions. Within the test phase different turbine exit casings are under investigation at two different operating points (OP). These turbine exit casings represent different design goals, e.g. aerodynamically optimization was performed to reduce losses at the aero design point or an acoustically optimization was done to reduce noise emission at the operating point approach. All these different design intents lead to a changed upstream effect, thus changing rotor blade vibrations. To identify parameters affecting blade vibration attention is paid to aerodynamic measurements as well. Selected results of steady and unsteady flow field measurements are analyzed to draw conclusions. The upstream effect of different turbine exit casings can be quantified at OP1. Depending on the vane number both the potential effect of the

TEGV increase and the upstream effect as well. Aerodynamic as well as acoustic improvements as wanted with H-TEC and inverse-cut-off TEC lead to unfavorable conditions and higher blade loading in comparison to the referenced TEC. OP2 provides additional information of downstream effects. Due to the stator vane number the rotor blading is excited in its 4th eigenfrequency. The comparison between all investigated turbine exit casings with respect to the referenced configuration provides a basis for numerical code validation and future developments.

NOMENCLATURE

Abbreviations

EF	Eigenfrequency
EO	Engine order
OP	Operating point
SG	Strain gauge
EGV	Exit guide vane
IGV	Inlet guide vane
LPT	Low pressure turbine
TEC	Turbine exit casing
AAAI	Aerodynamic, Acoustic and Aeroelastic Investigations
STTF	Subsonic Test Turbine Facility
TEGV	Turbine exit guide vane

Greek

ρ	Flow density
v	Velocity
ϕ	Weighting coefficient
Ω	Rotor speed

Symbols

a	Mode amplitude
A	Amplitude
C	Pressure coefficient
M	Mach number
p	Pressure
t	Time
T	Total Time
r	Radius
R	Outer TEC radius
Re	Reynolds number

Subscript

t	Total
pt	Total pressure
AVE	Circumferentially averaged properties

Superscript

–	Time averaged properties
~	Area averaged

INTRODUCTION

It is difficult to measure blade vibrations of turbomachinery in general. Due to high requirements and challenges experimental data of rotating systems at engine representative conditions are limited or do not exist.

A lot of investigations are in the area of compressors and are numerical investigations, method development and application such as Mayorca et al. [1], Wilcox et al. [2], Carstens and Belz [3]. Experimental data in the area of compressor blading is limited as well but for example presented by Schöenborn et al. [4] who were investigating a mistuned blisk under lab conditions. M. Zielinski and G. Ziller [5] showed a new method of noncontact blade vibration measurements on a compressor rotor blade. 2014 V. Kharyton and R. Bladh presented results of tip timing and strain gauge measurements and estimation of consumed life in a compressor blisk [6]. F. Holzinger et al. [7, 8] did a lot of research on a transonic compressor. They presented a general overview of flow induced blade vibrations and published their studies of experimental investigations on rotating instabilities, flutter and acoustic resonance.

In the area of low pressure turbines a variety of studies devote to flutter and a variety of investigations relating to mistuning and blisks exist. Ewins [9, 10], and Castanier and Pierre [11] investigated blade vibrations of bladed disks numerically. Additionally, Castanier and Pierre [11] give an overview of the entire mistuning literature. Heinz et al. [12] investigated experimentally and analytically a low pressure model turbine with intentionally mistuning. Heinz et al. [13]

On the experimental blade vibration measurement side Bell and He [14] investigated the influence of tip leakage on blade vibration of an already oscillating blade in a linear cascade. Huang et al. [15] published their results of flutter characteristics at different tip clearances in a linear cascade as well. Shock

induced blade oscillation at an elastically suspended turbine blading was published by B. Urban et al. [16].

Experimental tests in annular cascades were conducted by M. Nowinski and J. Panovsky [17]. D. Vogt and T. Fransson [18] focussed on the mode shape sensitivity of an oscillating low pressure turbine cascade. J.J. Kielb and R.S. Abhari [19] analysed the blade vibratory response with and without aerodynamic loading. An overall summary of the most important design issues, effects and vibration characteristics was given by Srinivasan [20].

Some of the aforementioned publications arise within European research projects such as ADTurBII (Aeroelastic Design of Turbine Blades II) [21] and Future (Flutter-Free Turbomachinery Blades) [22]. Both were carried out to generate experimental data for validation of numerical tools that are used to predict vibration amplitudes in turbomachinery.

Results from that were presented by D. Vogt and Fransson [18], F. Holzinger et al. [7, 8], V. A. Chenaux [23, 24] and E. Petrov et al. [25].

Nevertheless when reviewing all this research work up to now there is no experimental data of a low pressure turbine rotor blading in a rotating system available.

Especially there are no investigations associated with the up or downstream vane rows affecting a LPT rotor blading by now.

Vane row forced response investigations were conducted by W.L. Murray and N.L. Key [26]. They presented experimental data of the first torsion mode of their embedded rotor of multistage compressor. Anyhow based on these facts a new research project regarding blade vibration measurements and aeroelasticity under engine representative conditions of a low pressure turbine started at Graz University of Technology (Project: AdMoNt [27]). AdMoNt is a three year research project supported by the national government of Austria. Beside the development of a new powerful telemetry system a new experimental data base for numerical tools shall be provided.

This includes extended investigations with respect to the structural dynamic behaviour of the rotor blading as well as aerodynamic measurements of the 1 ½ low pressure turbine stage of the STTF-AAAI. Experimental blade vibration measurements at different TEGV configurations and axial spacing will provide data which are novel.

Basically new designs of low pressure turbines try to reduce component's weight, modify axial distances between stages or reduce the number of turbine stages. This is directly linked to the demand of increasing the efficiency of the aero engine. For this purpose different developments of TEGV meeting aerodynamic and/or acoustic demands were realised.

Within this paper TEGV designs are under investigations. In detail the upstream effect of the turbine exit guide vanes which vary in the number of vanes on the turbine blading shall be measured experimentally.

The blade vibration measurements under engine representative conditions in a rotating system are carried out

with a telemetry system in combination with strain gauges. Due to the high rotational speeds and temperatures the telemetry system has to fulfill highest technical requirements. To characterize the system and to perform resonance measurements OP2 was defined to excite the blading at its 4th EF with the stator vanes (EO96). Therefore OP2 is mainly influenced by downstream effects caused by the stator. OP1 represents the engine relevant operating point approach and is suitable for TEGV evaluation as well as for investigating the upstream effect of the TEGV. At OP1 steady and unsteady flow field measurements are conducted as well.

The results of the forced response of the blading will show the influence of different TEGVs. This is not only important for future developments of EGV. It is essential for life cycle analysis and general understanding of the rotor blading. Based on this data numerical models and codes can be verified and modified as well which was not possible by now.

TEST FACILITY

The test rig has been used for similar investigations in the past. Therefore the description of the test facility (including turbine stage and TEGV) was already given and published by A. Marn et al. [28] and T. Selic et al. [29].

The Institute for Thermal Turbomachinery and Machine Dynamics at Graz University of Technology operates a 3MW compressor station in order to supply a couple of test facilities with pressurized air continuously. In the described subsonic turbine test facility the maximum pressure ratio is limited to 2 due to the inlet spiral casing. The maximum mass flow rate is 15 kg/s at a temperature at stage inlet of 100 °C. This inlet temperature can be adjusted by coolers within a wide range.

The pressurized air enters the facility through a spiral inlet casing where the flow turns into axial direction. Within this spiral inlet casing the front bearing of the overhung-type turbine shaft is mounted. The shaft is coupled to a water brake, whose cooling water cycle is connected to the re-cooling plant of the institute.

In order to provide well defined and uniform inflow conditions a de-swirler together with a perforated plate is located upstream of the stage inlet. The de-swirler is followed by the test turbine to be investigated. It consists of the inlet guide vanes (IGV) that should simulate additional wakes of other upstream low pressure turbine stages, the stator, the rotor, and the turbine exit guide vanes (TEGV).

Finally the air leaves the rig through an acoustic measurement section, supporting struts, exhaust casing, and the exhaust stack to ambient.

A detailed description of the Subsonic Test Turbine Facility for Aerodynamic, Acoustic and Aeroelastic Ivestigations (STTF-AAAI) is given in [30] moreover.

TURBINE STAGE AND TEGV

The aerodynamic design of the low pressure turbine stage, IGVs as well as the TEGVs was performed by MTU Aero Engines. Considerable effort was put into the adjustment of relevant model parameters to reproduce the full scale LPT configuration. The turbine diameter is approximately half of that of a commercial aero engine LPT and therefore the rig is operated at higher rotational speeds. A meridional section of the rig is shown in Figure 1 where the state-of-the-art (reference) TEC is shown in the sketch at the top (a) and the inverse cut-off as well as the high lift design (H-TEC) can be seen at the bottom (b). The blading is not drawn to scale.

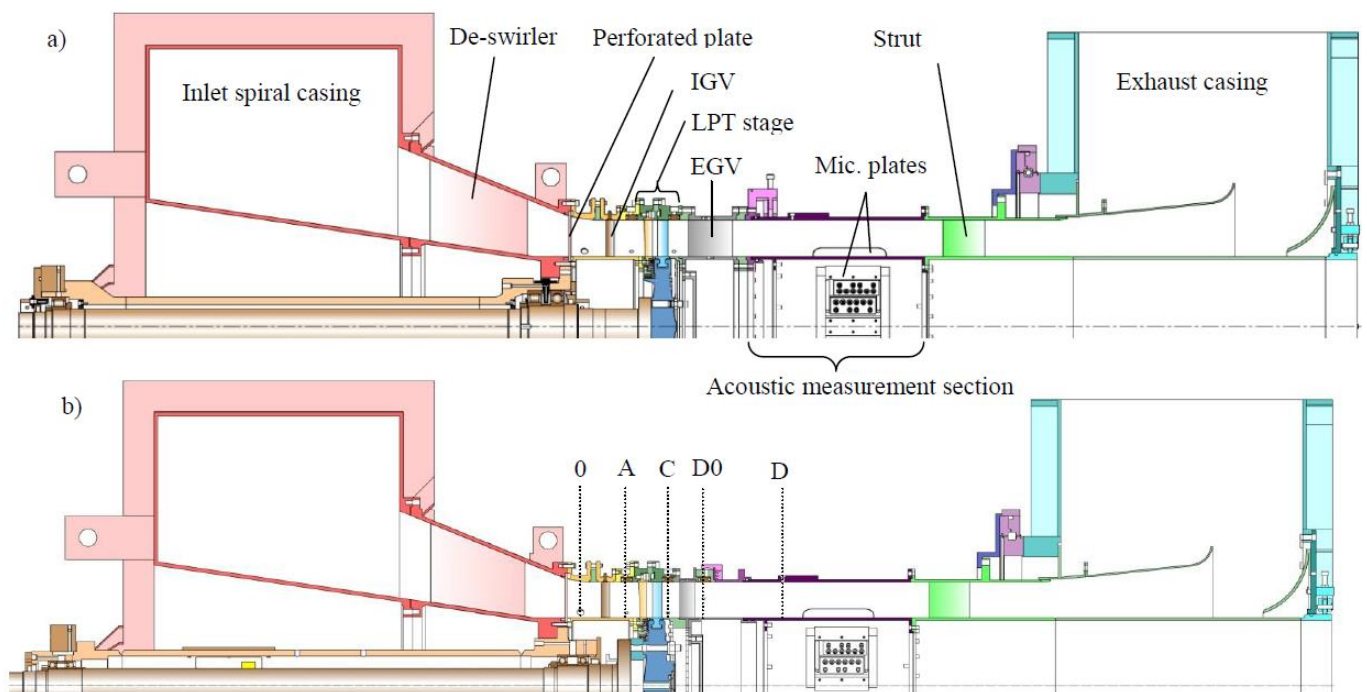


Figure 1: Meridional section of the STTF-AAAI; a) State-of-the-art TEC, b) Inverse-Cut-Off and H-TEC

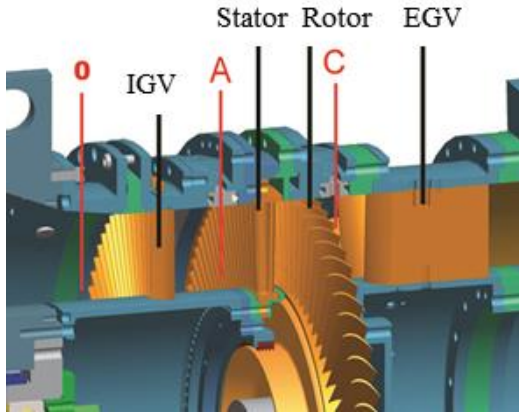


Figure 2: Drawing of the test turbine stage [29]

The rig is characterised by a high aspect ratio un-shrouded rotor followed by the TEGVs of the TEC. A drawing of the test turbine stage is displayed in figure 2 and relevant geometry parameters can be seen in the upper half of Table 1.

For the investigations which are presented in this paper three different set-ups have been tested. A state-of-the-art TEC that is referred to as the reference TEC, an aerodynamically optimized TEC with a higher number of vanes and therefore shorter chord length (inverse-cut-off TEC) and an aerodynamically and acoustically as well optimized TEC (H-TEC).

In detail the chord length of the inverse-cut-off TEC was scaled in comparison to the reference TEC. Depending on this scaling the vane number was increased additionally to maintain steady aerodynamics. Numbers of blades/vanes are listed in table 1 as well.

The design of the H-TEC is regardless of the design of the reference TEC and is therefore an attempt at a new design development. The leading edge for all three configurations is at the same axial position as displayed in figure 1.

Table 1: Geometry details and operating conditions

Geometry details	
Number of blades/vanes	
IGV/Stator/Rotor	83/96/72
TEGV state-of-the-art (Reference TEC)	15
TEGV inverse cut-off (inv.)	> 40
TEGV H-TEC	< 35
Tip gap to blade height ratio	1.0%
Hub to tip radius ratio	≈ 2/3
Operating conditions	
TEGV Reynolds number ratio $Re_{ref.}/Re_{H-TEC}$	~3
TEGV Reynolds number ratio $Re_{ref.}/Re_{inv.}$	~3
Diffusion factor ref./inv./H-TEC.	~0.5/~0.6/~0.6
Stage pressure ratio	1.16
Stage total inlet temperature	100 °C

OPERATING CONDITIONS

In order to be consistent with previous studies at the STTF-AAAI the operating conditions are defined similar as already published from Marn et al. [28] and Selic et al. [29].

Based on the intended use of the LPT rig the main operating points are selected according to the typical certification points. They have basically been defined using an aero design point of the last stage LPT, derived from current LPT design practice using scaling along reduced speed, reduced mass flow (both referred to 288.15 K and 1013.25 mbar) and pressure ratio.

The Reynolds number of the TEGVs is defined using the midspan conditions at rotor exit as well as the axial chord of the vanes. The lower half of table 1 shows the operating conditions.

For investigations presented within this paper operating point approach (OP1) was chosen. Operating point approach is able to evaluate and quantify the upstream effect of different TEGV design. Based on that point the rotational speed was reduced to investigate "near-resonance" behaviour at the same stage total pressure and temperature (OP2).

All vibration measurements of a TEC have been performed at the same day in order to have the same ambient pressure in order to ensure that different stage pressure ratios are only related to the inlet pressure.

During the experiment it was crucial to keep the mechanical rotor speed constant for each operating point.

For the experimental procedure of OP2 measurements were conducted first due to a lower speed. After the completion of OP2, the rotor speed was slowly increased as well as temperature and pressure ratio adjusted to guarantee pre-defined conditions of OP1, as listed in table 1. The measurements were then carried out again when the operating point was constant for the whole period of time.

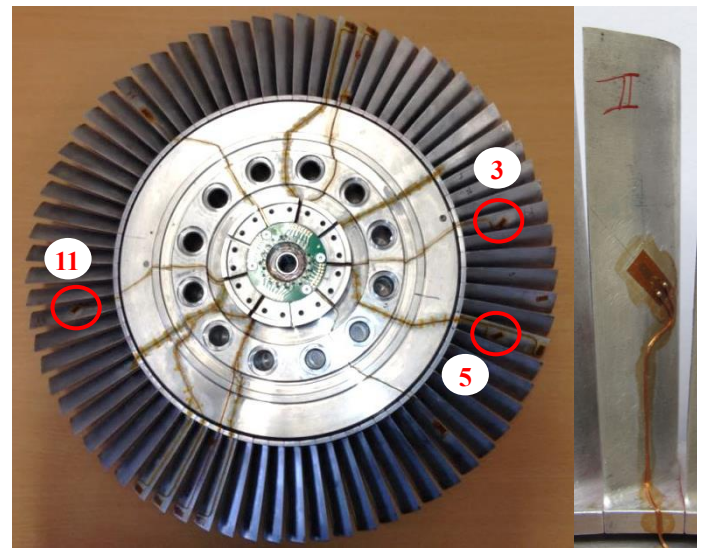


Figure 3: LPT Rotor; Strain gauge application

EXPERIMENTAL SETUP AND INSTRUMENTATION

The rotor blading which had to be instrumented was already characterized and results were presented by Schönleitner et al. [31]. The rotor blading showed a slight structural mistuning which was in detail summarized in [31] due to manufacturing tolerances and differences in blade mounting. A series of numerical and experimental studies showed the optimum strain gauge positions for blade vibrations measurements moreover [31]. Within this paper strain gauge SG3, SG5 and SG11 are evaluated representatively. The strain gauges are marked in figure 3 with red circles.

The telemetry system used in the experiments provides 12 ports for strain gauge measurements. Therefore 12 strain gauges were applied on different blades of the rotor and on three different blade surface positions near maximum strain positions for eigenmodes. Beside 12 ports for strain gauge measurements the telemetry system provides 8 ports for temperature measurements. The maximum sampling rate is 400000samples/s with a simultaneous data acquisition of 12bit.

Basically the system is able to operate at rotational speeds up to 11000rpm and temperature ranges up to 150°C.

Experimental Procedure

The test facility is operated in an open loop process and therefore the operating parameters are directly coupled to ambient conditions. For the operating point it is crucial to set the correct reduced speed and mass flow for the aerodynamic point of view. In addition the stage pressure ratio and the mechanical rotor speed are set to guarantee the correct vibration excitation related to EO excitations. These parameters are adjusted by the inlet temperature within a range of 35°C to 100°C by coolers. The rotor speed is regulated with the water brake. After approximately 3 hours a stable operating point is reached at a constant speed and the measurements can be started. If the operating point has to be changed, cooling temperatures, shaft speed, corrected speed and mass flow are adjusted again until a stable operating point has reached.

The strain gauge data is transmitted by rotor stator principle via antenna outside of the test rig where it is recorded. The data acquisition is performed using a National Instruments PXI chassis including two PXI 4498 Modules. The PXI 4498 is a high-accuracy data acquisition module with a sampling rate of up to 204800samples/s including a 24-bit analog to digital converter (ADC). The chassis uses a PXIe8375 module in order to transfer the acquired data to a PC via fibre-optic cabling.

Strain gauge data was recorded for 60s at stable operating conditions to ensure that each resonance peak is captured. The noise level is reduced to a minimum what is a big advantage of telemetry systems in comparison to slip ring systems which are used e.g. for the investigations in E. Petrov et al. [25] and H. Hennings and R. Elliot [32] moreover.

Measurement Uncertainty

The measurement system is made up by eleven multi-channel pressure transducers PSI 9016 with a total amount of 176 channels, an accuracy of 0.05% full scale and four National

Table 2: Measurement uncertainties of the 5HP

Ma	+0.006	-0.003	[/]
α	+0.5	-0.08	[°]
pt	+3.3	-3.0	[mbar]
p	+5.3	-5.2	[mbar]

Instruments Field Point FP-TC-120 eight-channel thermocouple input modules and one FP-RTD-122 resistance thermometer input module.

Table 2 shows the measurement uncertainties (within a 95% confidence interval) of the five-hole-probe measurements. These values are positive and negative deviations and contain the error due to the approximation, random error and the systematic error of the PSI Modules.

The single hole fast response pressure probe aerodynamic accuracy was evaluated in a calibrated nozzle, resulting in an extended uncertainty equal to 0.5% of the kinetic head for the pressure measurements and equal to 0.3° for the flow angle. Details on the transfer function of the probe are given in [34] where the probe was calibrated in a low-pressure shock tube. The probe bandwidth is up to 80 kHz, after digital compensation.

The sensor signal amplifier of the telemetry system has a zero drift of 0.02%/°C and an accuracy of linearity of 0.1%. The strain gauge resistance is 350 Ω +/-0.30% with a gauge factor of +/- 1.0%, a transverse sensitivity of 0.0% and a temperature coefficient of gauge factor of 101 +/-10 [10⁻⁶/K]. The temperature on the blade surface was measured by applied high precision fine wire thermocouples of type K, in order to take temperature compensations into account. The production batch number of applied strain gauges is 812063685.

The measurement uncertainties of the static pressure and the total pressure at rig and stage inlet are +/- 1 mbar. The variation of speed is below 0.2% of the current operating speed and the measurement uncertainty of the temperature measurement is about +/- 0.5 K.

The variation of the operating parameters (pressure ratio, corrected speed, speed, total pressure and temperature at rig inlet) between different measurement days was below 0.5%.

STAGE INFLOW CONDITIONS PLANE A

The measurement plane for the stage inflow is located downstream of the inlet guide vanes (IGV). The time and circumferentially averaged flow properties were already published by Marn et al. [28] and Selic et al. [29]. For further information refer to these publications.

Considering the fact that the measurement plane is located 150% upstream to the stator vanes (with respect to their axial chord), the potential effects of the stator is negligible resulting in a similar flow field for all setups. The distribution is similar for Mach number (not shown). Both of these distributions are effects of the swirl imposed onto the flow by the IGV. The radial equilibrium demands a higher static pressure close to the casing, causing fluid to migrate towards the hub.

TEGV INLET FLOW PLANE C

Aerodynamic measurements of the TEGV inlet were already partly presented by Marn et al. [28] and Selic et al. [29]. For further information refer to these publications.

Five-hole-probes (from Institute of Jet Propulsion and Turbomachinery, RWTH Aachen University) with a probe head of 2.5 mm diameter were applied in measurement plane C for steady flow field measurements. The axial positions of measurement planes are displayed in Figure 1. Details of the measurement equipment are given by Marn et al. [28].

The unsteady measurements are performed by using a single hole fast response pressure probe, operated as a virtual three sensor probe for 2D aerodynamic measurements. The probe uses a miniaturized pressure sensor (Kulite XCE-062) mounted inside the axis of the probe head. The outer diameter of the probe is 1.85 mm. More details on the probe design may be found in [34] and on data reduction procedure in [35].

The five-hole probe as well as the fast response pressure probe was moved in radial and circumferential direction in order to cover one TEGV pitch.

Aerodynamic measurements which are presented and compared in this paper were conducted at OP1 (approach).

The potential effect of the TEGVs can be detected and show differences regarding the referenced TEC. There is an increase of the effect noticeable for inverse-cut-off TEC and H-TEC. The mass average Mach number varies are illustrated in figure 5. Figure 4 shows the circumferential distribution of the Mach number representative for the referenced TEC as well as figure 6 shows the yaw angle distribution.

The comparison of yaw angle distributions according to figure 7 detects differences too. Structures shown in figure 4 which are viewed from downstream referring to the rotor appear as circumferentially uniform bands. These structures are modulated by structures from the vane row located upstream furthermore. Upper passage vortex in combination with tip leakage vortex can be seen in figure 4 as well as rotor wakes.

Figure 8 shows “time snapshots” of the unsteady flow field evaluated in plane C. The results were already published and discussed in detail by Selic et al. [29]. The measurement sector in the plane shown is 24° due to the number of downstream guide vanes. The flow through this TEGV is discussed in [36]. Due to this pitch of 24°, the figures show 4.8 rotor wakes and 6.4 potential wakes of the upstream stator. The blade to vane ratio rotor-stator is $\frac{3}{4}$, causing every third wake to be identical.

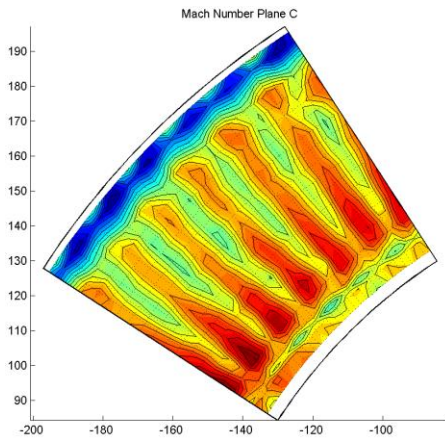


Figure 4: Mach number distribution at the inlet to the TEGV for the Reference TEC measured at plane C

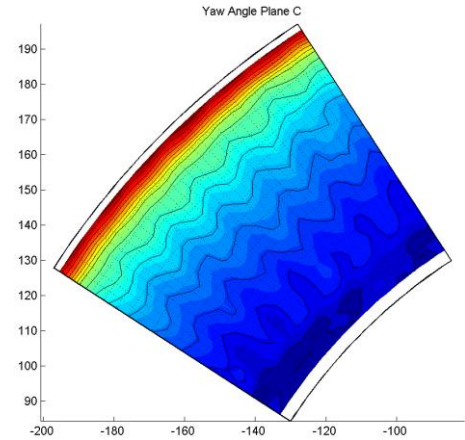


Figure 6: Yaw angle distribution at the inlet to the TEGV for the Reference TEC measured at plane C

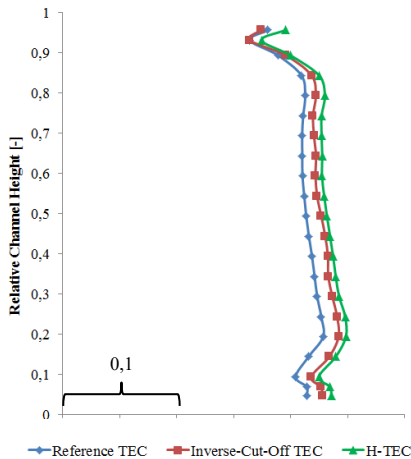


Figure 5: Mach number distribution at TEC inlet

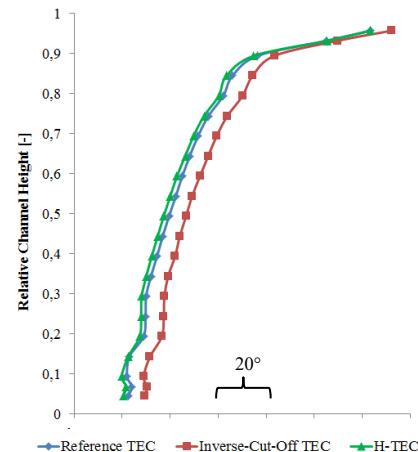


Figure 7: Yaw angle distribution at TEC inlet

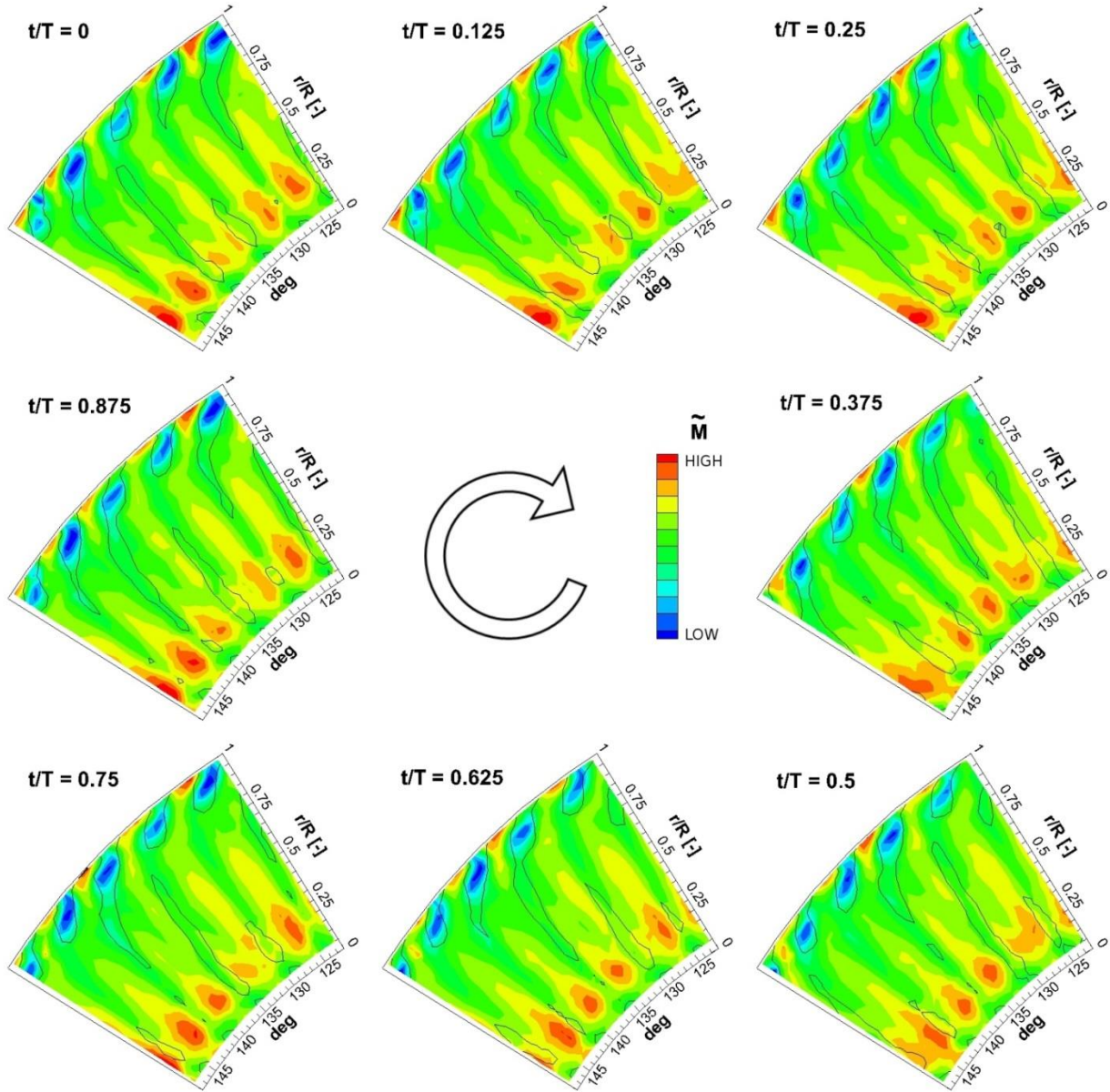


Figure 8: Time resolved Mach number at the inlet to the TEGV for the Reference TEC measured in plane C, superimposed contours of $\overline{C_{pt}} = -0.05$ (Eqn. 1) according Selic et al. [29]

Due to the uneven blade/vane count, the shape and velocity/pressure defect of the wake are not circumferentially constant. The non-uniformities are dependent on the relative position of rotor leading edge and stator wake.

To identify the effects of the stator referring to the exit flow field, time averaging of the rotor exit flow field has been performed removing effect of the rotor itself, allowing the identification of the stator wakes and its differences. The stator wake avenues are superimposed onto the rotor flow field by calculating the total pressure coefficient made non-dimensional.

$$\overline{C_{pt}} = \frac{\overline{P_t} - P_{t,AVE}}{0.5\rho v^2_{AVE}} \quad (1)$$

Figure 8 shows the superimposed contours $\overline{C_{pt}} = -0.05$ corresponding to the number of upstream stators representative for the reference TEC.

Inverse-cut-off TEC and H-TEC setup flow characteristics are similar with the restriction of higher potential effect in comparison to the reference TEC, evaluated in the steady measurements. This leads to more pronounced structures as displayed in figure 8.

Due to the interaction with the upstream located stator vanes the rotor blade excitation and vibration is expected to be strongly influenced.

STRUCTURAL DYNAMICS OF THE ROTOR BLADING

Within [31] the rotor blading under current investigation was characterized in detail. In general different simplified numerical models were analysed by performing a free response analysis.

Resulting mode shapes of a bladed disk can be divided in blade modes and disk modes. Some literatures define them as disk-alone and blade-alone mode shapes, e.g. M. Mayorca et al. [1].

The focus of this paper is on blade mode shapes. Due to the disk modes the blades are excited to vibrate as well. This is the result of contact excitation of the blading and therefore the whole rotor design has combined mode shapes and eigenfrequencies as consequence. The main idea of the paper is to present first results of blade vibration measurements in a rotating system under engine representative conditions.

The rotational speed of the low pressure turbine affects the dynamic behaviour of the bladed disk.

At higher rotation speed the rotor blades are deformed due to the centrifugal force which is similar to a pre-stressing of the blading. The centrifugal forces can change because of the radial deformation when rotating as well. This is important for large deflections and can result theoretically in a reduction of the stiffness. Due to low deflections of the considered blades this effect will be negligible.

The Campbell diagram of the blading under investigation is illustrated in figure 9. It represents the eigenfrequency related to the rotational speed of the shaft. The excitation lines are derived from the multiples of the rotation speed or so called engine order (EO) and drawn as inclined lines.

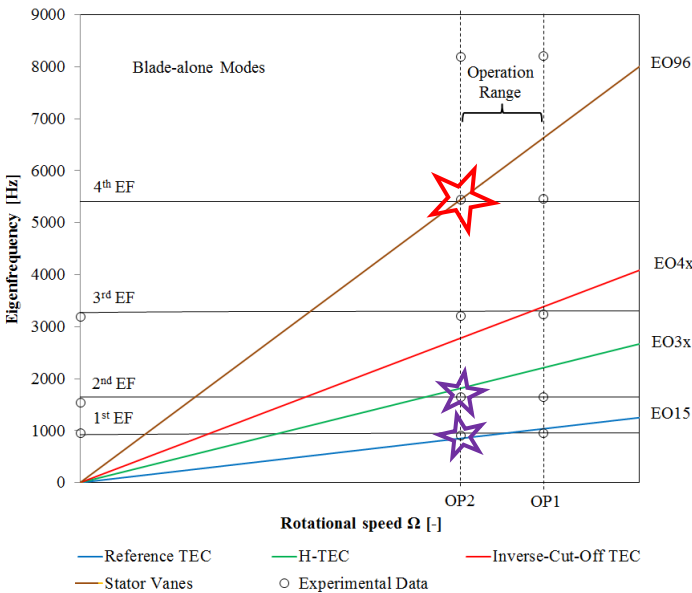


Figure 9: Campbell diagram

When the rotor blading is analysed the EO lines are related to upstream and downstream sources. This is the stator vane number on the upstream and the number of TEGVs downstream of the rotor in our case. Crossings of the eigenfrequencies and EO lines show resonance locations.

Figure 9 is drawn with the numerical data of the 3 blade model presented in [31] and illustrated in figure 10 too. The first 4 blade-alone eigenfrequencies up to 6000Hz are illustrated. The dots are experimentally evaluated values for the eigenfrequencies at standstill as well as at the two operating points which are under investigation. So the range of operation is bounded by the vertical dotted lines.

The engine order line in brown represents the excitation due to the stator vanes which is EO96. The excitation resulting from the TEGVs are plotted in blue for the reference TEC (EO15), green for the H-TEC (EO3x) and in red for inverse-cut-off TEC (EO4x).

In literature results of experimental measurements within resonance are limited especially in the area of LPT. To characterize the system at a resonance crossing OP2 was defined to excite the blading at its 4th EF with the stator vanes (EO96). Additionally EO15 of the reference TEC is nearly crossing the 1st EF at OP2.

At OP1 the upstream effect of the TEGV can be investigated itself as there is a sufficient gap of EO96 to the blade eigenfrequency.

OP1 represents the engine relevant operating point approach furthermore and is suitable for TEGV evaluation. Reference TEC and inverse-cut-off TEC excite blade eigenfrequencies due to a small distances to resonance crossings at OP2 as displayed in the Campbell diagram.

EXPERIMENTS AND EXPERIMENTAL FINDINGS

All time-resolved strain gauge data were resampled and averaged with respect to the rotational speed and then transferred to the frequency domain for further analysis. The spectrograms in figure 11 to figure 13 are focused onto the frequency range of the first 4 blade-alone eigenfrequencies up to 6000Hz.

The spectrograms are the results of the response of SG3, SG5 and SG11. The comparison of amplitude levels as well as the TEGV evaluation is carried out with respect to the respective strain gauge for each TEGV setup. Therefore mistuning which is reduced to a minimum remains unconsidered.

Table 3: Eigenfrequency ranges in Hz; experimental & numerical

	Numerical			Experimental		
	Standstill	OP 2	OP 1	Standstill	OP 2	OP 1
1 st EF	923	952	955	950	958	964
2 nd EF	1648	1639	1649	1612	1652	1653
3 rd EF	3270	3295	3303	3252	3112	3150
4 th EF	5405	5424	5472	-	5467	5482

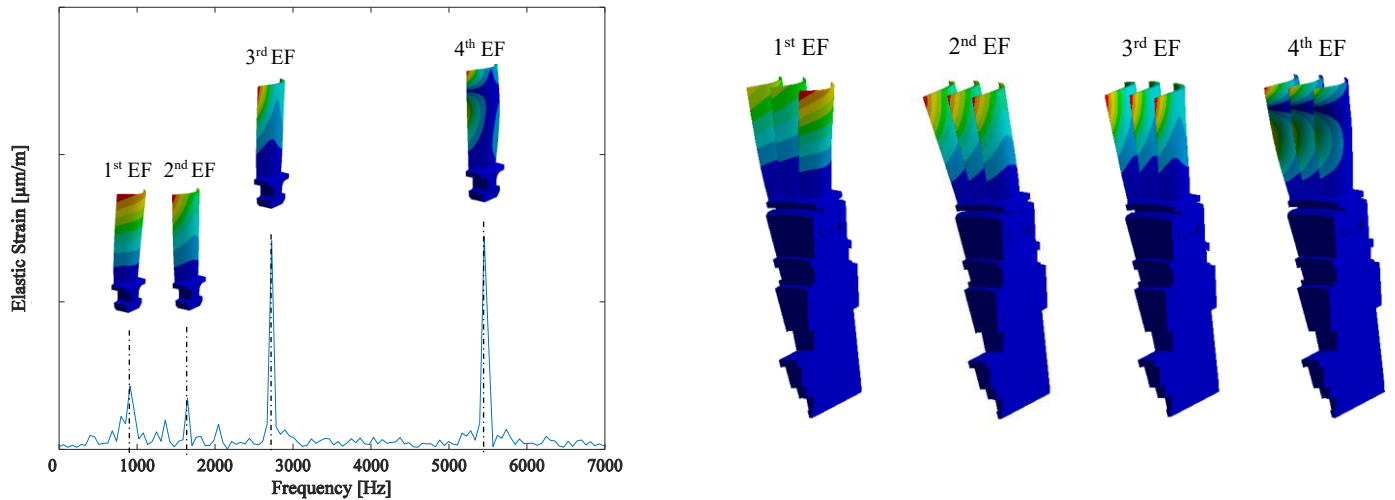


Figure 10: Blade-alone modes and Blade-Disk model according [31]

The spectrum in Figure 10 is representative to assign related blade-alone eigenfrequencies. Additionally they are listed in table 3. The 3 blade model displayed is with reference to the numerical study according [31].

The 1st EF is the bending mode related to the small modulus followed by the bending mode, related to the large modulus. The 3rd EF is the first torsional mode followed by the 2nd torsional mode at approximately 5470Hz which is excited by the stator vanes EO96 at OP2.

As in fact this is independent from TEGV configuration downstream of the rotor, this mode will be excited in any test case of OP2. Spectrograms of OP1 show the same characteristics with other vibration amplitude distribution.

Due to the numbers of IGV, stator and EGV as well as the rotor blade number airfoil interaction modes exist. A variety of them results in combination with the rotational speed in EO excitations of the rotor blading. A several number corresponds with the eigenfrequency of a mode.

Hereinafter two operation points will be analysed separately as well as the resulting blade modes. As the state-of-the-art TEC was the basis for developments the results of the H-TEC and inverse-cut-off TEC are discussed in reference.

Experimental findings OP2

At OP2 the 4th blade-alone eigenfrequency is excited by the stator located upstream. Therefore the focus is on the analysis of behaviour of the 4th EF at different TEGV configurations especially.

Due to the vane numbers of the TECs (reference TEC < H-TEC < inverse-cut-off TEC) as listed in table 1 the turbine exit area size decreases (approximately same sizes of the trailing edges). This results in a varying aerodynamic response from downstream. That means due to blockage the upstream potential effect varies and influences the blading excitation of the rotor.

1st EF:

In theory the 1st mode is excited most by the reference TEC EO15 due to a small distance according the Campbell diagram. This becomes visible when analysing the spectrogram in figure 11 and the illustration of the TEC ranking in figure 15. As the inverse-cut-off TEC in general shows a big influence and a strong interaction (rotor/stator interaction) with the rotor blading there is a trend of increasing amplitudes noticeable. Due to airfoil interaction modes resulting from IGV and stator vanes the 1st EF is excited at each EGV configuration. H-TEC show a lower amplitude level as expected from the Campbell diagram.

2nd EF:

In theory the 2nd mode is excited from the H-TEC EO3x because of a small distance according the Campbell diagram. It seems that the vibration amplitudes of the rotor blading decrease in comparison to the reference TEC configuration. No general influence can be derived similar to the 1st mode.

3rd EF:

Reference TEC and H-TEC show a lower amplitude level in comparison to the inverse-cut-off configuration beside the fact that there is a small distance with EO4x. The same magnitude of 3rd and 4th mode response can be noticed at the reference TEC. Forced response of the blading is a result of EO excitation due to airfoil interaction modes at each EGV configuration.

4th EF:

The stator excitation EO96 can be detected and dominates with respect to all other modes as expected, due to stator/rotor interaction. The frequency range is as expected in numerical studies. The amplitude of this mode increases dramatically with an increasing vane number of the TEC.

As seen in the figures 11 to 13 the measured amplitude level of the rotor blading at inverse-cut-off TEC test setup is multiple in comparison to the reference TEC. Aerodynamic improvements and advantages of the inverse-cut-off TEC affect the rotor blading drastically. May this is a result of an increased blockage but detailed investigations are required furthermore.

All in all an upstream potential effect of the TEGV is noticeable and was successfully shown by the experimental measurements of OP2. A trend of increasing forced response of the rotor blading is detectable at higher vane numbers. Due to the fact of an operating point where the rotor blading is excited by the stator EO96 in its resonance there is no general statement regarding the overall behaviour and effects of the TEGVs possible. Therefore OP1 (approach) should provide information.

OP2 shows rather negative impacts of aerodynamic and acoustic improvements in comparison to the state-of-the-art design regarding the turbine rotor. Nevertheless an evaluation of the investigated TECs was conducted and illustrated in figure 14 for OP2. The comparison shown is in relation to the reference TEC and for every mode. For a simplified rating the equivalent amplitude was considered independent from the frequency. This is sufficient as the trend is detectable. The consideration of the frequency would be important for further fatigue strength analysis. Based on the equivalent amplitude $A_{equivalent}$ a weighting coefficient ϕ_i at every amplitude a_i of the reference TEC was calculated.

For the qualitative TEGV rating all amplitudes are related to the amplitude of the same mode at the reference TEC and multiplied by the weighting coefficient.

$$A_{equivalent;reference\ TEC} = \sum a_{i;reference\ TEC} \quad (2)$$

$$\phi_{i;reference\ TEC} = \frac{a_{i;reference\ TEC}}{A_{equivalent, reference\ TEC}} \quad (3)$$

$$A_{\phi_i;TEGV} = \left[\frac{a_{i;TEGV}}{a_{i;reference\ TEC}} - 1 \right] \cdot \phi_{i;reference\ TEC} \quad (4)$$

As already seen by analyzing the spectrograms, the inverse-cut-off TEC shows a big influence upstream in comparison to the reference TEC.

Beside high amplitudes, high frequency ranges make things worse in respect to fatigue treatments. The H-TEC which was aerodynamically and acoustically optimized leads to higher rotor blade loading as well.

There is no improvement regarding blade vibration of both new designs noticeable. For sure the resonance case should not occur under real engine conditions but shows basic characteristics and behavior in any case.

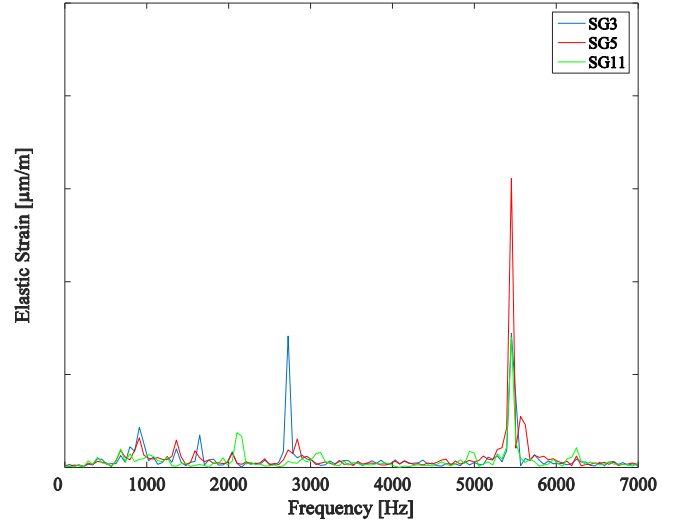


Figure 11: Forced Response Spectrum OP2; Reference TEC

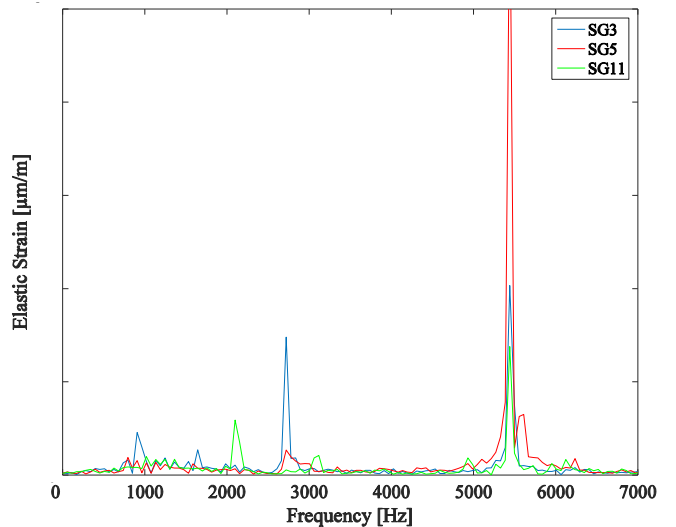


Figure 12: Forced Response Spectrum OP2; H-TEC

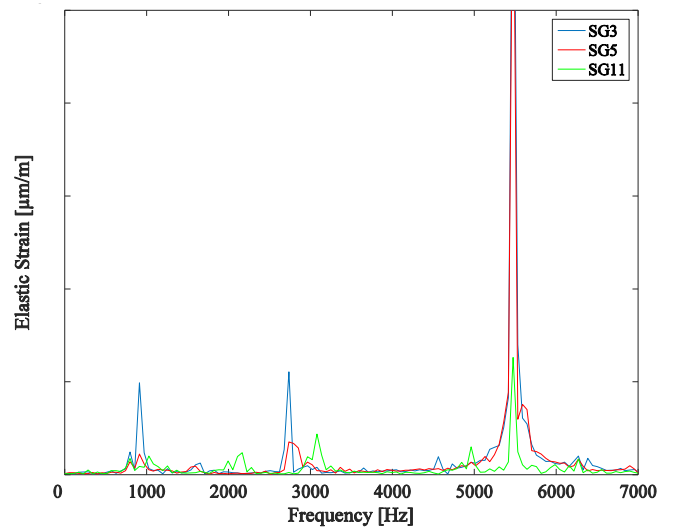


Figure 13: Forced Response Spectrum OP2; Inverse-Cut-Off TEC

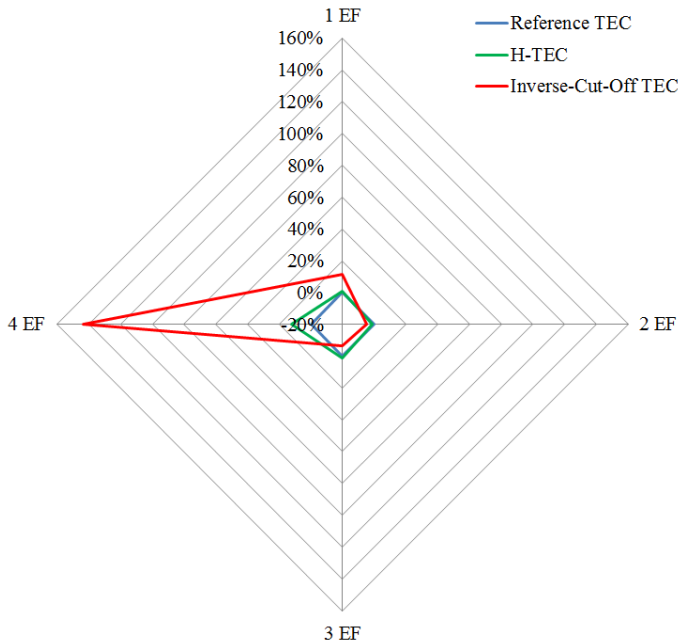


Figure 14: TEC Ranking OP2 (SG3)

TEC RANKING – FINDINGS OP1

Analogue to OP2 the spectrograms were analysed. At OP1 there is excitation from the stator vanes EO96 as well but far away from resonances there is no response on this excitation. At this engine relevant operating point it is possible to make a rating regarding the upstream effect of the TEGVs.

The radar chart illustrated in figure 15 shows a comparison in relation to the reference TEC of all blade modes once again. Due to the vane number of the reference the 1st EF is excited as seen in Campbell diagram. Hence the H-TEC and inverse-cut-off TEC show better characteristics in relation to the 1st mode. All other modes show higher amplitude levels and therefore unfavourable conditions for the blading. This leads to extended areas of inverse-cut-of TEC and H-TEC in the radar chart.

All in all an interrelationship between vane numbers and upstream effect on the rotor blading can be detected as a result of airfoil interaction modes.

Due to an increased potential effect as seen in the aerodynamic measurements at higher vane numbers, the upstream effect regarding blade vibration increases as well. The ranking of vibration amplitude levels as illustrated in figure 14 and figure 15 for SG3 is similar for SG5 and SG11.

Aerodynamic as well as acoustic improvements as wanted with H-TEC and inverse-cut-off TEC in comparison to the reference TEC lead to unfavourable conditions and significantly higher blade loadings.

CONCLUSION

Within this paper different TEGV designs were under investigation to detect an upstream effect on the rotor blading. At two operating points strain gauge measurements were conducted.

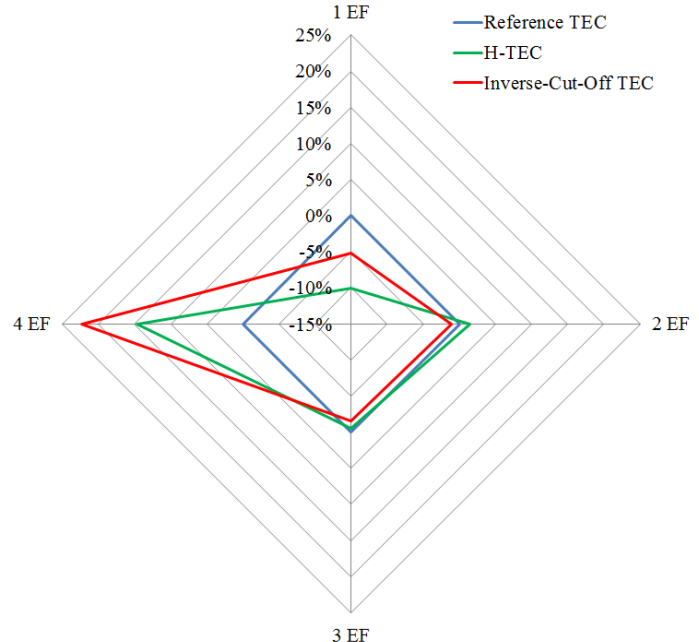


Figure 15: TEC Ranking OP1 (SG3)

On one hand OP2 was defined to meet a resonance crossing. On the other hand OP1 was the engine relevant approach.

At OP2 the excitation resulting from the stator vanes EO96 were demonstrated and verified by the experiments. The different TEC configuration showed completely different characteristics. When analyzing the forced response spectrograms an interrelationship of the vibration amplitudes and the vane number of the TEC is noticeable. Depending on IGV, stator vane and EGV numbers as well as the rotor blade number airfoil interaction modes exist and are able to excite the rotor blading.

For an assessment of the TEC configurations OP1 was considered to avoid wrong conclusions at OP2.

Overall unfavorable conditions can be noticed for H-TEC and inverse-cut-off TEC regarding blade vibration amplitude levels. Especially the 4th mode shows a significant increase in the amplitude.

Finally it can be stated that the experimental measurements successfully showed the upstream effect of TEGV as well as provide a data basis for further investigations. Aerodynamic measurements confirmed this trend.

Aerodynamic as well as acoustic improvements as wanted with H-TEC and inverse-cut-off TEC in comparison to the reference TEC lead to unfavourable conditions in these experiments.

For further investigations especially disk modes which are present as well have to be considered and will provide a better overall understanding.

ACKNOWLEDGMENTS

This publication arises within a national funded project AdMoNt (contract no. 839008) regarding aeroelastic investigations of low pressure turbine blading at Graz University of Technology at the Institute for Thermal Turbomachinery and Machine Dynamics. The authors therefore want to thank the FFG for supporting this project. Furthermore the authors want to thank Prof. Dr. techn. H. P. Pirker for operating the compressor station and his great support during all experimental investigations.

REFERENCES

- [1] M. Mayorca, D. Vogt, H. Martensson and T. Fransson, "A New Reduced Order Modeling For Stability and Forced Response Analysis of Aero-Coupled Blades Considering Various Mode Families," Proceedings of the ASME TurboExpo, 2010, ASME Paper GT2010-22745
- [2] K. Willcox, J. Peraire and J. Paduano, "Application of Model Order Reduction to Compressor Aeroelastic Models," Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 124, pp. 332 – 339, April 2002
- [3] V. Carsten and J. Belz, "Numerical Investigations of Nonlinear Fluid-Structure Interaction in Vibrating Compressor Blades," ASME Journal of Turbomachinery, vol. 123, pp. 402 – 408, April 2001
- [4] H. Schönenborn, U. Retze, G. Ziller, and P. Waniczek, "Experimental and Analytical Mistuning Analysis of a Blisk at Lab Conditions and under Rig Conditions Using Tip timing," Proceedings of the ASME TurboExpo, 2010, ASME Paper GT2010-22447
- [5] M. Zielinski and G. Ziller, "Noncontact Blade Vibration Measurement System for Aero Engine Application," Proceedings of ISABE, 2005, Paper ISABE-2005-1220
- [6] V. Kharyton and R. Bladh, "Using tip timing and strain gauge data for the estimation of consumed life in a compressor blisk subjected to stall-induced loading," Proceedings of the ASME TurboExpo, 2014, ASME Paper GT2014-27251
- [7] F. Holzinger, F. Wartzek, M. Nestle, H.-P. Schiffer and S. Leichtfuß, "Self-excited Blade Vibration Experimentally investigated in Transonic Compressors – Acoustic Resonance," Proceedings of the ASME TurboExpo, 2015, ASME Paper GT2015-43618
- [8] F. Holzinger, F. Wartzek, M. Nestle, H.-P. Schiffer and S. Leichtfuß, "Self-excited Blade Vibration Experimentally investigated in Transonic Compressors – Rotating Instabilities and Flutter," Proceedings of the ASME TurboExpo, 2015, ASME Paper GT2015-43628
- [9] D. Ewins, "The Mistuned Blade Vibration Problem Re-Visited", Proceedings of the 12th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines, pp. 323-324, October 2009
- [10] D. Ewins, "The Effect of Blade Mistuning on Vibration Response - a Survey", IFToMM Conference on Theory of Machines and Mechanisms, 1991
- [11] M. Castanier and C. Pierre, "Modeling and Analysis of Mistuned Bladed Disk Status and Emerging Directions," Journal of Propulsion and Power, vol. 22, no. 2, pp. 384-396, 2006
- [12] C. Heinz, M. Schatz, H. Stüer, and M. Casey, "Experimental and Analytical Investigation of a Low Pressure Model Turbine During Forced Response Excitation," Proceedings of ASME TurboExpo, 2010, ASME Paper GT2010-22146
- [13] C. Heinz, M. Schatz, H. Stüer, and M. Casey, "Impact of Mistuning on the Vibration Behaviour of the Last Stage in a Model Three Stage Low Pressure Steam Turbine," Proceedings of ASME TurboExpo, 2011, ASME Paper GT2011-45784
- [14] D. Bell and L. He, "Three-Dimensional Unsteady Flow for an Oscillating Turbine Blade and the Influence of Tip Leakage," ASME Journal of Turbomachinery, vol. 122, pp. 93 – 101, January 2000
- [15] X. Huang, L. He and D. Bell, "An Experimental Investigation Into Turbine Flutter Characteristics at Different Tip-Clearances," Proceedings of the ASME TurboExpo, 2006, ASME Paper GT2006-905415
- [16] B. Urban, H. Stetter and N. Vortmeyer, "Experimental Investigation of Shock-Induced Blade Oscillation at an Elastically Suspended Turbine Cascade in Transonic Flow," in 2000-GT-378, Munich, 2000
- [17] M. Nowinski and J. Panovsky, "Flutter Mechanism in Low Pressure Turbine Blades," Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, Vol. 122, pp. 82-88, January 2000
- [18] D. M. Vogt and T. H. Fransson, "Experimental Investigation of Mode Shape Sensivity of an Oscillating Low Pressure Turbine Cascade at Design and Off-Design Conditions ," Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 129, pp. 530-541, April 2004
- [19] J.J. Kielb and R.S. Abhari, "Experimental Study of Aerodynamic and Structural Damping in a Full-Scale Rotating Turbine," Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2003, Vol. 1025, pp. 102 -112, January 2003
- [20] A. Srinivasan, "Flutter and Resonant Vibration Characteristics of Engine Blades," Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 119, pp. 741 -775, October 1997
- [21] Website of the ADTurbII Project, "Aeroelastic Design of Turbine Blades II," <http://www.energy.kth.se/adurb2/>, 20.01.2016
- [22] Website of the Future Project, "Flutter-Free Turbomachinery Blades," <http://www.future-project.eu/>, 20.01.2016
- [23] V. A. Chenaux and B. Grüber, "Aeroelastic Investigation of an Annular Transonic Compressor Cascade: Numerical Sensitivity Study for Validation Purposes," Proceedings of the ASME TurboExpo, 2015, ASME Paper GT2015-43297
- [24] V. A. Chenaux and A. Zanker, "Aeroelastic Investigation of an Annular Transonic Compressor Cascade: Experimental Results," Proceedings of the ASME TurboExpo, 2015, ASME Paper GT2015-43313

- [25] E. Petrov, L. Di Mare, H. Hennings, R. Elliot, *"Forced Response Disks in Gas Flow: A Comparative Study of Predictions and Full-Scale Experimental Results,"* Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 132, pp. 052504-1 – 052504-10, May 2010
- [26] W.L. Murray and N.L. Key, *"Experimental Investigation of a Forced-Response Condition in a Multistage Compressor,"* Journal of Propulsion and Power, vol. 31, no. 5, pp. 1320 - 1329, October 2015
- [27] Website of the AdMoNt Project, *"Aerodynamic vibration excitation of modern low pressure turbine blading,"* <http://www.ttm.tugraz.at/?seite=research/projects/AdMoNt>, 20.01.2016
- [28] A. Marn, T. Selic, F. Schoenleitner, D. Broszat and F. Heitmeir, *"Comparison of the Aerodynamics of Acoustically Designed EGVs and a State-of-the-Art EGV,"* Proceedings of the ASME TurboExpo, 2014, ASME Paper GT2014-26090
- [29] F. Schoenleitner, T. Selic, L. Traussnig, F. Heitmeir, A. Marn, *"Experimental Blade Vibration Measurements on Rotating Turbomachinery,"* 20th Blade Mechanics Seminar, 2015, Winterthur, Switzerland
- [30] Moser, M., Kahl, G., Kulhanek, G., and Heitmeir, F., *"Construction of a subsonic test turbine facility for experimental investigations of sound generation and propagation for low pressure turbines",* 2007, ISABE conference Beijing, Paper ID: ISABE-2007-1366.
- [31] F. Schoenleitner, L. Traussnig, A. Marn, F. Heitmeir, *"Modal Characterization, Strain Gauge Setup and 1-Way FSI of a Low Pressure Turbine Rotor Blading,"* Proceedings of the ASME TurboExpo, 2015, ASME Paper GT2015-42717
- [32] H. Hennings and R. Elliot, *"Forced Response Experiments in a High Pressure Turbine Stage,"* Proceedings of the ASME TurboExpo, 2002, ASME Paper GT2002-30453
- [33] F. Schoenleitner, T. Selic, L. Traussnig, F. Heitmeir, A. Marn, *"Experimental Blade Vibration Measurements on Rotating Turbomachinery,"* 20th Blade Mechanics Seminar, 2015, Winterthur, Switzerland
- [34] G. Persico, P. Gaetani and A. Guardone, *"Design and Analysis of New Concept Fast-Response Pressure Probes,"* Meas.Sci.Technol., vol. 16, pp. 1741-1750, 2005
- [35] T. Selic, D. Lengani, F. Schoenleitner, A. Marn, D. Broszat and F. Heitmeir, *"Comparison of a State of the Art and a High Stage Loading Rotor,"* Proceedings of the ASME TurboExpo, 2014, ASME Paper GT2014-26895
- [36] T. Selic, D. Lengani, F. A. Marn and F. Heitmeir, *"Aerodynamic Effects of an unshrouded low pressure turbine on a low aspect ration exit guide vane,"* Proceedings of the ASME TurboExpo, 2012, ASME Paper GT2012-68981

Anhang B: Schwingung einer kreisrunden Platte

Anhang B-1: Herleitung der Bewegungsgleichung einer Platte

Im Nachfolgenden wird für die in Abbildung 114 dargestellte Platte die Bewegungsgleichung hergeleitet. Die folgende Herleitung basiert auf Wandinger [40].

Die betrachtete Platte wird durch eine normal auf Mittelebene der Platte wirkende Belastung bzw. die Anregung $p(x,y,t)$ zu Schwingungen angeregt. Diese führt zu einer orts- und zeitabhängigen Durchbiegung (Bewegung) in z -Richtung, die anhand der Bewegungsgleichung beschrieben werden kann.

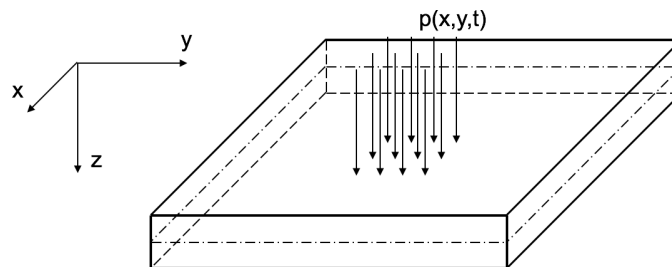


Abbildung 114: rechteckige und kreisrunde Platte [17]

Damit man auf die Bewegungsgleichung der Platte kommt, ist es erforderlich das Kräfte- und Momentengleichgewicht für das in Abbildung 115 dargestellte differentiell kleine Plattenelement anzusetzen. Die dicken Doppelpfeile symbolisieren dabei jeweils innere Momente, die einfachen Pfeile symbolisieren innere Kräfte und der dünne Pfeil die äußere Belastung. Dabei ist beispielhaft Q_y die wirkende Querkraft, M_y das wirkende Biegemoment pro Längeneinheit und M_{yx} das an der Schnittfläche angreifende Torsionsmoment pro Längeneinheit.

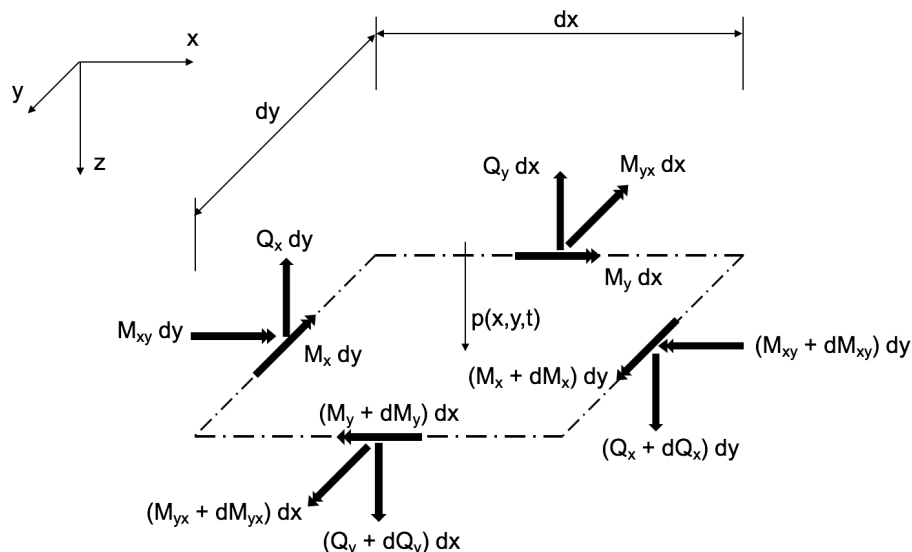


Abbildung 115: Freigeschnittenes Plattenelement [40]

Setzt man nun das Kräftegleichgewicht (Gl. 179) in z-Richtung an, lässt sich dieses mit Hilfe der Taylor-Reihen-Entwicklung, analog zu (Gl. 77), auf die in (Gl. 180) dargestellte Beziehung vereinfachen.

$$p \cdot dx \cdot dy + (Q_x + dQ_x)dy + (Q_y + dQ_y)dx - Q_x \cdot dy - Q_y \cdot dx = 0 \quad (\text{Gl. 179})$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (\text{Gl. 180})$$

Aus den Momentengleichgewichten um die x- sowie um die y-Achse erhält man unter Anwendung der Taylor-Reihen-Entwicklung, analog zu (Gl. 77), die beiden in (Gl. 181) und (Gl. 182) angeführten Beziehungen.

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (\text{Gl. 181})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x \quad (\text{Gl. 182})$$

Diese beiden Bedingungen können unter der Annahme von $M_{xy} = M_{yx}$ in die Gleichung (Gl. 180) eingesetzt werden und man erhält die Differentialgleichung (Gl. 183). Diese bietet die Grundlage um die Bewegungsgleichung herzuleiten.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (\text{Gl. 183})$$

Um von dieser Momentengleichung auf die Bewegungsgleichung zu gelangen, ist es erforderlich, diese mit Hilfe Kirchhoff'sche Plattentheorie und Materialgesetze weiter umzuformen. Legt man der nachfolgenden Betrachtung zugrunde, dass die Kirchhoff'schen Plattentheorie gültig ist, liegen alle Punkte, die im unverformten Zustand auf einer Normalen zur Mittelebene gelegen sind, auch im verformten Zustand auf derselben Normalen zur Mittelebene sind. Des Weiteren wird angenommen, dass die Durchbiegung w der Platte gemäß (Gl. 184) nur von den Koordinaten x und y abhängig ist, aber nicht von der z -Koordinate.

$$w = w(x, y) \quad (\text{Gl. 184})$$

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{Gl. 185})$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{Gl. 186})$$

Der in (Gl. 184) angeführte Zusammenhang ermöglicht es, die Verschiebungen u und v der einzelnen auf der Normalen liegenden Punkte anhand von (Gl. 185) und (Gl. 186) zu beschreiben. Anhand dieser Zusammenhänge können die Verzerrungs-Verschiebungs-Bedingungen wie in (Gl. 187) bis (Gl. 192) angeschrieben werden.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{Gl. 187})$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{Gl. 188})$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{Gl. 189})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{Gl. 190})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{Gl. 191})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (\text{Gl. 192})$$

Setzt man des Weiteren voraus, dass es sich bei dem betrachteten Fall um einen ebenen Spannungszustand handelt und sich das Material linear elastisch verhält, ist das Hook'sche Gesetz für den ebenen Spannungszustand gültig. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen lassen sich somit wie in (Gl. 193) bis (Gl. 195) anschreiben und mit Hilfe der Verschiebungs-Verzerrungs-Bedingungen weiter umschreiben.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = -\frac{E z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{Gl. 193})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = -\frac{E z}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{Gl. 194})$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -2 G z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{Gl. 195})$$

Aus den Spannungen lassen sich die wirkenden Momente wie in (Gl. 196) bis (Gl. 198) berechnen. Dazu integriert man die Spannungen über die Querschnittshöhe unter Verwendung der Zusammenhänge aus (Gl. 193) bis (Gl. 195) auf.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot dz \quad (\text{Gl. 196})$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot dz \quad (\text{Gl. 197})$$

$$M_{xy} = M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz = -2 \cdot G \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot dz \quad (\text{Gl. 198})$$

Für das in den Gleichungen (Gl. 196) bis (Gl. 198) enthaltene Integral ergibt sich somit die Lösung anhand von (Gl. 199). Führt man des Weiteren die Plattensteifigkeit B (Gl. 200) ein und umschreibt den Schubmodul anhand von (Gl. 201), kann man die Gleichungen weiter vereinfachen.

$$\int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot dz = \frac{1}{12} h^3 \quad (\text{Gl. 199})$$

$$B = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{Gl. 200})$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{Gl. 201})$$

Setzt man die Gleichungen für die Momente in weiterer Folge in (Gl. 183) ein, so folgt daraus die Kirchhoff'sche Plattengleichung in Form von (Gl. 202). Diese Gleichung beschreibt die statische Durchbiegung einer Platte bei vorgegebener äußerer Last.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{B} \quad (\text{Gl. 202})$$

Da aber hier nicht die statische Durchbiegung der Platte von Interesse ist, sondern die Bewegungsgleichung, ist es erforderlich, den in (Gl. 203) dargestellten d'Alembert'schen Trägheitsterm hinzuzufügen. Dabei ist m'' eine Masse pro Flächeneinheit, die sich aus der Dichte und der Plattendicke zusammensetzt.

$$dF_T = -m'' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{Gl. 203})$$

Fügt man diesen Term zur Kirchhoff'schen Plattengleichung hinzu ergibt sich die in (Gl. 204) dargestellte Bewegungsgleichung für die Platte. Dabei ist ersichtlich, dass es sich um eine partielle Differentialgleichung handelt, die sowohl von der Zeit als auch von den Koordinaten x und y abhängig ist.

$$\frac{m''}{B} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y, t)}{B} \quad (\text{Gl. 204})$$

Diese Gleichung stellt die Grundlage für die Schwingungsuntersuchung von Platten dar. Die hergeleitete Gleichung ist für Platten allgemein gültig, dennoch ist es oft geschickter bei kreisrunden Problemen die Darstellung in Zylinderkoordinaten zu wählen.

Anhang B-2: Überleitung auf die kreisrunde Platte

Da in diesem Abschnitt bzw. in der Arbeit kreisrunde Platten behandelt werden, ist es für die einfachere Handhabung und Lösung erforderlich, die Gleichung (Gl. 204) auf Zylinderkoordinaten überzuleiten. Die betrachtete Platte mit dem Außendurchmesser R und der Dicke h ist dabei in Abbildung 116 dargestellt.

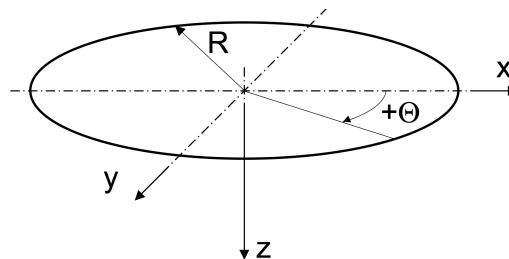


Abbildung 116: Kreisrunde Platte

Die bereits hergeleitete Bewegungsgleichung (Gl. 204) in kartesischen Koordinaten lässt sich mit Hilfe des Nabla-Operators ∇ bzw. des Laplace-Operator Δ , wie in (Gl. 205) angeführt, in symbolischer Schreibweise anschreiben.

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{Gl. 205})$$

Somit erhält man zwei Möglichkeiten die Bewegungsgleichung (Gl. 204) unter Verwendung des Nabla-Operators, wie in (Gl. 206), oder des Laplace-Operators, wie in (Gl. 207), in die symbolische Schreibweise überzuführen.

$$\frac{m''}{B} \cdot \dot{w} + \nabla^4 w = \frac{p(x, y, t)}{B} \quad (\text{Gl. 206})$$

$$\frac{m''}{B} \cdot \dot{w} + \Delta^2 w = \frac{p(x, y, t)}{B} \quad (\text{Gl. 207})$$

Da in diesem Abschnitt aber eine kreisrunde Platte behandelt werden soll und dafür Zylinderkoordinaten vorteilhaft zu handhaben sind, ist es erforderlich, die Bewegungsgleichung von kartesischen auf Zylinderkoordinaten zu transformieren. Dies ist durch die symbolische Schreibweise sehr einfach. Dabei ist es lediglich erforderlich den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten einzusetzen. Die Transformation ist in (Gl. 208) dargestellt.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \xrightarrow{\text{Koordinaten-}} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{Gl. 208})$$

Die Bewegungsgleichung lässt sich somit gleich wie in (Gl. 207) anschreiben. Führt man diese von der symbolischen Schreibweise wieder zurück, ist der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten, wie in (Gl. 208), zu verwenden.

Anhang B-3: Lösung der Bewegungsgleichung

Sie Bewegungsgleichung ist allgemein gültig. Um die Konstanten der erhaltenen Lösungen bestimmen zu können, sind Randbedingungen erforderlich. Für die nachfolgende Herleitung wird angenommen, dass die kreisrunde Platte am Außenrand fest eingespannt ist. In Abbildung 117 ist die eingespannte Platte mit der konstanten Dicke h dargestellt.

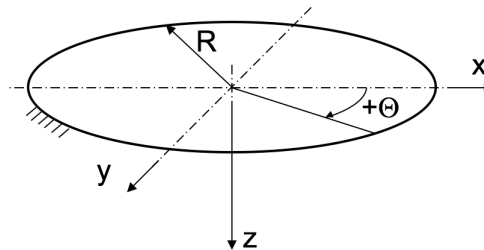


Abbildung 117: eingespannte kreisrunde Platte

Bei der zu lösenden Differentialgleichung (Gl. 209) handelt es sich um eine inhomogene partielle Differentialgleichung. Aufgrund dieser ist es erforderlich zu Beginn die homogene Lösung und im Anschluss die inhomogene Lösung zu ermitteln.

$$\frac{m''}{B} \cdot \ddot{w} + \Delta^2 w = \frac{p(x, y, t)}{B} \quad (\text{Gl. 209})$$

Für die inhomogene Lösung wird der Fall betrachtet, dass es sich um eine „Rotorscheibe“ handelt, die durch die Stator-Rotor-Interaktion angeregt wird. Die Bezeichnung „Rotorscheibe“ darf nicht mit der Definition Scheibe bzw. Platte vermischt werden, diese stammt nur aus der Form bzw. aus der spezifischen Namensgebung.

Anhang B-3.1: Homogene Lösung

Für die Lösung der homogenen Differentialgleichung verschwindet das Störglied auf der rechten Seite der (Gl. 209) und es ergibt sich die Bewegungsgleichung (Gl. 210) für die freie Plattenschwingung.

$$\frac{m''}{B} \cdot \ddot{w} + \Delta^2 w = 0 \quad (\text{Gl. 210})$$

Um die partielle Differentialgleichung (Gl. 210) zu lösen, kann, analog zum Bernoulli-Euler-Balken, ein Separationsansatz verwendet werden. Dadurch ist es möglich, die unterschiedlichen Variablen zu trennen und die partielle Differentialgleichung in einzelnen unabhängige Gleichungen überzuführen. In (Gl. 211) ist der verwendete Separationsansatz dargestellt. Die enthaltenen Glieder sind dabei nur von einer Variablen abhängig, somit kann diese in späterer Folge (Gl. 210) in unabhängige Differentialgleichungen aufgespalten werden.

$$w(r, \theta, t) = T(t) \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta) \quad (\text{Gl. 211})$$

Dieser Ansatz und seine zweite zeitliche Ableitung kann in die Bewegungsgleichung (Gl. 210) eingesetzt werden. Trennt man in weiterer Folge die Variablen und formt diese weiter um folgt daraus die in (Gl. 212) dargestellte Beziehung. Diese kann nur dann erfüllt sein, wenn beiden Seiten konstant sind, da eine Veränderung der einen Seite keine Auswirkung auf die andere Seite der Gleichung hätte. Daraus folgt, dass jeder Term gleich einer Konstanten, die hier mit $-\omega^2$ bezeichnet wird, sein muss.

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\frac{B}{m''} \cdot \frac{\Delta^2 \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta)}{\psi(r) \cdot \vartheta(\theta)} = -\omega^2 \quad (\text{Gl. 212})$$

Aus dieser Gleichung (Gl. 212) erhält man somit zwei getrennt lösbare Differentialgleichungen, die in (Gl. 213) und (Gl. 214) dargestellt sind. (Gl. 214) lässt sich durch den Zusammenhang des Laplace-Operators mit dem Nabla-Operator (Gl. 205) sowie durch die Beziehung (Gl. 215) weiter vereinfachen.

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 \cdot T(t) = 0 \quad (\text{Gl. 213})$$

$$\Delta^2 \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta) - \frac{B}{m''} \cdot \omega^2 \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta) = (\nabla^4 - \beta^4) \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 214})$$

$$\beta^4 = \frac{B}{m''} \cdot \omega^2 \quad (\text{Gl. 215})$$

Die homogene Differentialgleichung (Gl. 213) kann anhand des bereits bekannten Exponentialansatzes gelöst werden. Setzt man diesen Ansatz in die Gleichung ein und bestimmt die Exponenten, ergibt sich die Lösung in Form von (Gl. 216). Somit ist die erste der beiden Differentialgleichungen gelöst.

$$T(t) = \bar{A}_1 \cdot e^{i\omega t} + \bar{B}_1 \cdot e^{-i\omega t} = A_1 \cdot \cos(\omega t) + B_1 \cdot \sin(\omega t) \quad (\text{Gl. 216})$$

Nun ist es erforderlich noch die verbleibende Differentialgleichung (Gl. 214) zu lösen. Dazu lässt sich im ersten Schritt (Gl. 214) mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes auch diese in die Form von (Gl. 217) überführen. Dadurch kann (Gl. 217) in zwei einzelne Bedingungen aufgespalten (Gl. 218) oder (Gl. 219) werden, die die Gleichung erfüllen, wenn eine der beiden null wird.

$$(\nabla^2 - \beta^2) \cdot (\nabla^2 + \beta^2) \cdot \psi(r) \cdot \vartheta(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 217})$$

$$(\nabla^2 - \beta^2) \cdot \psi_1(r) \cdot \vartheta_1(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 218})$$

$$(\nabla^2 + \beta^2) \cdot \psi_2(r) \cdot \vartheta_2(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 219})$$

Da die Gleichung (Gl. 217) aufgeteilt werden kann ist es möglich die beiden Gleichungen (Gl. 218) und (Gl. 219) getrennt zu lösen und im Anschluss anhand von (Gl. 217) wieder zusammenzuführen.

Im nachfolgenden wird zuerst (Gl. 218) gelöst und in weiter Folge auf (Gl. 219) eingegangen. Dazu wird weggegangen von der symbolischen Schreibweise und die Differentialgleichung in Zylinderkoordinaten behandelt. In den nachfolgenden Schritten werden wieder die Variablen getrennt, somit erhält man hier wiederum zwei unabhängige Differentialgleichungen.

$$\nabla^2 \cdot \psi_1(r) \cdot \vartheta_1(\theta) - \beta^2 \cdot \psi_1(r) \cdot \vartheta_1(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 220})$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1(r) \vartheta_1(\theta)}{\partial r^2} + \frac{\vartheta_1(\theta)}{r} \cdot \frac{\partial \psi_1(r)}{\partial r} + \frac{\psi_1(r)}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_1(\theta)}{\partial \theta^2} - \beta^2 \cdot \psi_1(r) \cdot \vartheta_1(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 221})$$

$$\frac{1}{\psi_1(r)} \left[\frac{\partial^2 \psi_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_1(r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{\vartheta_1(\theta)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_1(\theta)}{\partial \theta^2} - \beta^2 = 0 \quad (\text{Gl. 222})$$

$$\frac{1}{\psi_1(r)} \left[\frac{\partial^2 \psi_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_1(r)}{\partial r} \right] - \beta^2 = -\frac{1}{\vartheta_1(\theta)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_1(\theta)}{\partial \theta^2} = \left(\frac{m_1}{r} \right)^2 \quad (\text{Gl. 223})$$

Die in (Gl. 223) dargestellte Funktion ist nur dann erfüllt, wenn beide Seiten konstant sind. Somit kann jeder Term mit einer Konstanten gleichgesetzt werden. Dies führt dazu, dass man auch hier wieder zwei getrennt lösbare Differentialgleichungen erhält. Diese beiden Gleichungen sind in (Gl. 224) und (Gl. 225) angeführt.

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1(\theta)}{\partial \theta^2} + m_1^2 \cdot \vartheta_1(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 224})$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_1(r)}{\partial r} - \left(\beta^2 + \left(\frac{m_1}{r} \right)^2 \right) \psi_1(r) = 0 \quad (\text{Gl. 225})$$

Zuerst wird die in (Gl. 224) dargestellte homogene Differentialgleichung mit Hilfe eines Exponentialansatzes gelöst. Somit ergibt sich die in (Gl. 226) dargestellte Lösung. Diese Gleichung muss die periodische Randbedingung der Platte einhalten, d.h. $\vartheta_1(0) = \vartheta_1(2\pi)$. Somit lässt sich daraus folgern, dass m_1 eine natürliche Zahl sein muss.

$$\vartheta_1(\theta) = \bar{A}_2 \cdot e^{i m_1 \theta} + \bar{B}_2 \cdot e^{-i m_1 \theta} = A_2 \cdot \cos(m_1 \theta) + B_2 \cdot \sin(m_1 \theta) \quad (\text{Gl. 226})$$

Nach der Lösung von (Gl. 224) ist es nun erforderlich (Gl. 225) zu lösen. Bei der Gleichung (Gl. 225) handelt es sich um eine modifizierte Bessel'sche Differentialgleichung. Für diese die Lösung in der Form von (Gl. 227) aus der Literatur entnommen werden kann. Dabei sind I_{m_1} und K_{m_1} die modifizierten Bessel'schen Funktionen, die in Abbildung 118 dargestellt sind.

$$\psi_1(r) = A_3 \cdot I_{m_1}(\beta r) + B_3 \cdot K_{m_1}(\beta r) \quad (\text{Gl. 227})$$

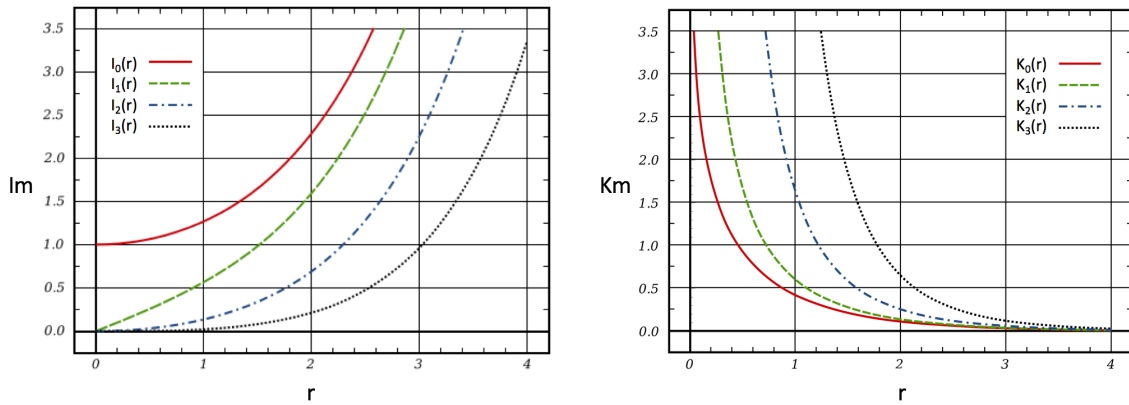


Abbildung 118: Bessel'sche Funktionen [43]

Somit hat man die Gleichung (Gl. 218) vollständig gelöst. Nun ist es erforderlich die zweite zu (Gl. 217) gehörige Bedingung (Gl. 219) zu lösen. Es wird wieder weggegangen von der symbolischen Schreibweise hin zu der Schreibweise in Zylinderkoordinaten. In den nachfolgenden Schritten werden wieder die Variablen getrennt, somit erhält man hier wiederum zwei unabhängige Differentialgleichungen.

$$\nabla^2 \cdot \psi_2(r) \cdot \vartheta_2(\theta) + \beta^2 \cdot \psi_2(r) \cdot \vartheta_2(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 228})$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2(r) \vartheta_2(\theta)}{\partial r^2} + \frac{\vartheta_2(\theta)}{r} \cdot \frac{\partial \psi_2(r)}{\partial r} + \frac{\psi_2(r)}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_2(\theta)}{\partial \theta^2} + \beta^2 \cdot \psi_2(r) \cdot \vartheta_2(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 229})$$

$$\frac{1}{\psi_2(r)} \left[\frac{\partial^2 \psi_2(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_2(r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{\vartheta_2(\theta)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_2(\theta)}{\partial \theta^2} + \beta^2 = 0 \quad (\text{Gl. 230})$$

$$\frac{1}{\psi_2(r)} \left[\frac{\partial^2 \psi_2(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_2(r)}{\partial r} \right] + \beta^2 = - \frac{1}{\vartheta_2(\theta)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_2(\theta)}{\partial \theta^2} = \left(\frac{m_2}{r} \right)^2 \quad (\text{Gl. 231})$$

Die in (Gl. 231) dargestellte Funktion kann wieder nur dann erfüllt sein, wenn beide Seiten konstant und gleich einer Konstanten sind. Durch diesen Schritt erhält man auch hier wieder zwei getrennt lösbare Differentialgleichungen, die in (Gl. 232) und (Gl. 233) dargestellt sind.

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2(\theta)}{\partial \theta^2} + m_2^2 \cdot \vartheta_2(\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 232})$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_2(r)}{\partial r} + \left(\beta^2 - \left(\frac{m_2}{r} \right)^2 \right) \psi_2(r) = 0 \quad (\text{Gl. 233})$$

Die Gleichung (Gl. 232) ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, die wiederum mit einem Exponentialansatz gelöst werden kann. Die Lösung (Gl. 234) muss wiederum die periodischen Randbedingungen einhalten, d.h. $\vartheta_2(0) = \vartheta_2(2\pi)$. Daraus folgt auch hier, dass m_2 eine natürliche Zahl sein muss.

$$\vartheta_2(\theta) = \bar{A}_4 \cdot e^{i m_2 \theta} + \bar{B}_4 \cdot e^{-i m_2 \theta} = A_4 \cdot \cos(m_2 \theta) + B_4 \cdot \sin(m_2 \theta) \quad (\text{Gl. 234})$$

Betrachtet man nun die in (Gl. 233) dargestellte Gleichung ist ersichtlich, dass es sich auch hier wieder um eine Bessel'sche Differentialgleichung handelt. Die Lösung in (Gl. 235) konnte somit wieder aus der Literatur entnommen werden. Sie beinhaltet die in Abbildung 119 dargestellten Bessel'schen Funktionen J_{m2} und Y_{m2} .

$$\psi_1(r) = A_5 \cdot J_{m2}(\beta r) + B_5 \cdot Y_{m2}(\beta r) \quad (\text{Gl. 235})$$

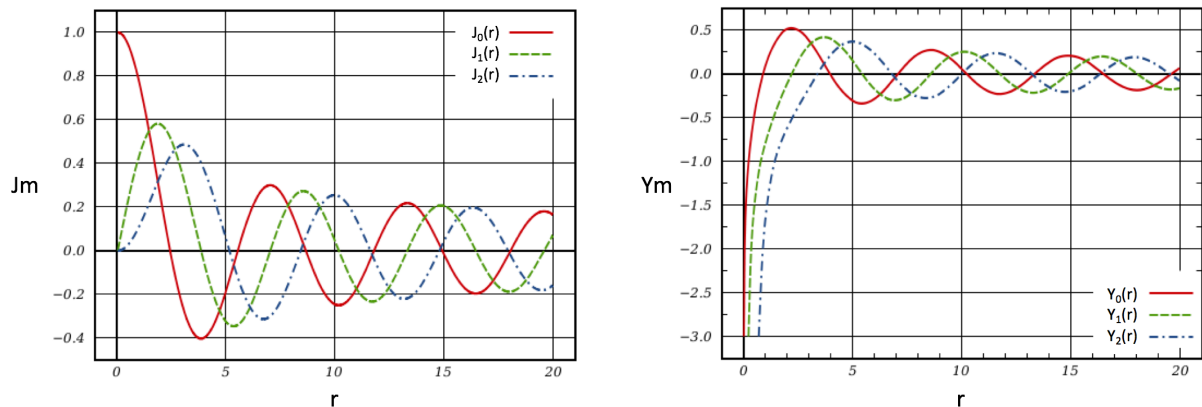


Abbildung 119: Bessel'sche Funktionen [43]

Da in (Gl. 217) die Gleichung in zwei Teile aufgeteilt wurde, ist die Differentialgleichung in zwei einzelne Gleichungen zerfallen. Somit folgen daraus die beiden Lösungen (Gl. 236) und (Gl. 237). Diese beiden Lösungen lassen sich anhand von (Gl. 238) zu einer Gesamtlösung der homogenen Differentialgleichung zusammenfassen.

$$w_1(r, \theta, t) = \psi_1(r) \cdot \vartheta_1(\theta) \cdot T(t) \quad (\text{Gl. 236})$$

$$w_2(r, \theta, t) = \psi_2(r) \cdot \vartheta_2(\theta) \cdot T(t) \quad (\text{Gl. 237})$$

$$w(r, \theta, t) = w_1(r, \theta, t) + w_2(r, \theta, t) \quad (\text{Gl. 238})$$

Setzt man nun die erhaltenen Lösungen für $w_1(r, \theta, t)$ und $w_2(r, \theta, t)$ samt der Beziehung für $\psi(r)$, $\vartheta(\theta)$ und $T(t)$ in (Gl. 238) ein und nimmt an, dass die Laufvariablen m_1 und m_2 gleich sind und somit stattdessen die natürliche Zahl m geschrieben werden kann, ergibt sich die in (Gl. 239) angeführte allgemeine Lösung der Plattenbewegungsgleichung.

$$\begin{aligned} w(r, \theta, t) = & \{ [A_2 \cdot \cos(m\theta) + B_2 \cdot \sin(m\theta)] [A_3 \cdot I_m(\beta r) + B_3 \cdot K_m(\beta r)] \\ & + [A_5 \cdot J_m(\beta r) + B_5 \cdot Y_m(\beta r)] [A_4 \cdot \cos(m\theta) + B_4 \cdot \sin(m\theta)] \} \\ & \cdot [A_1 \cdot \cos(\omega t) + B_1 \cdot \sin(\omega t)] \end{aligned} \quad (\text{Gl. 239})$$

Die in (Gl. 239) angeführte Gleichung lässt sich durch weitere Annahmen zur Plattenform (z.B. kreisrunde Platte ohne zentrische Bohrung) sowie den gewählten Randbedingungen (fest eingespannter Rand) weiter vereinfachen.

Bei einer kreisrunden Platte ohne zentrischer Bohrung muss die Lösung der Differentialgleichung $w(r, \theta, t)$ im Zentrum ($r = 0$) endlich bleiben. Aus den Bessel'schen Funktionen folgt aber, dass $K_{m1}(\beta, 0)$ und $Y_{m2}(\beta, 0)$ im Zentrum der Platte gegen unendlich streben. Damit die Durchbiegung der Platte im Zentrum endlich bleibt, ist es erforderlich, dass diese beiden Terme verschwinden (d.h. $B_3 = B_5 = 0$). Somit folgt daraus die Lösung für die kreisrunde Platte in (Gl. 240). Diese Gleichung lässt sich weiter zusammenfassen. Die dabei auftretenden Kombinationen $A_i \cdot A_j$ bzw. $B_i \cdot A_j$ werden durch die neuen Konstanten C_n ersetzt. Somit ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung $w(r, \theta, t)$ in Form von (Gl. 241).

$$w(r, \theta, t) = \{[A_2 \cdot \cos(m\theta) + B_2 \cdot \sin(m\theta)] \cdot A_3 \cdot I_m(\beta r) + A_5 \cdot J_m(\beta r) \cdot [A_4 \cdot \cos(m\theta) + B_4 \cdot \sin(m\theta)]\} \cdot [A_1 \cdot \cos(\omega t) + B_1 \cdot \sin(\omega t)] \quad (\text{Gl. 240})$$

$$w(r, \theta, t) = \{[C_1 I_m(\beta r) + C_2 J_m(\beta r)] \cos(m\theta) + [C_3 I_m(\beta r) + C_4 J_m(\beta r)] \sin(m\theta)\} \cdot [A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)] \quad (\text{Gl. 241})$$

Diese Gleichung ist allgemein gültig für die kreisrunde Platte ohne zentrischer Bohrung. Im Nachfolgenden wird die Platte am Außenrand ($r = R$) fest eingespannt. Daraus folgen die beiden in (Gl. 242) und (Gl. 243) dargestellten Randbedingungen.

$$w(r = R, \theta, t) = 0 \quad (\text{Gl. 242})$$

$$\left. \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (\text{Gl. 243})$$

Diese beiden Randbedingungen müssen zu jedem Zeitpunkt t erfüllt sein. Somit ist es ausreichend, nachfolgend nur mehr die Ortsfunktion $w(r, \theta)$ zu betrachten. In (Gl. 244) ist die Ortsfunktion, sowie in (Gl. 245) die notwendige Ableitung nach r , dargestellt.

$$w(r, \theta) = [C_1 I_m(\beta r) + C_2 J_m(\beta r)] \cos(m\theta) + [C_3 I_m(\beta r) + C_4 J_m(\beta r)] \sin(m\theta) \quad (\text{Gl. 244})$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \left[C_1 \frac{\partial I_m(\beta r)}{\partial r} + C_2 \frac{\partial J_m(\beta r)}{\partial r} \right] \cos(m\theta) + \left[C_3 \frac{\partial I_m(\beta r)}{\partial r} + C_4 \frac{\partial J_m(\beta r)}{\partial r} \right] \sin(m\theta) \quad (\text{Gl. 245})$$

Die Ortsfunktion aus (Gl. 244) muss am Rand genau der Randbedingung entsprechen. Dies wird genutzt, um die in der Gleichung enthaltenen Konstanten zu bestimmen.

$$w(R, \theta) = [C_1 I_m(\beta R) + C_2 J_m(\beta R)] \cos(m\theta) + [C_3 I_m(\beta R) + C_4 J_m(\beta R)] \sin(m\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 246})$$

Diese Gleichung (Gl. 246) muss für alle m sowie θ erfüllt sein. Somit ergeben sich für die Konstanten die in (Gl. 247) bis (Gl. 250) dargestellten Zusammenhänge.

$$C_1 \cdot I_m(\beta R) + C_2 \cdot J_m(\beta R) = 0 \quad (\text{Gl. 247})$$

$$C_1 = -\frac{J_m(\beta R)}{I_m(\beta R)} C_2 \quad (\text{Gl. 248})$$

$$C_3 \cdot I_m(\beta R) + C_4 \cdot J_m(\beta R) = 0 \quad (\text{Gl. 249})$$

$$C_3 = -\frac{J_m(\beta R)}{I_m(\beta R)} C_4 \quad (\text{Gl. 250})$$

Setzt man die Beziehungen (Gl. 248) und (Gl. 250) in die Ortsfunktion (Gl. 244) ein, erhält man die in (Gl. 251) dargestellte Gleichung. Dabei ist $w(r, \theta)$ die Eigenfunktion der kreisrunden Platte. Aus (Gl. 251) ist ersichtlich, dass sich die Eigenfunktion aus zwei Teilfunktionen, die durch $\cos(m\theta)$ und $\sin(m\theta)$ 90° zueinander phasenverschoben sind, zusammensetzt.

$$w(r, \theta) = C_2 \left[I_m(\beta r) - \frac{J_m(\beta R)}{I_m(\beta R)} J_m(\beta r) \right] \cos(m\theta) + C_4 \left[I_m(\beta r) - \frac{J_m(\beta R)}{I_m(\beta R)} J_m(\beta r) \right] \sin(m\theta) \quad (\text{Gl. 251})$$

Die erste Randbedingung (Gl. 242) führt nun zur Eigenfunktion der kreisrunden Platte. Nun ist es erforderlich mit der zweiten Randbedingung die Eigenwerte bzw. die Eigenkreisfrequenzen zu ermitteln. Am Außenrand muss die Gleichung (Gl. 245) die dazugehörige Randbedingung (Gl. 243) erfüllen. Somit ist gefordert, dass die in (Gl. 252) angeführte Beziehung erfüllt sein muss.

$$\frac{\partial w(R, \theta)}{\partial r} = \left[C_1 \frac{\partial I_m(\beta R)}{\partial r} + C_2 \frac{\partial J_m(\beta R)}{\partial r} \right] \cos(m\theta) + \left[C_3 \frac{\partial I_m(\beta R)}{\partial r} + C_4 \frac{\partial J_m(\beta R)}{\partial r} \right] \sin(m\theta) = 0 \quad (\text{Gl. 252})$$

Damit (Gl. 252) für alle m sowie θ gültig ist, ist es erforderlich, dass die Terme bei der Sinus- bzw. Cosinus-Funktion verschwinden. Somit ist es möglich die beiden Bedingungen (Gl. 253) und (Gl. 254) aufzustellen, die erfüllt sein müssen, damit auch (Gl. 252) erfüllt ist.

$$C_1 \cdot \frac{\partial I_m(\beta R)}{\partial r} + C_2 \cdot \frac{\partial J_m(\beta R)}{\partial r} = 0 \quad (\text{Gl. 253})$$

$$C_3 \cdot \frac{\partial I_m(\beta R)}{\partial r} + C_4 \cdot \frac{\partial J_m(\beta R)}{\partial r} = 0 \quad (\text{Gl. 254})$$

Sowohl (Gl. 245) und (Gl. 252) als auch die beiden Beziehungen (Gl. 253) und (Gl. 254) enthalten Ableitungen der Bessel'schen Funktionen. Für diese Ableitungen können die beiden in den (Gl. 255) und (Gl. 256) dargestellten Zusammenhänge verwendet werden.

$$\frac{\partial I_m(\beta r)}{\partial r} = \beta \left[I_{m-1}(\beta r) - \frac{m}{\beta r} I_m(\beta r) \right] \quad (\text{Gl. 255})$$

$$\frac{\partial J_m(\beta r)}{\partial r} = \beta \left[J_{m-1}(\beta r) - \frac{m}{\beta r} J_m(\beta r) \right] \quad (\text{Gl. 256})$$

Nachfolgend wird die Lösung für (Gl. 253) erklärt. Die Lösung für (Gl. 254) erfolgt analog. Die erhaltenen Lösungen der beiden Gleichungen sind ident. In (Gl. 257) sind die beiden Ableitungen der Bessel'schen Funktionen eingesetzt. Zudem wurde die Konstante C_1 mit dem Zusammenhang aus (Gl. 248) umschrieben.

$$-\frac{J_m(\beta R)}{I_m(\beta R)} C_2 \beta \left[I_{m-1}(\beta R) - \frac{m}{\beta R} I_m(\beta R) \right] + C_2 \beta \left[J_{m-1}(\beta R) - \frac{m}{\beta R} J_m(\beta R) \right] = 0 \quad (\text{Gl. 257})$$

Vereinfacht man (Gl. 257) weiter, ergibt sich das in (Gl. 258) dargestellte charakteristische Polynom. Die Lösung dieses Polynoms erfordert den Einsatz von graphischen oder numerischen meist softwarebasierten Lösungsmethoden, da eine analytische Lösung nur mehr sehr schwer möglich ist.

$$I_m(\beta R) J_{m-1}(\beta R) - I_{m-1}(\beta R) J_m(\beta R) = 0 \quad (\text{Gl. 258})$$

Für jedes m besitzt das charakteristische Polynom unendlich viele Nullstellen. Somit erhält man für jedes m unendlich viele Eigenwerte β_n mit $n = 0, 1, 2, \dots \infty$. Aus diesem Grund wird der Eigenwert auch als β_{mn} bezeichnet. Dabei bezeichnet m die Umfangsmodenordnung und n die radiale Modenordnung. Sind die Eigenwerte β_{mn} aus der Lösung des charakteristischen Polynoms bekannt, lassen sich die dazugehörigen Eigenkreisfrequenzen ω_{mn} anhand von (Gl. 259) bzw. (Gl. 260) berechnen.

$$\omega_{mn}^2 = \frac{B}{m''} \cdot \beta_{mn}^4 \quad (\text{Gl. 259})$$

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{B}{m''} \cdot \beta_{mn}^2} \quad (\text{Gl. 260})$$

Summiert man diese Eigenwerte über alle m und n auf und setzt diese zurück in die Eigenfunktionen ein, erhält man die in (Gl. 261) dargestellte Gleichung für die Ortsfunktion.

$$w(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_2 \cdot \left[I_m(\beta_{mn} r) - \frac{J_m(\beta_{mn} R)}{I_m(\beta_{mn} R)} \cdot J_m(\beta_{mn} r) \right] \cos(m\theta) \right. \\ \left. + C_4 \cdot \left[I_m(\beta_{mn} r) - \frac{J_m(\beta_{mn} R)}{I_m(\beta_{mn} R)} \cdot J_m(\beta r) \right] \sin(m\theta) \right\} \quad (\text{Gl. 261})$$

Diese Ortsfunktion kann somit in die Lösung der Bewegungsgleichung rückeingesetzt werden. Somit erhält man die homogene Lösung der Bewegungsgleichung für die kreisrunde Platte mit fester Einspannung am Außenrand in Form von (Gl. 262).

$$\begin{aligned}
 w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} & \left\{ C_2 \cdot \left[I_m(\beta_{mn}r) - \frac{J_m(\beta_{mn}R)}{I_m(\beta_{mn}R)} \cdot J_m(\beta_{mn}r) \right] \cos(m\theta) \right. \\
 & \left. + C_4 \cdot \left[I_m(\beta_{mn}r) - \frac{J_m(\beta_{mn}R)}{I_m(\beta_{mn}R)} \cdot J_m(\beta r) \right] \sin(m\theta) \right\} \\
 & \cdot [A_1 \cdot \cos(\omega_{mn}t) + B_1 \cdot \sin(\omega_{mn}t)]
 \end{aligned} \tag{Gl. 262}$$

Betrachtet man diese Funktion genauer, so lässt sich erkennen, dass radiale Nullstellen sowie Nullstellen in Umfangsrichtung auftreten. Die radialen Nulldurchgänge entsprechen den Nullstellen der Bessel'schen Funktionen (radiale Eigenfunktionen). Diese stellen sich als Knotenkreise bzw. Nodal Circle in den Eigenformen dar. Die Nullstellen in Umfangsrichtung folgen aus den Nullstellen von $\cos(m\theta)$ und $\sin(m\theta)$. Diese stellen sich in den Eigenformen als Knotendurchmesser bzw. Nodal Diameter dar.

Die Eigenfunktion in Umfangsrichtung lässt sich anhand der Cosinus- bzw. der Sinus-Funktion getrennt betrachten. Somit erhält man die beiden Teileigenfunktionen von (Gl. 263) und (Gl. 264). Dies ist möglich, da beide sowie ihre Summe Lösungen der Differentialgleichung sind. Die beiden Einzellösungen können getrennt ermittelt und zu einer Gesamtlösung zusammengesetzt werden. In Abbildung 120 sind die beiden getrennt betrachteten Eigenfunktionen sowie die dazugehörigen Eigenformen für $m=1$ dargestellt.

$$\psi_{mn1}(r, \theta) = w_{mnc}(r) \cdot \cos(m\theta) \tag{Gl. 263}$$

$$\psi_{mn2}(r, \theta) = w_{mns}(r) \cdot \sin(m\theta) \tag{Gl. 264}$$

Dieses Verhalten zeigt sich insbesondere bei der Auswertung der numerischen Modalanalyse. Dabei treten die Eigenformen immer paarweise aber mit einer Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2m}$ auf.

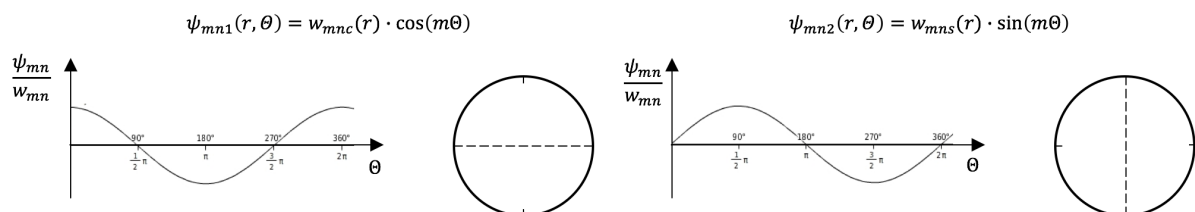


Abbildung 120: Eigenfunktionen [44]

Anhang B-3.2: Inhomogene Lösung der Differentialgleichung

Für die inhomogene Lösung der Differentialgleichung ist die Beschaffenheit des Störglieds der Gleichung (Gl. 265) von wesentlicher Bedeutung. Für die nachfolgend durchgeführte Betrachtung wird der Fall behandelt, dass die Platte durch mehrere über den Umfang verteilte Kräfte angeregt wird.

$$\frac{m''}{B} \cdot \ddot{w} + \Delta^2 w = \frac{p(x, y, t)}{B} \quad (\text{Gl. 265})$$

Im Speziellen wird betrachtet, dass ein Turbinenrotor aufgrund der Rotor-Stator-Interaktion eine erzwungene Schwingung ausführt. Dabei können die Erregerkräfte nur direkt an den Schaufeln wirken, zwischen den Schaufeln herrscht keine Kraftwirkung. Für diese Gegebenheit werden im Nachfolgenden Annahmen getroffen. Da bei der dazugehörigen Erklärung auf den speziellen Fall eines Turbinenrotors einer Turbomaschine eingegangen wird, ist dieser beispielhaft in Abbildung 121 dargestellt.

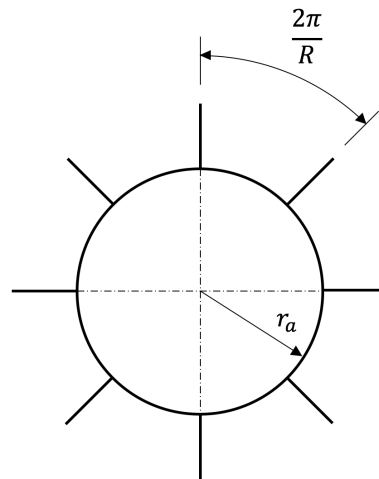


Abbildung 121: Skizze Rotor

Der Rotor besteht dabei aus dem Grundkörper, der sogenannten „Rotorscheibe“ und R über den Umfang verteilten Schaufeln. Im skizzierten Fall besitzt der Turbinenrotor acht gleichmäßig über den Umfang verteilte Schaufeln. Vor dem Rotor befindet sich ein Stator mit S Leitschaufeln, der die richtige Zuströmung zum Rotor gewährleistet. Da der Rotor sehr knapp hinter dem Stator mit der Kreisfrequenz Ω rotiert, kommt es aufgrund des Schaufelnachlaufs der Leitschaufeln zu einer Anregung des Rotors.

Aufgrund dieser Gegebenheit kommt es über den Umfang verteilt zu S gleichmäßig verteilten Erregerkräften. Die Positionen der Erregerkräfte lassen sich somit anhand von (Gl. 266) beschreiben.

$$Position = \frac{2\pi}{S} \quad (\text{Gl. 266})$$

Diese Erregerkräfte können dabei nur an der Stelle der Rotorscheibe wirken, an der auch eine Rotorscheufel sitzt. Zwischen zwei Schaufeln ist keine Kraftwirkung auf die Rotorscheibe möglich. Über den Umfang des Rotors sind, wie in Abbildung 121, R Rotorscheufeln gleichmäßig verteilt, deren Position sich analog, wie bei den Erregerkräften, anhand von (Gl. 267) beschreiben lässt.

$$Position = \frac{2\pi}{R} \quad (\text{Gl. 267})$$

In der realen Turbomaschine rotiert der Rotor und setzt die Energie des Strömungsmediums in mechanische Energie um. Für die nachfolgende Betrachtung wird jedoch angenommen, dass der Rotor und somit die Rotorscheibe stillsteht und die Erregerkräfte mit der Kreisfrequenz Ω rotieren bzw. sich mit der Geschwindigkeit $r\Omega$ in Umfangsrichtung weiterbewegen.

Da die Erregerkräfte nur an den diskreten Positionen auf die Schaufeln und somit auf die Rotorscheibe wirken können, ist es erforderlich, dies mathematisch zu beschreiben. Dazu eignet sich der Dirac-Stoß (δ -Funktion). Dadurch ist es möglich zu beschreiben, dass die Kraft F nur an der Stelle x_0 wirkt, an allen anderen Stellen x besteht keine Kraftwirkung. Somit lässt sich die Kraft wie in (Gl. 268) anschreiben. Aus der dazugehörigen Definition der δ -Funktion (Gl. 269) ist ersichtlich, dass an der erwähnten Position x_0 die Funktion unendlich und an allen anderen Stellen null ist.

$$F \cdot \delta(x_0 - x) \quad (\text{Gl. 268})$$

$$\delta(x_0 - x) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases} \quad (\text{Gl. 269})$$

In unserem Fall bewegt sich die Kraft mit Zeit entlang einer Kreisbahn auf der kreisrunden Platte weiter. Für diesen Fall kann der Dirac-Stoß auch als Funktion des Umfangswinkels θ definiert werden. Somit lässt sich die bewegte Kraft wie in (Gl. 270) anschreiben.

$$F = \hat{F} \cdot \delta(\theta - \Omega t) \quad (\text{Gl. 270})$$

Bei der in (Gl. 271) angeschriebenen Kraft handelt es sich um eine in Umfangsrichtung weiterwandernde Einzelkraft mit konstanter Amplitude. Bei der betrachteten Rotorscheibe soll aber der Kraftverlauf so gestaltet sein, dass an den Schaufelpositionen eine Kraftwirkung besteht und dazwischen verschwindet. Dazu beschreibt man die Schaufelpositionen mit dem Winkel θ . Dabei ist j eine Laufvariable die von 0 bis $R-1$ geht.

$$\theta = \theta_0 + j \cdot \frac{2\pi}{R} \quad (\text{Gl. 271})$$

$$j = 0, 1, \dots, (R - 1) \quad (\text{Gl. 272})$$

Nun ist es erforderlich die Amplitude der Kraft so zu modifizieren, dass sie wie in Abbildung 122 dargestellt an den Schaufelpositionen ein Maximum besitzt und in den Zwischenräumen annähernd verschwindet. Dies ist möglich in dem man den Amplitudenverlauf anhand einer Fourier-Reihe ausdrückt. Für die Amplitude folgt somit der in (Gl. 273) dargestellte Zusammenhang.

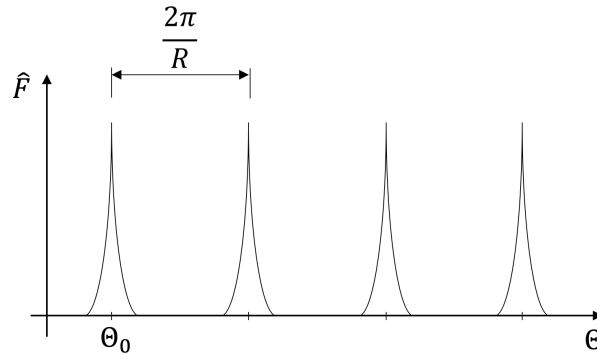


Abbildung 122: Amplitude der Kraftwirkung

$$\hat{F} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{F}_k \cdot \cos(k \cdot R \cdot \theta) \quad (\text{Gl. 273})$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Gl. 274})$$

Da bei der betrachteten Rotorscheibe aber nicht eine Einzelkraft, sondern bedingt durch die Statorbeschaufelung S über den Umfang verteilte Kräfte wirken, ist es erforderlich, diese Verteilung mit zu berücksichtigen. Diese Umfangsverteilung lässt sich zweckmäßig wieder mit einer Fourier-Reihe beschreiben. Somit folgt der in (Gl. 275) dargestellte Zusammenhang.

$$\hat{F}_k = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} \cdot \cos(i \cdot S \cdot \theta) \quad (\text{Gl. 275})$$

$$i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Gl. 276})$$

Nimmt man des Weiteren an, dass die Krafteinleitung durch die Schaufel nur am Außenrand der Rotorscheibe erfolgt muss in der Gleichung für die Erregerkraft die zusätzliche δ -Funktion $\delta(r - r_a)$ mitberücksichtigt werden. Wendet man nun die Fourier-Reihen-Entwicklungen sowie die beiden δ -Funktionen an, ergibt sich für die Erregerkraft F die in (Gl. 277) dargestellte Beziehung.

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} \cdot \cos(i \cdot S \cdot \theta) \cdot \cos(k \cdot R \cdot \theta) \cdot \delta(\theta - \Omega t) \cdot \delta(r - r_a) \quad (\text{Gl. 277})$$

Die erhaltene Gleichung für die Erregerkraft lässt sich durch die in (Gl. 278) angeführte Beziehung für die Multiplikation zweier Cosinus-Funktionen in die Form von (Gl. 279) weiter vereinfachen und man erhält stattdessen die Summe zweier Cosinus-Funktionen.

$$\cos(iS\theta) \cdot \cos(kR\theta) = \frac{1}{2} [\cos(iS\theta - kR\theta) + \cos(iS\theta + kR\theta)] \quad (\text{Gl. 278})$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} [\cos(iS\theta - kR\theta) + \cos(iS\theta + kR\theta)] \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) \quad (\text{Gl. 279})$$

Dieser in (Gl. 277) bzw. in umgeformter Form in (Gl. 279) dargestellte Zusammenhang lässt sich nun für die Störfunktion in die Bewegungsgleichung (Gl. 265) einsetzen. Somit erhält man unter der Verwendung der Definition eines Drucks (Gl. 280) die in (Gl. 281) dargestellte Bewegungsgleichung.

$$p = \frac{F}{A} \quad (\text{Gl. 280})$$

$$\frac{m''}{B} \ddot{w} + \Delta^2 w = \frac{1}{2BA} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} [\cos(iS\theta - kR\theta) + \cos(iS\theta + kR\theta)] \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) \quad (\text{Gl. 281})$$

Anhand eines Separationsansatzes und der modalen Entwicklung erhält man den in (Gl. 282) angeführten Ansatz zur Lösung der Platten-Bewegungsgleichung. Durch diesen ist es möglich, die partielle Differentialgleichung in einzeln lösbare Differentialgleichungen aufzuteilen, die im Anschluss wieder zu einer Gesamtlösung zusammengefügt werden können.

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn}(r, \theta) \cdot T(t) \quad (\text{Gl. 282})$$

$$\psi_{mn}(r, \theta) = C_1 \cdot w_{mn}(r) \cdot \cos(m\theta) + C_2 \cdot w_{mn}(r) \cdot \sin(m\theta) \quad (\text{Gl. 283})$$

In dem Ansatz stellt $\psi_{mn}(r, \theta)$ die aus der homogenen Lösung bekannte Eigenfunktion dar, die in allgemeiner Form in (Gl. 283) angeführt ist. Das zweite Glied $T(t)$ ist die zeitabhängige modale Koordinate. Die enthaltene Eigenfunktion $\psi_{mn}(r, \theta)$ lässt sich analog zur homogenen Lösung in die beiden Komponenten $\psi_{mn1}(r, \theta)$ (Gl. 284) und $\psi_{mn2}(r, \theta)$ (Gl. 285) aufspalten. Dadurch ist es möglich, die Differentialgleichungen für die beiden Teilfunktionen getrennt zu lösen. Es wird angenommen, dass beide Gleichungen amplitudennormiert sind, d.h. $C_1 = C_2 = 1$. In weiterer Folge lassen sich die beiden Eigenfunktionen getrennt in den Lösungsansatz (Gl. 282) einsetzen. Somit ergeben sich zwei unabhängige Gleichungen ((Gl. 286) und (Gl. 287)), die bei der nachfolgenden Lösung getrennt betrachtet werden müssen.

$$\psi_{mn1}(r, \theta) = C_1 \cdot w_{mn}(r) \cdot \cos(m\theta) \quad (\text{Gl. 284})$$

$$\psi_{mn2}(r, \theta) = C_2 \cdot w_{mn}(r) \cdot \sin(m\theta) \quad (\text{Gl. 285})$$

$$w_1(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn1}(r, \theta) \cdot T_{mn1}(t) \quad (\text{Gl. 286})$$

$$w_2(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn2}(r, \theta) \cdot T_{mn2}(t) \quad (\text{Gl. 287})$$

Für die nachfolgende Lösung wird nur jene mit dem Ansatz $w_1(r, \theta, t)$ (Gl. 286) behandelt. Das Vorgehen bei der Lösung mit $w_2(r, \theta, t)$ (Gl. 287) erfolgt analog. Dazu wird der Ansatz zweimal nach der Zeit abgeleitet und lässt sich in der Form von (Gl. 288) in die Bewegungsgleichung einsetzen. Die Multiplikation des Ansatzes mit dem Laplace-Operator lässt sich wie in (Gl. 289) angeführt einsetzen.

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn1} \cdot \frac{\partial^2 T_{mn1}}{\partial t^2} \quad (\text{Gl. 288})$$

$$\Delta^2 w_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 \psi_{mn1} \cdot T_{mn1} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{mn}^2 \cdot \frac{m''}{B} \cdot \psi_{mn1} \cdot T_{mn1} \quad (\text{Gl. 289})$$

Setzt man diese Zusammenhänge in die (Gl. 281) ein und fasst die Gleichung zusammen erhält man die in (Gl. 290) dargestellte Differentialgleichung, die im Anschluss mit dem in (Gl. 291) dargestellten Integral multipliziert wird um die Orthogonalitätsbeziehung der Eigenfunktionen auszunutzen.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn1} \cdot \left[\frac{\partial^2 T_{mn1}}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \cdot T_{mn1} \right] = \frac{1}{2m''A} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} [\cos(iS\theta - kR\theta) + \cos(iS\theta + kR\theta)] \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) \quad (\text{Gl. 290})$$

$$\int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \psi_{kl1} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \quad (\text{Gl. 291})$$

Somit folgt auf der linken Seite der Gleichung die Multiplikation $\psi_{mn1} \cdot \psi_{kl1}$ zweier Eigenfunktionen. Sind dabei die Indizes beider Eigenfunktionen gleich, so ergibt sich anhand der in (Gl. 292) angeführten Orthogonalitätsbeziehung die Konstante g_{mn1} , andernfalls ist das Produkt gleich 0. Durch diesen Zusammenhang folgt die in (Gl. 293) dargestellte Beziehung für die Differentialgleichung.

$$\int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \psi_{mn1} \cdot \psi_{kl1} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = \begin{cases} 0 & mn \neq kl \\ g_{mn1} & mn = kl \end{cases} \quad (\text{Gl. 292})$$

$$\frac{\partial^2 T_{mn1}}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \cdot T_{mn1} = \frac{1}{2m''A} \cdot \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{ki} \psi_{kl1} [\cos(iS\theta - kR\theta) + \cos(iS\theta + kR\theta)] \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) r dr d\theta \quad (\text{Gl. 293})$$

Bei der in (Gl. 293) dargestellten Gleichung handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Für diese ist es nun wieder erforderlich die homogene sowie die inhomogene Lösung zu ermitteln. Analog zum vorigen Abschnitt folgt für die homogene Differentialgleichung die in (Gl. 294) dargestellte Lösung.

$$T_{mn1} = A_1 \cdot \cos(\omega_{mn}t) + B_1 \cdot \sin(\omega_{mn}t) = T_{mn1h} \quad (\text{Gl. 294})$$

Das Vorgehen zum Erhalt der inhomogenen Lösung unterscheidet sich nun wesentlich zu den vorangegangenen Abschnitten. Bei linearen Differentialgleichungen ist es möglich, jedes Glied einer Summe auf der rechten Seite als einzelne Anregung zu betrachten und dementsprechend die Differentialgleichung zu lösen. Für die Gesamtlösung können die Lösungen der einzelnen Glieder wieder aufsummiert werden. Im Nachfolgenden wird (Gl. 293) für das $i \cdot k$ -te Glied betrachtet und gelöst. Dies führt zu der in (Gl. 295) dargestellten Differentialgleichung. Die Störfunktion der Differentialgleichung kann dabei in die beiden Glieder *I* (Gl. 296) und *II* (Gl. 297) aufgeteilt werden.

$$\frac{\partial^2 T_{mn1}}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \cdot T_{mn1} = \frac{1}{2m''A} \cdot \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \hat{F}_{ki} \psi_{kl1} [\cos(iS\theta - kR\theta) + \cos(iS\theta + kR\theta)] \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) r dr d\theta \quad (\text{Gl. 295})$$

$$I = \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \hat{F}_{ki} \psi_{kl1} \cos(iS\theta - kR\theta) \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) r dr d\theta \quad (\text{Gl. 296})$$

$$II = \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \hat{F}_{ki} \psi_{kl1} \cos(iS\theta + kR\theta) \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) r dr d\theta \quad (\text{Gl. 297})$$

Die Differentialgleichung kann somit in der Form von (Gl. 298) geschrieben werden. Dadurch ist es möglich, die Gleichung getrennt für *I* und *II* zu lösen und im Anschluss wieder zu einer Gesamtlösung zusammzusetzen.

$$\frac{\partial^2 T_{mn1}}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \cdot T_{mn1} = \frac{1}{2m''A} \cdot (I + II) \quad (\text{Gl. 298})$$

Im Nachfolgenden wird die Lösung für I durchgeführt. Dazu ist zuerst die Lösung des in (Gl. 296) dargestellten Integrals für $mn = kl$ zu ermitteln, um im Anschluss die Differentialgleichung lösen zu können. Die Ergebnisse für II werden mit angeführt, da diese für die spätere Gesamtlösung von Bedeutung sind. Das Vorgehen zur Lösung ist analog.

Im ersten Schritt wird die Eigenfunktion ψ_{kl1} mit der aus der homogenen Lösung stammenden Beziehung (Gl. 299) substituiert. Somit erhält man im Integral den Term $\cos(m\theta) \cdot \cos(iS\theta - kR\theta)$. Dieser lässt sich analog zu (Gl. 278) umschreiben und so folgt das in (Gl. 300) dargestellte Integral. Da w_{mn} nur eine Funktion des Radius r ist, lässt sich das Integral weiter umstellen und wie in (Gl. 301) anschreiben.

$$\psi_{kl1} = \psi_{mn1} = w_{mn}(r) \cdot \cos(m\theta) \quad (\text{Gl. 299})$$

$$I = \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{F}_{ki}}{2} w_{mn}(r) [\cos((m - iS + kR)\theta) + \cos(m + iS - kR)\theta)] \cdot \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - r_a) r dr d\theta \quad (\text{Gl. 300})$$

$$I = \frac{\hat{F}_{ki}}{2} \int_0^{r_a} w_{mn}(r) \delta(r - r_a) r dr \int_0^{2\pi} [\cos((m - iS + kR)\theta) + \cos(m + iS - kR)\theta)] \delta(\theta - \Omega t) d\theta \quad (\text{Gl. 301})$$

$$\int_0^{x_0} F(x) \delta(x - x_0) dx = F(x_0) \quad (\text{Gl. 302})$$

Unter der Anwendung der in (Gl. 302) dargestellten Rechenregel für den Dirac-Impuls folgt somit die in (Gl. 303) dargestellte Lösung I . In (Gl. 304) ist die analog erhaltene Lösung für II dargestellt.

$$I = \frac{\hat{F}_{ki}}{2} w_{mn}(r_a) r_a [\cos((m - iS + kR)\Omega t) + \cos(m + iS - kR)\Omega t)] \quad (\text{Gl. 303})$$

$$II = \frac{\hat{F}_{ki}}{2} w_{mn}(r_a) r_a [\cos((m - iS - kR)\Omega t) + \cos(m + iS + kR)\Omega t)] \quad (\text{Gl. 304})$$

Da die Lösungen für die beiden Integrale I und II nun bekannt sind, kann mit der partikulären Lösung der Differentialgleichung fortgesetzt werden. Dazu setzt man die Lösung des Integrals (Gl. 303) in die zu lösende Differentialgleichung (Gl. 298) ein. Anhand der so erhaltenen Gleichung (Gl. 305) ist es möglich, die Teillösung für I zu ermitteln. Analog kann dies für II durchgeführt werden.

$$\frac{\partial^2 T_{mn1}}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \cdot T_{mn1} = \frac{\hat{F}_{ki}}{4m''A} w_{mn}(r_a) r_a [\cos((m - iS + kR)\Omega t) + \cos(m + iS - kR)\Omega t)] \quad (\text{Gl. 305})$$

Auch für diese Gleichung ist es wieder möglich die Störfunktion in die zwei Glieder der Summe aufzuteilen und getrennt zu betrachten. Im Nachfolgenden wird die Lösung nur für das erste Glied explizit durchgeführt, jene für das zweite Glied erfolgt analog. Betrachtet man nur das erste Glied, so ergibt sich die zu lösende Differentialgleichung in Form von (Gl. 306).

$$\frac{\partial^2 T_{mn1}}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \cdot T_{mn1} = \frac{\hat{F}_{ki}}{4m''A} w_{mn}(r_a) r_a \cos((m - iS + kR)\Omega t) \quad (\text{Gl. 306})$$

$$T_{mn1p1} = K_1 \cdot \cos((m - iS + kR)\Omega t) \quad (\text{Gl. 307})$$

Für die in (Gl. 306) dargestellte Differentialgleichung ist es möglich mittels eines einfachen Störgliedansatzes die Lösung zu erhalten. Der gewählte Ansatz ist dabei in (Gl. 307) dargestellt. Setzt man diesen sowie seine zweite Ableitung in (Gl. 306) ein, kann die Konstante K_1 bestimmt werden. Diese Lösung wird in den Ansatz (Gl. 307) rückeringesetzt und man erhält die Lösung (Gl. 308) für das erste Glied. Dieses Vorgehen ist analog für das zweite Glied der Differentialgleichung (Gl. 305) durchzuführen und man kommt somit zu der in (Gl. 309) dargestellten Lösung.

$$T_{mn1p1} = \frac{r_a}{4m''A} w_{mn}(r_a) \frac{\hat{F}_{ki} \cos((m - iS + kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m - iS + kR)\Omega]^2} \quad (\text{Gl. 308})$$

$$T_{mn1p2} = \frac{r_a}{4m''A} w_{mn}(r_a) \frac{\hat{F}_{ki} \cos((m + iS - kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m + iS - kR)\Omega]^2} \quad (\text{Gl. 309})$$

Diese beiden Lösungen lassen sich nun zu der Gesamtlösung für I zusammenaddieren werden, somit erhält man die in (Gl. 310) angeschriebene Funktion. Die Lösung für das zweite Glied II aus (Gl. 298) erfolgt analog. Dabei ergibt sich die Lösung in Form von (Gl. 311).

$$T_{mn1I} = \frac{r_a w_{mn}(r_a)}{4m''A} \left[\frac{\hat{F}_{ki} \cos((m - iS + kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m - iS + kR)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((m + iS - kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m + iS - kR)\Omega]^2} \right] \quad (\text{Gl. 310})$$

$$T_{mn1II} = \frac{r_a w_{mn}(r_a)}{4m''A} \left[\frac{\hat{F}_{ki} \cos((m - iS - kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m - iS - kR)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((m + iS + kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m + iS + kR)\Omega]^2} \right] \quad (\text{Gl. 311})$$

Diese Lösungen können nun aufsummiert und im Anschluss in den ursprünglichen Ansatz rückeringesetzt werden. Dabei setzt sich T_{mn1} wie in (Gl. 312) aus der homogenen Lösung sowie den beiden partikulären Teillösungen zusammen.

$$T_{mn1} = T_{mn1h} + T_{mn1l} + T_{mn1ll} \quad (\text{Gl. 312})$$

Die Lösung für T_{mn1} wird nun in den Ansatz (Gl. 286) zur Lösung der Differentialgleichungen eingesetzt und über alle m und n aufsummiert. Somit ergibt sich für die Bewegungsgleichung die erste Teillösung $w_1(r, \theta, t)$ (Gl. 313).

$$w_1(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn}(r) \cos(m\theta) [A_1 \cos(\omega_{mn}t) + B_1 \sin(\omega_{mn}t)] \frac{r_a}{4m''A} w_{mn}(r_a) \cdot \left\{ \left[\frac{\hat{F}_{ki} \cos((m - iS - kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m - iS - kR)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((m + iS + kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m + iS + kR)\Omega]^2} \right] + \left[\frac{\hat{F}_{ki} \cos((m - iS + kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m - iS + kR)\Omega]^2} + \frac{\hat{F}_{ki} \cos((m + iS - kR)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - [(m + iS - kR)\Omega]^2} \right] \right\} \quad (\text{Gl. 313})$$

Nach dem analogen Vorgehen muss jetzt noch $w_2(r, \theta, t)$ bestimmt werden. Somit hätte man beide Teillösungen der Differentialgleichung bestimmt und kann diese anhand von (Gl. 314) zu der Gesamtlösung zusammenfassen.

$$w(r, \theta, t) = w_1(r, \theta, t) + w_2(r, \theta, t) \quad (\text{Gl. 314})$$

Jedoch ist es bereits aus der in (Gl. 313) angeführten Gleichung möglich, die Resonanzbedingungen für die Rotorscheibe zu ermitteln. Dabei wird angenommen, dass die Verschiebung im Resonanzfall gegen unendlich streben muss. Dies kann aber nur erfüllt sein, wenn einer der Nenner in der Gleichung null wird. Somit erhält man die vier in (Gl. 315) bis (Gl. 318) dargestellten Resonanzbedingungen, wovon eine erfüllt sein muss, damit Resonanz vorliegt.

$$\omega_{mn}^2 - [(m - iS - kR)\Omega]^2 = 0 \quad (\text{Gl. 315})$$

$$\omega_{mn}^2 - [(m + iS + kR)\Omega]^2 = 0 \quad (\text{Gl. 316})$$

$$\omega_{mn}^2 - [(m - iS + kR)\Omega]^2 = 0 \quad (\text{Gl. 317})$$

$$\omega_{mn}^2 - [(m + iS - kR)\Omega]^2 = 0 \quad (\text{Gl. 318})$$

Anhang C: Numerische Charakterisierung 72BI-Modell

Anhang C-1: Grundlegendes zum Interferenz-Diagramm

In diesem Abschnitt werden die Zick-Zack-Linien (Schwingungsanregung) für die in der Arbeit verwendeten Interferenz-Diagramme erklärt. Dazu wird immer die Anregung durch den Stator (Nachlauf) und das TEC (Potentialeffekt) näher betrachtet. Da durch den Stator bzw. das TEC 96 bzw. 15 Erregerkräfte auf den Rotor wirken, kommt es zu einer Verschiebung der Anregelinien entlang der Ordinate.

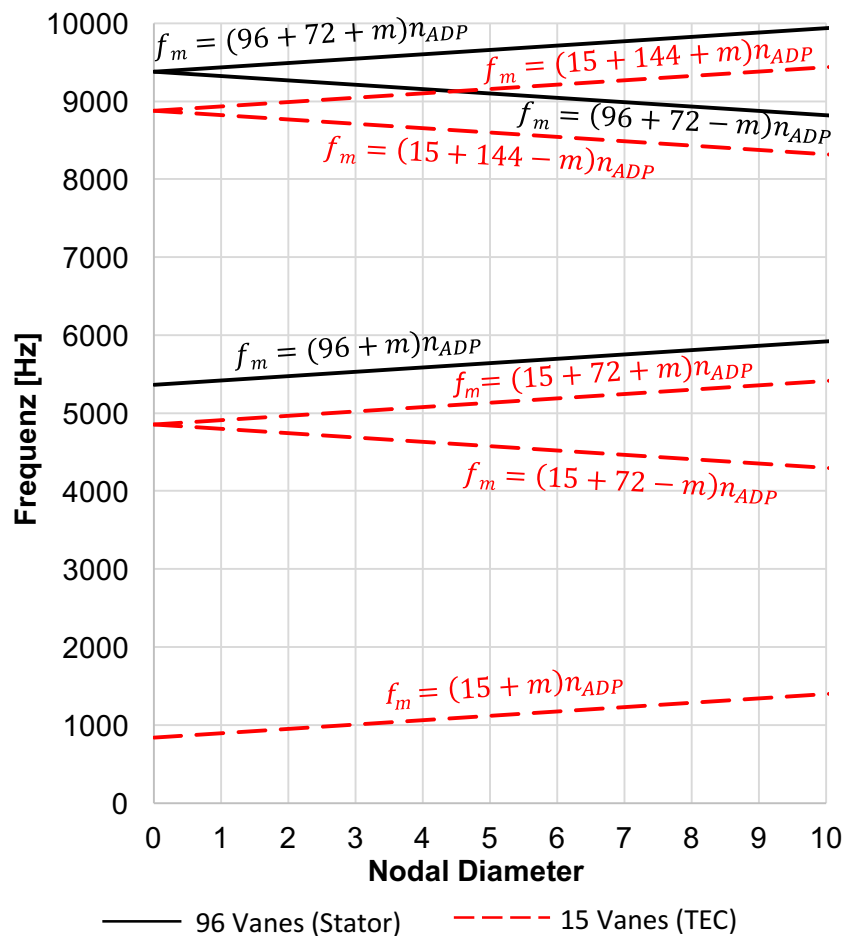


Abbildung 123: Engine Orders im Interferenz-Diagramm

Betriebspunkt ADP

$$n_{ADP} = 3400 \text{ min}^{-1} = 56,67 \text{ s}^{-1}$$

Im Interferenz-Diagramm (Abbildung 123) sind die Anregungen durch den Stator (96 Vanes) bzw. das StandardTEC (15 Vanes) eingezeichnet. Dadurch kann in späterer Folge analysiert werden, ob der Stator oder das TEC zu Resonanzeffekten führt. Bei den rot-strichlierten Linien handelt es sich um die Anregung des TEC's (nachfolgend auch schwarz strichliert dargestellt). Die schwarzen Linien sind die Anregung des Stators.

Anhang C-2: Interferenz-Diagramme

In diesem Abschnitt sind alle weiteren Interferenz-Diagramme des HSL-Rotors angeführt. Dabei wurden die Betriebspunkte Stillstand, Approach (4140 min^{-1}), Cutback (5900 min^{-1}) und Sideline (6300 min^{-1}) angeführt. Zudem wurde zusätzlich vom Betriebspunkt ADP, der in der Arbeit näher behandelt wurde, das Interferenz-Diagramm mit umlauffrequenter Anregung beigefügt. Die Betriebspunktdefinitionen finden sich in Schönleitner [30] [31].

Anhang C-2.1: Betriebspunkt ADP - umlauffrequente Anregung

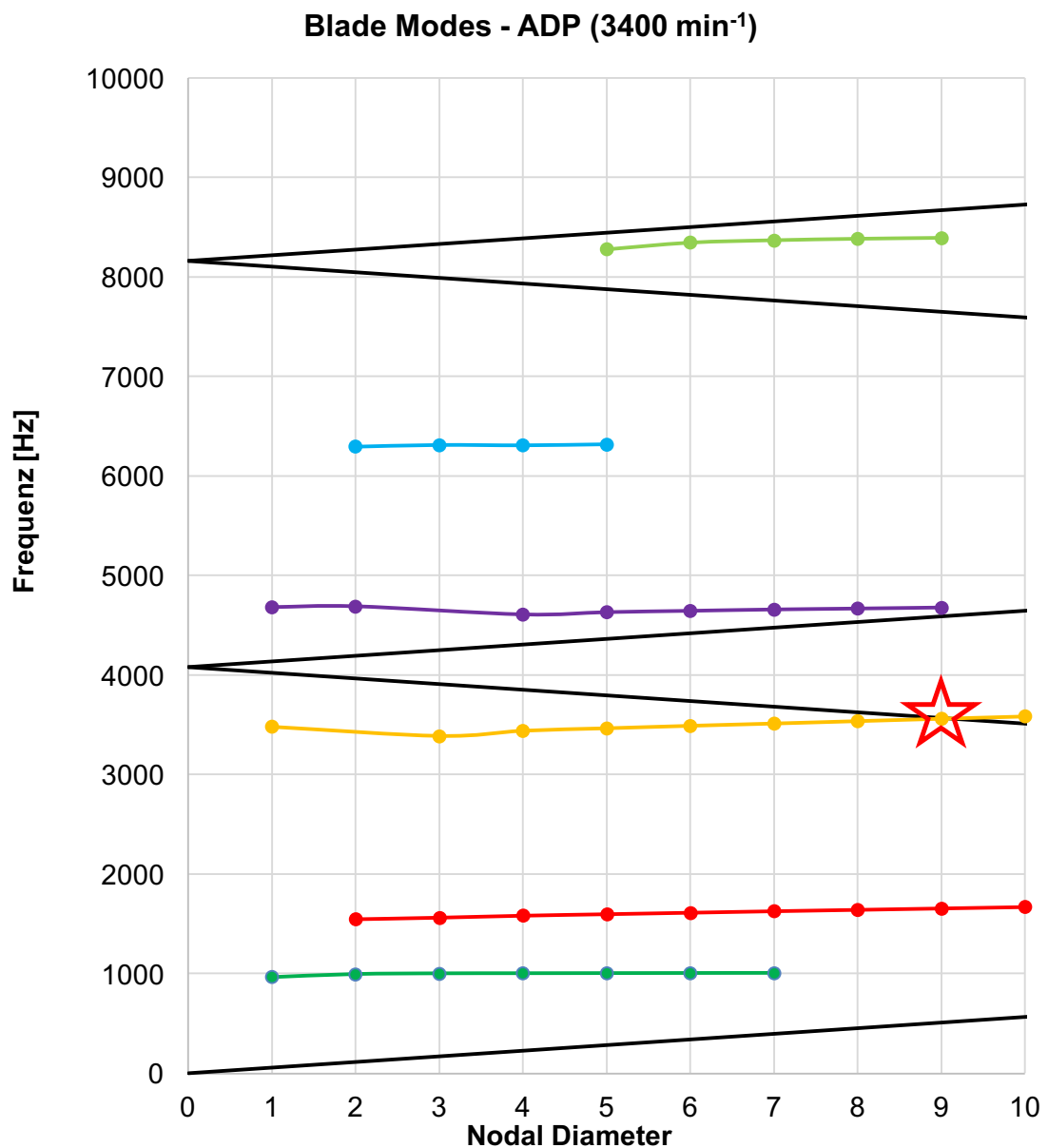


Abbildung 124: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (ADP)

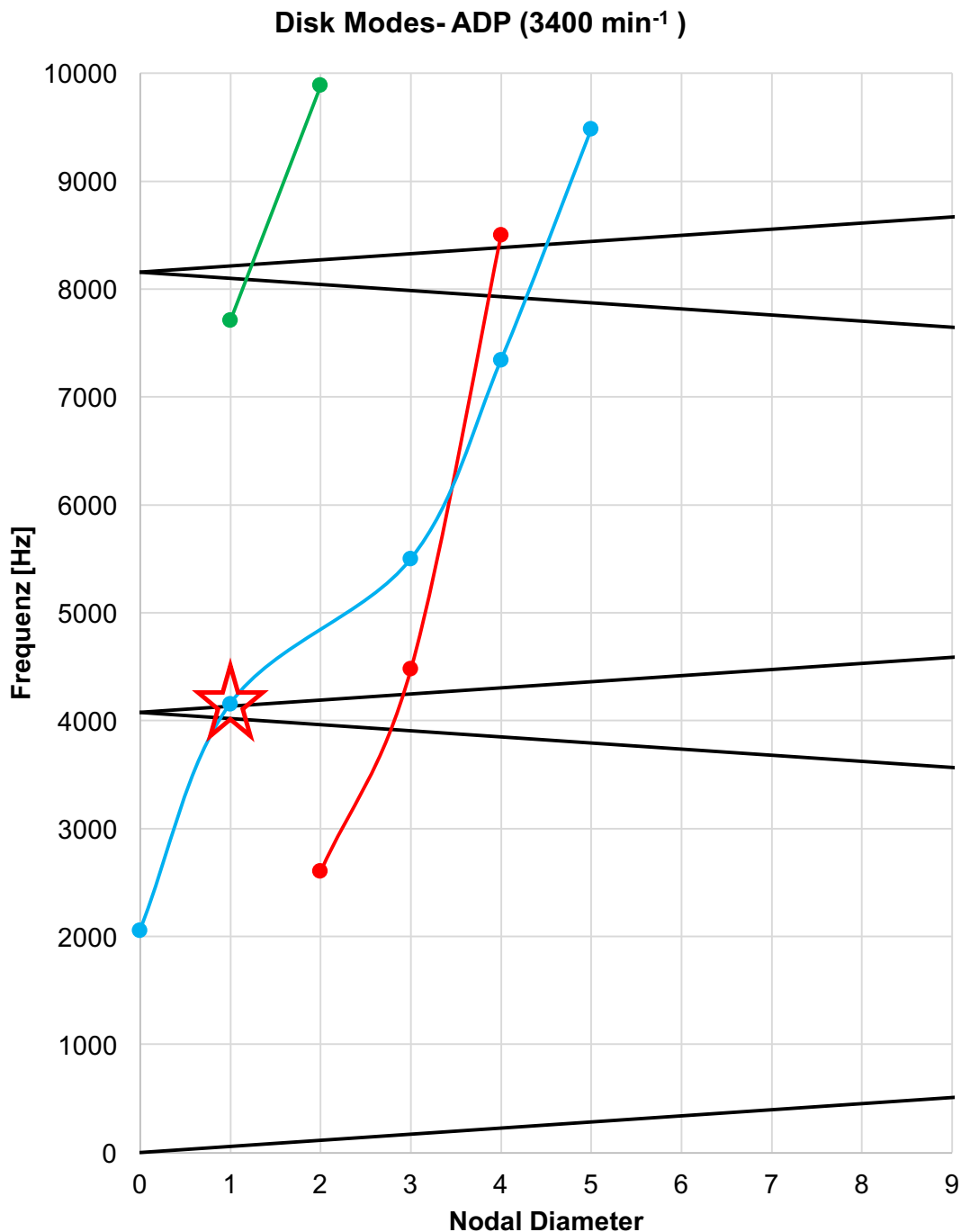


Abbildung 125: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (ADP)

		Eigenfrequenz	Anregfrequenz
schaufeldom. Modefamilie 3	m=9	$f_{9-} = 3564 \text{ Hz}$	$f_m = 3570 \text{ Hz}$
scheibendom. Modefamilie 2	m=1	$f_{10} = 4158 \text{ Hz}$	$f_m = 4136 \text{ Hz}$

Bei der umlauffrequenten Anregung treten zu den drei im Hauptteil der Arbeit ermittelten Resonanzen zusätzlich zwei weitere auf. Dabei wird je ein scheibendominanter Mode sowie ein schaufeldominanter Mode angeregt. Die Abweichung zwischen der Anregung und den Eigenfrequenzen ist sehr gering, d.h. die Resonanzbedingungen müssen erfüllt sein.

Anhang C-2.2: Stillstand – EO96 und EO15

Die Interferenz-Diagramme bei Stillstand enthalten keine Anregelinien, da diese drehzahlabhängig sind und somit bei einer Rotationsgeschwindigkeit von 0 mit der Abszisse zusammenfallen. Bei diesem Betriebspunkt wurden alle ermittelten Modefamilien bis 20.000 Hz aufgetragen.

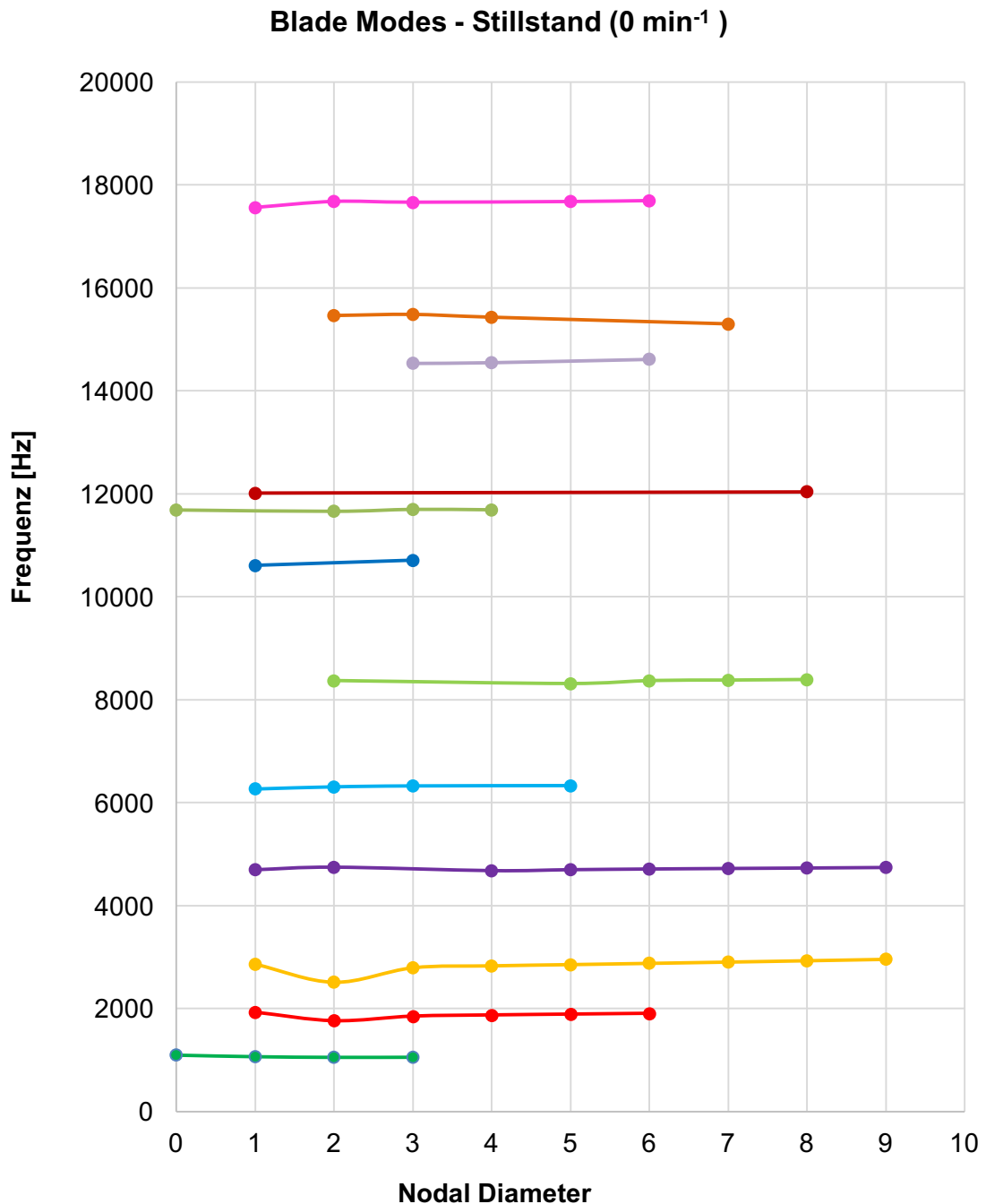


Abbildung 126: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Stillstand)

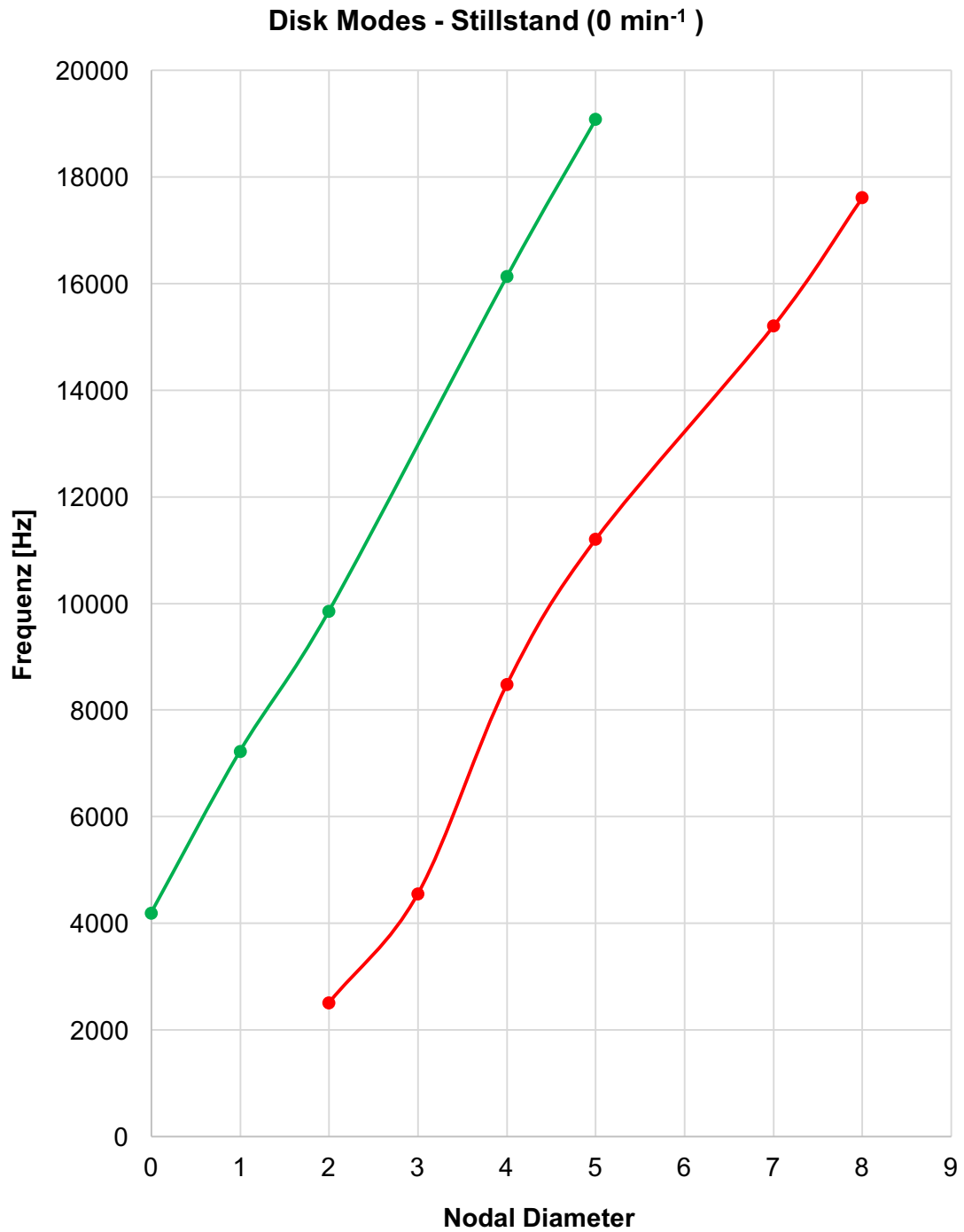


Abbildung 127: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Stillstand)

Anhand der oben angeführten Gegebenheit können auch keine Resonanzen im Interferenz-Diagramm ermittelt werden. Dennoch wird auch dieses Interferenz-Diagramm benötigt, um ein vollständiges 3D-SAFE-Diagramm zu erstellen.

Anhang C-2.3: Betriebspunkt Approach (4140 min⁻¹) - EO96 und EO15

Der Betriebspunkt Approach ist der nächste in der Reihe der zu untersuchenden Drehzahlen. Die nachfolgenden Interferenz-Diagramme dienen der Untersuchung der auftretenden Resonanzen in diesem Punkt. Der Betriebspunkt repräsentiert die Landung.

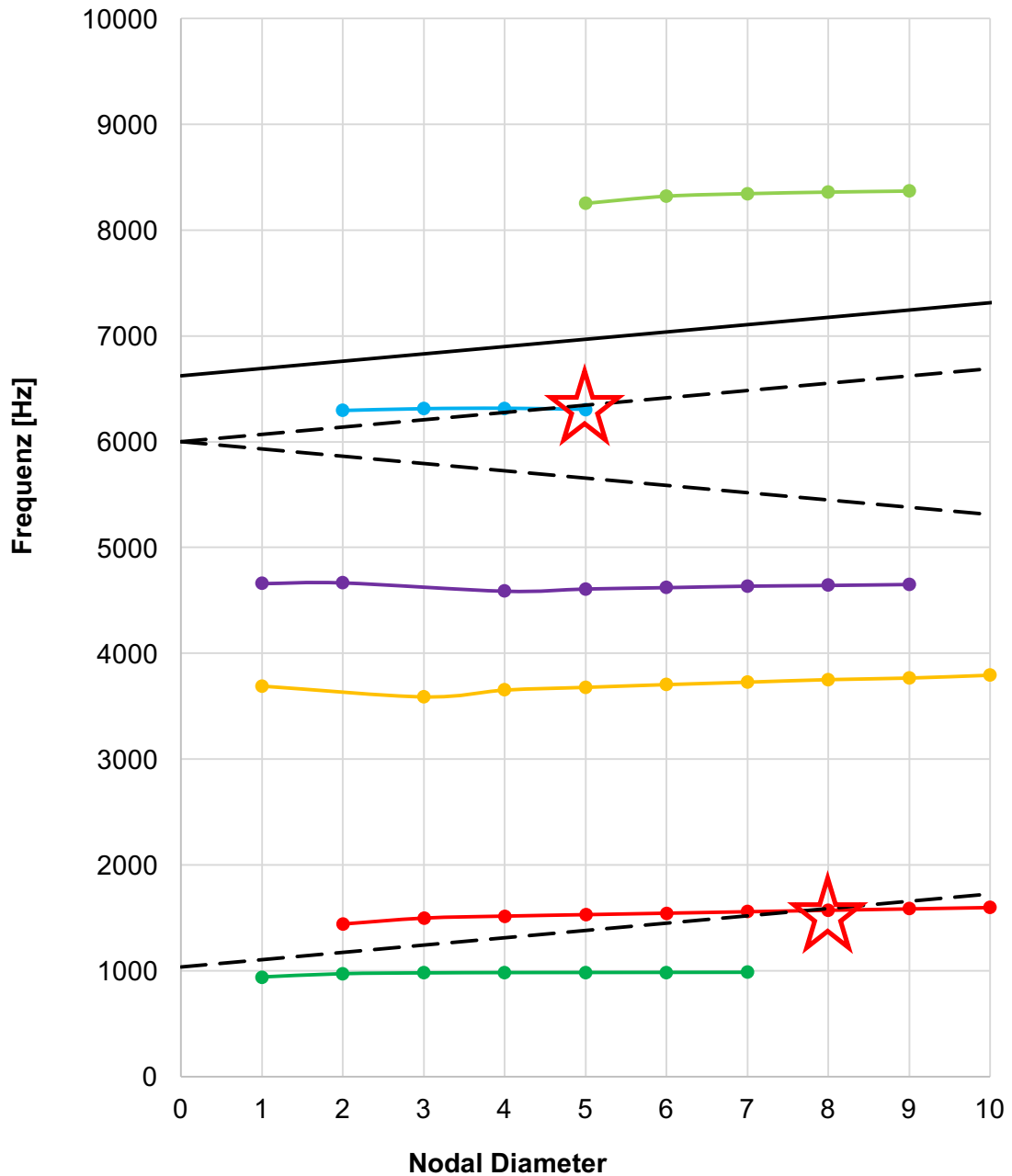
Blade Modes - Approach (4140 min⁻¹)

Abbildung 128: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Approach)

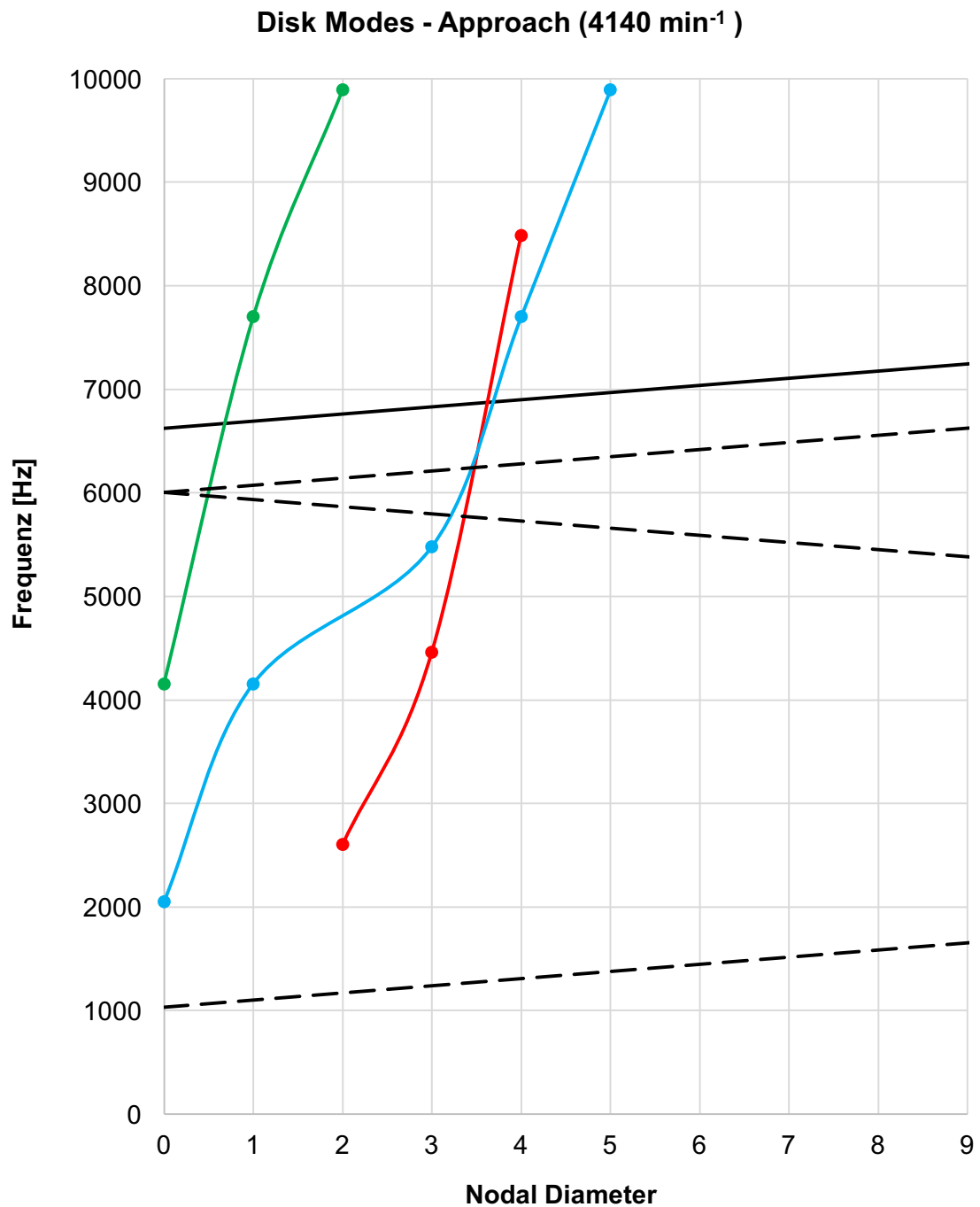


Abbildung 129: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Approach)

		Eigenfrequenz	Anregfrequenz
schaufeldom. Modefamilie 2	m=8	$f_{8-} = 1574 \text{ Hz}$	$f_m = 1587 \text{ Hz}$
schaufeldom. Modefamilie 5	m=5	$f_{5-} = 6306 \text{ Hz}$	$f_m = 6348 \text{ Hz}$

Die Auswertung der Interferenz-Diagramme hat zwei Resonanzen ergeben. Beide Moden werden durch das StandardTEC angeregt. Beide Moden rotieren dabei in Drehrichtung des Rotors, jener der schaufeldominanten Modefamilie 2 mit der Rotordrehfrequenz und jener der schaufeldominanten Modefamilie 5 mit der doppelten Drehfrequenz.

Anhang C-2.4: Betriebspunkt Cutback (5900 min^{-1}) - EO96 und EO15

Der Betriebspunkt Cutback repräsentiert den Flugzustand nach dem Abheben zum Zeitpunkt, wenn das erste Mal der Schub reduziert wird. Aus diesem Grund ist auch die EO96 nur mehr in einem kleinen Teilbereich sichtbar.

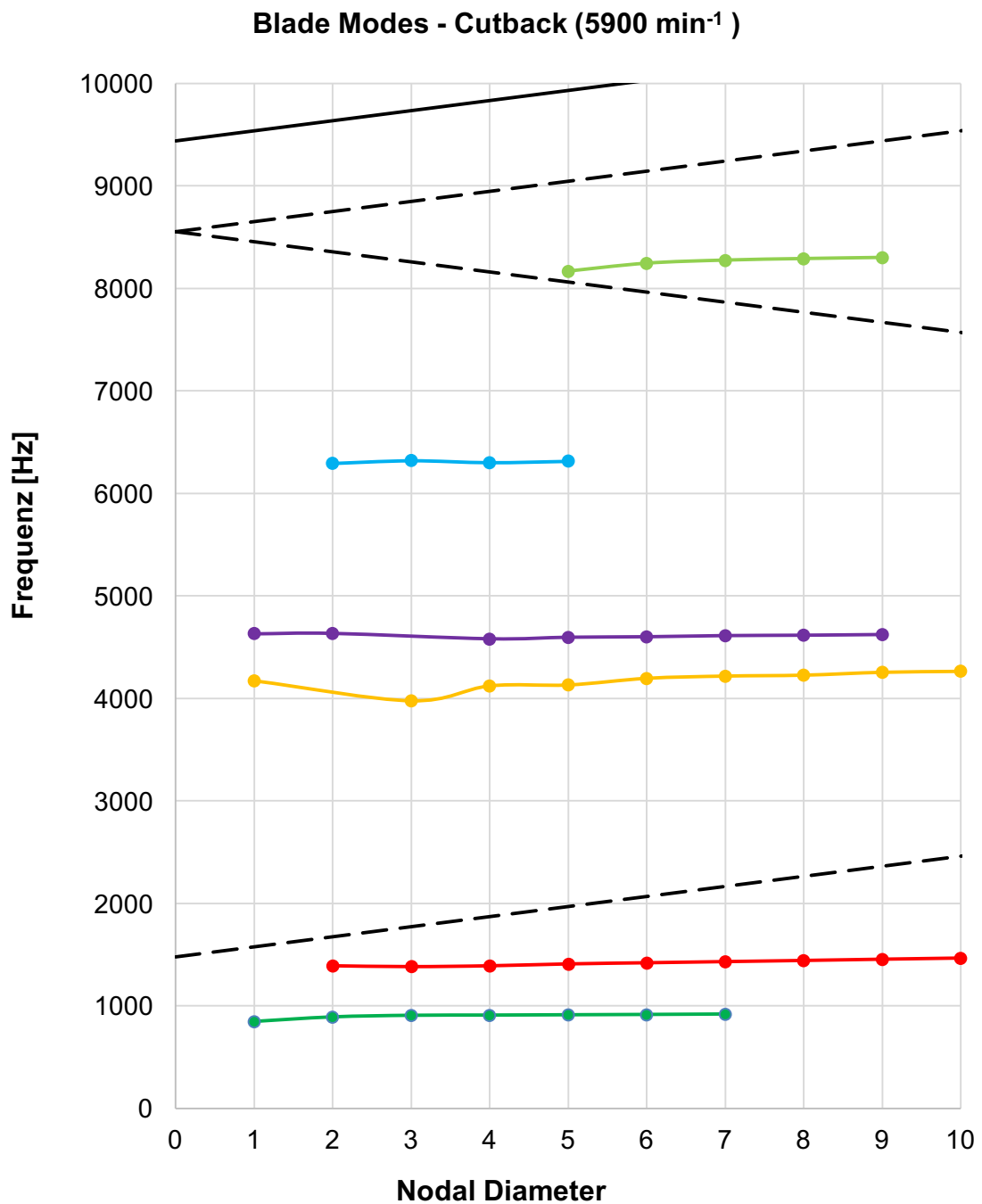


Abbildung 130: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Cutback)

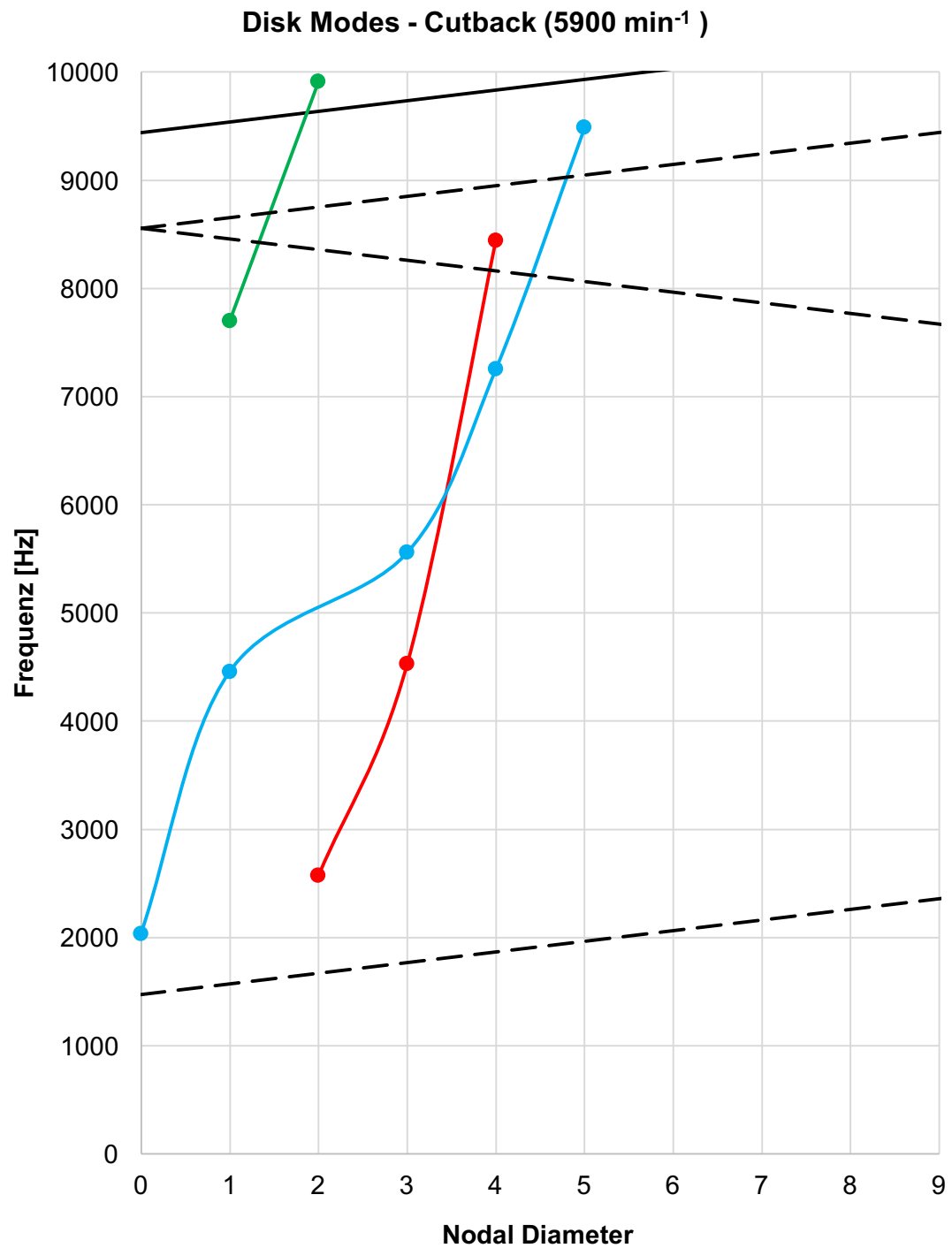


Abbildung 131: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Cutback)

Aus den beiden Interferenz-Diagrammen des Betriebspunkts Cutback konnten keine Resonanzen ermittelt werden. Andere Modifikationen hinsichtlich der verbauten bzw. untersuchten TEC-Beschauflung würden zu einem anderen Ergebnis führen.

Anhang C-2.5: Betriebspunkt Sideline (6300 min⁻¹) - EO96 und EO15

Der Betriebspunkt Sideline dient der Untersuchung der Akustik auf der Landebahn. Aus diesem Grund ist die EO96 (Stator) nicht mehr im Drehzahlbereich von 0-10.000 Hz sichtbar.

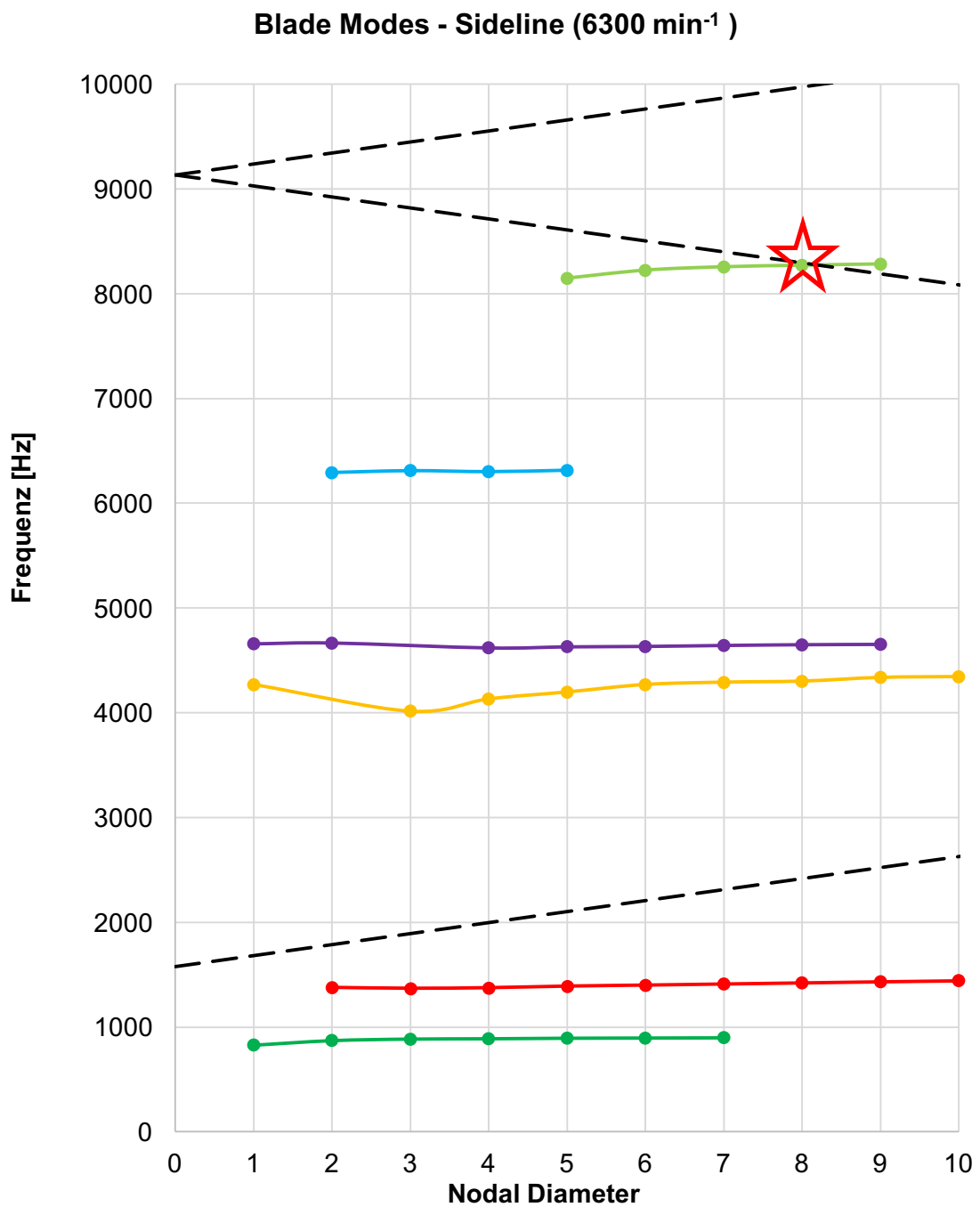


Abbildung 132: Interferenz-Diagramm 72Bl-Modell (Sideline)

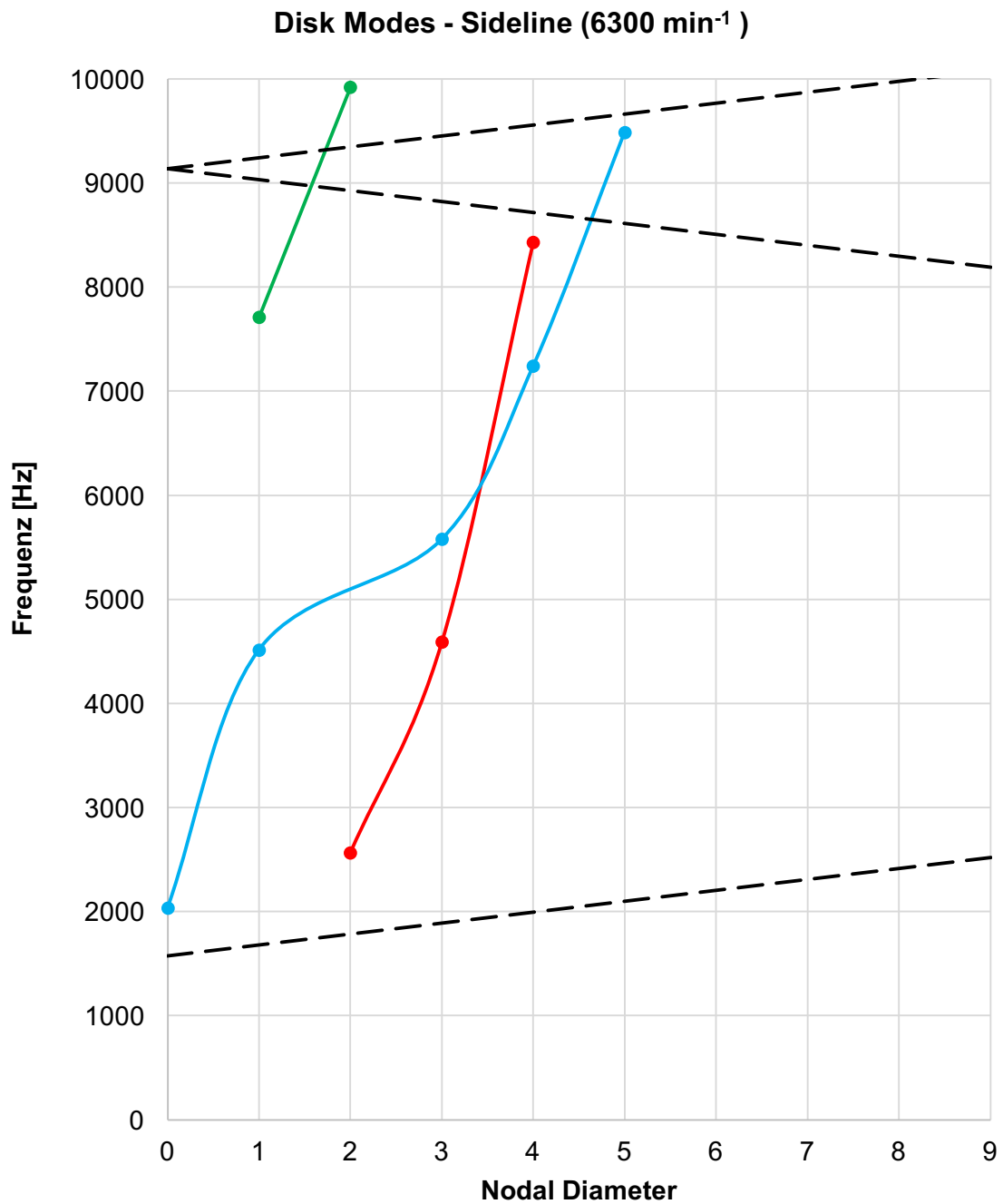


Abbildung 133: Interferenz-Diagramm 72BI-Modell (Sideline)

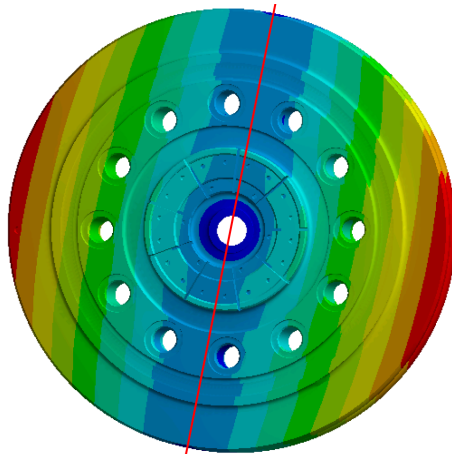
		Eigenfrequenz	Anregfrequenz
schaufeldom. Modefamilie 6	m= 8	$f_{8-} = 8270 \text{ Hz}$	$f_m = 8295 \text{ Hz}$

Bei diesem Betriebspunkt wurde durch die Interferenz-Diagramme eine auftretende Resonanz ermittelt. Dabei wird die schaufeldominante Modefamilie durch das StandardTEC angeregt. Es handelt sich um einen in Rotordrehrichtung mit doppelter Rotordrehzahl rotierenden Mode.

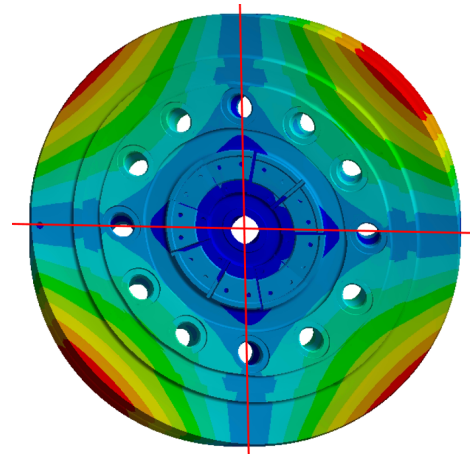
Anhang C-3: Scheibenmoden

Anhang C-3.1: Modefamilie 1

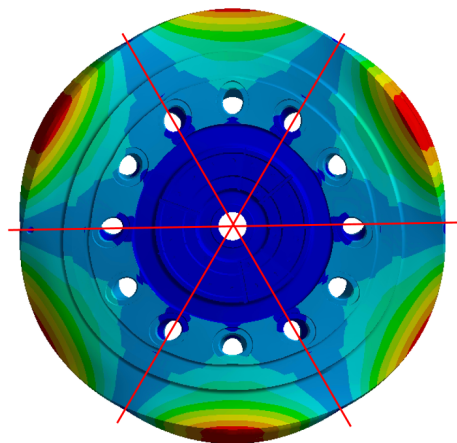
Diese Scheibeneigenformen haben den Nodal Circle $n=0$ und wurden nach aufsteigendem Nodal Diameter m sortiert. Die angegebene Eigenfrequenz ist jene bei Stillstand.



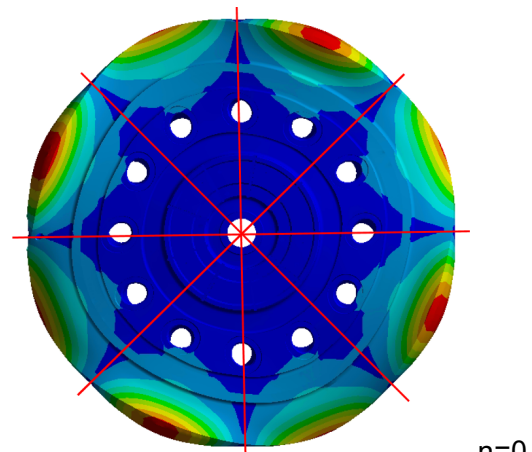
$n=0$ $m=1$ 1441 Hz



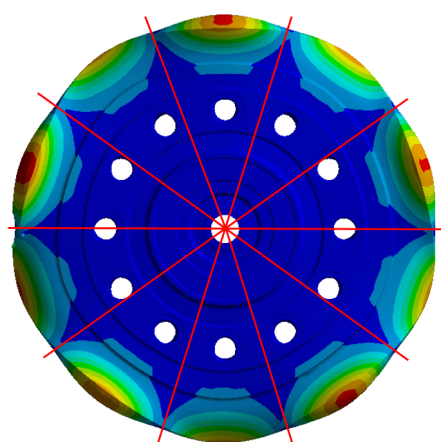
$n=0$ $m=2$ 2841 Hz



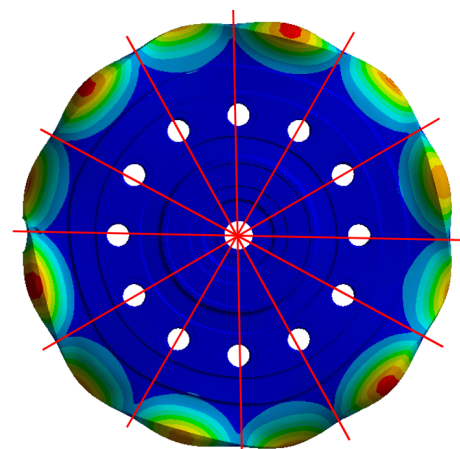
$n=0$ $m=3$ 4946 Hz



$n=0$ $m=4$ 6664 Hz



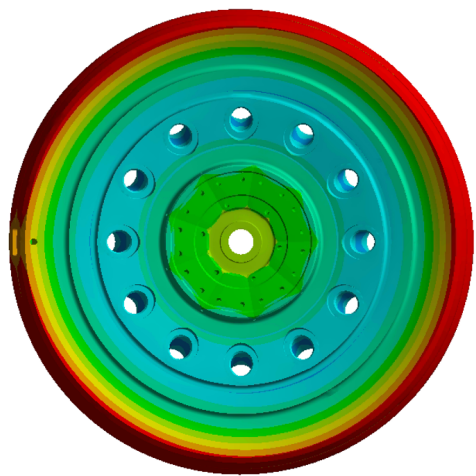
$n=0$ $m=5$ 8034 Hz



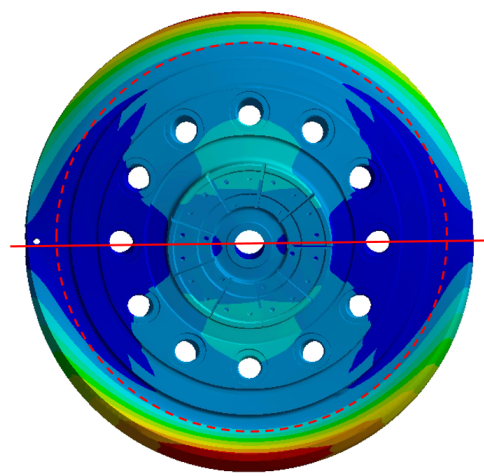
$n=0$ $m=6$ 9375 Hz

Anhang C-3.2: Modefamilie 2

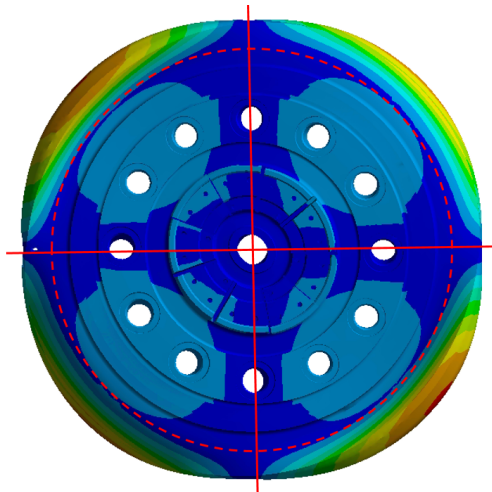
Diese Modefamilie hat einen Nodal Circle, d.h. einen sogenannten Knoten Kreis. Die angegebenen Eigenfrequenzen sind auch hier wieder jene bei Stillstand.



$n=1$ $m=0$ 4150 Hz



$n=1$ $m=1$ 7369 Hz

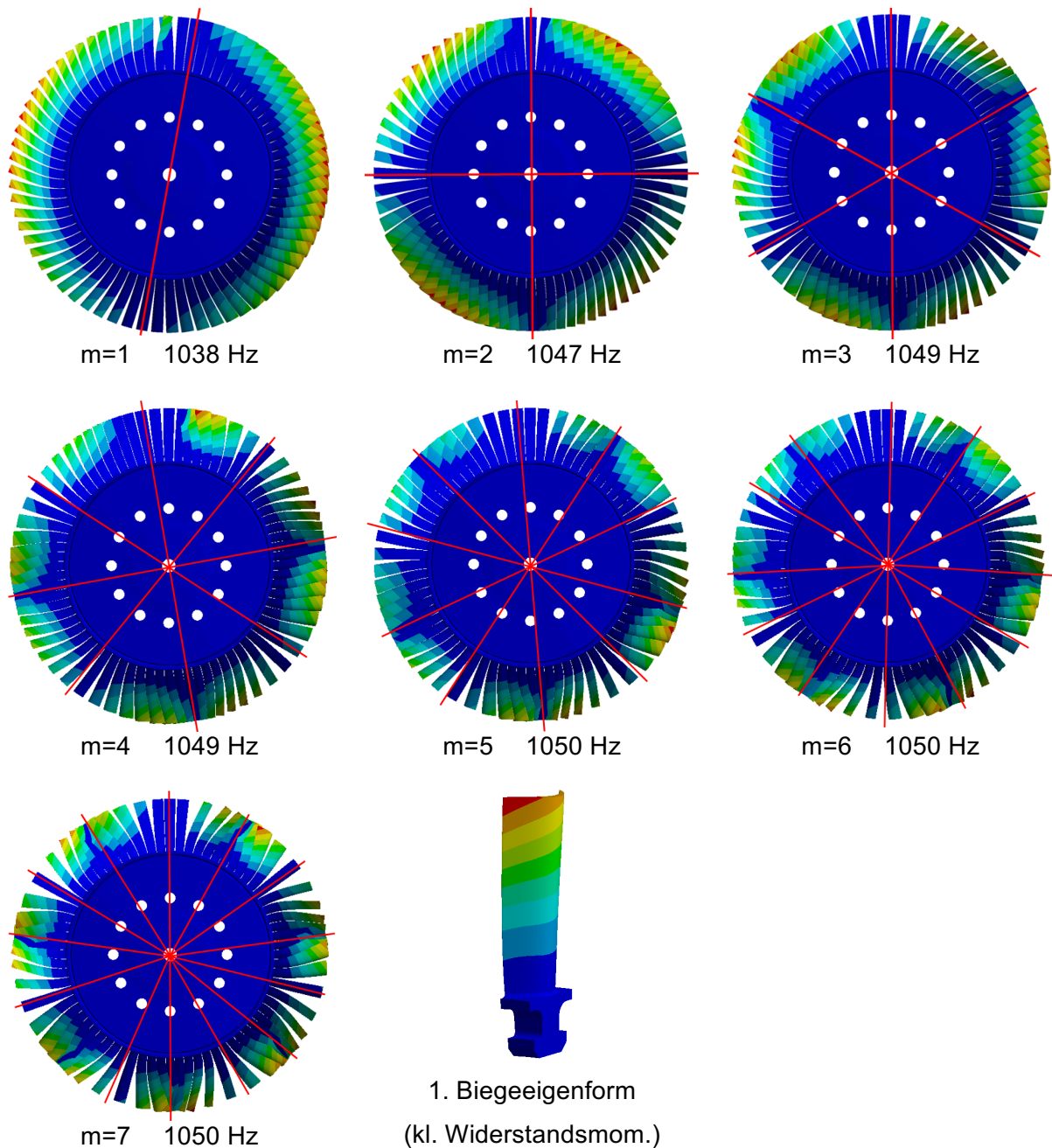


$n=1$ $m=2$ 8610 Hz

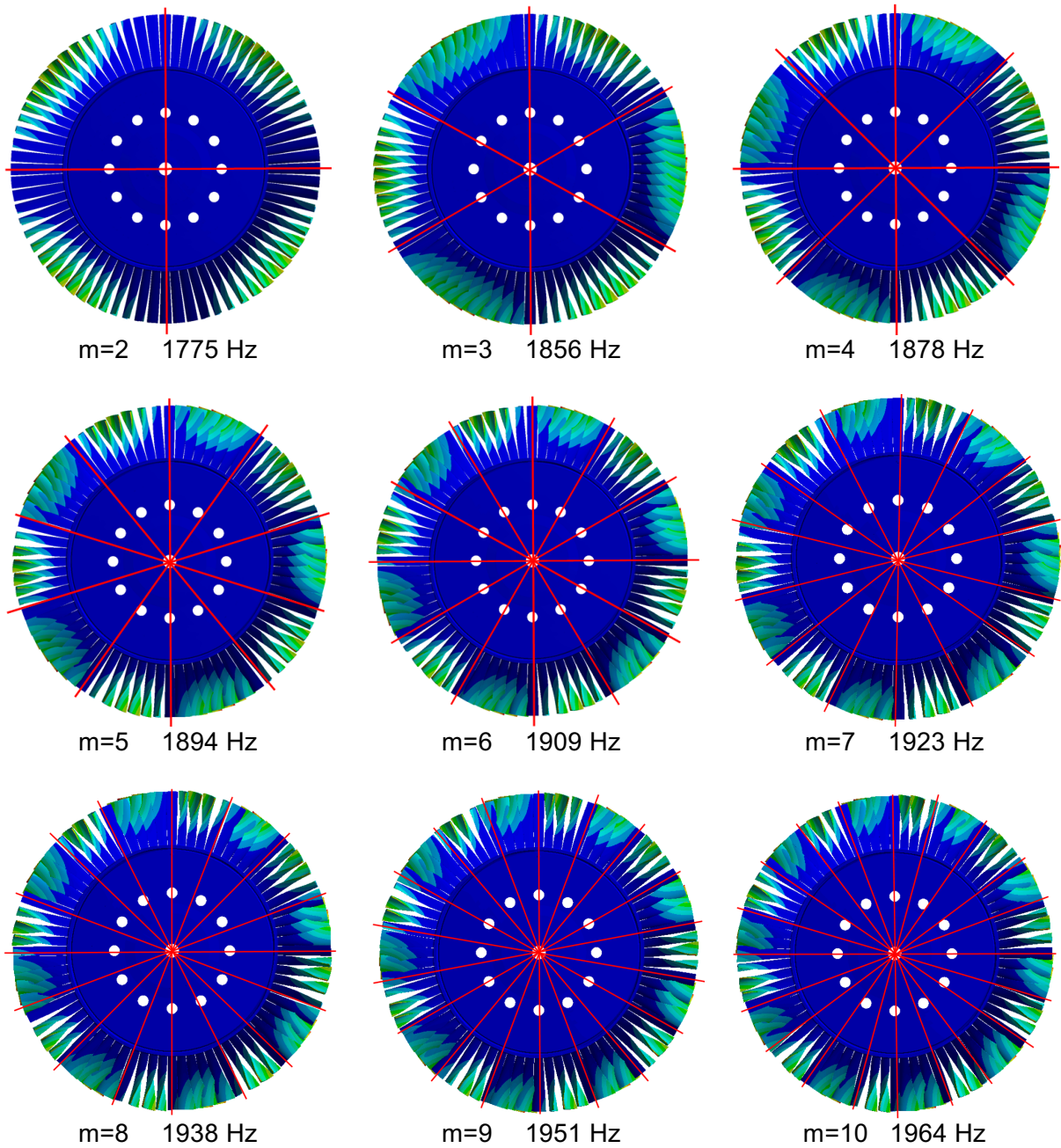
Anhang C-4: Eigenformen Rotor

In diesem Abschnitt sind alle aufgetretenen Moden, die in den Interferenz-Diagrammen verwendet wurden, grafisch dargestellt. Beginnend wurden die schaufeldominanten Modenfamilien mit der jeweils zugehörigen Schaufeleigenform angeführt und im Anschluss die scheibendominanten Modenfamilien. Die Frequenzangaben beziehen sich auf den Stillstand. Die Eigenformen sind anhand der Verschiebungen dargestellt.

Anhang C-4.1: Schaufeldominante Modenfamilie 1

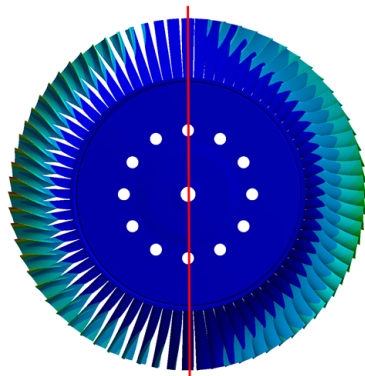


Anhang C-4.2: Schaufeldominante Modefamilie 2

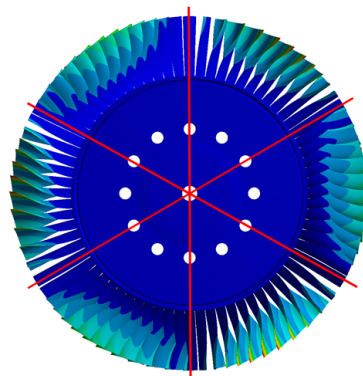


1. Biegeeigenform
(gr. Widerstandsmom.)

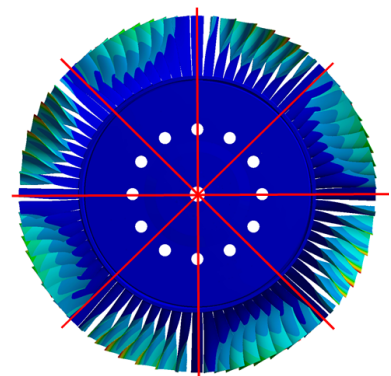
Anhang C-4.3: Schaufeldominante Modefamilie 3



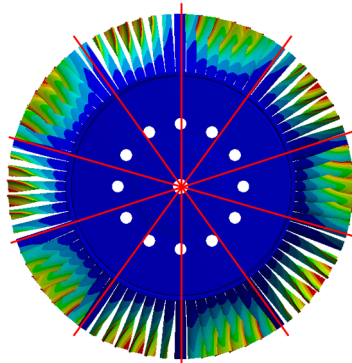
m=1 2882 Hz



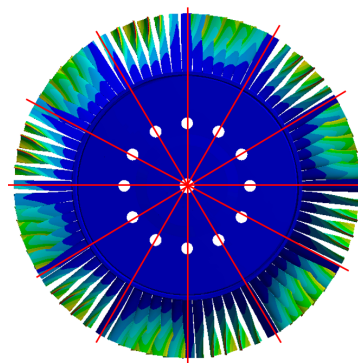
m=3 2794 Hz



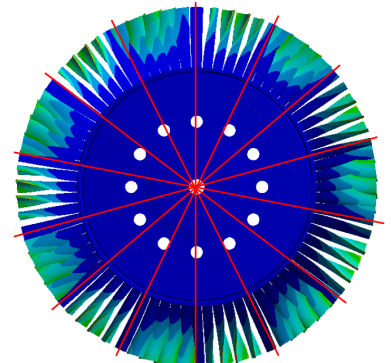
m=4 2832 Hz



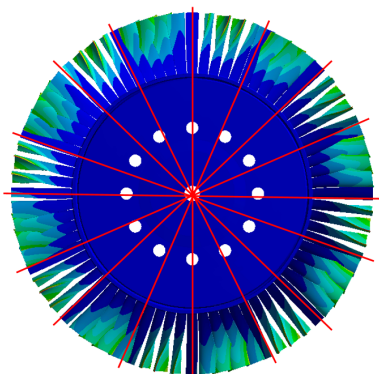
m=5 2857 Hz



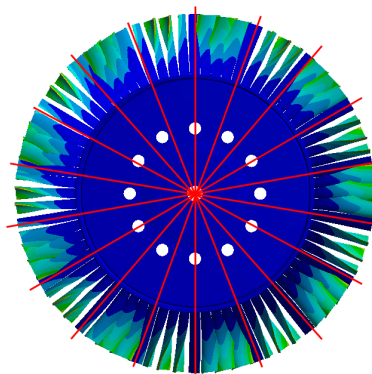
m=6 2892 Hz



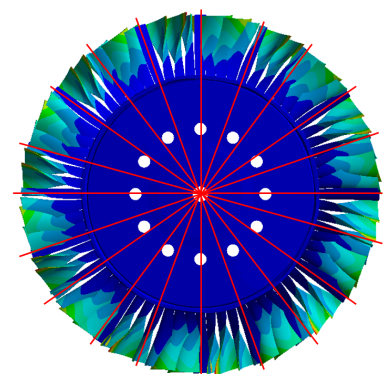
m=7 2905 Hz



m=8 2931 Hz



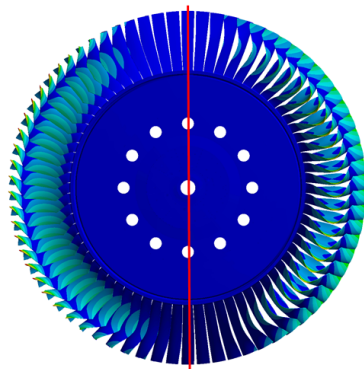
m=9 2958 Hz



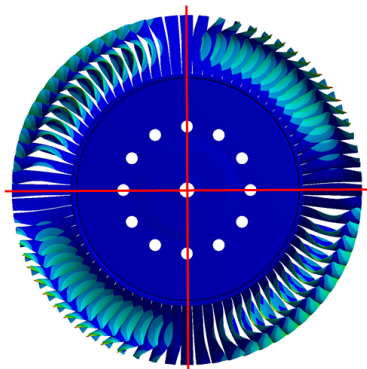
m=10 2995 Hz

1. Torsionseigenform
(Hochachse)

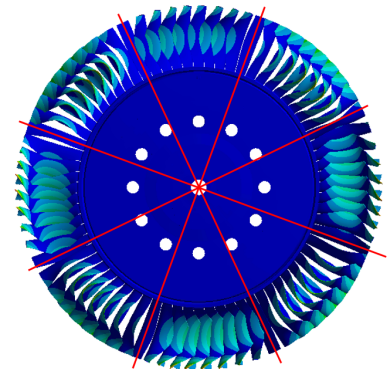
Anhang C-4.4: Schaufeldominante Modefamilie 4



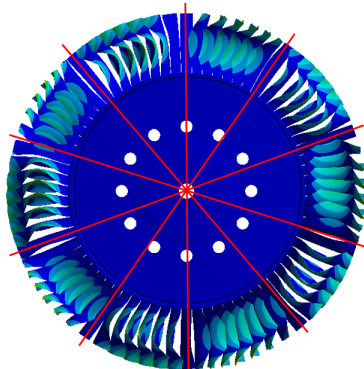
m=1 4742 Hz



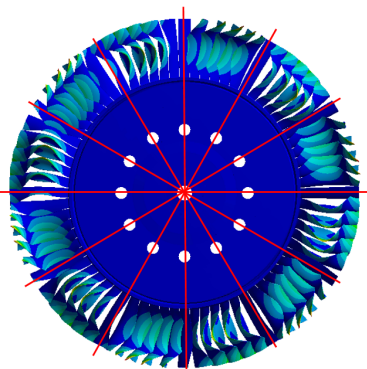
m=2 4750 Hz



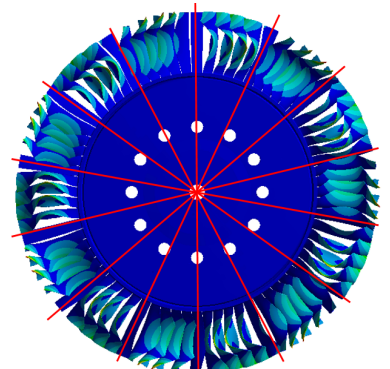
m=4 4678 Hz



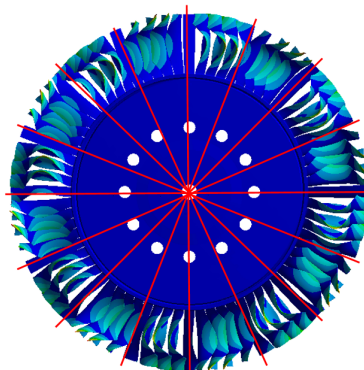
m=5 4699 Hz



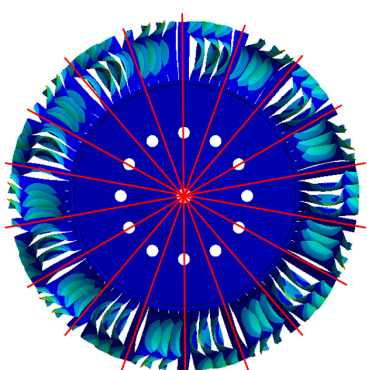
m=6 4711 Hz



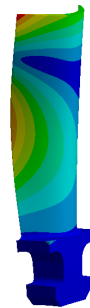
m=7 4722 Hz

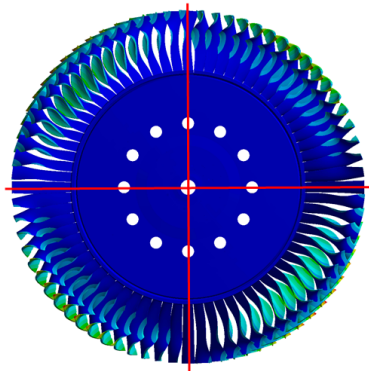


m=8 4732 Hz

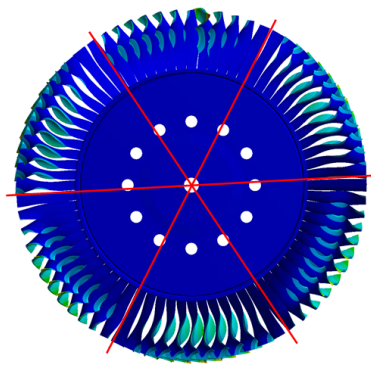


m=9 4740 Hz

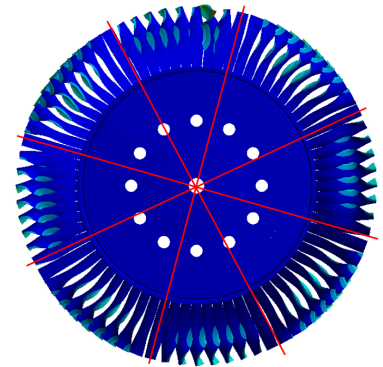
2. Biegeeigenform
(kl. Widerstandsmom.)

Anhang C-4.5: Schaufeldominante Modefamilie 5

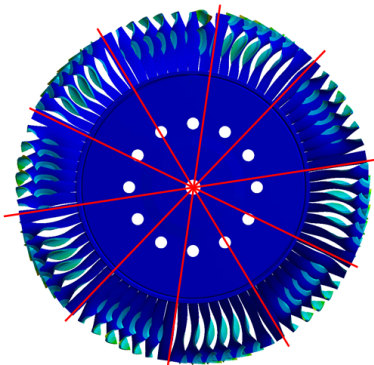
m=2 6300 Hz



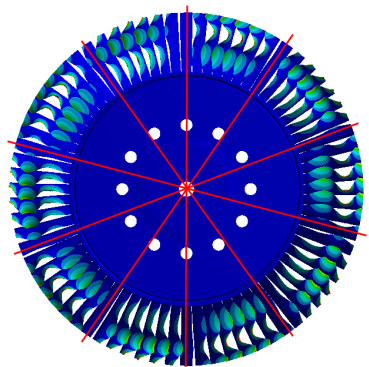
m=3 6315 Hz



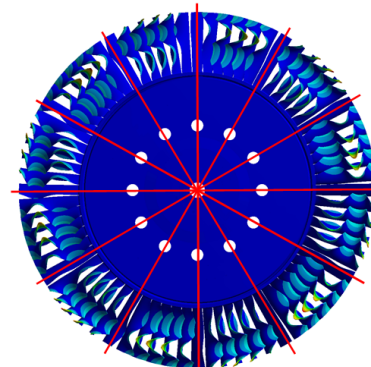
m=4 6316 Hz



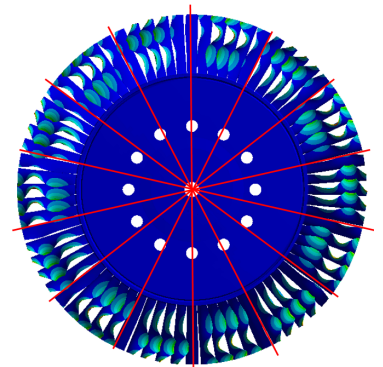
m=5 6321 Hz

2. Torsionseigenform
(Hochachse)**Anhang C-4.6: Schaufeldominante Modefamilie 6**

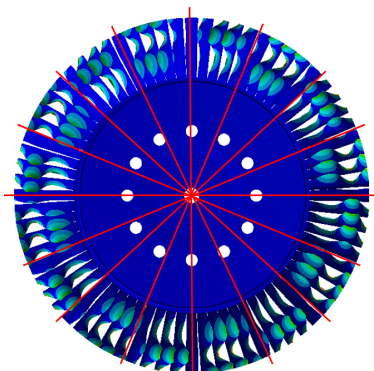
m=5 8356 Hz



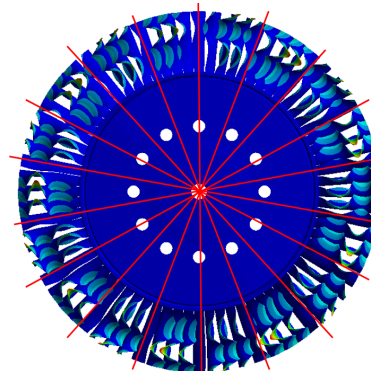
m=6 8404 Hz



m=7 8421 Hz

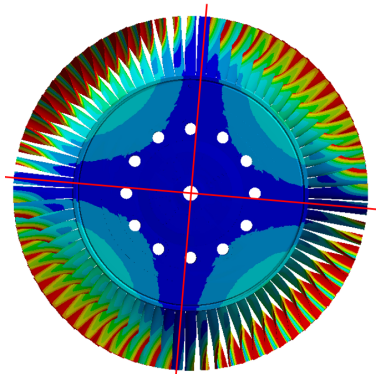


m=8 8433 Hz

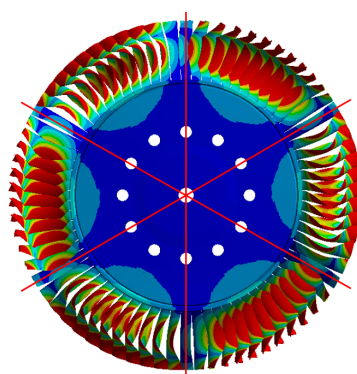


m=9 8441 Hz

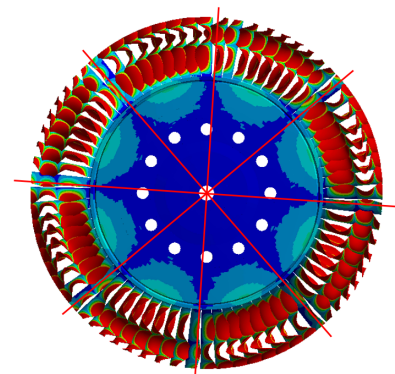
3. Biegeeigenform
(kl. Widerstandsmom.)

Anhang C-4.7: Scheibendominante Modefamilie 1

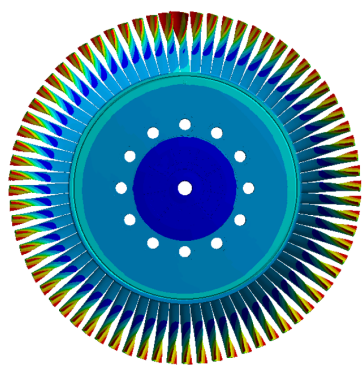
n=0 m=1 2513 Hz



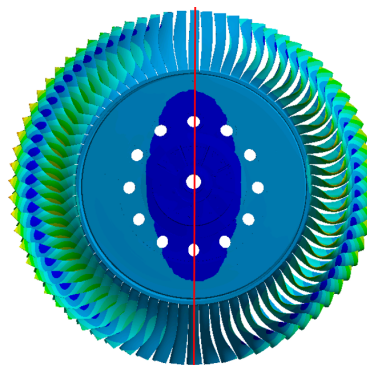
n=0 m=3 4558 Hz



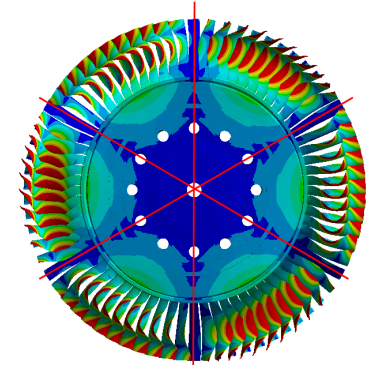
n=0 m=4 8536 Hz

Anhang C-4.8: Scheibendominante Modefamilie 2

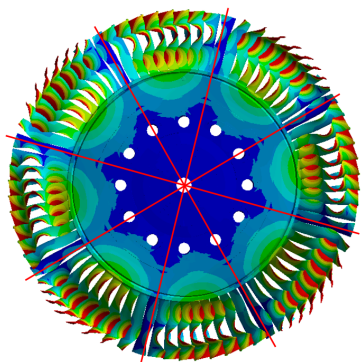
n=0 m=0 2122 Hz



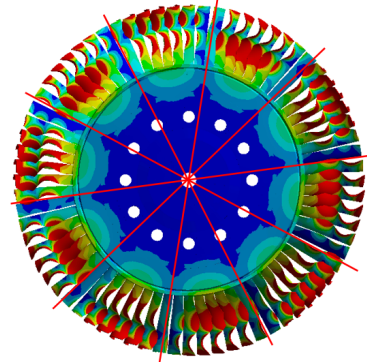
n=0 m=1 4157 Hz



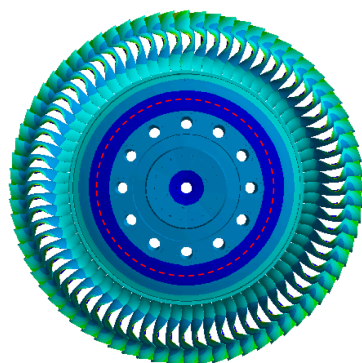
n=0 m=3 5355 Hz



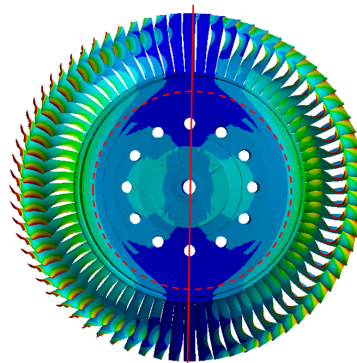
n=0 m=4 7472 Hz



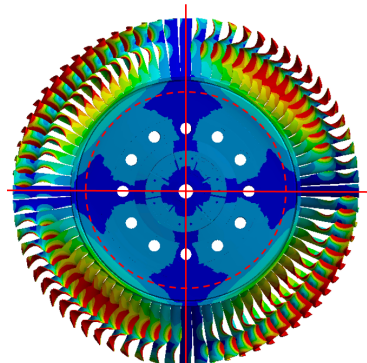
n=0 m=5 9525 Hz

Anhang C-4.9: Scheibendominante Modefamilie 3

n=1 m=0 6770 Hz



n=1 m=1 7744 Hz



n=1 m=2 9882 Hz

Anhang D: Einfluss der Scheibensteifigkeit

Anhang D-1: Variation des E-Moduls

		Elastizitätsmodul [MPa]							
		180.000	181.000	182.000	183.000	184.000	185.000	186.000	187.000
Eigenfrequenzen [Hz]	1. EF	1040,8	1040,8	1040,8	1040,8	1040,8	1040,9	1040,9	1040,9
	2. EF	1836,5	1836,9	1837,3	1837,7	1838	1838,4	1838,7	1839,1
	3. EF	2774	2774,7	2775,3	2776	2776,6	2777,2	2777,8	2778,4
	4. EF	4267	4274,8	4282,6	4290,2	4297,8	4305,2	4312,6	4319,8
	5. EF	4842,6	4845,7	4848,8	4852,1	4855,4	4858,8	4862,3	4865,8
	6. EF	6292,3	6292,3	6292,3	6292,3	6292,3	6292,4	6292,4	6292,4
	7. EF	8305,3	8305,6	8305,9	8306,2	8306,5	8306,7	8307	8307,2

		Elastizitätsmodul [MPa]							
		188.000	189.000	190.000	191.000	192.000	193.000	194.000	195.000
Eigenfrequenzen [Hz]	1. EF	1040,9	1040,9	1040,9	1040,9	1040,9	1040,9	1040,9	1041
	2. EF	1839,4	1839,8	1840,1	1840,4	1840,8	1841,1	1841,4	1841,8
	3. EF	2779	2779,6	2780,2	2780,8	2781,3	2781,9	2782,5	2783
	4. EF	4327	4334	4340,9	4347,7	4354,4	4361	4367,5	4373,9
	5. EF	4869,5	4873,2	4877	4880,9	4884,9	4889	4893,1	4897,4
	6. EF	6292,4	6292,4	6292,4	6292,4	6292,4	6292,4	6292,4	6292,4
	7. EF	8307,5	8307,7	8308	8308,2	8308,4	8308,7	8308,9	8309,1

		Elastizitätsmodul [MPa]							
		196.000	197.000	198.000	199.000	200.000	201.000	202.000	203.000
Eigenfrequenzen [Hz]	1. EF	1041	1041	1041	1041	1041	1041	1041	1041
	2. EF	1842,1	1842,4	1842,7	1843	1843,3	1843,6	1843,9	1844,2
	3. EF	2783,6	2784,1	2784,6	2785,1	2785,7	2786,2	2786,7	2787,2
	4. EF	4380,1	4386,2	4392,3	4398,2	4404	4409,7	4415,2	4420,7
	5. EF	4901,7	4906,1	4910,7	4915,3	4920	4924,8	4929,6	4934,6
	6. EF	6292,4	6292,5	6292,5	6292,5	6292,5	6292,5	6292,5	6292,5
	7. EF	8309,3	8309,6	8309,8	8310	8310,2	8310,4	8310,6	8310,8

		Elastizitätsmodul [MPa]							
		204.000	205.000	206.000	207.000	208.000	209.000	210.000	211.000
Eigenfrequenzen [Hz]	1. EF	1041	1041,1	1041,1	1041,1	1041,1	1041,1	1041,1	1041,1
	2. EF	1844,5	1844,8	1845,1	1845,4	1845,7	1845,9	1846,2	1846,5
	3. EF	2787,7	2788,2	2788,7	2789,2	2789,6	2790,1	2790,6	2791
	4. EF	4426	4431,3	4436,4	4441,4	4446,3	4451,1	4455,7	4460,3
	5. EF	4939,7	4944,8	4950,1	4955,4	4960,8	4966,3	4971,9	4977,6
	6. EF	6292,5	6292,5	6292,5	6292,5	6292,5	6292,5	6292,6	6292,6
	7. EF	8311	8311,2	8311,4	8311,5	8311,7	8311,9	8312,1	8312,3

		Elastizitätsmodul [MPa]							
		212.000	213.000	214.000	215.000	216.000	217.000	218.000	219.000
Eigenfrequenzen [Hz]	1. EF	1041,1	1041,1	1041,1	1041,1	1041,1	1041,2	1041,2	1041,2
	2. EF	1846,8	1847	1847,3	1847,6	1847,8	1848,1	1848,4	1848,6
	3. EF	2791,5	2791,9	2792,4	2792,8	2793,3	2793,7	2794,1	2794,6
	4. EF	4464,8	4469,1	4473,4	4477,5	4481,6	4485,6	4489,4	4493,2
	5. EF	4983,4	4989,2	4995,1	5001,1	5007,2	5013,4	5019,6	5025,9
	6. EF	6292,6	6292,6	6292,6	6292,6	6292,6	6292,6	6292,6	6292,6
	7. EF	8312,4	8312,6	8312,8	8313	8313,1	8313,3	8313,5	8313,6

		Elastizitätsmodul [MPa]							
		220.000	221.000	222.000	223.000	224.000	225.000	226.000	227.000
Eigenfrequenzen [Hz]	1. EF	1041,2	1041,2	1041,2	1041,2	1041,2	1041,2	1041,2	1041,2
	2. EF	1848,9	1849,1	1849,4	1849,6	1849,9	1850,1	1850,3	1850,6
	3. EF	2795	2795,4	2795,8	2796,2	2796,6	2797,1	2797,4	2797,8
	4. EF	4496,9	4500,4	4503,9	4507,3	4510,6	4513,9	4517	4520,1
	5. EF	5032,3	5038,8	5045,3	5051,9	5058,5	5065,3	5072	5078,9
	6. EF	6292,6	6292,6	6292,6	6292,6	6292,7	6292,7	6292,7	6292,7
	7. EF	8313,8	8313,9	8314,1	8314,2	8314,4	8314,6	8314,7	8314,9

		Elastizitätsmodul [MPa]							
		228.000	229.000	230.000	231.000	232.000	233.000	234.000	235.000
Eigenfrequenzen [Hz]	1. EF	1041,2	1041,2	1041,3	1041,3	1041,3	1041,3	1041,3	1041,3
	2. EF	1850,8	1851	1851,3	1851,5	1851,7	1852	1852,2	1852,4
	3. EF	2798,2	2798,6	2799	2799,4	2799,8	2800,1	2800,5	2800,9
	4. EF	4523,1	4526	4528,8	4531,6	4534,3	4536,9	4539,5	4542
	5. EF	5085,8	5092,7	5099,7	5106,8	5113,9	5121,1	5128,3	5135,5
	6. EF	6292,7	6292,7	6292,7	6292,7	6292,7	6292,7	6292,7	6292,7
	7. EF	8315	8315,2	8315,3	8315,4	8315,6	8315,7	8315,9	8316

		Elastizitätsmodul [MPa]				
		236.000	237.000	238.000	239.000	240.000
Eigenfrequenzen [Hz]	1. EF	1041,3	1041,3	1041,3	1041,3	1041,3
	2. EF	1852,6	1852,9	1853,1	1853,3	1853,5
	3. EF	2801,2	2801,6	2802	2802,3	2802,7
	4. EF	4544,4	4546,8	4549,1	4551,4	4553,6
	5. EF	5142,8	5150,2	5157,5	5165	5172,4
	6. EF	6292,7	6292,7	6292,8	6292,8	6292,8
	7. EF	8316,1	8316,3	8316,4	8316,6	8316,7

Anhang D-2: Veränderte Position am Rotor (5Bl)

		Schaufel				
		1.	2.	3.	4.	5.
Eigenfrequenzen [Hz]	1. EF	1040,2	1040,2	1040,6	1040,3	1040,5
	2. EF	1862,7	1870,1	1872	1869,7	1863,2
	3. EF	2825,1	2836,1	2839,4	2835,9	2826,6
	4. EF	4721,7	4724,6	4726	4724,4	4722,5
	5. EF	6285,7	6285,7	6286,9	6285,3	6285,1
	6. EF	8306,6	8317,9	8320,1	8316	8312,6
	7. EF	1040,2	1040,2	1040,6	1040,3	1040,5

Anhang D-3: Veränderte Position am Rotor (Gesamtmodell)

		Schaufel								
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
EF in [Hz]	1. EF	989,99	989,6	989,84	989,8	990	989,54	989,64	989,56	989,67
	2. EF	1804,6	1803,6	1804,6	1805,4	1805	1805,3	1804,5	1803,7	1804,9
	3. EF	2741,9	2741	2745,2	2745,1	2745,3	2743,8	2743,8	2741,3	2741,6
	4. EF	4617,2	4608,1	4594,9	4597,4	4602,4	4608,8	4603,7	4595,3	4600,9
	5. EF	6003,9	5978,1	5992,5	5980,7	6004,8	5961,9	5975,2	5959,1	6018,3
	6. EF	8503	8505,9	8516,9	8617,6	8595,7	8592,1	8570,5	8486,4	8555,8

Anhang E: Experimentelle Modalanalyse

Anhang E-1: Allgemeines

Ein Pulshammerversuch bzw. eine experimentelle Modalanalyse ist ein Versuch zum Ermitteln der strukturdynamischen Eigenschaften eines Bauteils oder einer Baugruppe. Im Rahmen dieser Arbeit dient der Versuch zur Ermittlung der Eigenfrequenzen des schwingungsfähigen Systems durch eine äußere Anregung. [45] Zur Aufnahme der Schwingungen des Rotors wurden die auf den Schaufeln applizierten Dehnmessstreifen verwendet. Aus den aufgenommenen Schwingungen kann in späterer Folge auf die Eigenfrequenzen des Systems zurückgeschlossen werden. Der Versuch soll als Vergleich des bereits durchgeführten Versuchs von Traussnig [32] dienen. Der Unterschied zu den vorangegangenen Versuchen liegt in der Lagerung und der Messwertaufnahme, da der Rotor auf dem Prüfstand montiert angeschlagen wurde.

Anhang E-2: Versuchsaufbau

Anhang E-2.1: Prinzipieller Aufbau

Der Rotor ist samt Telemetrieinheit am Prüfstand montiert und für einen Prüfstandlauf (Simulation des Betriebszustandes) vorbereitet. Nur der Strömungskanal hinter dem Rotor ist geöffnet, um die Schaufeln in späterer Folge mit dem Impulshammer anschlagen zu können.

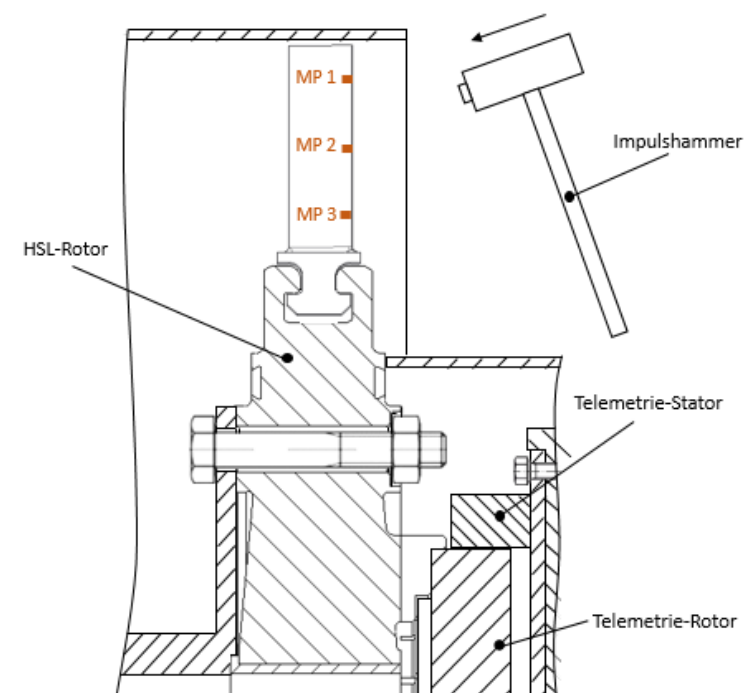


Abbildung 134: Prinzipieller Versuchsaufbau

In Abbildung 134 ist der Rotor samt Telemetrieinheit ersichtlich. Zudem wurde auch der Impulshammer symbolisch dargestellt, mit dem, im Rahmen der in den folgenden Punkten beschriebenen Versuche, die Schaufeln des montierten Rotors angeschlagen werden.

Für nähere Informationen zur Messwertaufnahme, Übertragung und Auswertung wird auf Schönleitner [30] [31] verwiesen.

Anhang E-2.2: Rotor mit DMS-Messstellen

Der HSL-Rotor ist zur experimentellen Ermittlung der Rotorschwingungen, die im Rahmen der Dissertation von DI Florian Schönleitner behandelt wurden, an verschiedenen Schaufeln mit Dehnmessstreifen bestückt. Durch die aufgenommenen Dehnungen kann in späterer Folge auf die Schwingungsfrequenzen zurückgeschlossen werden.

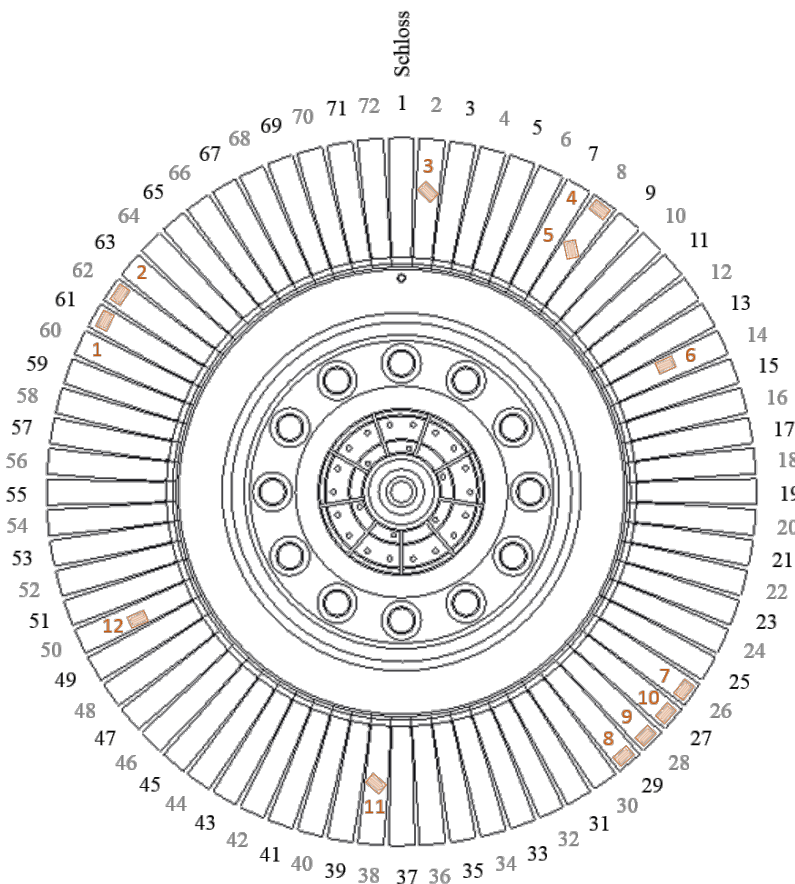


Abbildung 135: Rotor mit DMS-Position und Schaufelnummerierung

Die Schaufeln sind dabei von der Schlossschaufel ausgehend von 1-72 durchnummeriert, dabei wurde in Blickrichtung stromaufwärts im Uhrzeigersinn vorgegangen. Dies wurde auch bereits bei vorangegangenen Versuchen mit diesem Rotor so gehandhabt und dient der Vergleichbarkeit der Einzelergebnisse. Abbildung 135 zeigt die Positionen der DMS auf den Schaufeln sowie die Nummerierung der Schaufeln und der DMS.

Ein besonderes Augenmerk wird auf DMS 10 (Schaufel 27) gelegt, da diese Schaufel „locker“ ist und somit wahrscheinlich ein Einfluss auf die Ergebnisse besteht. Nähere Informationen diesbezüglich finden sich in Traussnig [32].

Anhang E-2.3: Messpunkte an der Schaufel

Um bei den Versuchen vergleichbare Ergebnisse zu erhalten und alle Schaufeln an den gleichen Positionen anzuschlagen, erfolgte die Auswahl von drei über die Schaufelhöhe verteilte Punkte. Die in Abbildung 136 dargestellte Lage für die Messpunkte sind Richtwerte, da die Genauigkeit des händischen Anschlagverfahrens starken Schwankungen unterliegt.

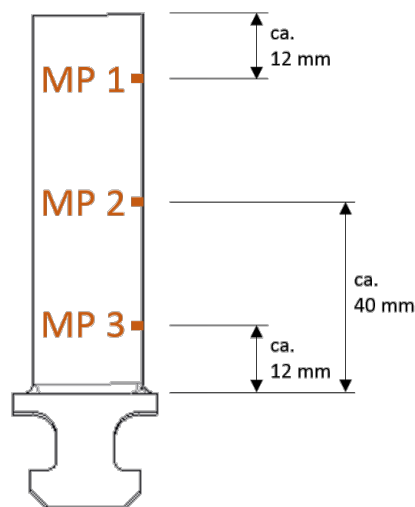


Abbildung 136: Messpunkte an den Schaufeln

Alle Schaufeln wurden dabei an der Hinterkante des Schaufelprofils angeschlagen, um bei allen Schaufeln definierte Anschlagstellen zu haben und ähnliche Impulse in diese einzuleiten. Die Schaufeln 14 und 50 wurden dabei wegen der DMS Position nur an den Messstellen MP1 und MP3 angeschlagen, um die applizierten DMS nicht zu beschädigen. Von Anschlägen auf den Schaufelflächen wurde abgesehen, da bei den Schaufeln mit DMS Applikation die Gefahr besteht, die DMS bzw. die jeweilige Messleitung nachhaltig zu beschädigen.

Anhang E-2.4: Impulshammer



Abbildung 137: Impulshammer

Hersteller: KISTLER
Modell: 9724A5000
Seriennummer: C100297

Der Impulshammer (Abbildung 137) hat einen eingebauten Piezokristall, der ein impulsabhängiges Signal erzeugt und beim Versuch über die angeschlossene Messleitung aufgenommen wird.

Bei diesem Versuch kam der Impulshammer ohne Zusatzgewichte zum Einsatz und es wurde die Messspitze für metallische Bauteile verwendet. Zwischen Hammer und Auswerteplatine wurde noch ein Messverstärker geschaltet, um das vom Piezoelement abgegebene Signal besser und eindeutiger aufnehmen zu können.

Anhang E-3: Versuchsdurchführung

Der Versuch wurde am Dienstag, den 28.07.2015, am Turbinenprüfstand (subsonic test turbine facility for aerodynamic, acoustic and aeroelastic investigations, STTF-AAAI) des Instituts für thermische Turbomaschinen an der Technischen Universität Graz durchgeführt.

Im Rahmen des Versuchs wurden zwei unterschiedliche Teilversuche durchgeführt, um die Gesamtheit des Schwingverhaltens und mögliche Einflüsse der Rotorlagerung auf Messergebnisse abzudecken. Dabei wurde neben dem Schwingungsverhalten der einzelnen Schaufeln auch noch der Einfluss der Rotorlagerung auf die Eigenfrequenz einer Schaufel aufgenommen. Abbildung 138 zeigt die praktische Durchführung des Versuchs am Prüfstand.



Abbildung 138: Versuchsdurchführung

Anhang E-3.1: Versuch 1: Gesamtbeschau felung

Das Ziel von Versuch 1 war die Aufnahme der Eigenfrequenzen über die gesamte Rotorbeschau felung. Dabei wurde festgelegt, dass sich die Position des HSL-Rotors während des gesamten Versuchs nicht ändert. Die Schlossschaufel befand sich an der höchsten Stelle (oben) und blieb, wie schon erwähnt, während des Versuchs an derselben Position.

Da die zeitlichen Ressourcen beschränkt waren, wurde vorrangig ein Augenmerk auf die mit DMS bestückten Schaufeln gelegt. Diese wurden in einem ersten Durchlauf je fünfmal an den drei über die Schaufelhöhe verteilten Messpunkten (siehe „Messpunkte an der Schaufel“) angeschlagen.

Im zweiten Durchgang wurde jede zweite Schaufel mit dem Impulshammer über die drei Messpunkte je dreimal angeschlagen. Beginnend mit der Schlossschaufel (Nr. 1) wurden alle ungeraden Schaufeln angeschlagen, zudem die Schaufel Nr. 72, um auch einen möglichen Einfluss der Schlossschaufel auf die benachbarten Schaufeln aufzunehmen.

Anhang E-3.2: Versuch 2: Einfluss der Lagerung

Da sich der Rotor nicht dreht und kein Schmierfilm bei der Rotorlagerung aufgebaut ist, liegt dieser im Stillstand in der Lagerschale, was einen Einfluss auf die Eigenfrequenz der Schaufeln vermuten lässt. Um diesen Einfluss zu erfassen bzw. festzustellen, ob überhaupt ein messbarer Einfluss besteht, wurde eine Schaufel an verschiedenen Positionen am

Umfang angeschlagen. Dabei wurde die Schaufel Nr. 62 (DMS 2) verwendet, da diese schon beim vorangegangenen Versuch eindeutige Messergebnisse lieferte. Die Schaufel Nr. 62 wurde nach dem Anschlagen um je 45° weitergedreht und das Anschlagen wiederholt. Dabei wurden die Schaufeln, wie beim Versuch 1, jeweils fünfmal an den Messpunkten angeschlagen.

Anhang E-3.3: Messunsicherheiten und Messfehler

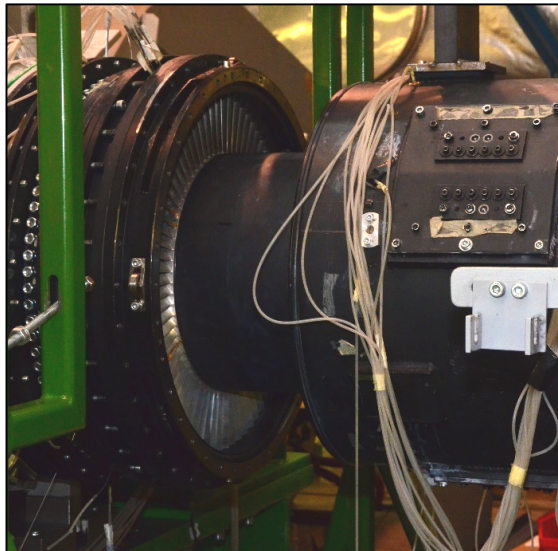


Abbildung 139: Platzverhältnisse

Aufgrund der sehr eingegengten Platzverhältnisse konnte es bei dem Versuch sehr leicht zu Messfehlern kommen. Dabei sind Doppelschläge bzw. Mehrfachschläge mit dem Impulshammer die Hauptfehlerquelle, ferner spielen auch noch Anschlagposition und Anschlagwinkel eine Rolle, die zu verfälschten Messergebnissen führen können. Um solche Fehler zu vermeiden bzw. kompensieren zu können, wurden die Schaufeln immer mehrmalig an den drei über die Höhe verteilten Messpunkte angeschlagen. Zudem können statistische Fehler mit dem Mittelwert über die Schaufelhöhe kompensiert werden.

Die Anschlagposition variierte, wie schon unter „Prinzipieller Versuchsaufbau“ erwähnt, aufgrund des händischen Anschlagverfahrens sehr stark. Zudem war es, aufgrund der baulichen Beschaffenheit des Prüfstandes und den Rahmenbedingungen der Versuche, nicht möglich, die Schaufeln immer unter demselben Winkel und an derselben Position anzuschlagen.

Anhang E-4: Anmerkungen zum Versuch

Die Abtastrate wurde bei beiden Teilversuchen mit 20000 Samples/Sekunde gewählt. Dies ist für eine spätere Auswertung von Bedeutung, um diese bei der Auswerteroutine zu setzen.

Anhang F: Vergleich Rechenprogramme

Als Benutzer von Simulationssoftware ist man häufig darauf angewiesen die zur Verfügung stehende Software zu nutzen und kann nicht nach Belieben wählen. Daher wurde zu Anschauungszwecken ein Vergleich durchgeführt, welche Abweichungen handelsübliche FEM-Programme bei der Modalanalyse des 1BI-Modells aufweisen. Die Modellaufbereitung erfolgte dabei direkt in der jeweiligen Benutzeroberfläche. Somit unterscheiden sich alle Modelle hinsichtlich Anzahl der Elemente, Knotenpunkte sowie den Methoden der Vernetzung. Dies führt zu Diskretisierungsfehlern und somit zu Unterschieden zwischen den Eigenfrequenzen. Das Ziel dieses Abschnittes ist genau diese Abweichungen aufzuzeigen. Um einen kleinen Überblick über die gesamte Breite der Simulationstools zu geben, wurden drei unterschiedliche ausgewählt. Einerseits kommt ANSYS 16.2 zum Einsatz, welches in der Industrie häufig verwendet wird um FEM-Analysen durchzuführen, und andererseits ProMechanica, ein Tool von CREO 3.0. Ferner wurde das HighEnd System Nastran eingesetzt, welches das genaue Gegenstück zur Einstiegssoftware ProMechanica darstellt.

Für den Vergleich wurde das 1BI-Modell, aus Schitter [29] beschrieben, herangezogen. Alle Randbedingungen sowie Werkstoffparameter wurden wie dort angeführt verwendet.

	ANSYS (Netzgröße 1mm)	ProMechanica (Netzgröße max. 1mm)	Nastran
1. EF	923 Hz	934 Hz	918 Hz
2. EF	1648 Hz	1664 Hz	1653 Hz
3. EF	2678 Hz	2693 Hz	2706 Hz
4. EF	4429 Hz	4269 Hz	4353 Hz
5. EF	5404 Hz	5433 Hz	5367 Hz
6. EF	8180 Hz	8234 Hz	8207 Hz
7. EF	8995 Hz	9081 Hz	9044 Hz
8. EF	9968 Hz	10065 Hz	9991 Hz

Die Abweichungen der Rechensysteme zueinander betragen ca. 1-2%. D.h. im Wesentlichen kann gesagt werden, dass alle Tools sehr gute bzw. annähernd gleiche Ergebnisse liefern. Da es sich bei den Schaufeleigenfrequenzen ja ohnehin nur um eine einfache Simulation handelt und dabei die Aufbereitung sowie die Materialparameter eine wesentlich größere Rolle spielen, kann schlussgefolgert werden, dass der Einfluss der Netzaufbereitung sowie jener der unterschiedlichen Ansatzfunktionen nur geringfügig zu anderen Ergebnissen führen. Die wesentlichen Unterschiede zwischen den Tools zeigten sich insbesondere bei der Berechnungs- und Aufbereitungsdauer. ANSYS hat die besten Ergebnisse mit einer Gesamtdauer der Modellaufbereitung und Simulation von rund 20 Minuten. ProMechanica benötigte alleine für die Simulation mehrere Stunden. Zudem hat die Netzgenerierung mehr Zeit in Anspruch genommen als die gesamte Simulation in ANSYS.