

Julia Bauernhofer, BSc

# **Pressure Poisson Gleichung des Stokes Systems in 2D**

## **MASTERARBEIT**

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieurin

Masterstudium Technomathematik

eingereicht an der

**Technischen Universität Graz**

Betreuer

Univ. Prof. Dr. O. Steinbach

Institut für Numerische Mathematik

Graz, Oktober 2017

**Masterarbeit:**

Titel: Pressure Poisson Gleichung des Stokes Systems in 2D  
Name, Vorname: Bauernhofer, Julia  
Matrikelnummer: 0830576  
Institut: Institut für Numerische Mathematik  
Technische Universität Graz  
Betreuung: Univ. Prof. Dr. O. Steinbach

# Vorwort

Ich möchte mich an dieser Stelle bei meiner Familie bedanken, die mich beim Schreiben dieser Arbeit und während meiner gesamten Studienzeit unterstützt hat. Ein großes Dankeschön auch an Univ.-Prof. Dr. Olaf Steinbach für die Zurverfügungstellung meines interessanten Themas, sowie für die engagierte Betreuung. Er hat sich für meine zahlreichen Fragen immer Zeit genommen.



# Kurzfassung

Es gibt viele Anwendungsbereiche des Stokes Systems in der Strömungsmechanik. Diese Gleichungen beschreiben, wie Geschwindigkeit und Druck eines strömenden Fluids zusammenhängen. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt ausschließlich am Finden vom Druck. Als Modellproblem wird deshalb das Druck Poisson Problem der Stokes Gleichungen betrachtet. Ziel ist die numerische Umsetzung mittels Viereckszerlegung im zweidimensionalen Raum.

Es wird die ultraschwache Formulierung des Poisson Problems für den Druck aufgestellt und eine eindeutige Lösbarkeit im Kontinuierlichen gezeigt. Die diskrete Version kann durch eine geeignete Wahl der Basisfunktionen hergeleitet werden. Auch für dieses Gleichungssystem kann Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung bewiesen werden. Weiters wird die Konvergenz der Näherungslösung gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems gezeigt. Zum Schluss werden zwei numerische Beispiele im ein- und zweidimensionalen Raum gerechnet und deren Ergebnisse werden präsentiert.



# Abstract

There are lots of fields of the Stokes system applying to fluid mechanics. These equations describe how the velocity field and pressure of a moving fluid are related. The main focus in this paper is to find the pressure. In this thesis the pressure Poisson problem of the Stokes equations is considered as a model problem. The main goal in this paper is to calculate approximated solutions by using a decomposition of square elements in the two-dimensional space.

Therefore the ultra weak formulation of the pressure Poisson problem is proposed and a unique solution in the continuous case is shown. By using an appropriate choice of basic functions, a discrete formulation can be derived. The existence and uniqueness of a solution can be verified also for the discrete problem. Moreover the convergence of the approximated solution to the solution of the continuous problem is shown. Finally two numerical examples in the one-dimensional, as well as in the two-dimensional space are solved in order to present the results.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>1 Strömungsmechanik - Herleitung der Stokes Gleichungen</b>	<b>13</b>
1.1 Linearisierung der Navier-Stokes Gleichungen . . . . .	16
1.2 Das Stokes System . . . . .	16
1.3 Variationsformulierung des Stokes System . . . . .	17
1.4 Die Pressure Poisson Gleichung . . . . .	19
<b>2 Variationsformulierungen des Modellproblems</b>	<b>21</b>
2.1 Herleitung der Variationsformulierungen für den Druck . . . . .	21
2.2 Die Greenschen Formeln . . . . .	22
2.2.1 Die 1. Greensche Formel . . . . .	22
2.2.2 Die 2. Greensche Formel . . . . .	23
2.3 Variationsformulierungen für die Pressure Poisson Gleichung . . . . .	23
2.4 Variationsformulierung mit Lagrange Multiplikator . . . . .	24
2.5 Die ultraschwache Variationsformulierung . . . . .	26
<b>3 Eindeutige Lösbarkeit im Kontinuierlichen</b>	<b>29</b>
3.1 Die eindeutige Lösbarkeit des Neumann Problems . . . . .	30
3.2 Die eindeutige Lösbarkeit der ultraschwachen Variationsformulierung .	33
<b>4 Eindeutige Lösbarkeit im Diskreten</b>	<b>39</b>
4.1 Diskretisierung des modifizierten Variationsproblems (3.3) . . . . .	39
4.1.1 Galerkin-Bubnov Formulierung . . . . .	39
4.1.2 Finite Elemente . . . . .	41
4.1.3 Aufstellung des linearen Gleichungssystems für stückweise lineare Basisfunktionen . . . . .	43
4.2 Diskretisierung des ultraschwachen Variationsproblems (3.4) . . . . .	46
4.2.1 Galerkin-Petrov Formulierung . . . . .	46
4.3 B-Splines . . . . .	48
4.3.1 Der eindimensionale Fall . . . . .	49
4.3.2 Der zweidimensionale Fall . . . . .	55

4.4 Fehlerabschätzungen . . . . .	61
<b>5 Numerische Ergebnisse</b>	<b>63</b>
5.1 Der eindimensionale Fall . . . . .	63
5.1.1 Neumann Randwertproblem . . . . .	63
5.1.2 Ultraschwache Variationsformulierung . . . . .	65
5.2 Der zweidimensionale Fall . . . . .	66
5.2.1 Neumann Randwertproblem . . . . .	66
5.2.2 Ultraschwache Variationsformulierung . . . . .	67
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>69</b>

# Einleitung

Die Strömungsmechanik ist ein wichtiges Gebiet in Wissenschaft und Technik. Es gibt zahlreiche Anwendungsbeispiele, die im Bereich der Mathematik eine bedeutende Rolle spielen, wie zum Beispiel das Strömungsverhalten im Herzen oder die Optimierung der Schiffsturbinenströmung.

Betrachtet man die Strömung von stationären, inkompressiblen Flüssigkeiten, so lässt sich dieses Problem mit Hilfe der Stokes Gleichung modellieren, für die ein Geschwindigkeitsfeld und der Druck gesucht werden. Durch die Inkompressibilität erhält man zusätzlich eine Nebenbedingung, nämlich die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt ausschließlich am Finden vom Druck.

In dieser Masterarbeit wird das Druck Poisson Problem der Stokes Gleichungen als Modellproblem betrachtet. Es wird die Annahme getroffen, dass der Laplace-Operator des Geschwindigkeitsfelds am Rand bekannt ist. Ziel der Arbeit ist es, die benötigte Analysis und Numerik zur Lösung des Modellproblems zu erarbeiten.

Im ersten Kapitel werden mit Hilfe der Erhaltungs- und Bilanzgleichungen [13] die Navier-Stokes Gleichungen aufgestellt. Durch Linearisierung kann man daraus das Stokes System [1] erhalten. Außerdem wird die Variationsformulierung für das Sattelpunktproblem von Stokes aufgestellt. Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung wurde in [7] bewiesen.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit dem Modellproblem dieser Arbeit, dem Poisson Problem für den Druck, das man aus den Stokes Gleichungen erhält. Außerdem werden in diesem Abschnitt verschiedene Variationsformulierungen für den Druck aufgestellt. In dieser Arbeit wurde die Annahme getroffen, dass der Laplace-Operator des Geschwindigkeitsfelds am Rand bekannt ist. Somit lässt sich aus dem System von Stokes eine Neumann Randbedingung für die Druck Poisson Gleichung aufstellen. Weiters wird noch das ultraschwache Variationsproblem [14] aufgestellt.

Die Existenz und Eindeutigkeit des Neumann Problems und des ultraschwachen Problems wird im dritten Kapitel gezeigt. Ziel der ultraschwachen Formulierung ist die Verringerung der Regularität der gesuchten Lösung. Für die eindeutige Lösbarkeit des ultraschwachen Problem wird hier vorausgesetzt, dass es sich um ein glatt berandetes oder konvexes Gebiet handelt [9].

Das vierte Kapitel handelt von der Diskretisierung der beiden Probleme. Mit Hilfe der finiten Elemente [8] können zwei diskrete Formulierungen aufgestellt werden. Auch für die beiden diskreten Versionen muss eindeutige Lösbarkeit bewiesen werden. Für das Neumann Problem wählt man stückweise lineare Testfunktionen [8]. Für

die ultraschwache Formulierung müssen geeignete quadratische Testfunktionen, die sogenannten B-Splines, definiert werden [3]. Außerdem wird in diesem Abschnitt die Konvergenz der Näherungslösung [12] gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems gezeigt.

Im fünften und letzten Kapitel wird die numerische Simulation des Modellproblem mit *MATLAB* implementiert. Es werden zwei numerische Beispiele für die zuvor behandelte Problemstellung für den ein- und zweidimensionalen Raum berechnet. Für das Neumann Problem wird eine Dreieckszerlegung und für die ultraschwache Formulierung eine Zerlegung in Viereckselemente verwendet.

# 1 Strömungsmechanik - Herleitung der Stokes Gleichungen

Als Einführung dieser Arbeit wird die Herleitung der Stokes Gleichungen genauer erläutert [13, Kapitel 3]. In der Mathematik spielt der Einfluss von Strömungen eine wichtige Rolle. Als Strömungsmechanik bezeichnet man die Lehre vom physikalischen Verhalten von flüssigen und gasförmigen Stoffen, den sogenannten Fluiden. Ausgangspunkt zur Herleitung der Stokes Gleichungen sind die Erhaltungsgleichungen. In Erhaltungs- beziehungsweise Bilanzgleichungen wird die zeitliche Änderung von Integralen über beliebige Kontrollvolumina

$$\omega(t) = \{y(t) \in \Omega(t) : y(t) = \varphi(t, x), x \in \omega\} \subset \Omega(t)$$

betrachtet.

- Massenerhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(t, y) dy = 0,$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, y) + \operatorname{div}[\rho(t, y)u(t, y)] = 0, \quad (1.1)$$

- Momentengleichgewicht:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(t, y)u_i(t, y) dy = \int_{\omega(t)} \rho(t, y)f_i(t, y) dy + \int_{\partial\omega(t)} t_i(t, y, n) ds_y,$$

Bewegungsgleichung:

$$\rho(t, y) \frac{\partial}{\partial t} u_i(t, y) + \rho(t, y)u(t, y) \nabla u_i(t, y) = \rho(t, y)f_i(t, y) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} T_{ij}(t, y). \quad (1.2)$$

Eine weitere Erhaltungsgleichung ist die Energieerhaltung.  $\rho(t, y)$  steht für die Dichte,  $u(t, y)$  ist die Geschwindigkeit und  $T_{ij}(t, y)$  bezeichnet den Cauchy'schen Spannungstensor. Man benötigt eine Gleichung für den Zusammenhang zwischen Spannungstensor  $T_{ij}$  und anderen Größen, die das Fluid beschreiben. Ein Beispiel ist der Deformationstensor  $e_{ij}(u)$  der Geschwindigkeit.

**Definition 1.** (Deformations- oder Verzerrungstensor) [12, Kapitel 1.2, S. 5]  
 Der Deformationstensor  $e_{ij}(u)$  der Geschwindigkeit  $u$  ist definiert als

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} u_j(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i(x) \right] \quad \text{für } x \in \Omega, i, j, = 1, 2, 3.$$

Die Komponenten des Cauchy'schen Spannungstensor ergeben sich aus den Komponenten  $e_{ij}(u)$  des Deformationstensors.

**Definition 2.** (Cauchy'scher Spannungstensor)[13, Kapitel 1]  
 Der Cauchy'sche Spannungsvektor  $t_i$  ist definiert als

$$t_i(t, y, n) = \sum_{j=1}^n T_{ij} n_j$$

mit dem Cauchy'sche Spannungstensor

$$T_{ij}(t, y) = t_i(t, y, e_j),$$

wobei  $e_j$  für den Einheitsvektor der  $j$ -ten Komponente steht.

Der Spannungsvektor beschreibt die Spannung, die in einem beliebigen Punkt einer Schnittfläche auftritt. Man kann den Cauchy'schen Spannungsvektor  $t_i$  in eine normale Komponente (Normalspannung) und eine tangentielle Komponente (Schubspannung) zerlegen [2, Kapitel 2.1, S. 37]. Für unbewegte Fluide verschwindet die Schubspannung und es bleibt nur noch die Spannung in Richtung der Normale.

**Definition 3.** [13, Kapitel 3] Ein Fluid wird als **Newton'sches Fluid** bezeichnet, falls ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungstensor  $T_{ij}$  und Deformationstensor  $e_{ij}(u)$  besteht.

**Bemerkung 4.** Zwei Beispiele für ein Newton'sches Fluid sind Wasser und Luft.

**Satz 5.** (Pascal'sches Gesetz)[13, Kapitel 3]

Der Betrag der Komponenten des Spannungstensors  $T_{ii}$  ist konstant, das heißt für den Cauchy'schen Spannungsvektor gilt die Darstellung

$$t(t, y, n_y) = -p(t, y) \cdot n_y.$$

Dabei bezeichnet  $p(t, y)$  den Druck und  $n_y$  ist der Normalenvektor in  $y \in \partial\Omega$ .

Das Pascal'sche Gesetz sagt somit, dass der Cauchy'sche Spannungsvektor gleich dem Druck ist, der in die gegengesetzte Richtung von  $n_y$  zeigt. Ideale Fluide sind solche,

in denen Reibungs- und Wärmeleitungseffekte vernachlässigt werden. Für ein ideales Fluid folgt dann

$$T(t, y) = -p(t, y)I.$$

Im allgemeinen Fall eines viskosen Fluids sind Reibungskräfte zu berücksichtigen. Für ein isotropes Fluid, das bedeutet, es ist unabhängig von den Richtungen, und einem linearen Zusammenhang folgt

$$T_{ij}(t, y) = -p(t, y)\delta_{ij} + \lambda \underbrace{\operatorname{div} u(t, y)}_{=\sum_{k=1}^3 e_{kk}(u)} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(u), \quad (1.3)$$

mit Viskositätskonstanten  $\mu$  und  $\lambda$ . Setzt man also (1.3) in die Bewegungsgleichung (1.2) ein, so erhält man folgende drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho(t, y) \frac{\partial}{\partial t} u(t, y) + \rho(t, y) u(t, y) \nabla_i u(t, y) &= \\ &= \rho(t, y) f_i(t, y) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} T_{ij}(t, y) \\ &= \rho(t, y) f_i(t, y) - \frac{\partial}{\partial y_i} p(t, y) + \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} \operatorname{div} u(t, y) + 2\mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} e_{ij}(u). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (1.1) bekommt man die vierte Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, y) + \operatorname{div}[\rho(t, y)u(t, y)] = 0.$$

Daraus ergeben sich vier Gleichungen für die fünf gesuchten Unbekannten (den Vektor  $u(t, y)$ , den Druck  $p(t, y)$  und die Dichte  $\rho(t, y)$ ). Eine weitere Gleichung kann man aus der Energieerhaltung erhalten. Alternativ dazu betrachtet man ein Fluid mit konstanter Dichte, das heißt  $\rho(t, y) = \rho = \text{konstant}$ . Dann folgt aus der Kontinuitätsgleichung (1.1)

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{div} u(t, y) &= 0, \\ \operatorname{div} u(t, y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Unter der Voraussetzung der Vertauschbarkeit der Ableitungen, das heißt  $\frac{\partial}{\partial y_i}$  und  $\frac{\partial}{\partial y_j}$  können ausgetauscht werden, gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} e_{ij}(u) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \left[ \frac{\partial}{\partial y_j} u_i(t, y) + \frac{\partial}{\partial y_i} u_j(t, y) \right] \\ &= \frac{1}{2} \Delta u_i(t, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \underbrace{\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} u_j(t, y)}_{=\operatorname{div} u(t, y) \stackrel{(1.5)}{=} 0} \end{aligned}$$

Setzt man nun die erhaltenen Ergebnisse in die Bewegungsgleichung (1.4) ein, dann erhält man folgendes System

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} u(t, y) - \mu \Delta u(t, y) + \rho u(t, y) \nabla u(t, y) + \nabla p(t, y) &= \rho f(t, y), \\ \operatorname{div} u(t, y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Diese Gleichungen (1.6) werden auch **Navier-Stokes Gleichungen** genannt, die auf Grund des Terms  $\rho u(t, y) \nabla u(t, y)$  nichtlinear sind.

## 1.1 Linearisierung der Navier-Stokes Gleichungen

Unter der Annahme eines gegebenen Geschwindigkeitsfeldes  $u(t, y) = w(t, y)$  für den nichtlinearen Term erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} u(t, y) - \mu \Delta u(t, y) + \rho w(t, y) \nabla v(t, y) + \nabla p(t, y) &= \rho f(t, y), \\ \operatorname{div} u(t, y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Man nennt die Gleichungen (1.7) auch **Oseen-Gleichungen** und  $w(t, y)$  bezeichnet ein gegebenes Geschwindigkeitsfeld.

Wird der nichtlineare Term vernachlässigt, demzufolge ist das gegebene Geschwindigkeitsfeld  $w(t, y) = 0$ , so erhält man das **Stokes System**

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} u(t, y) - \mu \Delta u(t, y) + \nabla p(t, y) &= \rho f(t, y), \\ \operatorname{div} u(t, y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

## 1.2 Das Stokes System

Die gesamte Arbeit baut auf das Stokes System (1.8) auf. Die Dichte  $\rho$  ist konstant und wird einfachheitshalber  $\rho = 1$  gewählt. Das Stokes System beschreibt die Bewegung eines stationären, inkompressiblen Fluids in einem mehrdimensionalen Körper für  $d = 2$  oder  $d = 3$  [4]. Die Strömung eines Fluids wird als stationär bezeichnet, wenn die Geschwindigkeit von der Zeit unabhängig ist, das bedeutet, dass an jedem einzelnen Ort  $u_t = 0$  gilt. Weil die Flüssigkeit als inkompressibel angesehen wird, ist  $\operatorname{div} u = 0$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mit  $d = 2$  oder  $d = 3$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit hinreichend glatten Rand  $\partial\Omega = \Gamma$ . Beim Stokes Problem wird das Geschwindigkeitsfeld  $\underline{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  sowie der hydrodynamische Druck  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gesucht. Die Kräfte  $\underline{f} \in L^2(\Omega)$  und die dynamische Viskosität  $\mu$  sind bekannt. Die Geschwindigkeit soll eine homogene Dirichlet Randbedingung  $\gamma_0^{int} \underline{u} = 0$  auf  $\Gamma$  erfüllen. Somit lautet das Stokes System mit

homogenen Dirichlet Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dabei steht  $\mu$  für die dynamische Viskosität. In den weiteren Kapiteln dieser Arbeit wird mit den vereinfachten Stokes Gleichungen gerechnet. Diese erhält man, indem man das Stokes System (1.9) durch Skalierung der Größen, also  $\mu = 1$ , vereinfacht. Die Randbedingung lässt sich physikalisch als Haftung des Fluids am Rand erklären. Gibt es Funktionen  $u \in [C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})]^d$  und  $p \in C^1(\Omega)$ , die (1.9) erfüllen, dann werden  $u$  und  $p$  als klassische Lösungen des Stokes Problems bezeichnet [1, Kapitel 3, S. 152]. Die Lösung des Drucks  $p$  in (1.9) ist bis auf Konstanten eindeutig bestimmt und wird durch die Normierung

$$\int_{\Omega} p(x) dx = 0$$

endgültig festgelegt. Dadurch wird der Raum

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0\}$$

definiert [1, Kapitel 3, S. 153].

## 1.3 Variationsformulierung des Stokes System

Der nachfolgende Satz ist eine Regularitätsaussage der Stokes Lösung  $(u, p)$ . Um  $u \in H^2(\Omega)$  und  $p \in H^1(\Omega)$  aus  $f \in L^2(\Omega)$  zu erhalten, genügt es, dass  $\Omega$  ein konvexes Gebiet ist. Für eine höhere Regularität der Stokes Lösung  $(u, p)$  muss mehr als  $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  gefordert werden.

**Satz 6.** [16, Kapitel 12, Satz 12.2.19] Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes und konvexes Gebiet oder besitzt einen glatten Rand. Ist  $f \in L^2(\Omega)$ , so hat die Stokes Gleichung (1.9) eine eindeutige Lösung  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ , die der Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|p\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

genügen.

Für die schwache Formulierung der Stokes Gleichung wird (1.9) mit einer geeigneten Testfunktion  $v \in [H_0^1(\Omega)]^d$  mit  $d = 2$  oder  $d = 3$  multipliziert und es wird über das

Gebiet  $\Omega$  integriert:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot v dx &= \int_{\Omega} f v dx, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} u v dx &= 0. \end{aligned}$$

Aus  $v \in H_0^1(\Omega)$  folgt  $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ . Für die Integrale der linken Seite der ersten Gleichung wird eine partielle Integration durchgeführt. Daraus ergibt sich

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx}_{:=a(u,v)} - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v ds_x + \int_{\Gamma} p v ds_x - \underbrace{\int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx}_{:=d(v,p)} = \int_{\Omega} f v dx.$$

Damit erhält man die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

und

$$d(v, p) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v dx.$$

Es wird mit Funktionen  $v$  aus dem Testraum  $[H_0^1(\Omega)]^d$  getestet, daher verschwinden die Randintegrale. Somit lautet die Variationsformulierung für das homogene Dirichlet Randwertproblem des Stokes Problems: Sei  $X = [H_0^1(\Omega)]^d$  und  $M = L_0^2(\Omega)$ , gesucht werden  $(u, p) \in X \times M$ ,  $d = 2, 3$ , so dass

$$\begin{aligned} a(u, v) + d(v, p) &= \langle f, v \rangle_{\Omega} & \forall v \in X, \\ d(u, q) &= 0 & \forall q \in M \end{aligned} \tag{1.10}$$

gilt. Probleme dieser Form (1.10) werden auch Sattelpunktprobleme genannt. In dieser Arbeit wird nicht genauer auf die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Stokes Problems eingegangen. Eine detaillierte Ausarbeitung findet man in [7, Kapitel 2]. Weiters gilt, dass jede Lösung des Sattelpunktproblems (1.10) eine Lösung von (1.9) ist. Den Beweis findet man unter [1, Bemerkung 6.2, S. 153]. Das Sattelpunktproblem (1.10) kann auch als Operatorgleichung geschrieben werden. Der lineare Operator  $A : X \rightarrow X'$  induziert durch

$$a(u, v) := \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in X \tag{1.11}$$

eine Bilinearform  $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ . Umgekehrt kann einer Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ein Operator  $A : X \rightarrow X'$  zugeordnet werden [12, Kapitel 3.1], dabei steht  $X'$  für den Dualraum von  $X$ . Der Bilinearform  $d(\cdot, \cdot)$  wird die Abbildung  $D : X \rightarrow M'$  mit  $\langle Du, q \rangle := d(u, q)$  beziehungsweise  $D' : M \rightarrow X'$  mit  $\langle v, D'p \rangle := d(v, p)$  zugeordnet.

Man erhält eine äquivalente Formulierung in Operatorschreibweise des Sattelpunktproblems (1.10)

$$\begin{pmatrix} A & D' \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wird für die Testfunktion der Testraum  $V = \{v \in [H_0^1(\Omega)]^d : \operatorname{div} v = 0\}$  gewählt, dann gilt

$$\int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx = 0 \quad \forall v \in V.$$

Die schwache Formulierung lautet dann: Gesucht wird  $u \in V$  für die gilt

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V,$$

mit der Bilinearform  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$  und der Linearform  $f(v) = \int_{\Omega} f v dx$ . Man kann mit dem Lemma von Lax-Milgram (Satz 10) leicht zeigen, dass eine eindeutige Lösung existiert.

Ziel dieser Arbeit ist es den Druck  $p$  zu bestimmen. Dafür kann aus dem Stokes System (1.9) ein Geschwindigkeitsfeld  $u \in V$  berechnet werden. Für dieses gegebene Geschwindigkeitsfeld soll anschließend der Druck bestimmt werden. Dafür wird das nachfolgende Modellproblem betrachtet.

## 1.4 Die Pressure Poisson Gleichung

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Die Kraft  $f$  sei gegeben und gesucht wird der Druck  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Zunächst wird die Divergenz über die erste Stokes Gleichung (1.9) angewendet.

$$-\mu \Delta \underline{u} + \nabla p = \underline{f} \tag{1.12}$$

$$\operatorname{div}(-\mu \Delta \underline{u} + \nabla p) = \operatorname{div} \underline{f} \tag{1.13}$$

Zum besseren Verständnis werden die obigen Gleichungen komponentenweise betrachtet. Für  $\underline{u} = (u_1, u_2)$  und  $\underline{f} = (f_1, f_2)$  erhält man aus der ersten Gleichung (1.12):

$$-\mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = f_1,$$

$$-\mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = f_2.$$

Wird nun der Divergenz Operator über die erste Gleichung angewandt (1.13), dann ergibt sich in komponentenweiser Darstellung:

$$-\mu \left( \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x},$$

$$-\mu \left( \frac{\partial^3 u_2}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Daraus erhält man mit der 2. Gleichung von (1.9)

$$\operatorname{div} \underline{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad (1.14)$$

in komponentenweiser Schreibweise:

$$\begin{aligned} -\mu \left( \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3} \right) + \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) &= \operatorname{div} \underline{f}, \\ -\mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right) + \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) &= \operatorname{div} \underline{f}. \end{aligned}$$

Mit (1.14) erhält man somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= \Delta p = \operatorname{div} \underline{f}, \\ -\Delta p &= -\operatorname{div} \underline{f}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Die Gleichung (1.15) wird auch Druck Poisson Gleichung (Pressure Poisson Gleichung) genannt. Außerdem ist der Druck  $p$  eindeutig mit Ausnahme von Konstanten. Sei  $p$  eine Lösung des Pressure Poisson Problems, dann ist auch  $\tilde{p} = p + \alpha$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine Lösung des Problems. Diese zusätzliche Information liefert eine Skalierungsbedingung. Somit erhält man insgesamt folgendes Gleichungssystem für den Druck  $p$

$$\begin{aligned} -\Delta p &= -\operatorname{div} \underline{f}, \\ \int_{\Omega} p dx &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

In dieser Arbeit wird das Druck Poisson Problem (1.16) der Stokes Gleichungen (1.9) als Modellproblem betrachtet. Der Schwerpunkt liegt dabei im Finden einer geeigneten Lösung für den Druck. Aus dem Stokes System (1.9) erhält man eine Neumann Randbedingung für den Druck, die in Kapitel 3 genauer erklärt wird. Dabei wird der Laplace-Operator des Geschwindigkeitsfelds am Rand als bekannt angenommen. Ziel dieser Arbeit ist es, die benötigte Analysis und Numerik zur Lösung des Modellproblems (1.16) zu erarbeiten.

## 2 Variationsformulierungen des Modellproblems

In diesem Kapitel werden mehrere Variationsformulierungen für die Druck Poisson Gleichung (1.16) aufgestellt. Anschließend wird die Skalierungsbedingung für den Druck  $p$  mittels Lagrange Multiplikator eingebaut und man erhält eine äquivalente Variationsformulierung. Zum Schluss wird die ultraschwache Variationsformulierung aufgestellt.

### 2.1 Herleitung der Variationsformulierungen für den Druck

In diesem Abschnitt werden Variationsformulierungen für den Druck aus dem Stokes System hergeleitet. Daraus lässt sich erkennen, aus welchen Funktionenräumen die rechte Seite ist. Ausgangspunkt ist die erste Gleichung des Stokes Systems (1.9). Ist das Gebiet polygonal und konvex, beziehungsweise glatt und ist  $f \in L^2(\Omega)$ , dann folgt mit Satz 6, dass  $u \in H^2(\Omega)$  und  $p \in H^1(\Omega)$  ist.

Multipliziert man für  $\mu = 1$  Gleichung (1.12) mit einer geeigneten Testfunktion  $\nabla q$  mit  $q \in H^1(\Omega)$ , so folgt

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot \nabla q dx + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q dx}_{=a(p,q)} = \int_{\Omega} f \nabla q dx,$$

mit der Bilinearform  $\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q dx = a(p, q)$ . Wie man bereits gesehen hat (1.14), verschwindet die Divergenz angewendet auf den Laplace-Operators des Geschwindigkeitsfelds  $u$ . Mit Hilfe von partieller Integration des ersten Integrals ergibt sich

$$-\int_{\Gamma} \Delta u \cdot n q ds_x + \int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} \Delta u}_{=0} q dx + a(p, q) = \int_{\Omega} f \nabla q dx,$$

$$a(p, q) = \int_{\Omega} f \nabla q dx + \int_{\Gamma} \Delta u \cdot n q ds_x. \quad (2.1)$$

Wird auch für die rechte Seite eine partielle Integration durchgeführt, dann folgt

$$\begin{aligned} a(p, q) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q dx + \int_{\Gamma} f \cdot n q ds_x + \int_{\Gamma} \Delta u \cdot n q ds_x, \\ a(p, q) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q dx + \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n q ds_x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Somit erhält man, dass  $\operatorname{div} f \in [H^1(\Omega)]' = \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  und der Randterm  $(f + \Delta u) \cdot n \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Wird für die Bilinearform  $a(p, q)$  eine zweite partielle Integration durchgeführt, dann folgt

$$- \int_{\Omega} p \Delta q dx + \int_{\Gamma} p \frac{\partial q}{\partial n} ds_x = \int_{\Omega} f \nabla q dx + \int_{\Gamma} \Delta u \cdot n q ds_x.$$

Für konvexe Gebiete gilt für die Testfunktion  $q \in H^2(\Omega)$ , somit  $\nabla q \in H^1(\Omega)$ . Folglich gilt die klassische Voraussetzung  $f \in H^1(\Omega)$ . Durch Anwendung der partiellen Integration auf die rechte Seite, erhält man

$$- \int_{\Omega} p \Delta q dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q dx + \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n q ds_x - \int_{\Gamma} p \frac{\partial q}{\partial n} ds_x. \quad (2.3)$$

Demnach muss  $\operatorname{div} f \in [H^2(\Omega)]' = H^{-2}(\Omega)$  und  $(f + \Delta u) \cdot n \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  vorausgesetzt werden.  $H^{-2}(\Omega)$  steht für den Dualraum von  $H^2(\Omega)$ .

## 2.2 Die Greenschen Formeln

Im Folgenden wird die 1. und 2. Greensche Formel für das Druck Poisson Problem (1.16) hergeleitet.

### 2.2.1 Die 1. Greensche Formel

Für die Herleitung der 1. Greenschen Formel wird die erste Gleichung von (1.16) mit einer geeigneten Testfunktion  $q \in H^1(\Omega)$  multipliziert und es wird über das Gebiet  $\Omega$  integriert. Anschließend wird noch eine geeignete partielle Integration durchgeführt:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q dx &= - \int_{\Omega} \Delta p q dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q dx - \int_{\partial\Omega=\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} q ds_x. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Bilinearform

$$a(p, q) = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q dx. \quad (2.4)$$

Die 1. Greensche Formel lautet für  $\operatorname{div} f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$

$$a(p, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} q ds_x. \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Die 2. Greensche Formel

Die 2. Greensche Formel folgt aus der 1. Greenschen Formel (2.5), indem man  $p$  und  $q$  vertauscht und anschließend gleichsetzt

$$a(p, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} q ds_x = - \int_{\Omega} \Delta q p dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial q}{\partial n} p ds_x = a(q, p). \quad (2.6)$$

Setzt man für die Textfunktion  $q \equiv 1$  in die 2. Greensche Formel (2.6), dann erhält man eine Lösbarkeitsbedingung

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div} f \cdot 1 dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} \cdot 1 ds_x &= - \int_{\Omega} \underbrace{\Delta 1}_{=0} p dx + \int_{\Gamma} \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial n}}_{=0} p ds_x, \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div} f dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} ds_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 2.3 Variationsformulierungen für die Pressure Poisson Gleichung

Die Variationsformulierung erhält man aus der 1. Greenschen Formel (2.5). Zunächst wird allerdings auch noch eine partielle Integration für das Integral der rechten Seite durchgeführt. Für  $f \in L^2(\Omega)$  wird  $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  gesucht, so dass gilt:

$$\begin{aligned} a(p, q) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} q ds_x \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \nabla q dx - \int_{\Gamma} \underbrace{f}_{\stackrel{(1.9)}{=} -\Delta u + \nabla p} \cdot n q ds_x + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} q ds_x \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \nabla q dx + \int_{\Gamma} \Delta u \cdot n q ds_x \quad \forall q \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Setzt man für  $f$  die vereinfachte Stokes Gleichung (1.9) mit  $\mu = 1$ , so folgt, dass das Randintegral der Normalenableitung des Drucks  $p$  verschwindet. Wird also eine partielle Integration auf beiden Seite durchgeführt, dann bleibt nur noch das Randintegral über  $\Delta u$  in den Normalenrichtungen. Diese Variationsformulierung ist äquivalent zu (2.1).

**Definition 7.** [8, Kapitel 4.2] Der Raum  $H_*^1(\Omega)$  ist ein Teilraum von  $H^1(\Omega)$ , wo  $\int_{\Omega} v(x)dx = 0$  für alle  $v \in H^1(\Omega)$  gilt,

$$H_*^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v(x)dx = 0\}.$$

Damit erhält man folgendes Variationsproblem für die Pressure Poisson Gleichung (1.16): Gesucht wird  $p \in H_*^1(\Omega)$  mit

$$a(p, q) - \langle \Delta u \cdot n, q \rangle_{\Gamma} = \langle f, \nabla q \rangle_{\Omega} \quad \forall q \in H_*^1(\Omega). \quad (2.8)$$

Führt man für die rechte Seite keine partielle Integration aus, so ergibt sich aus der 1. Greenschen Formel (2.5) eine weitere Variationsformulierung: Für  $\operatorname{div} f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  wird ein  $p \in H_*^1(\Omega)$  gesucht mit

$$a(p, q) - \left\langle \frac{\partial p}{\partial n}, q \right\rangle_{\Gamma} = -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} \quad \forall q \in H_*^1(\Omega). \quad (2.9)$$

Die Variationsformulierung (2.9) ist äquivalent zu (2.2). Es ist allerdings noch unklar, wie man den Raum  $H_*^1(\Omega)$  diskretisieren kann, deshalb folgt die Umsetzung der Skalierungsbedingung  $\int_{\Omega} p(x)dx = 0$  in die Variationsformulierung.

## 2.4 Variationsformulierung mit Lagrange Multiplikator

Die Normierung des Drucks (2. Gleichung von (1.16)) soll auch in die Variationsformulierung miteinfließen. Die Umsetzung dieser Nebenbedingung im Pressure Poisson Problem erfolgt mittels Lagrange Multiplikator. Die Skalierungsbedingung zur Fixierung des Drucks  $p \in H^1(\Omega)$  wird mit einem Lagrange Multiplikator  $\lambda \in \mathbb{R}$  umformuliert. An dieser Stelle wird die Umsetzung der Skalierungsbedingung in die Variationsformulierungen (2.8) und (2.9) gezeigt, dabei wird die Lösbarkeitsbedingung (2.7) verwendet. Für  $\operatorname{div} f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  werden  $(p, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$  gesucht, für die gilt:

$$\begin{aligned} -a(p, q) + \lambda \int_{\Omega} q dx - \left\langle \frac{\partial p}{\partial n}, q \right\rangle_{\Gamma} &= -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega}, \\ a(p, q) + \lambda \int_{\Omega} q dx &= \langle f, \nabla q \rangle_{\Omega} + \langle \Delta u \cdot n, q \rangle_{\Gamma} \quad \forall q \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_{\Omega} p dx = 0.$$

Auch für diese Formulierungen kann eindeutige Lösbarkeit gezeigt werden. In der gesamten Arbeit werden ausschließlich Beispiele diskutiert, für die  $\Delta u$  gegeben ist. Es

lässt sich einfach zeigen, dass die beiden Formulierungen äquivalent sind. Mit partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} a(p, q) &= \langle f, \nabla q \rangle_{\Omega} + \langle \Delta u \cdot n, q \rangle_{\Gamma} \\ &= -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} + \langle f \cdot n, q \rangle_{\Gamma} + \langle \Delta u \cdot n, q \rangle_{\Gamma} \\ &= -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} + \left\langle \frac{\partial p}{\partial n}, q \right\rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

Setzt man die Testfunktion  $q \equiv 1$ , so erhält man mit Hilfe der Lösbarkeitsbedingung (2.7) eine äquivalente Formulierung.

$$\begin{aligned} \underbrace{a(p, 1)}_{=0} + \lambda |\Omega| &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} f dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} ds_x \stackrel{(2.7)}{=} 0, \\ \Rightarrow \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Da  $\lambda = 0$  für beide Variationsformulierungen (2.8) und (2.9) gilt, kann man die zweite Gleichung von (1.16), also die Nebenbedingung um den Term  $\lambda$  erweitern. Man erhält somit eine äquivalente Formulierung. Gesucht werden  $(p, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} a(p, q) + \lambda \int_{\Omega} q dx &= \int_{\Omega} f \cdot \nabla q dx + \int_{\Gamma} \Delta u \cdot n q ds_x, \\ \int_{\Omega} p dx - \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man  $\lambda$  durch Einsetzen der 2. Gleichung in die 1. Gleichung, so erhält man das modifizierte Variationsproblem. Für  $f \in L^2(\Omega)$  wird  $p \in H^1(\Omega)$  gesucht:

$$\underbrace{a(p, q) + \int_{\Omega} p dx}_{=\tilde{a}(p, q)} + \int_{\Omega} q dx = \int_{\Omega} f \cdot \nabla q dx + \int_{\Gamma} \Delta u \cdot n q ds_x \quad \forall q \in H^1(\Omega). \quad (2.10)$$

Da der Druck  $p$  bis auf Konstanten eindeutig ist, kann die Skalierungsbedingung (1.16) auch folgendermaßen gewählt werden

$$\int_{\Omega} p dx = \alpha.$$

Für  $\alpha \neq 0$  kann es allerdings zu einer Verschiebung der numerischen Lösung um diesen konstanten Wert  $\alpha$  kommen. Deshalb erhält man einen zusätzlichen Term auf der rechten Seite in der Variationsformulierung (2.10). Gesucht wird  $p \in H^1(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(p, q) &= \int_{\Omega} f \cdot \nabla q dx + \alpha \int_{\Omega} q dx \quad \forall q \in H^1(\Omega), \\ \text{mit } \alpha &= \int_{\Omega} p dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Analog kann auch für die Variationsformulierung (2.9), wo keine partielle Integration der rechten Seite durchgeführt wurde, die Skalierungsbedingung des Drucks  $p$  (2. Gleichung von (1.16)) eingebaut werden. Für  $\operatorname{div} f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  wird  $p \in H^1(\Omega)$  gesucht:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(p, q) - \left\langle \frac{\partial p}{\partial n}, q \right\rangle_{\Gamma} &= -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} + \alpha \int_{\Omega} q dx, \\ \text{mit } \alpha &= \int_{\Omega} p dx \quad \forall q \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sei  $p$  eine Lösung von (2.9) mit  $\int_{\Omega} p(x) dx = \alpha$  und  $\alpha \neq 0$ . Dann ist auch  $\tilde{p} = p - \frac{\alpha}{|\Omega|}$  eine Lösung von (2.9) und es gilt

$$\int_{\Omega} \tilde{p}(x) dx = \int_{\Omega} p(x) dx - \frac{\alpha}{|\Omega|} \underbrace{\int_{\Omega} 1 dx}_{=|\Omega|} = \alpha - \alpha = 0.$$

Für  $\alpha \neq 0$  wählt man somit  $\tilde{p} = p - \frac{\alpha}{|\Omega|}$  und rechnet mit dem modifizierten Variationsproblem (2.10) oder man erhält auf der rechten Seite der Variationsformulierung einen Verschiebungsterm wie in (2.11) beziehungsweise (2.12).

## 2.5 Die ultraschwache Variationsformulierung

Wenn die Bilinearform (2.4) ein zweites Mal partiell integriert wird, dann erhält man eine weitere Variationsformulierung. Nun wird auch für den Druck keine Lösung mehr im Raum  $H^1(\Omega)$  gesucht, sondern im Raum  $L^2(\Omega)$ . Die nachfolgende Variationsformulierung ist mit (2.3) äquivalent. Für  $\operatorname{div} f \in H^{-2}(\Omega)$  wird  $p \in L^2(\Omega)$  gesucht, für die gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p(-\Delta q) dx + \int_{\Omega} p dx \int_{\Omega} q dx &= -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} + \left\langle \frac{\partial p}{\partial n}, q \right\rangle_{\Gamma} - \left\langle p, \frac{\partial q}{\partial n} \right\rangle_{\Gamma} + \alpha \int_{\Omega} q dx, \\ \text{mit } \alpha &= \int_{\Omega} p dx \quad \forall q \in H^2(\Omega). \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Definition 8.** [1, Kapitel 1, S. 27]  $H^2(\Omega)$  bezeichne die Menge aller Funktionen  $u \in L^2(\Omega)$ , die schwache Ableitungen  $\partial^{\alpha} u$  für alle  $|\alpha| \leq 2$  besitzen. In  $H^2(\Omega)$  wird durch

$$\langle u, v \rangle_{H^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u(x) \partial^{\alpha} v(x) dx$$

ein Skalarprodukt mit der zugehörigen Norm

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

und der Halbnorm

$$|u|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

definiert.

Man nennt die Variationsformulierung (2.13) auch ultra schwache Variationsformulierung (ultra weak variational formulation/UWVF). Hauptaugenmerk liegt im Finden von geeigneten Ansatz- und Testräume. Für komplexe Gebiete hat man festgestellt, dass  $H^2(\Omega)$  eine geeignete Wahl als Ansatzraum und  $L^2(\Omega)$  eine geeignete Wahl als Testraum ist [14, Kapitel 1]. Für  $\alpha = 0$  entfällt der Verschiebungsterm auf der rechten Seite. Daher gilt, gesucht wird  $p \in L^2(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} p(-\Delta q) dx + \int_{\Omega} p dx \int_{\Omega} q dx = -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} + \left\langle \frac{\partial p}{\partial n}, q \right\rangle_{\Gamma} - \left\langle p, \frac{\partial q}{\partial n} \right\rangle_{\Gamma} \quad (2.14)$$

für alle  $q \in H^2(\Omega)$ .

Sei die Testfunktion  $q \in H_{\Delta}(\Omega)$  mit

$$H_{\Delta}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega)\}.$$

Für konvexe Gebiete  $\Omega$  gilt, dass  $H_{\Delta}(\Omega)$  dem Raum  $H^2(\Omega)$  entspricht. Was passiert aber für nicht konvexe Gebiete? Für Randwertproblem 2. Ordnung besitzt das polygonale, aber nicht konvexe Gebiet  $\Omega$  einspringende Ecken. Solche Gebiete mit nicht glattem Rand sind numerisch schwierig zu berechnen. Im Allgemeinen hat die Lösung des Randwertproblems dann eine Singularität.

Betrachtet man nun das Laplace Problem  $\Delta v = 0$ . In einem Gebiet  $\Omega$  mit einspringender Ecke (zum Beispiel das L-Shape) verliert die Lösung  $v$  an Regularität. Für solche Gebiete kann man  $v$  in einen singulären und regulären Anteil mit

$$v = v_s + v_{reg}$$

mit  $v_{reg} \in H^2(\Omega)$  und  $v_s \notin H^2(\Omega)$  darstellen. Die Singulärfunktionen haben im Allgemeinen folgende Gestalt:

$$v_s = r^\lambda \sin(\lambda\theta), \lambda = \frac{\pi}{\omega}.$$

Dabei bezeichnet  $(r, \theta)$  die Polarkoordinaten und  $\omega$  steht für den Innenwinkel der einspringenden Ecke. Für ein L-Gebiet ist der überstumpfe Innenwinkel  $\omega = \frac{3\pi}{2}$ .



# 3 Eindeutige Lösbarkeit im Kontinuierlichen

In diesem Abschnitt wird die Existenz und die eindeutige Lösbarkeit des Pressure Poisson Problem (1.16) im Kontinuierlichen diskutiert. Zunächst wird gezeigt, dass die Variationsformulierung (2.9) eindeutig lösbar ist. Anschließend wird bewiesen, dass das modifizierte Variationsproblem (2.12) und das Variationsproblem (2.9) äquivalent sind. Zum Schluss wird die eindeutige Lösbarkeit der ultraschwachen Variationsformulierung (2.14) gezeigt.

**Bemerkung 9.** (*Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung*) [8, Kapitel 3.1]  
Für quadratintegrierbare Funktionen  $u, v \in L^2(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Das Lemma von Lax-Milgram und der Spursatz werden in dieser Arbeit ohne Beweis angeführt.

**Satz 10.** (*Lemma von Lax-Milgram*) [8, Kapitel 2.2, Satz 2.2.1]  
Sei  $X$  ein Hilbertraum. Sei der lineare Operator  $A : X \rightarrow X'$  beschränkt und  $X$ -elliptisch. Dann besitzt die Operatorgleichung

$$Au = f$$

für jedes  $f \in X'$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in X$  mit

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{c_1^A} \|f\|_{X'}.$$

**Definition 11.** (*Sobolevraum am Rand  $\Gamma$* ) [8, Kapitel 3.6.2]  
 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{w = \gamma_0^{int} v \text{ auf } \Gamma : v \in H^1(\Omega)\}$  mit der Norm

$$\|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \gamma_0^{int} v = w}} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Aus dieser Definition folgt sofort der Spursatz.

**Satz 12.** (Spursatz)[8, Kapitel 3.6.2, Satz 3.6.1] Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein Lipschitz-Gebiet.  $\gamma_0^{int} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  ist ein beschränkter, linearer Operator, mit

$$\|\gamma_0^{int} u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_T \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Das gilt auch für  $\frac{1}{2} < s \leq k$  mit  $\gamma_0^{int} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , falls  $\Omega$  ein  $C^{k-1,1}$ -Gebiet ist, beziehungsweise für  $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  für ein Lipschitz-Gebiet.  $C^{k-1,1}$  ist der Raum der auf  $\Omega$  beschränkten und  $(k-1)$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen der Ordnung  $k-1$  Lipschitz-stetig sind. Der Spursatz zeigt, dass der Spuroperator  $\gamma_0^{int} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  für  $k=1$  und  $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  stetig ist. Für  $s > \frac{3}{2}$  bezeichnet die Abbildung  $\gamma_1^{int} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  die Konormalenableitung mit

$$\gamma_1^{int} p(x) = \sum_{i,j=1}^d n_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} p(x), \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Zunächst wird bewiesen, dass das Variationsproblem (2.9) eine eindeutige Lösung  $p \in H_*^1(\Omega)$  besitzt. Für  $\Delta u$  gegeben bekommt man aus der Stokes Gleichung (1.9) eine Neumann Randbedingung. Es gilt

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f, \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= \nabla p \cdot n = f \cdot n + \Delta u \cdot n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Setzt man die Neumann Randbedingungen (3.1) in das Variationsproblem (2.9) ein, dann ergibt sich: Gesucht wird  $p \in H_*^1(\Omega)$  mit

$$\begin{aligned} a(p, q) &= -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_\Omega + \langle f \cdot n, q \rangle_\Gamma + \langle \Delta u \cdot n, q \rangle_\Gamma, \\ a(p, q) &= -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_\Omega + \langle (f + \Delta u) \cdot n, q \rangle_\Gamma \quad \forall q \in H_*^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.2)$$

### 3.1 Die eindeutige Lösbarkeit des Neumann Problems

In diesem Abschnitt wird die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Variationsproblems (3.2) mit Neumann Randbedingungen bewiesen. Anschließend wird gezeigt, dass das modifizierte Variationsproblem und das Neumannproblem äquivalent sind.

**Satz 13.** Sei  $\operatorname{div} f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ ,  $(f + \Delta u) \cdot n \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  und die Lösbarkeitsbedingung (2.7) sei erfüllt. Das Variationsproblem (3.2) besitzt eine eindeutige Lösung  $p \in H_*^1(\Omega)$  mit

$$\|p\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c_1^A} \left\{ \|\operatorname{div} f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + c_T \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right\}.$$

**Beweis.** Zu zeigen ist die Beschränktheit der Linearform

$$F(q) = -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} + \langle (f + \Delta u) \cdot n, q \rangle_{\Gamma},$$

sowie die Beschränktheit und Elliptizität der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  (2.4). Aus  $\operatorname{div} f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ ,  $(f + \Delta u) \cdot n \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  und dem Spursatz (Satz 12) folgt die Beschränktheit der Linearform. Die Integrale werden mit der Norm der jeweiligen Räume abgeschätzt. Für alle  $q \in H^1(\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} |F(q)| &\leq \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} f q dx \right| + \left| \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n q ds_x \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\operatorname{div} f q| dx + \int_{\Gamma} |(f + \Delta u) \cdot n \cdot n q| ds_x \\ &\leq \|\operatorname{div} f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} \|q\|_{H^1(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \underbrace{\|\gamma_0^{\text{int}} q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}}_{\substack{\text{Satz 12} \\ \leq c_T \|q\|_{H^1(\Omega)}}} \\ &\leq \left[ \|\operatorname{div} f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + c_T \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right] \|q\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq c \|q\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Beschränktheit der Bilinearform wird mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung (Bemerkung 9) gezeigt. Es gilt

$$\begin{aligned} |a(p, q)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla p \nabla q dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla p \nabla q| dx \\ &\stackrel{CSU}{\leq} \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_2^A \|p\|_{H^1(\Omega)} \|q\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall p, q \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Für die  $H_1^*$ -Elliptizität gilt:

$$\begin{aligned} a(q, q) &= \int_{\Omega} [\nabla q(x)]^2 dx \\ &= \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq c_1^A \|q\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall q \in H_*^1(\Omega). \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Lax-Milgram (Satz 10) folgt die eindeutige Lösung  $p$  des Varia-

tionsproblems (3.2). Die Abschätzung lässt sich folgenderweise zeigen:

$$\begin{aligned}
c_1^A \|p\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(p, p) \\
&= -\langle \operatorname{div} f, p \rangle_\Omega + \langle (f + \Delta u) \cdot n, \gamma_0^{\text{int}} p \rangle_\Gamma \\
&\leq |F(q)| \\
&\leq \|p\|_{H^1(\Omega)} \left[ \|\operatorname{div} f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + c_T \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right].
\end{aligned}$$

Durch Division der Norm  $\|p\|_{H^1(\Omega)}$  ergibt sich die gewünschte Abschätzung.  $\square$

Da der Raum  $H_*^1(\Omega)$  schwer zu diskretisieren ist, wird im nächsten Schritt die eindeutige Lösbarkeit des modifizierten Variationsproblems (2.12) mit Neumann Randbedingungen (3.1)

$$\tilde{a}(p, q) = -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_\Omega + \langle (f + \Delta u) \cdot n, q \rangle_\Gamma \quad \forall q \in H^1(\Omega) \quad (3.3)$$

bewiesen. Daraus wird gezeigt, dass das modifizierte Variationsproblem (3.3) und das Variationsproblem (3.2) äquivalent sind.

**Satz 14.** Für  $\operatorname{div} f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  und  $(f + \Delta u) \cdot n \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  besitzt das modifizierte Variationsproblem (3.3) eine eindeutige Lösung. Erfüllt  $\operatorname{div} f$  und  $\gamma_1^{\text{int}} p$  die Lösbarkeitsbedingung (2.7), so gilt  $p \in H_*^1(\Omega)$ . Das heißt, das Variationsproblem (3.2) und das modifizierte Variationsproblem (3.3) sind äquivalent.

**Beweis.** Zunächst wird gezeigt, dass  $\tilde{a}(p, q)$   $H^1(\Omega)$ -elliptisch und beschränkt ist. Dabei werden die Elliptizität und Beschränktheit der Bilinearform  $a(p, q)$  ausgenutzt, die im Beweis von Satz 13 bereits gezeigt wurden. Außerdem weiß man aus dem Beweis von Satz 13, dass die Linearform  $F(q)$  beschränkt ist. Dann folgt aus dem Lemma von Lax-Milgram (Satz 10) die eindeutige Lösbarkeit.

- $H^1(\Omega)$ -Elliptizität

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(q, q) &= a(q, q) + \left[ \int_\Omega q(x) dx \right]^2 \\
&= \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \|q\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\geq \hat{c}_1^A \|q\|_{H^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

- Die Beschränktheit folgt mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung (Bemerkung 9). Es gilt

$$\int_\Omega q(x) dx \leq \int_\Omega q(x) \cdot 1 dx \stackrel{CSU}{\leq} \underbrace{\left\{ \int_\Omega [q(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}}_{=\|q\|_{L^2(\Omega)}} \underbrace{\left\{ \int_\Omega 1^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}}_{=|\Omega|^{\frac{1}{2}}} = |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Somit folgt für die modifizierte Bilinearform  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned}\tilde{a}(p, q) &= a(p, q) + \int_{\Omega} p(x) dx \int_{\Omega} q(x) dx \\ &\leq c_2^A \|p\|_{H^1(\Omega)} \|q\|_{H^1(\Omega)} + c \|p\|_{H^1(\Omega)} \|q\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \hat{c}_2^A \|p\|_{H^1(\Omega)} \|q\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Lax-Milgram (Satz 10) folgt somit, dass das modifizierte Variationsproblem (3.3) eindeutig lösbar ist.

Nun zur Äquivalenz. Für  $q \equiv 1$  und der Lösbarkeitsbedingung (2.7) ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{a}(p, q) &= \underbrace{a(p, 1)}_{=0} + \int_{\Omega} p dx \underbrace{\int_{\Omega} 1 dx}_{=|\Omega|} \\ &= -\langle \operatorname{div} f, 1 \rangle_{\Omega} + \langle \gamma_1^{\operatorname{int}} p, \gamma_0^{\operatorname{int}} 1 \rangle_{\Gamma} = 0.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass  $\int_{\Omega} p dx = 0$  erfüllt ist, also ist  $p \in H_*^1(\Omega)$  und die beiden Variationsformulierungen sind äquivalent.  $\square$

## 3.2 Die eindeutige Lösbarkeit der ultraschwachen Variationsformulierung

Zum Schluss wird noch gezeigt, dass auch das ultraschwache Variationsproblem (2.14) mit Neumann Randbedingungen (3.1)

$$\int_{\Omega} p(-\Delta q) dx + \int_{\Omega} p dx \int_{\Omega} q dx = -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} + \langle (f + \Delta u) \cdot n, \gamma_0^{\operatorname{int}} q \rangle_{\Gamma} - \langle \gamma_0^{\operatorname{int}} p, \gamma_1^{\operatorname{int}} q \rangle_{\Gamma}$$

für alle  $q \in H^2(\Omega)$  eine eindeutige Lösung besitzt. Die Testfunktionen  $q \in H^2(\Omega)$  werden so gewählt, dass ihre Normalenableitung  $\gamma_1^{\operatorname{int}} q$  am Rand verschwindet.

**Definition 15.** Der Raum  $H_*^2(\Omega)$  ist ein Teilraum vom Raum  $H^2(\Omega)$ , wo die Konormalenableitung  $\gamma_1^{\operatorname{int}}$  verschwindet,

$$H_*^2(\Omega) = \{v : v \in H^2(\Omega), \gamma_1^{\operatorname{int}} v = 0\}.$$

Durch die geeignete Wahl des Testraum  $H_*^2(\Omega)$  lautet das ultraschwache Variationsproblem: Gesucht wird  $p \in L_0^2(\Omega)$ , für die

$$\int_{\Omega} p(-\Delta q) dx = -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} + \langle (f + \Delta u) \cdot n, \gamma_0^{\operatorname{int}} q \rangle_{\Gamma} \quad (3.4)$$

für alle  $q \in H_*^2(\Omega)$  gilt. Auch für die ultraschwache Variationsformulierung (3.4) kann eine äquivalente Operatorgleichung geschrieben werden. Sei  $B : L_0^2(\Omega) \rightarrow H^{-2}(\Omega)$  ein linearer Operator mit

$$\langle Bp, q \rangle_\Omega = \int_\Omega p(x)[- \Delta q(x)] dx$$

und die rechte Seite  $F(q) : H_*^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(q) = -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_\Omega + \langle (f + \Delta u) \cdot n, q \rangle_\Gamma.$$

Gesucht wird  $p \in L_0^2(\Omega)$  mit

$$\langle Bp, q \rangle_\Omega = F(q) \quad (3.5)$$

für alle  $q \in H_*^2(\Omega)$ .

**Definition 16.** [12, Kapitel 3.3, S. 48] Seien  $X$  und  $\Pi$  Hilberträume und  $B : X \rightarrow \Pi'$ . Der adjungierte Operator  $B' : \Pi \rightarrow X'$  ist definiert durch

$$\langle v, B'q \rangle_X = \langle Bv, q \rangle_\Pi \quad \forall (v, q) \in X \times \Pi.$$

Der Nullraum vom Operator  $B$  und  $B'$  ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \ker B &= \{v \in X : Bv = 0\}, \\ \ker B' &= \{q \in \Pi : \langle Bv, q \rangle = 0 \text{ für alle } v \in X\}. \end{aligned}$$

Das Bild vom Operator  $B$  ist definiert als

$$g \in \operatorname{Im}_X B = \{Bv \in \Pi' \text{ für alle } v \in X\}.$$

Um die Existenz und die Eindeutigkeit von (3.4) beweisen zu können, wird der nachstehende Satz benötigt.

**Satz 17.** [12, Theorem 3.3, S. 50]

Seien  $X$  und  $\Pi$  Hilberträume und sei  $B : X \rightarrow \Pi'$  ein beschränkter, linearer Operator. Es gelte die Stabilitätsabschätzung

$$c_S \|v\|_X \leq \sup_{0 \neq q \in \Pi} \frac{\langle Bv, q \rangle}{\|q\|_\Pi} \quad \forall v \in (\ker B)^\perp.$$

Für  $g \in \operatorname{Im}_X(B)$  existiert eine eindeutige Lösung  $u \in (\ker B)^\perp$  der Operatorgleichung  $Bu = g$  und es gilt

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{c_S} \|g\|_{\Pi'}.$$

Für die Existenz einer Lösung  $p \in (\ker B)^\perp \subset L_0^2(\Omega)$  der Operatorgleichung  $Bp = F$  muss somit  $F \in \operatorname{Im}_{L_0^2(\Omega)} B$  liegen. Man kann zeigen, dass  $F \in \operatorname{Im}_{L_0^2(\Omega)} B$  äquivalent zu  $F(q) = 0$  für alle  $q \in \ker B' \subset H_*^2(\Omega)$  ist [12, Kapitel 3.3, S.49].

**Satz 18.** [9, Satz 2.2.2.3, S. 90] [15, Satz 6.85, S. 212]

Ist  $\Omega$  konvex, so ist für jedes  $f \in L^2(\Omega)$  die Lösung  $u$  des Poisson Problems  $-\Delta u = f$  in  $H^2(\Omega)$  und es gilt

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Lemma 19.** [6, Lemma 4, S. 9] Sei  $u, f \in L^2(\Omega)$ , dann folgt aus

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

dass

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

gilt.

**Satz 20.** [14, Lemma 2.1, S. 3] Für ein konvexes Gebiet  $\Omega$  mit  $\operatorname{div} f \in H^{-2}(\Omega)$  und  $(f + \Delta u) \cdot n \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  existiert eine eindeutige Lösung  $p \in L^2(\Omega)$  des Problems (3.4) und es gilt die Abschätzung

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left( \|\operatorname{div} f\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right).$$

Der Beweis wird in [10, Beweis zu Lemma 2.1, S. 2588] und [14, Beweis zu Lemma 2.1, S. 4] für Testfunktionen  $q \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  und Dirichlet Randdaten  $g = \gamma_0^{\operatorname{int}} p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  geführt.

**Beweis.** (zu Satz 20) Um die Beschränktheit der rechten Seite  $F(q)$  von (3.4) zu zeigen, benötigt man den Spursatz (Satz 12). Für Funktionen  $q \in H_*^2(\Omega)$  ist  $\gamma_0^{\operatorname{int}} q \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Mit Hilfe des Spursatzes kann bewiesen werden, dass für die Abbildung  $\gamma_0^{\operatorname{int}} : H_*^2(\Omega) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$  die Abschätzung

$$\|\gamma_0^{\operatorname{int}} q\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leq c_T \|q\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall q \in H_*^2(\Omega) \quad (3.6)$$

gilt. Mit (3.6) folgt die Beschränktheit der rechten Seite  $F(q)$ .

$$\begin{aligned} |F(q)| &= \left| - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q dx + \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n q ds_x \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\operatorname{div} f q| dx + \int_{\Gamma} |(f + \Delta u) \cdot n q| ds_x \\ &\leq \|\operatorname{div} f\|_{H^{-2}(\Omega)} \|q\|_{H^2(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \underbrace{\|\gamma_0^{\operatorname{int}} q\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}}_{\stackrel{(3.6)}{\leq} c_T \|q\|_{H^2(\Omega)}} \\ &\leq c \left[ \|\operatorname{div} f\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right] \|q\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Sei  $B : L_0^2(\Omega) \rightarrow H^{-2}(\Omega)$  ein linearer, beschränkter Operator mit  $\langle Bp, q \rangle_{\Omega} = - \int_{\Omega} p \Delta q dx$  und  $p \in L_0^2(\Omega)$ ,  $q \in H_*^2(\Omega)$ . Damit man Satz 17 benutzen kann, muss zunächst gezeigt

werden, dass  $F$  im Bild vom Operator  $B$  liegt. Wie bereits erwähnt ist  $F \in \text{Im}_{L_0^2(\Omega)} B$  äquivalent zu  $F(q) = 0$  für alle  $q \in \ker B' \subset H_*^2(\Omega)$ .

Zunächst wird bewiesen, dass der Nullraum vom adjungierten Operator  $B'$  nur das Nullelement enthält, das heißt es gilt

$$\ker B' = \{q \in H_*^2(\Omega) : \langle Bp, q \rangle_\Omega = 0, \forall p \in L_0^2(\Omega)\} = \{0\}.$$

Mit anderen Worten werden alle  $q \in H_*^2(\Omega)$  gesucht, für die

$$-\int_{\Omega} p \Delta q dx = 0$$

für alle  $p \in L_0^2(\Omega)$  erfüllt ist. Daraus folgt gerade, dass  $-\Delta q = 0 \in L^2(\Omega)$  und zusammen mit  $q \in H_*^2(\Omega)$  ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\Delta q &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_n q &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Das obige System ist nur für konstante Funktionen  $q$  erfüllt. Somit gilt mit der Lösbarkeitsbedingung (2.7)

$$F(q) = q \left( -\int_{\Omega} \text{div } f dx + \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n ds_x \right) \stackrel{(2.7)}{=} 0.$$

Es gilt  $F(0) = 0$ . Da der Nullraum des adjungierten Operators  $B'$  nur das Nullelement enthält, gilt  $F(q) = 0$  für alle  $q \in \ker B'$ . Demnach ist  $F \in \text{Im}_{L_0^2(\Omega)} B$  und es existiert eine Lösung  $p \in L_0^2(\Omega)$  von (3.4).

Für die Anwendung von Satz 17 muss die kontinuierliche Stabilitätsabschätzung

$$c_S \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{0 \neq q \in H_*^2(\Omega)} \frac{\langle Bp, q \rangle}{\|q\|_{H^2(\Omega)}} \quad (3.7)$$

für  $p \in L_0^2(\Omega)$  und  $q \in H_*^2(\Omega)$  erfüllt sein. Um die Abschätzung (3.7) zeigen zu können, muss zunächst ein Hilfsproblem betrachtet werden. Sei  $v_p \in H^1(\Omega)$  mit  $p \in L_0^2(\Omega)$  die Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta v_p &= p & \text{in } \Omega, \\ \partial_n v_p &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Die schwache Formulierung des Hilfsproblems lautet somit: Gesucht wird  $v_p \in H^1(\Omega)$  für die gilt

$$\langle \nabla v_p, \nabla w \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle p, w \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Dieses Variationsproblem ist mit Satz 13 eindeutig lösbar und da  $\Omega$  konvex ist, folgt mit Satz 18, dass  $v_p \in H_*^2(\Omega)$  mit

$$\|v_p\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|p\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.8)$$

Mit Lemma 19 gilt für

$$-\langle \Delta v_p, w \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle p, w \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

sogar

$$-\langle \Delta v_p, w \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle p, w \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in L^2(\Omega).$$

Damit erhält man die kontinuierliche Stabilitätsabschätzung (3.7).

$$\begin{aligned} \sup_{0 \neq q \in H_*^2(\Omega)} \frac{\langle Bp, q \rangle}{\|q\|_{H^2(\Omega)}} &= \sup_{0 \neq q \in H_*^2(\Omega)} \frac{-\langle \Delta q, p \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|q\|_{H^2(\Omega)}} \geq \frac{-\langle \Delta v_p, p \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|v_p\|_{H^2(\Omega)}} \\ &= \frac{\langle p, p \rangle_{L^2(\Omega)}}{\underbrace{\|v_p\|_{H^2(\Omega)}}_{\substack{(3.8) \\ \leq c\|p\|_{L^2(\Omega)}}}} \geq \frac{\|p\|_{L^2(\Omega)}^2}{c\|p\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{c}\|p\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Somit kann Satz 3.4 angewendet werden und es existiert für  $\operatorname{div} f \in H^{-2}(\Omega)$  und  $f \cdot n \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  eine eindeutige Lösung des ultraschwachen Variationsproblem (3.4). Aus der Stabilitätsabschätzung (3.7) und der Beschränktheit der rechten Seite  $F(q)$  bekommt man die gesuchte Abschätzung:

$$\begin{aligned} c_S \|p\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sup_{0 \neq q \in H_*^2(\Omega)} \frac{-\langle \Delta q, p \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|q\|_{H^2(\Omega)}} = \sup_{0 \neq q \in H_*^2(\Omega)} \frac{F(q)}{\|q\|_{H^2(\Omega)}} \leq \sup_{0 \neq q \in H_*^2(\Omega)} \frac{|F(q)|}{\|q\|_{H^2(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{0 \neq q \in H_*^2(\Omega)} \frac{c}{\|q\|_{H^2(\Omega)}} \left( \|\operatorname{div} f\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right) \|q\|_{H^2(\Omega)} \\ &= c \left( \|\operatorname{div} f\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right). \end{aligned}$$

□

Dieser Beweis funktioniert nur für Gebiete mit glattem Rand oder für konvexe Gebiete, da sonst Satz (18) nicht gilt. Eine Menge  $\Omega$  heißt konvex, falls mit  $x, y \in \Omega$  auch  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega$  für alle  $\lambda \in (0, 1)$  gilt [15, Kapitel 6.11, S.211]. Diese Beweismethode ist auf konvexe Gebiete begrenzt, da der Isomorphismus

$$\Delta v_p \in L^2(\Omega), \partial_n v_p|_{\Gamma} = 0 \Leftrightarrow v \in H_*^2(\Omega)$$

verwendet wurde.

**Beispiel 1.** Sei  $\Omega = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, 0 < \theta < \omega\}$  mit  $0 < \omega \leq 2\pi$  ein nicht konvexes Gebiet mit einspringender Ecke. Es wird die Poisson Gleichung  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$  mit den Randbedingungen

$$u(r, \theta) = 0 \text{ und } u(r, \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right)$$

betrachtet. An der einspringenden Ecke kann  $u$  durch

$$u_1(x, y) = \tilde{u}_1(r, \theta) = r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right)$$

approximiert werden. In Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  ergibt die Anwendung des Laplace-Operators

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \\ &= \left[ \frac{\pi}{\omega} \left( \frac{\pi}{\omega} - 1 \right) + \frac{\pi}{\omega} - \frac{\pi^2}{\omega^2} \right] r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right) \\ &= 0 \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Für  $u_2 = r^{-\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(-\frac{\pi}{\omega}\theta\right)$  ist auch  $\Delta u_2 = 0 \in L^2(\Omega)$ , also sind  $u_1$  und  $u_2$  harmonische Funktionen in  $\Omega$ . Durch die Wahl von  $\lambda = \frac{\pi}{\omega}$  sind die Randbedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} u_1|_{\theta=0} &= 0 & u_1|_{\theta=\omega} &= 0 & u_1|_{r=1} &= \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right), \\ u_2|_{\theta=0} &= 0 & u_2|_{\theta=\omega} &= 0 & u_2|_{r=1} &= \sin\left(-\frac{\pi}{\omega}\theta\right). \end{aligned}$$

Dann gilt für die Ableitung in radialer Richtung

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\pi}{\omega} r^{\frac{\pi}{\omega}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right).$$

Für nicht konvexe Gebiete wird die Ableitung  $\partial_r u(r, \theta)$  an der einspringenden Ecke unendlich, das bezeichnet man als Singularität.  $u$  ist keine klassische Lösung des Problems, aber weiterhin eine schwache Lösung.

Die Regularität der Lösung hängt somit von der Form des Gebiets ab. Für nicht konvexe Gebiete muss der Testraum erweitert werden. Es wird der Raum

$$H_*^2(\Omega) \oplus \text{span}\{\xi(r)r^\lambda \sin(\lambda\theta)\}$$

betrachtet. Dabei bezeichnet  $\xi(r)$  eine glatte Funktion, die die Singularitäten eliminiert.

# 4 Eindeutige Lösbarkeit im Diskreten

In diesem Kapitel wird die diskrete Variationsformulierung des modifizierten Problems (3.3) und die diskrete Formulierung des ultraschwachen Problems (3.4) betrachtet. Das ultraschwache Variationsproblem wird mit Hilfe von quadratischen B-Splines im ein- und zweidimensionalen Fall diskutiert. Weiters wird die eindeutige Lösbarkeit der beiden diskreten Formulierungen gezeigt und abschließend werden Fehlerabschätzungen angeführt.

## 4.1 Diskretisierung des modifizierten Variationsproblems (3.3)

Zur Vereinfachung wird das modifizierte Variationsproblem (2.12) mit Neumann Randbedingungen (3.1) und  $\alpha = 0$  diskretisiert, das heißt der Verschiebungsterm auf der rechten Seite fällt weg. Wie bereits in Abschnitt 1.3 erwähnt wurde, kann der Bilinearform  $a$  ein linearer Operator  $A$  zugeordnet werden (1.11). Also ist die Variationsformulierung (3.3), äquivalent zur Operatorgleichung: Bestimme die Lösung  $p \in H^1(\Omega)$ :

$$(A + \underline{a} \cdot \underline{a}^T)\underline{p} = \underline{f}, \quad (4.1)$$

wobei  $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  gilt,  $A : H^1(\Omega) \rightarrow \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  ist ein linearer Operator und  $a \in \mathbb{R}^M$  ist der Stabilisierungsvektor.

### 4.1.1 Galerkin-Bubnov Formulierung

Als erstes wird Gleichung (4.1) diskretisiert. Ersetzt man die kontinuierlichen Ansatz- und Testräume durch Familien endlich dimensionaler Räume, so erhält man eine Näherungsmethode für das Variationsproblem. Man betrachtet eine Familie konformer Ansatzräume  $X_h = \text{span}\{\varphi_k^1\}_{k=1}^M \subset H^1(\Omega)$ , die von den Basisfunktionen  $\varphi_k^1$  aufgespannt werden. Ein klassischer Ansatzraum für Randwertprobleme 2. Ordnung ist der Raum  $S_h^1(\Omega)$  der stückweise linearen und global stetigen Funktionen mit Dimension  $M$ .

Handelt es sich um gleiche Ansatz- und Testräume, dann spricht man von einer

Galerkin-Bubnov-Formulierung. Der Ansatz  $p_h = \sum_{k=1}^M p_k \varphi_k^1 \in X_h$  erklärt eine Näherungslösung der Galerkin-Bubnov-Variationsformulierung. Gesucht wird  $p_h \in X_h$ :

$$a(p_h, q_h) + \int_{\Omega} p_h dx \int_{\Omega} q_h dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q_h dx + \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n q_h ds_x \quad \forall q_h \in X_h. \quad (4.2)$$

Da  $X_h \subset H^1(\Omega)$  setzt man  $q = q_h \in X_h$  in die Variationsformulierung (3.3) ein. Subtrahiert man dann die diskrete Variationsformulierung (4.2), liefert das die Galerkin-Orthogonalität

$$\langle A(p - p_h), q_h \rangle + \int_{\Omega} (p - p_h) dx \int_{\Omega} q_h dx = 0 \quad \forall q_h \in X_h. \quad (4.3)$$

Anzumerken ist noch, dass die stückweise linearen Basisfunktionen  $\varphi_k^1$  eine Zerlegung der Eins bilden, das heißt es gilt  $\sum_{k=1}^M \varphi_k^1(x) = 1$  für  $x \in \Omega$ . Für  $q_h \equiv 1$  als Testfunktion der Galerkin-Variationsformulierung (4.2) und mit der Lösbarkeitsbedingung (2.7) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_h dx \underbrace{\int_{\Omega} 1 dx}_{=|\Omega|} &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} f dx + \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n ds_x \stackrel{(2.7)}{=} 0, \\ \int_{\Omega} p_h dx &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist  $p_h \in H_*^1(\Omega)$  und die Stabilisierungsbedingung ist auf für  $p_h \in X_h$  erfüllt. Die diskrete Variationsformulierung (4.2) ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem:

$$(A_h + \underline{a} \cdot \underline{a}^T) \underline{p}_h = \underline{f}. \quad (4.4)$$

Dabei definiert für  $i, j = 1, \dots, M$

- $A_h$  die Steifigkeitsmatrix mit  $A_h[j, i] = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i^1(x) \nabla \varphi_j^1(x) dx$ ,
- $\underline{f}$  den Lastvektor mit  $f_j = - \int_{\Omega} \operatorname{div} f \varphi_j^1(x) dx + \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n \varphi_j^1(x) ds_x$ ,
- und  $\underline{a}$  den Stabilisierungsvektor mit  $a_j = \int_{\Omega} \varphi_j^1(x) dx$ .

Um die eindeutige Lösbarkeit zeigen zu können, wird Cea's Lemma verwendet. Weiters wird die Approximationseigenschaft von  $S_h^1(\mathcal{T}_N)$ , dem Raum der stückweise linearen und global stetigen Funktionen benötigt. Beide Sätze werden in dieser Arbeit ohne Beweis angeführt.

**Satz 21.** (Cea's Lemma) [8, Satz 5.1.1]

Sei  $A : X \rightarrow X'$  ein beschränkter,  $X$ -elliptischer, linearer Operator und sei  $f \in X'$ . Für die diskrete Variationsformulierung: Gesucht wird  $u_h \in X_h$  mit

$$\langle Au_h, v_h \rangle = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in X_h,$$

existiert eine eindeutige Lösung  $u_h \in X_h$  mit der Stabilitätsabschätzung

$$\|u_h\|_X \leq \frac{1}{c_1^A} \|f\|_{X'}$$

und der (quasi-optimalen) Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_X \leq \frac{c_2^A}{c_1^A} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X.$$

**Satz 22.** (Approximationseigenschaft)[8, Satz 5.2.13]

Sei  $u \in H^s(\mathcal{T}_N)$  mit  $s \in [\sigma, 2]$ ,  $\sigma \in \{0, 1\}$ . Dann gilt für eine zulässige, global gleichmäßige Zerlegung  $\mathcal{T}_N$  die Approximationseigenschaft

$$\inf_{v_h \in S_h^1(\mathcal{T}_N)} \|u - v_h\|_{H^\sigma(\mathcal{T}_N)} \leq ch^{s-\sigma} |u|_{H^s(\mathcal{T}_N)}.$$

**Lemma 23.** Für die Galerkin-Formulierung (4.2) des Neumann Randwertproblems existiert eine eindeutige Lösung  $p_h$  mit

$$\|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \leq ch^{s-1} |p|_{H^s(\Omega)}, \quad \text{für } p \in H^s(\Omega), s \in [0, 2]$$

und es gilt  $p_h \in H_*^1(\Omega)$ .

**Beweis.** Aus Cea's Lemma (Satz 21) folgt die eindeutige Lösbarkeit und die quasi-optimale Fehlerabschätzung. Die gewünschte Fehlerabschätzung folgt mit Hilfe der Approximationseigenschaft (Satz 22).

$$\|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_2^A}{c_1^A} \inf_{q_h \in S_h^1(\mathcal{T}_N)} \|p - q_h\|_{H^1(\mathcal{T}_N)} \leq ch^{s-1} |p|_{H^s(\Omega)}$$

Wie bereits zuvor gezeigt wurde, folgt mit  $q_h \equiv 1$  und der Lösbarkeitsbedingung (2.7), dass  $p_h \in H_*^1(\Omega)$  ist.  $\square$

## 4.1.2 Finite Elemente

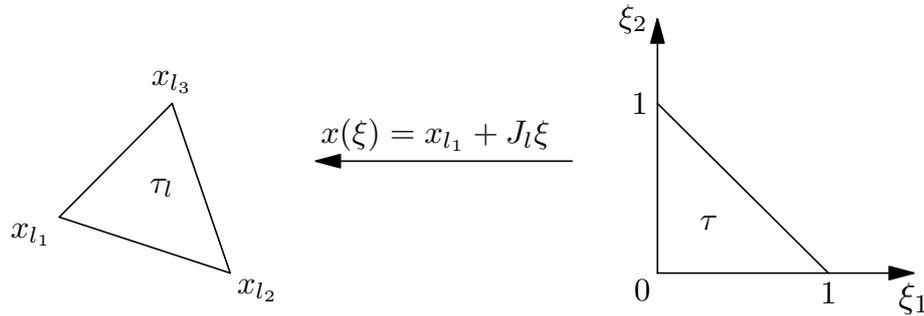
Ein Merkmal der Finiten Elemente Methode ist die Zerlegung des Gebiets  $\Omega$  in geometrisch einfache meist konvexe Gebiete, den sogenannten Elementen. In diesem Abschnitt werden, ausgehend von einer zulässigen und formregulären Triangulierung, das Referenzelement, die Formfunktionen und die lokale Parametrisierung erklärt.

### 4.1.2.1 Zulässige Zerlegung des Gebiets

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes, polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet, dann gibt es eine Folge  $\{\mathcal{T}_N\}$  von Triangulierungen von  $\Omega$  mit Elementen  $\tau_l$  mit

$$\bar{\Omega} = \bar{\mathcal{T}}_N = \bigcup_{l=1}^N \bar{\tau}_l.$$

Im zweidimensionalen Fall wählt man Dreiecks- beziehungsweise Viereckselemente.

Abbildung 4.1: finites Element  $\tau_l$  und Referenzelement  $\tau$ 

#### 4.1.2.2 Abbildung vom Referenzelement für $d = 2$

Für die Assemblierung wird die lokale Parametrisierung über dem Referenzelement verwendet [12, Kapitel 9.1, S. 203 ff.]. Die Eckpunkte des Finiten Elements  $\tau_l$  werden mit  $x_{l_i}$  für  $i = 1, \dots, 3$  markiert. Im zweidimensionalen Fall ( $d = 2$ ) ist das Referenzdreieck  $\tau$  definiert als

$$\tau = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_1\}.$$

Die zugehörigen linearen Formfunktionen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi_1^1(\xi) &= 1 - \xi_1 - \xi_2, \\ \psi_2^1(\xi) &= \xi_1, \\ \psi_3^1(\xi) &= \xi_2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dazu gehört die lokale Parametrisierung für  $x \in \tau_l$

$$x = x_{l_1} + \sum_{i=1}^2 \xi_i (x_{l_{i+1}} - x_{l_1}) = x_{l_1} + J_l \xi \quad \text{für } \xi \in \tau. \quad (4.6)$$

Daraus ergibt sich die Jacobi-Transformationsmatrix

$$J_l = \begin{pmatrix} x_{l_2}[1] - x_{l_1}[1] & x_{l_3}[1] - x_{l_1}[1] \\ x_{l_2}[2] - x_{l_1}[2] & x_{l_3}[2] - x_{l_1}[2] \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

wobei  $x_{l_i}[j]$  mit  $j = 1, 2$  jeweils für die erste beziehungsweise zweite Komponente des Eckpunkts  $x_{l_i}$  steht. Den Flächeninhalt erhält man aus

$$\Delta_l = \int_{\tau_l} dx = \int_{\tau} |\det J_l| d\xi = |\det J_l| \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 d\xi_1 = \frac{1}{2} |\det J_l|,$$

somit folgt  $|\det J_l| = 2\Delta_l$ . Für eine Funktion  $v(x)$ ,  $x \in \tau_l$  erhält man folgende Transformation

$$v(x) = v(x_{l_1} + J_l \xi) = \tilde{v}_l(\xi) \quad , \xi \in \tau.$$

Mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} v(x_{l_1} + J_l \xi) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} v(x) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \sum_{k=1}^2 J_l[j, k] \xi_k \right) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} v(x) J_l[j, i]$$

ergibt sich für die Ableitung

$$\nabla_{\xi} \tilde{v}_l(\xi) = \nabla_{\xi} v(x_{l_1} + J_l \xi) = J_l^T \nabla_x v(x),$$

beziehungsweise

$$\nabla_x v(x) = J_l^{-T} \nabla_{\xi} \tilde{v}_l(\xi). \quad (4.8)$$

Die stückweise linearen und global stetigen Basisfunktionen  $\varphi_k^1 \in \text{span}\{\varphi_k^1\}_{k=1}^M = X_h$  stehen durch die lokale Darstellung (4.6) im Zusammenhang mit den linearen Formfunktionen (4.5). Die Basisfunktionen  $\varphi_k^1$  werden auf ihren Träger eines finiten Elements  $\tau_l$  eingeschränkt, also gilt  $\varphi_k^1|_{\tau_l} = \psi_r^1$  mit  $r = 1, \dots, 3$ .

### 4.1.3 Aufstellung des linearen Gleichungssystems für stückweise lineare Basisfunktionen

In diesem Abschnitt wird das äquivalente lineare Gleichungssystem (4.4) der diskreten Variationsformulierung (4.2) assembliert. Eine Knoten-orientierte Vorgehensweise ist nicht sehr effizient, da über den jeweiligen Träger der Basisfunktionen  $\varphi_k^1$  integriert werden muss. In der Praxis würde das unnötig viel Rechenzeit für mehrfache Berechnungen verschlingen. Als vorteilhafter hat sich eine elementweise Assemblierung erwiesen.

#### 4.1.3.1 Assemblierung der Steifigkeitsmatrix

Für die Bilinearform  $a(p, q)$  wird die Darstellung

$$a(p, q) = \int_{\Omega} \nabla p(x) \nabla q(x) dx$$

verwendet. Weiters wird für die Testfunktion  $q_h = \varphi_j^1$  mit  $j = 1, \dots, M$  und der Ansatz  $p_h = \sum_{i=1}^M p_i \varphi_i^1$  benutzt. Für die Bilinearform ergibt sich somit

$$\begin{aligned} a(p_h, q_h) &= \int_{\Omega} \nabla p_h \nabla q_h dx = \int_{\Omega} \nabla \left( \sum_{i=1}^M p_i \varphi_i^1(x) \right) \nabla \varphi_j^1(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^M p_i \int_{\Omega} \nabla \varphi_i^1(x) \nabla \varphi_j^1(x) dx = \sum_{i=1}^M p_i A_h[j, i] \quad \text{für } j = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Als erstes wird die Steifigkeitsmatrix  $A_h$  genauer betrachtet. Die Matrixeinträge ergeben sich wie folgt

$$\begin{aligned}
A_h[j, i] &= a(\varphi_i^1, \varphi_j^1) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i^1(x) \cdot \nabla \varphi_j^1(x) dx = \sum_{l=1}^N \int_{\tau_l} \nabla \varphi_i^1(x) \cdot \nabla \varphi_j^1(x) dx \\
&= \sum_{l \in S(i, j)} \int_{\tau_l} \nabla \varphi_i^1(x) \cdot \nabla \varphi_j^1(x) dx = \sum_{l \in S(i, j)} \underbrace{\int_{\tau_l} \nabla \psi_s^1(x) \cdot \nabla \psi_r^1(x) dx}_{=A_h^{(l)}} \\
&= \sum_{l \in S(i, j)} A_h^{(l)}[r, s]
\end{aligned}$$

mit lokalen Indizes  $r, s$  und der Schnittmenge  $S(i, j) = \{k : \tau_k \in \text{supp } \varphi_j^1 \cap \text{supp } \varphi_i^1\}$ . In der Summe brauchen nur die Elemente berücksichtigt werden, die gleichzeitig zum Träger von  $\varphi_j^1$  und  $\varphi_i^1$  gehören. Die Einträge  $A_h[j, i]$  lassen sich aus den lokalen Steifigkeitsmatrizen  $A_h^{(l)}[r, s]$  mit  $r, s = 1, \dots, 3$  elementweise assemblieren. Mit Hilfe der lokalen Parametrisierung (4.6) wird eine Transformation vom Element  $\tau_l$  auf das Referenzelement  $\tau$  vorgenommen. Außerdem werden die linearen Formfunktionen (4.5) verwendet.  $J_l$  steht für die Jakobimatrix (4.7) und für  $\nabla \psi_r^1$  wird (4.8) verwendet.

$$\begin{aligned}
A_h^{(l)}[r, s] &= \int_{\tau_l} \nabla \psi_s^1(x) \cdot \nabla \psi_r^1(x) dx \\
&= \int_{\tau} (J_l^{-T} \nabla_{\xi} \psi_s^1(\xi)) \cdot (J_l^{-T} \nabla_{\xi} \psi_r^1(\xi)) | \det J_l | d\xi \\
&= \int_{\tau} \nabla_{\xi} \psi_s^1(\xi) \cdot (J_l^T J_l)^{-1} \nabla_{\xi} \psi_r^1(\xi) | \det J_l | d\xi
\end{aligned}$$

Da der Gradient der linearen Formfunktionen (4.5) konstant ist, kann er vor das Integral gezogen werden. Der Wert des Integrals beträgt dann

$$\int_{\tau} 1 d\xi = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} 1 d\xi_2 d\xi_1 = \int_0^1 (1 - \xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{2}.$$

Die lokale Steifigkeitsmatrix  $A_h^{(l)}$  für das Gleichungssystem (4.4) entspricht einer  $3 \times 3$  Matrix.

#### 4.1.3.2 Assemblierung des Skalierungsvektors $a$

Für den Stabilisierungsterm ergibt sich mit  $q_h = \varphi_j^1$  mit  $j = 1, \dots, M$  und dem Ansatz  $p_h = \sum_{i=1}^M p_i \varphi_i^1$ , dass

$$\int_{\Omega} p_h(x) dx \int_{\Omega} q_h(x) dx = \sum_{i=1}^M p_i \int_{\Omega} \varphi_i^1(x) dx \int_{\Omega} \varphi_j^1(x) dx = \sum_{i=1}^M p_i a_i a_j^T \quad \text{für } j = 1, \dots, M$$

gilt. Mit der Menge  $S(i) = \{k : \tau_k \in \text{supp } \psi_j\}$  und dem lokalen Index  $r = 1, 2, 3$  folgt für  $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} a[i] &= \int_{\Omega} \varphi_i^1(x) dx = \sum_{l=1}^N \int_{\tau_l} \varphi_i^1(x) dx = \sum_{l \in S(i)} \int_{\tau_l} \varphi_i^1(x) dx \\ &= \sum_{l \in S(i)} \underbrace{\int_{\tau_l} \psi_r^1(x) dx}_{=a^{(l)}} = \sum_{l \in S(i)} a^{(l)}[r]. \end{aligned}$$

Wie bereits bei der Steifigkeitsmatrix zuvor lassen sich die Einträge des Stabilisierungsvektors  $a[i]$  durch den lokalen Vektor  $a^{(l)}[r]$  mit  $r = 1, \dots, 3$  elementweise bestimmen. Es wird wieder eine Transformation vom Element  $\tau_l$  auf das Referenzdreieck  $\tau$  durchgeführt

$$a^{(l)}[r] = \int_{\tau_l} \psi_r^1(x) dx = \int_{\tau} \psi_r^1(\xi) |\det J_l| d\xi \quad \text{für } r = 1, \dots, 3.$$

Setzt man nun die linearen Formfunktionen (4.5) ein, so ergibt sich für den lokalen Stabilisierungsvektor  $a^{(l)}$

$$a^{(l)}[r] = \frac{|\det J_l|}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### 4.1.3.3 Assemblierung des Lastvektors

Für die rechte Seite des Gleichungssystems wird die Darstellung

$$F(q) = -\langle \text{div } f, q \rangle_{\Omega} + \langle (f + \Delta u) \cdot n, q \rangle_{\Gamma}$$

verwendet. Mit  $q_h = \varphi_j^1$  für  $j = 1, \dots, M$  gilt für den ersten Term von  $F(q)$ ,

$$\begin{aligned} f[j] &= - \int_{\Omega} \text{div } f(x) \varphi_j^1(x) dx = - \sum_{l=1}^N \int_{\tau_l} \text{div } f(x) \varphi_j^1(x) dx \\ &= - \sum_{l \in S(j)} \int_{\tau_l} \text{div } f(x) \varphi_j^1(x) dx = - \sum_{l \in S(j)} \underbrace{\int_{\tau_l} \text{div } f(x) \psi_s^1(x) dx}_{=f^{(l)}} = - \sum_{l \in S(j)} f^{(l)}[s] \end{aligned}$$

mit der Menge  $S(j) = \{k : \tau_k \in \text{supp } \varphi_j^1\}$ . Die Einträge des globalen Lastvektors  $f[j]$  ergeben sich als Summe der lokalen Vektoren  $f^{(l)}[s]$  mit  $s = 1, \dots, 3$ . Auch hier wird eine Transformation vom Element  $\tau_l$  auf das Referenzelement  $\tau$  gemacht. Für den

lokalen Lastvektor erhält man

$$\begin{aligned} f^{(l)}[s] &= \int_{\tau_l} \operatorname{div} f(x) \psi_s^1(x) dx \\ &= \int_{\tau} \operatorname{div} f(x_{l_1} + J_l \xi) \psi_s^1(\xi) |\det J_l| d\xi \quad \text{für } s = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

Das Randintegral  $\langle (f + \Delta u) \cdot n, \varphi_j^1 \rangle_{\Gamma}$  ergibt sich auch aus der Summe der lokalen Vektoren. Auf jedem lokalem Randelement wird mit Hilfe der numerischen Integration der lokale Vektor berechnet. Durch aufsummieren der einzelnen Vektoren ergibt sich der globale Randvektor.

## 4.2 Diskretisierung des ultraschwachen Variationsproblems (3.4)

Auch für das ultraschwache Variationsproblem (3.4): Gesucht wird  $p \in L^2(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} p(-\Delta q) dx + \int_{\Omega} p dx \int_{\Omega} q dx = -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} + \langle (f + \Delta u) \cdot n, q \rangle_{\Gamma} - \langle p, \frac{\partial q}{\partial n} \rangle_{\Gamma}$$

für alle  $q \in H^2(\Omega)$  kann eine äquivalente Operatorgleichung geschrieben werden. Bestimme die Lösung  $p \in L^2(\Omega)$ :

$$(B + \underline{b} \cdot \underline{c}^T) \underline{p} = \underline{f}, \quad (4.9)$$

wobei  $f \in H^{-2}(\Omega)$  gilt,  $B : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-2}(\Omega)$  ist ein linearer Operator und  $b, c \in \mathbb{R}^M$  sind die Stabilisierungsvektoren.

### 4.2.1 Galerkin-Petrov Formulierung

Im Gegensatz zur Galerkin-Bubnov Formulierung (4.2) werden nun verschiedene Test- und Ansatzräume gewählt [12, Kapitel 8.4, S.193]. Für die Diskretisierung der Gleichung (4.9) betrachtet man zwei Familien konformer Ansatzräume  $X_h = \operatorname{span}\{\varphi_k^0\}_{k=1}^M \subset L^2(\Omega)$  und  $Y_h = \operatorname{span}\{\varphi_k^2\}_{k=1}^M \subset H^2(\Omega)$ , die von den stückweise konstanten Basisfunktionen  $\varphi_k^0$  und den stückweise quadratischen Funktionen  $\varphi_k^2$  aufgespannt werden. Mit dem Ansatz  $p_h = \sum_{k=1}^M p_k \varphi_k^0 \in X_h$  kann eine Näherungslösung der Galerkin-Petrov Variationsformulierung: Gesucht wird  $p_h \in X_h$  mit

$$\int_{\Omega} p_h(-\Delta q_h) dx + \int_{\Omega} p_h dx \int_{\Omega} q_h dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q_h dx + \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n q_h ds_x \quad (4.10)$$

für alle  $q_h \in Y_h$ , definiert werden. Aus  $Y_h \subset H^2(\Omega)$  folgt für  $p \in L^2(\Omega)$  Lösung von (3.4) und  $p_h \in X_h$  Lösung von (4.10) die Galerkin-Orthogonalität

$$\langle B(p - p_h), q_h \rangle + \int_{\Omega} (p - p_h) dx \int_{\Omega} q_h dx = 0 \quad \forall q_h \in Y_h. \quad (4.11)$$

Durch die geeignete Wahl der stückweise quadratischen und global stetigen Basisfunktionen  $\varphi_k^2$  verschwinden diese nicht am Rand. Folglich darf das Randintegral  $\int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n q_h ds_x$  nicht vernachlässigt werden. Weiters werden die Testfunktionen so gewählt, dass  $\partial_n q_h|_{\Gamma} = 0$  gilt. Die diskrete Variationsformulierung (4.10) des ultraschwachen Variationsproblems (3.4) ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$(B_h + \underline{b} \cdot \underline{c}^T) \underline{p}_h = \underline{f}. \quad (4.12)$$

Dabei definiert für  $i, j = 1, \dots, M$

- $B_h$  die modifizierte Steifigkeitsmatrix mit  $B_h[j, i] = \int_{\Omega} \varphi_i^0(x) [-\Delta \varphi_j^2(x)] dx$ ,
- $\underline{f}$  den Lastvektor mit  $f_j = -\int_{\Omega} \operatorname{div} f \varphi_j^2(x) dx + \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n \varphi_j^2(x) ds_x$ ,
- und  $\underline{b}, \underline{c}$  die Stabilisierungsvektoren mit  $b_j = \int_{\Omega} \varphi_j^0(x) dx$  und  $c_j = \int_{\Omega} \varphi_j^2(x) dx$ .

Um die eindeutige Lösbarkeit des diskreten ultraschwachen Variationsproblems (4.10) zeigen zu können, wird wieder Satz 17 verwendet. Mit Hilfe des Fortin Operator und dem Kriterium von Fortin kann die diskrete Stabilitätsabschätzung gezeigt werden.

**Definition 24.** (Fortin Operator)[12, Kapitel 8.4, S. 194]

Ein linearer Operator  $R_h : \Pi \rightarrow \Pi_h$  heißt Fortin Operator, wenn

$$\langle Bv_h, q - R_h q \rangle = 0 \quad \forall v_h \in X_h$$

und

$$\|R_h q\|_{\Pi} \leq c_R \|q\|_{\Pi} \quad \forall q \in \Pi$$

gilt.

**Lemma 25.** (Kriterium von Fortin)[12, Kapitel 8.4, S.194]

Sei  $B : X \rightarrow \Pi'$  ein beschränkter linearer Operator und die kontinuierliche Stabilitätsabschätzung (3.7) sei erfüllt. Wenn ein Fortin Operator  $R_h : \Pi \rightarrow \Pi_h$  existiert, dann gilt die diskrete Stabilitätsabschätzung

$$\tilde{c}_S \|p_h\|_X \leq \sup_{0 \neq q_h \in \Pi_h} \frac{\langle Bp_h, q_h \rangle}{\|q_h\|_{\Pi}} \quad \forall p_h \in X_h \quad (4.13)$$

mit  $\tilde{c}_S = \frac{c_S}{c_R}$ .

**Satz 26.** Für die diskrete ultraschwache Formulierung (4.10) existiert eine eindeutige Lösung  $p_h \in X_h$  und es gilt

$$\|p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left( \|\operatorname{div} f\|_{H^{-2}(\Gamma)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right).$$

**Beweis.** Um Satz 3.4 anwenden zu können, muss zunächst wieder gezeigt werden, dass  $F \in \text{Im}_{X_h} B_h$  gilt. Wie im Kontinuierlichen kann mit Satz 12 die Beschränktheit der rechten Seite gezeigt werden.

$$\begin{aligned} |F(q_h)| &\leq |\langle \text{div } f, q_h \rangle_\Omega| + |\langle (f + \Delta u) \cdot n, q_h \rangle_\Gamma| \\ &\leq \|\text{div } f\|_{H^{-2}(\Omega)} \|q_h\|_{H^2(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \|q_h\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq c \left( \|\text{div } f\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right) \|q_h\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz 20 kann gezeigt werden, dass der Nullraum des adjungierten Operator  $B'_h$  nur das Nullelement enthält. Da  $F(0) = 0$  gilt, folgt auch  $F(q_h) = 0$  für alle  $q_h \in \ker B'_h$ . Demnach ist  $F \in \text{Im}_{X_h} B_h$  und es existiert eine Lösung  $p_h \in X_h \subset L^2(\Omega)$ .

Die diskrete Stabilitätsabschätzung (4.13) erhält man mit dem Kriterium von Fortin (Lemma 25). Die kontinuierlichen Stabilitätsabschätzung (3.7) ist für  $p_h \in X_h \subset L^2(\Omega)$  erfüllt. Sei  $R_h$  der Fortin Operator. Die Galerkin-Orthogonalität  $\langle Bp_h, q - R_h q \rangle = 0$  ist für alle  $p_h \in X_h$  erfüllt, das heißt es gilt  $\langle Bp_h, q \rangle = \langle Bp_h, R_h q \rangle$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} c_S \|p_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sup_{0 \neq q \in H_*^2(\Omega)} \frac{\langle Bp_h, q \rangle}{\|q\|_{H^2(\Omega)}} \leq \sup_{0 \neq q \in H_*^2(\Omega)} \underbrace{\frac{\langle Bp_h, R_h q \rangle}{\|q\|_{H^2(\Omega)}}}_{\geq \frac{1}{c_R} \|R_h q\|_{H^2(\Omega)}} \\ &\leq c_R \sup_{0 \neq q \in H_*^2(\Omega)} \frac{\langle Bp_h, R_h q \rangle}{\|R_h q\|_{H^2(\Omega)}} \leq c_R \sup_{0 \neq q_h \in Y_h} \frac{\langle Bp_h, q_h \rangle}{\|q_h\|_{H^2(\Omega)}} \end{aligned}$$

Somit gilt die diskrete Stabilitätsabschätzung (4.13) und es kann Satz 20 angewendet werden. Somit existiert für  $\text{div } f \in H^{-2}(\Omega)$  und  $(f + \Delta u) \cdot n \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  eine eindeutige Lösung des diskreten ultraschwachen Problems (4.10).

Aus der Stabilitätsabschätzung (4.13) und der Beschränktheit der rechten Seite  $F(q_h)$  bekommt man die Abschätzung.

$$\begin{aligned} \tilde{c}_S \|p_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sup_{0 \neq q_h \in Y_h} \frac{\langle Bp_h, q_h \rangle}{\|q_h\|_{H^2(\Omega)}} = \sup_{0 \neq q_h \in Y_h} \frac{F(q_h)}{\|q_h\|_{H^2(\Omega)}} \leq \sup_{0 \neq q_h \in Y_h} \frac{|F(q_h)|}{\|q_h\|_{H^2(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{0 \neq q_h \in Y_h} \frac{c}{\|q_h\|_{H^2(\Omega)}} \left( \|\text{div } f\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right) \|q_h\|_{H^2(\Omega)} \\ &= c \left( \|\text{div } f\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right) \end{aligned}$$

□

### 4.3 B-Splines

Wird anstelle der Variationsformulierung (3.3) die ultraschwache Formulierung (3.4) verwendet, so muss man auch geeignete Ansatz- und Testfunktionen wählen. Anstatt

der stückweise linearen Basisfunktionen  $\varphi_k^1$  wählt man für den Druck  $p$  nun stückweise konstante Funktionen  $\varphi_k^0$  und für die Testfunktion  $q$  stückweise quadratische Basisfunktionen  $\varphi_k^2$ .

### 4.3.1 Der eindimensionale Fall

Zunächst werden konforme Ansatzräume für  $L^2(\Omega)$  und  $H^2(\Omega)$  im eindimensionalen Raum für  $\Omega = (a, b)$  definiert. Sei  $\mathcal{T}_N = \{\tau_l\}_{l=1}^N$  eine gleichmäßige Unterteilung des Intervalls  $(a, b)$  mit  $a = x_0 < x_1 \dots < x_N = b$  und  $\tau_l = (x_{l-1}, x_l)$ . Weiters gilt  $\sum_{l=1}^N \tau_l = [a, b]$ . Für die Zerlegung  $\mathcal{T}_N$  definiert  $\varphi_k^0$  für  $k = 1, \dots, N$  die stückweise konstanten Basisfunktionen mit

$$\varphi_k^0 = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \tau_k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher ist  $X_h = \text{span}\{\varphi_k^0\}_{k=1}^N = S_h^0(\mathcal{T}_N) \subset L^2(\Omega)$ . Die  $L^2$ -Projektion  $Q_h p \in X_h = S_h^0(\mathcal{T}_N)$  ist für alle  $p \in L^2(\Omega)$  als Lösung von

$$\langle Q_h p, q_h \rangle = \langle p, q_h \rangle_{L^2(\mathcal{T}_N)} \quad \forall q_h \in X_h$$

definiert [8, Kapitel 5.2.4]. Für diese gilt die Stabilitätsabschätzung

$$\|Q_h p\|_{L^2(\mathcal{T}_N)} \leq \|p\|_{L^2(\mathcal{T}_N)}$$

für alle  $p \in L^2(\mathcal{T}_N)$ , da

$$\|Q_h p\|_{L^2(\mathcal{T}_N)}^2 = \langle Q_h p, Q_h p \rangle_{L^2(\mathcal{T}_N)} = \langle p, Q_h p \rangle_{L^2(\mathcal{T}_N)} \leq \|p\|_{L^2(\mathcal{T}_N)} \|Q_h p\|_{L^2(\mathcal{T}_N)}.$$

Für die  $L^2$ -Projektion gilt die Fehlerabschätzung für  $s \in [0, 1]$

$$\|p - Q_h p\|_{L^2(\mathcal{T}_N)} \leq h^s \|p\|_{H^s(\mathcal{T}_N)}. \quad (4.14)$$

Den Beweis der Abschätzung für  $s \in [0, 1]$  findet man in [12, Satz 10.2, S. 233 ff.]. Um  $Y_h = \text{span}\{\varphi_k^2\}_{k=1}^N \subset H^2(\Omega)$  beschreiben zu können, müssen zunächst B-Splines definiert werden.

**Definition 27.** (*B-Splines*) [3] *B-Splines der Ordnung  $k \in \mathbb{N}_0$  oder auch Basis Splines genannt werden mit Hilfe der Cox-de Boor Rekursionsformel für  $i = 1, \dots, N$  wie folgt definiert:*

$$B_i^0(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \tau_i = (x_{i-1}, x_i), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$B_i^k(x) := \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x).$$

Der Träger des linken Terms ergibt sich aus den beiden Trägern der rechten Seiten, das bedeutet es gilt  $[x_{i-1}, x_{i+k}] = [x_{i-1}, x_{i-1+k}] \cup [x_i, x_{i+k}]$  und  $k$  steht für die Ordnung der B-Splines. Der Raum  $Y_h$  soll aus dem Raum der quadratischen B-Splines entwickelt werden, also werden die B-Splines 2. Ordnung genauer betrachtet. Die quadratischen B-Splines sind Funktionen, die im vorigen, im aktuellen und im nächsten Element definiert sind:

$$B_{i-1}^2 = \frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} B_{i-1}^1 + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_i} B_i^1.$$

Da es sich um eine Rekursionsvorschrift handelt, müssen auch die B-Splines 1. Ordnung und der Ordnung 0 berechnet werden.

- B-Splines 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} B_{i-1}^1 &= \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} B_{i-1}^0 + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} B_i^0, \\ B_i^1 &= \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} B_i^0 + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} B_{i+1}^0. \end{aligned}$$

- B-Splines 0. Ordnung:

$$\begin{aligned} B_{i-1}^0 &= \begin{cases} 1, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} & B_i^0 &= \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ B_{i+1}^0 &= \begin{cases} 1, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die quadratischen B-Splines haben somit folgende Gestalt:

$$B_{i-1}^2 = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \cdot \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_i} \cdot \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_i} \cdot \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}}, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]. \end{cases}$$

Die Dreitermrekursion lässt erkennen, dass man nicht genügend Basisfunktionen erhalten wird. Da die Dimension des Ansatzraums ( $\dim X_h = N$ ) und die Dimension des Testraums ( $\dim Y_h = N - 2$ ) nicht übereinstimmen, ist es notwendig, dass zwei Funktionen hinzugefügt werden. Im Allgemeinen erweitert man das Gitter auf  $x_{-k+1} < \dots < x_0 = a < \dots < b = x_N < \dots < x_{N+k-1}$ . Für die Ordnung  $k = 2$  wird das Intervall  $[a, b, ]$  um  $x_{-1} < x_0$  und  $x_{N+1} > x_N$  ergänzt, somit erhält man die

B-Splines  $B_{-1}^2(x)$  und  $B_{N-2}^2(x)$ .  $Y_h$  sei der Raum, der von den modifizierten quadratischen B-Splines aufgespannt wird, also  $Y_h = \text{span}\{\varphi_k^2\}_{k=1}^N$ , wobei

$$\varphi_k^2 = \begin{cases} \varphi_1^2(x), & \text{für } k = 1, \\ B_{k-2}^2(x), & \text{für } k = 2, \dots, N-1, \\ \varphi_N^2(x), & \text{für } k = N. \end{cases}$$

Auch für die stückweise quadratischen Basisfunktionen  $\varphi_k^2$  erhält man eine Zerlegung der Eins, das heißt es gilt  $\sum_{k=1}^N \varphi_k^2(x) = 1$  für  $x \in \Omega$ . Dadurch lassen sich  $\varphi_1^2(x)$  und  $\varphi_N^2(x)$  einfach bestimmen. Es gilt

$$\varphi_1^2(x) = \begin{cases} 1 - B_0^2(x), & x \in [x_0, x_1], \\ B_{-1}^2(x), & x \in [x_1, x_2], \end{cases}$$

$$\varphi_N^2(x) = \begin{cases} B_{N-2}^2(x), & x \in [x_{N-2}, x_{N-1}], \\ 1 - B_{N-3}^2(x), & x \in [x_{N-1}, x_N]. \end{cases}$$

**Beispiel 2.** Für  $\Omega = (0, 1)$  und  $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$  und  $x_3 = 1$ , also  $N = 3$  und der Schrittweite  $h = \frac{1}{3}$ , sehen die modifizierten B-Splines der Ordnung 2 wie folgt aus:

$$\varphi_1^2(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2h^2}, & x \in [x_0, x_1], \\ \frac{(\frac{2}{3}-x)^2}{2h^2}, & x \in [x_1, x_2], \end{cases}$$

$$\varphi_2^2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2h^2}, & x \in [x_0, x_1], \\ \frac{(x-\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}-x)}{2h^2} + \frac{(\frac{2}{3}-x) \cdot x}{2h^2}, & x \in [x_1, x_2], \\ \frac{(\frac{2}{3}-x)^2}{2h^2}, & x \in [x_2, x_3], \end{cases}$$

$$\varphi_3^2(x) = \begin{cases} \frac{(x-\frac{1}{3})^2}{2h^2}, & x \in [x_1, x_2], \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2h^2}, & x \in [x_2, x_3]. \end{cases}$$

Um die Pressure Poisson Gleichung (1.16) im eindimensionalen Raum lösen zu können, werden zunächst die erste und zweite Ableitung der modifizierten B-Splines betrachtet. Man geht von einer gleichmäßigen Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  in  $N$  Teile mit Schrittweite  $h = x_{i+1} - x_i > 0$  aus. Die Ableitungen lassen sich problemlos bestimmen. Für  $2 \leq i \leq N-1$  ergibt sich:

$$\frac{d\varphi_i^2}{dx} = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h^2}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+2}+x_{i+1}+x_i+x_{i-1}-4x}{2h^2}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \frac{x-x_{i+2}}{h^2}, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \end{cases}$$

$$\frac{d^2\varphi_i^2}{dx^2} = \begin{cases} \frac{1}{h^2}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{2}{h^2}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \frac{1}{h^2}, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]. \end{cases}$$

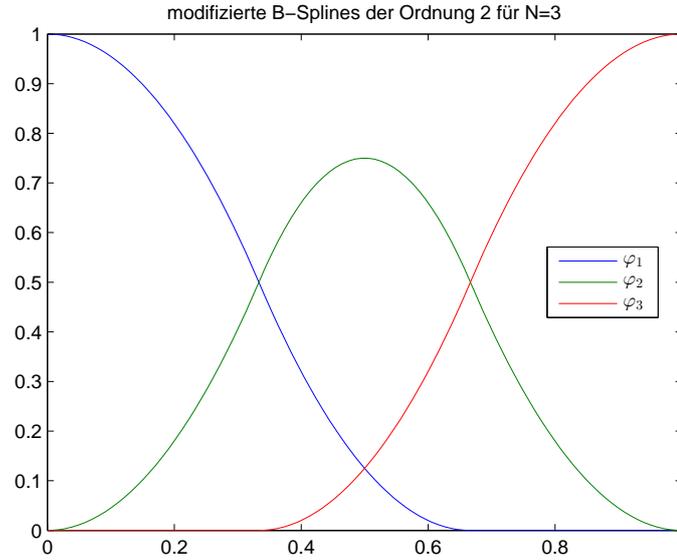


Abbildung 4.2: quadratische B-Splines  $\varphi_1^2(x)$ ,  $\varphi_2^2(x)$  und  $\varphi_3^2(x)$  aus Beispiel 2

Für  $i = 1, N$  ergeben sich folgende Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1^2}{dx} &= \begin{cases} \frac{x_0-x}{h^2}, & x \in [x_0, x_1], \\ \frac{x-x_2}{h^2}, & x \in [x_1, x_2], \end{cases} & \frac{d\varphi_N^2}{dx} &= \begin{cases} \frac{x-x_{N-2}}{h^2}, & x \in [x_{N-2}, x_{N-1}], \\ \frac{x_N-x}{h^2}, & x \in [x_{N-1}, x_N], \end{cases} \\ \frac{d^2\varphi_1^2}{dx^2} &= \begin{cases} \frac{1}{h^2}, & x \in [x_0, x_1], \\ -\frac{1}{h^2}, & x \in [x_1, x_2], \end{cases} & \frac{d^2\varphi_N^2}{dx^2} &= \begin{cases} \frac{1}{h^2}, & x \in [x_{N-2}, x_{N-1}], \\ -\frac{1}{h^2}, & x \in [x_{N-1}, x_N]. \end{cases} \end{aligned}$$

#### 4.3.1.1 Lineares Gleichungssystem in 1D

Wie bereits erwähnt, kann der diskreten ultraschwachen Variationsformulierung (4.10) ein lineares Gleichungssystem (4.12)

$$(B_h + \underline{b} \cdot \underline{c}^T) \underline{p} = \underline{f}$$

zugeordnet werden. Dabei definiert im eindimensionalen Raum für  $i, j = 1, \dots, N$

- $B_h$  die modifizierte Steifigkeitsmatrix mit  $B_h[j, i] = \int_a^b \varphi_i^0(x) \left( -\frac{d^2\varphi_j^2(x)}{dx^2} \right) dx$ ,
- $\underline{f}$  den Lastvektor mit  $f[j] = -\int_a^b f'(x) \varphi_j^2(x) dx + [f(x)q(x)]_a^b$ ,
- und  $\underline{b}, \underline{c}$  die Stabilisierungsvektoren mit  $b[j] = \int_a^b \varphi_j^0(x) dx$  und  $c[j] = \int_a^b \varphi_j^2(x) dx$ .

Im nächsten Schritt sollen die Einträge der modifizierten Steifigkeitsmatrix  $B_h$  genauer betrachtet werden. Es ist zu erwarten, dass sich eine singuläre, symmetrische Tridiagonalmatrix ergibt. Für die Zeilen  $2 \leq i \leq N-1$  erhält man mit Schrittweite  $h$  auf



zu berechnen. Die resultierenden numerischen Integrationsformeln sind die Newton-Cotes-Formeln:

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n \tilde{\omega}_i f(x_i).$$

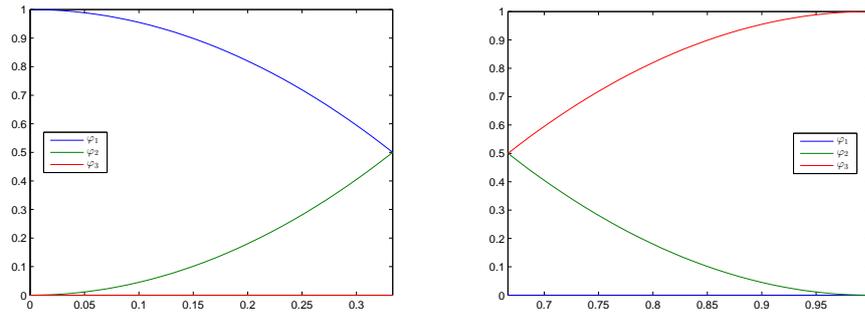


Abbildung 4.3: quadratische B-Splines am linken und rechten Rand

Die quadratischen B-Splines sind jeweils am vorigen, am aktuellen und am nächsten Element definiert. Das wirkt sich auch auf die elementweise Definition des Lastvektors aus. Die beiden Ränder müssen noch gesondert betrachtet werden. Für den linken Rand wird nur die aktuelle und die nächste Basisfunktion betrachtet und für den rechten Rand nur die vorige und die aktuelle Basisfunktion. Jetzt müssen nur noch die Randwerte eingebaut werden. Aus der partiellen Integration erhält man den Randterm  $-[f(x)q(x)]|_a^b$ . Wenn man nun die quadratischen B-Splines am Rand genauer betrachtet, dann kann man erkennen, dass  $\varphi_1^2(a)$  und  $\varphi_N^2(b)$  laut Definition am Rand immer 1 sind. Somit bleibt am Rand nur noch die Kraft  $f$  übrig. Aufgrund der Vorzeichen aus der partiellen Integration, beziehungsweise wenn die Grenzen eingesetzt werden, sieht man, dass beim ersten Eintrag des Lastvektor  $f(a)$  abgezogen werden muss und im letzten Eintrag gehört  $f(b)$  hinzugefügt. Mit Hilfe der Trapezregel bekommt man folgende Darstellung für den Lastvektor

$$\underline{f} = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -f'(x_0) - f'(x_1) - f(a) \\ -f'(x_1) - f'(x_2) \\ -f'(x_2) - \dots \\ \vdots \\ \dots - f'(x_{N-2}) \\ -f'(x_{N-2}) - f'(x_{N-1}) \\ -f'(x_{N-1}) - f'(x_N) + f(b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

Für die rechte Seite muss  $\underline{f}^T \cdot \underline{1} = 0$  erfüllt sein.

### 4.3.2 Der zweidimensionale Fall

Im zweidimensionalen Fall ( $d = 2$ ) mit quadratischen B-Splines wählt man für das Gebiet  $\Omega$  eine Viereckszerlegung. Das Referenzviereck  $\tau$  ist definiert als

$$\tau = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}.$$

Bei der Transformation vom Element  $\tau_l$  auf das Referenzviereck  $\tau$  muss nur die Jacobi-Determinante berücksichtigt werden, da jedes Quadrat auf das Einheitsquadrat transformiert wird.

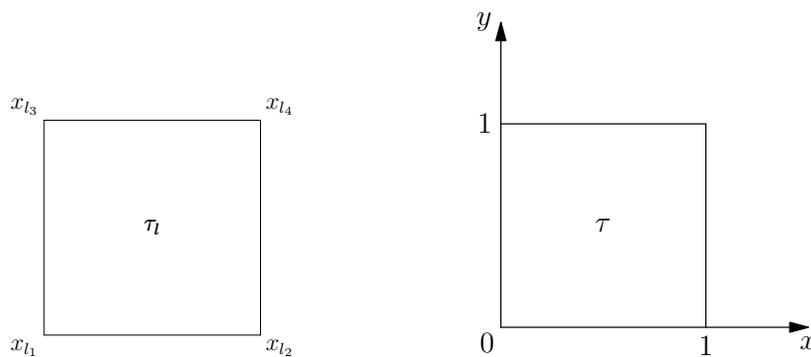


Abbildung 4.4: finites Element  $\tau_l$  und Referenzviereck  $\tau$  für  $d = 2$

Die Knoten des Gitters werden dabei zeilenweise nummeriert. Man spricht auch von einer lexikographischen Knotennummerierung. Die ersten  $K$  Knoten werden der untersten Zeile zugeordnet, so dass sich insgesamt  $K \cdot K = K^2$  Knoten ergeben. Außerdem bekommt man  $N = K - 1$  Zerlegungen pro Zeile, also gibt es insgesamt  $N \cdot N = N^2$  Elemente.

Für die Transformation vom Element  $\tau_l$  auf das Referenzviereck  $\tau$  wird wieder die Jacobi-Transformationsmatrix benötigt. Die Matrix hat folgende Gestalt

$$J_l = \begin{pmatrix} x_{l_4}[1] - x_{l_1}[1] & 0 \\ 0 & x_{l_4}[2] - x_{l_1}[2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x & 0 \\ 0 & h_y \end{pmatrix}.$$

Auch im 2D Fall geht man von einer äquidistanten Unterteilung des Gitters aus. Somit entspricht die Schrittweite in x-Richtung  $h_x$  der Schrittweite in y-Richtung  $h_y$ .

Es gilt also  $h_x = h_y = h$ . Da das Integral über das Referenzviereck 1 ergibt, erhält man den Flächeninhalt aus

$$\Delta_l = \int_{\tau_l} dx = \int_{\tau} |\det J_l| dx = |\det J_l| = h^2.$$

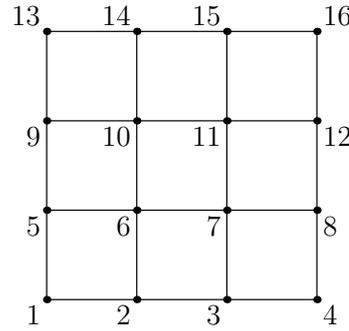


Abbildung 4.5: Beispiel für eine lexikographische Knotennummerierung für 9 Elemente und 16 Knoten ( $N = 3$  und  $K = 4$ )

Jedem Element  $\tau_l$  werden die Knoten  $[l, l + 1, l + K, l + 1 + K]$  zugeordnet. Außerdem hat jedes Element  $\tau_l$  folgende Nachbarn:

$$\begin{array}{ccccc} \tau_{l+K-1} & \tau_{l+K} & \tau_{l+K+1} & & \\ & \tau_{l-1} & \tau_l & \tau_{l+1} & \\ & \tau_{l-K-1} & \tau_{l-K} & \tau_{l-K+1} & \end{array}$$

Im eindimensionalen Raum hat jedes Element die drei nachstehenden quadratischen Formfunktionen

$$\begin{aligned} \psi_1^2(x) &= \frac{(1-x)^2}{2}, \\ \psi_2^2(x) &= -x^2 + x + \frac{1}{2}, \\ \psi_3^2(x) &= \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe eines Produktansatzes ergeben sich die zugehörigen 9 quadratischen Formfunktionen für den zweidimensionalen Fall

$$\begin{aligned} \psi_1^2(x, y) &= \psi_1^2(x) \cdot \psi_1^2(y), & \psi_6^2(x, y) &= \psi_2^2(x) \cdot \psi_3^2(y), \\ \psi_2^2(x, y) &= \psi_1^2(x) \cdot \psi_2^2(y), & \psi_7^2(x, y) &= \psi_3^2(x) \cdot \psi_1^2(y), \\ \psi_3^2(x, y) &= \psi_1^2(x) \cdot \psi_3^2(y), & \psi_8^2(x, y) &= \psi_3^2(x) \cdot \psi_2^2(y), \\ \psi_4^2(x, y) &= \psi_2^2(x) \cdot \psi_1^2(y), & \psi_9^2(x, y) &= \psi_3^2(x) \cdot \psi_3^2(y), \\ \psi_5^2(x, y) &= \psi_2^2(x) \cdot \psi_2^2(y), & & \end{aligned}$$

Auch die stückweise konstanten Basisfunktionen  $\varphi_k^0$  werden mit einem Produktansatz festgelegt. Es gilt

$$\varphi_k^0(x, y) = \varphi_{ij}^0(x, y) = \varphi_i^0(x) \varphi_j^0(y)$$

für  $i, j = 1, \dots, N$  und  $k = 1, \dots, N^2$ .

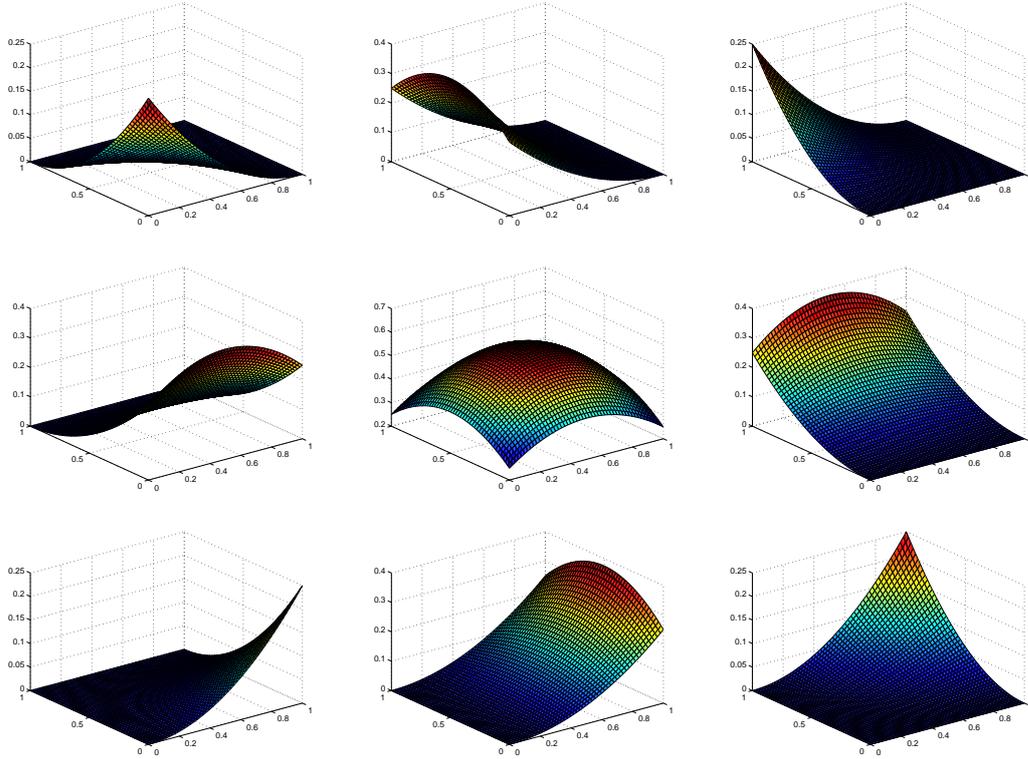


Abbildung 4.6: Die 9 Formfunktionen

Zunächst wird das lineare Gleichungssystem (4.12) für den zweidimensionalen Fall genauer betrachtet. In den nachfolgenden Unterkapiteln wird, wie bereits für das Neumann Randwertproblem, die Assemblierung der Steifigkeitsmatrix, der Stabilisierungsvektoren und der rechten Seite genauer betrachtet.

#### 4.3.2.1 Die Steifigkeitsmatrix

Die modifizierte Steifigkeitsmatrix  $B_h$  wird elementweise assembliert. Das Integral über die konstanten Basisfunktionen  $\varphi_{ij}^0$  liefert eine Einschränkung auf das Element in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte. Für die Testfunktion  $q_h = \varphi_j^2$  und den Ansatz  $p_h = \sum_{i=1}^{N^2} p_i \varphi_i^0$  gilt daher für  $j = 1, \dots, N^2$

$$\int_{\Omega} p_h(x) [-\Delta q_h(x)] dx = \sum_{i=1}^{N^2} p_i \int_{\Omega} \varphi_i^0(x) [-\Delta \varphi_j^2(x)] dx = \sum_{i=1}^{N^2} p_i B_h[j, i].$$

Wie auch in Abschnitt 4.1.3 wird eine Transformation vom Element  $\tau_l$  auf das Referenzviereck  $\tau$  vorgenommen. Für die modifizierte Steifigkeitsmatrix folgt

$$\begin{aligned} B_h[j, i] &= \int_{\Omega} \varphi_i^0(x) [-\Delta \varphi_j^2(x)] dx = \sum_{l=1}^{N^2} \int_{\tau_l} \varphi_i^0(x) [-\Delta \varphi_j^2(x)] dx \\ &= \sum_{l \in S(i, j)} \int_{\tau_l} \varphi_i^0(x) [-\Delta \varphi_j^2(x)] dx = \sum_{l \in S(i, j)} \int_{\tau_l} \psi_s^0(x) [-\Delta \psi_r^2(x)] dx \\ &= \sum_{l \in S(i, j)} B_h^{(l)}[r, s] \end{aligned}$$

mit lokalen Indizes  $r, s = 1, \dots, 9$  und der Schnittmenge  $S(i, j) = \{k : \tau_k \in \text{supp } \varphi_i^0 \cap \text{supp } \varphi_j^2\}$ . Die konstanten Basisfunktionen ergeben in jedem Element genau 1, deshalb haben sie für die lokale modifizierte Steifigkeitsmatrix  $B_h^{(l)}$  keine Auswirkungen.

$$\begin{aligned} B_h^{(l)}[r, s] &= \int_{\tau_l} [-\Delta \psi_s^2(x, y)] dx \\ &= - \int_{\tau_l} \Delta [\psi_i^2(x) \psi_j^2(y)] dx \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 3 \\ &= - \int_{\tau_l} \left[ \psi_j^2(y) \frac{\partial^2 \psi_i^2(x)}{\partial x^2} + \psi_i^2(x) \frac{\partial^2 \psi_j^2(y)}{\partial y^2} \right] dx \\ &= - \int_{\tau_{l_x}} \frac{\partial^2 \psi_i^2(x)}{\partial \xi_1^2} \int_{\tau_{l_y}} \psi_j^2(y) dy dx - \int_{\tau_{l_x}} \psi_i^2(x) \int_{\tau_{l_y}} \frac{\partial^2 \psi_j^2(y)}{\partial y^2} dy dx \end{aligned}$$

Man kann sehr gut erkennen, dass das zweidimensionale Problem mit Hilfe des eindimensionalen Falls gelöst werden kann. Das Integral über das Element  $\tau_l$  kann in  $x$ - und  $y$ -Richtung betrachtet werden. Dabei bezeichnet  $\tau_{l_x}$  das Element  $\tau_l$  in Richtung  $x$  und  $\tau_{l_y}$  das Element  $\tau_l$  in Richtung  $y$ . Mit der lokalen modifizierten Steifigkeitsmatrix (4.15) und dem lokalen Stabilisierungsvektors  $c^{(l)}$  (4.16) des eindimensionalen Problems kann man die lokale Steifigkeitsmatrix  $B_h^{(l)}$  einfach aufstellen. Die  $3 \times 3$  Matrix hat folgende Form

$$B_h^{(l)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die globale Steifigkeitsmatrix ergibt sich durch Summation der lokalen Matrix. Wie im 1D Fall müssen die Randelemente getrennt betrachtet werden. Die quadratischen B-Splines wurden so konstruiert, dass ihre Summe auf jedem Element 1 ergibt. Somit kann man die lokalen Matrizen der Randelemente durch aufsummieren der jeweiligen Zeile beziehungsweise Spalte erhalten.

**Beispiel 3.** Für das 1. Element, das ist aufgrund lexikographischen Nummerierung das Element links unten, wird die 3. Zeile der Matrix  $B_h^{(l)}$  zur 2. Zeile und die 1. Spalte

zur 2. Spalte addiert. Für das Eckelement erhält man die lokale  $2 \times 2$  Matrix

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Für ein Element am unteren Rand wird die 3. Zeile von  $B_h^{(l)}$  zur 2. Zeile addiert. Man bekommt eine  $2 \times 3$  Matrix

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die lokalen Randmatrizen ergeben sich durch Permutationen der oben angeführten Beispiele.

#### 4.3.2.2 Die Stabilisierungsvektoren

Wie beim Neumann Problem in Abschnitt 4.1.3.2 ergibt sich für den Stabilisierungsterm mit  $q_h = \varphi_j^2$  und dem Ansatz  $p_h = \sum_{i=1}^{N^2} p_i \varphi_i^0$ , dass

$$\int_{\Omega} p_h(x) dx \int_{\Omega} q_h(x) dx = \sum_{i=1}^{N^2} p_i \int_{\Omega} \varphi_i^0(x) dx \int_{\Omega} \varphi_j^2(x) dx = \sum_{i=1}^{N^2} p_i b_i c_j^T$$

für  $i, j = 1, \dots, N^2$  gilt. Da die Fläche des Einheitsquadrats 1 ist, entspricht der lokale Stabilisierungsvektor  $b^{(l)}$  der konstanten Basisfunktionen  $\varphi^0$  der Jacobi-Determinante. Für die Menge  $S(i) = \{k : \tau_k \in \text{supp } \psi_i\}$  gilt für  $r = 1, \dots, 9$

$$b[i] = \int_{\Omega} \varphi_i^0(x) dx = \sum_{l \in S(i)} \underbrace{\int_{\tau} \psi_r^0(x) dx}_{=b^{(l)}} = \sum_{l \in S(i)} \int_{\tau} \psi_r^0(x) |\det J_l| dx = \sum_{l \in S(i)} |\det J_l|.$$

Aus dem 1D Fall weiß man, dass die stückweise quadratischen Basisfunktionen  $\varphi^2$  eine Zerlegung der 1 bilden. Der lokale Stabilisierungsvektor  $c^{(l)}$  (4.16) im eindimensionalen Raum entspricht genau der Schrittweite  $h$ . Somit ist auch das Integral über das Referenzviereck  $\tau$  der stückweise quadratischen Formfunktionen  $\psi_r^2$  mit  $r = 1, \dots, 9$  gleich 1. Für den Stabilisierungsvektor  $c_j$  mit  $S(j) = \{k : \tau_k \in \text{supp } \varphi_j^2\}$  erhält man somit

$$c[j] = \int_{\Omega} \varphi_j^2(x) dx = \sum_{l \in S(j)} \underbrace{\int_{\tau} \varphi_j^2(x) dx}_{=c^{(l)}} = \sum_{l \in S(j)} \int_{\tau} \psi_r^2(x) |\det J_l| dx = \sum_{l \in S(j)} |\det J_l|.$$

Die beiden Stabilisierungsvektoren haben, wie zu erwarten, dieselbe Form. Aus  $\underline{b} \cdot \underline{c}^T$  erhält man eine Rang 1 Störung, die mit der Jacobi-Determinante multipliziert wird.

### 4.3.2.3 Der Lastvektor

Für die rechte Seite  $F(q)$  des Gleichungssystems (4.12) wird die Darstellung

$$F(q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} f q dx + \int_{\Gamma} (f + \Delta u) \cdot n q ds_x$$

verwendet. Setzt man für die Testfunktion  $q$  die stückweise quadratischen Basisfunktionen  $\varphi^2$  ein, so erhält man für das erste Integral der rechten Seite

$$\begin{aligned} f[j] &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} f \varphi_j^2(x) dx = - \sum_{j=1}^{N^2} \int_{\tau_j} \operatorname{div} f \varphi_j^2(x) dx \\ &= - \sum_{l \in S(j)} \int_{\tau_l} \operatorname{div} f \varphi_j^2(x) dx = - \sum_{l \in S(j)} \underbrace{\int_{\tau_l} \operatorname{div} f \psi_s^2(x) dx}_{=f^{(l)}}. \end{aligned}$$

Die Einträge des globalen Lastvektors  $f[j]$  ergeben sich aus der Summe des lokalen Vektors  $f^{(l)}$ . Für den lokalen Vektor erhält man

$$\begin{aligned} f^{(l)}[s] &= \int_{\tau_l} \operatorname{div} f(x) \psi_s(x) dx = \int_{\tau} \operatorname{div} f(x) \psi_s(x) |\det J_l| dx \\ &= \int_{\tau_x} \int_{\tau_y} \operatorname{div} f(x, y) \psi_s^2(x, y) |\det J_l| dy dx \\ &= |\det J_l| \int_{\tau_x} \psi_x^2(x) \int_{\tau_y} \operatorname{div} f(x, y) \psi_s^2(y) dy dx \\ &= |\det J_l| \int_{\tau_x} \psi_x^2(x) g(x) dx \quad \text{mit } g(x) = \int_{\tau_y} \operatorname{div} f(x, y) \psi_s^2(y) dy \end{aligned}$$

Es ist zu erkennen, dass durch den Produktansatz die Integrale separat in x- und y-Richtung betrachtet werden können. Da eine analytische Integration nicht durchführbar ist, werden die Integrale näherungsweise mittels numerischer Integration (numerischer Quadratur) berechnet. Dafür werden die Quadraturformeln über dem Referenzintervall  $[0, 1]$  zur Hilfe genommen [5, Kapitel 3.6, S. 141].

$$\begin{aligned} f^{(l)}[s] &= |\det J_l| \sum_k \psi_s^2(x_k) g(x_k) \omega_k \\ &= |\det J_l| \sum_{k,l} \psi_s^2(x_k) \operatorname{div} f(x_k, y_l) \psi_s^2(y_l) \omega_k \omega_l \end{aligned}$$

$k$  steht für die Anzahl der Stützstellen und mit  $\omega$  werden die vorgegebenen Gewichte bezeichnet.

## 4.4 Fehlerabschätzungen

**Satz 29.** (Aubin-Nitsche-Trick)[8, Kapitel 5.3.2, Satz 5.3.8]

Sei  $\Omega$  glatt berandet oder konvex. Für  $\operatorname{div} f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  und  $(f + \Delta u) \cdot n \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sei  $p \in H^1(\Omega)$  Lösung des Variationsproblems (3.3)

$$a(p, q) + \int_{\Omega} p dx \int_{\Omega} q dx = -\langle \operatorname{div} f, q \rangle_{\Omega} + \langle (f + \Delta u) \cdot n, q \rangle_{\Gamma} \quad \forall q \in H^1(\Omega).$$

Sei

$$\|p\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left( \|\operatorname{div} f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right)$$

erfüllt. Für die Näherungslösung  $p_h \in X_h$  der Galerkin-Variationsformulierung (4.2) gilt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq ch^s |p|_{H^s(\Omega)}, \quad \forall p \in H^s(\Omega), \\ \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq ch \left( \|\operatorname{div} f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right), \quad \forall p \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

**Beweis.** Betrachtet wird das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta w &= p - p_h && \text{in } \Omega, \\ \partial_n w &= 0 && \text{in } \Gamma. \end{aligned}$$

Sei  $w \in H^1(\Omega)$  die eindeutige Lösung des (adjungierten) Variationsproblems

$$\begin{aligned} a^*(w, q) + \int_{\Omega} w dx \int_{\Omega} q dx &= a(q, w) + \int_{\Omega} w dx \int_{\Omega} q dx \\ &= \int_{\Omega} (p - p_h) q dx + \underbrace{\int_{\Gamma} \gamma_1^{int} w q ds_x}_{=0} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Da  $\Omega$  konvex ist folgt mit Satz 18, dass  $w \in H_*^2(\Omega)$  und  $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$  gilt. Da  $p - p_h \in H^1(\Omega)$  und aufgrund der Galerkin-Orthogonalität (4.3)

$$a(p - p_h, q) + \int_{\Omega} (p - p_h) dx \int_{\Omega} q dx = 0 \quad \forall q_h \in X_h$$

gilt:

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (p - p_h)^2 dx \stackrel{(4.17)}{=} a(p - p_h, w) + \int_{\Omega} (p - p_h) dx \int_{\Omega} w dx \\ &\stackrel{(4.3)}{=} a(p - p_h, w - Q_h^1 w) + \int_{\Omega} (p - p_h) dx \int_{\Omega} (w - Q_h^1 w) dx. \end{aligned}$$

Dabei steht  $Q_h^1 : H^1(\Omega) \rightarrow X_h \subset H^1(\Omega)$  für die  $H^1$ -Projektion mit

$$\langle Q_h^1 p, q_h \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle p, q_h \rangle_{H^1(\Omega)} \quad \forall q_h \in X_h.$$

Für die  $H^1$ -Projektion gilt

$$\|w - Q_h^1 w\|_{H^1(\Omega)} \leq \|w - I_h w\|_{H^1(\Omega)} \leq ch \|w\|_{H^2(\Omega)}$$

mit Interpolation  $I_h$  von  $w$  (siehe [8, Kapitel 5.2.4]). Aus der Beschränktheit der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  folgt

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c_2^A \|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \|w - Q_h^1 w\|_{H^1(\Omega)} + c \underbrace{\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|p - p_h\|_{H^1(\Omega)}} \underbrace{\|w - Q_h^1 w\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|w - Q_h^1 w\|_{H^1(\Omega)}} \\ &\leq c \|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \|w - Q_h^1 w\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Aus der Abschätzung für die  $H^1$ -Projektion, Satz 18 und Lemma 23 ergibt sich

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq ch^s \|p\|_{H^s(\Omega)} \underbrace{\|w\|_{H^2(\Omega)}}_{\leq c \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}}, \quad \text{für } p \in H^s(\Omega), s \in [0, 2].$$

Mit Division durch  $\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$  folgt die gesuchte Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq ch^s \|p\|_{H^s(\Omega)} \\ &\leq ch \left( \|\operatorname{div} f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + \|(f + \Delta u) \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right) \quad \forall p \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

□

Auch für das ultraschwache Problem kann eine Fehlerabschätzung gezeigt werden.

**Satz 30.** [12, Satz 8.4, S. 194] Sei  $p \in (\ker B)^\perp \subset L^2(\Omega)$  eine eindeutige Lösung der ultraschwachen Formulierung (3.4) und sei  $p_h \in X_h$  eine eindeutige Lösung von (4.10). Die diskrete Stabilitätsabschätzung (4.13) sei erfüllt. Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \left( 1 + \frac{c_2^B}{\tilde{c}_B} \right) \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sei  $p \in L^2(\mathcal{T}_N)$  die eindeutige Lösung von (3.4) und  $p_h \in X_h$  die eindeutige Lösung der Galerkin-Formulierung (4.10). Dann folgt aus Satz 30 und der  $L^2$ -Projektion (4.14) im Raum der stückweise konstanten Funktionen

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{L^2(\mathcal{T}_N)} &\leq \left( 1 + \frac{c_2^B}{\tilde{c}_B} \right) \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_{L^2(\mathcal{T}_N)} \\ &\leq \left( 1 + \frac{c_2^B}{\tilde{c}_B} \right) \|p - Q_h p\|_{L^2(\mathcal{T}_N)} \\ &\leq \left( 1 + \frac{c_2^B}{\tilde{c}_B} \right) h^s \|p\|_{H^s(\mathcal{T}_N)} \end{aligned} \tag{4.18}$$

# 5 Numerische Ergebnisse

Für die numerischen Berechnungen werden die beiden Varianten des Pressure Poisson Problems realisiert. Einerseits wird mit dem Neumann Randwertproblem für den Druck  $p \in H^1(\Omega)$  und andererseits mit der ultraschwachen Variationsformulierung für  $p \in L^2(\Omega)$  gerechnet. Es werden Beispiele im ein- und zweidimensionalen Raum betrachtet. Da  $\Delta u$  bekannt ist, wird einfachheitshalber  $\Delta u = 0$  gewählt. Somit muss nur der Randterm  $f \cdot n$  berücksichtigt werden.

## 5.1 Der eindimensionale Fall

Die Pressure Poisson Gleichung lässt sich im eindimensionalen Fall auf zwei Arten lösen. Einfachheitshalber wurden nur Beispiele mit  $u''(x) = 0$  behandelt, folglich ist auch  $\operatorname{div} u(x) = u'(x) = 0$  immer erfüllt. Außerdem wurden nur Beispiele mit einer gleichmäßigen Unterteilung der Stützstellen gerechnet. Für den eindimensionalen Raum wird mit dem Gebiet  $\Omega = (0, 1)$  gerechnet. Betrachtet wird folgendes Problem:

$$\begin{aligned} -p''(x) &= -f'(x) \quad \text{für } x \in \Omega = (0, 1), \\ p'(0) &= f(0), p'(1) = f(1), \\ \int_0^1 p(x) dx &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

### 5.1.1 Neumann Randwertproblem

Es wird folgende Variationsformulierung mit Neumann Randbedingungen betrachtet:

$$\int_0^1 p'(x)q'(x)dx + \int_0^1 p(x)dx \int_0^1 q(x)dx = - \int_0^1 f'(x)q(x)dx + [f(x)q(x)]_0^1.$$

Es werden zwei Beispiele im Detail angeschaut. Zunächst wird mit einem linearen und stetigen Druck  $p$  gerechnet. Dafür wird die Funktion

$$p(x) = x - \frac{1}{2}$$

gewählt. Da der Druck linear ist, verschwindet die zweite Ableitung von  $p$ . Das bedeutet, dass die zugehörige rechte Seite  $-f'$  verschwindet und  $f = 1$  ist. Es gilt

$$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = 0.$$

Somit gilt  $\alpha = 0$  in (2.12) und der Verschiebungstermin muss nicht berücksichtigt werden.

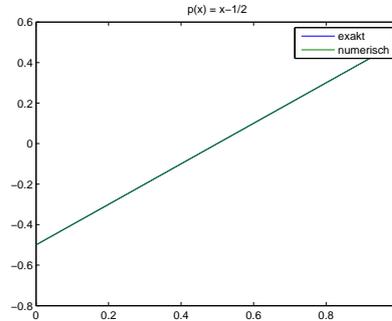


Abbildung 5.1: exakte und numerische Lösung des Drucks  $p(x) = x - \frac{1}{2}$

Beim zweiten Beispiel wird mit einem stetigen, aber quadratischen Druck  $p$  gerechnet. Es wird die Funktion

$$p(x) = 5 - 3x^2$$

gewählt. Setzt man die exakte Lösung in das Neumann Randwertproblem (5.1.1) ein, dann ist die rechte Seite  $-f'(x) = 6$  konstant. Es gilt

$$\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 (5 - 3x^2) dx = 4,$$

somit  $\alpha = 4$ .

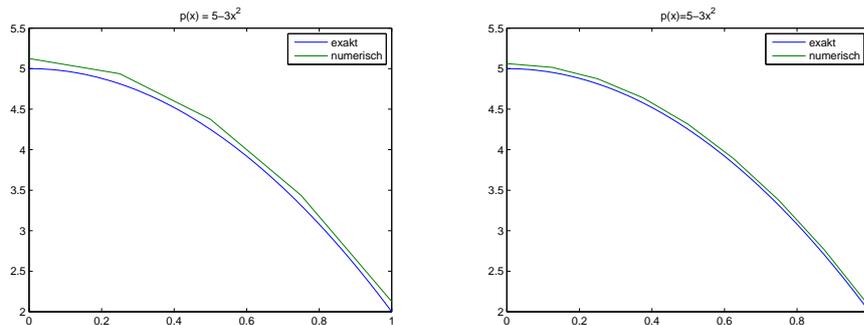


Abbildung 5.2: Näherungslösung  $p_h$  für eine konstante rechte Seite für die Unterteilungen mit Schrittweite  $h = \frac{1}{4}$  und  $h = \frac{1}{8}$

Man sieht, dass je feiner die Unterteilungen des Intervalls  $(0, 1)$  wird, beziehungsweise je kleiner die Schrittweite  $h$  ist, desto genauer stimmen die numerische und die exakte Lösung überein.

### 5.1.2 Ultraschwache Variationsformulierung

Es werden nun dieselben beiden Beispiele wie beim Neumann Randwertproblem gerechnet. Wie in Kapitel 4.3 erklärt wurde, werden für den Druck stückweise konstante und für die Testfunktion stückweise quadratische Basisfunktionen verwendet. Betrachtet wird wieder das Modellproblem (5.1), nur wird jetzt die ultraschwache Variationsformulierung angewendet:

$$-\int_0^1 p(x)q''(x)dx + \int_0^1 p(x)dx \int_0^1 q(x)dx = -\int_0^1 f'(x)q(x)dx + [f(x)q(x)]_0^1.$$

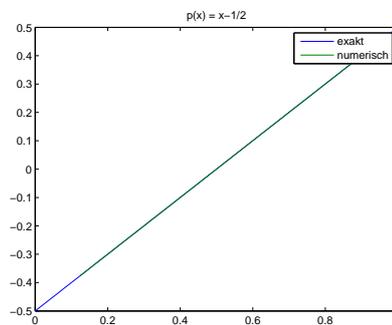


Abbildung 5.3: exakte und numerische Lösung des Drucks  $p(x) = x - \frac{1}{2}$  für die ultraschwache Variationsformulierung

Im Gegensatz zum Neumann Problem, wo man für jede Stützstelle eine Näherungslösung bekommt, erhält man beim ultraschwachen Variationsproblem nur eine Näherungslösung pro Element, nämlich den Mittelpunkt des Elements.

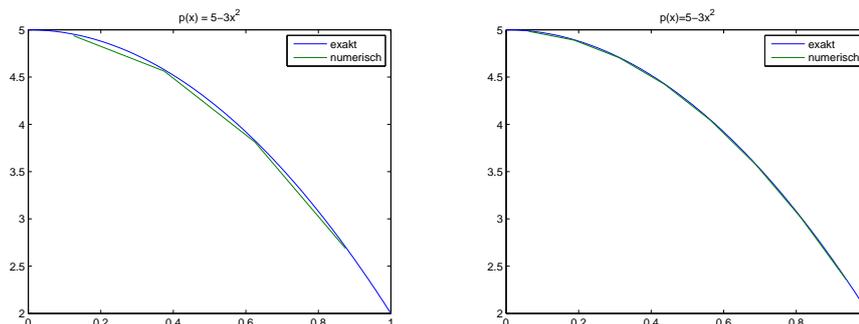


Abbildung 5.4: Näherungslösung  $p_h$  für eine konstante rechte Seite für die Unterteilungen  $h = \frac{1}{4}$  und  $h = \frac{1}{8}$

## 5.2 Der zweidimensionale Fall

Auch im zweidimensionalen Raum werden die zwei selben Beispiele diskutiert. Für das Neumann Randwertproblem (3.2) wird eine Dreieckszerlegung durchgeführt und die ultraschwache Variationsformulierung (3.4) wird mit einer Viereckszerlegung betrachtet. Mit *eoc* bezeichnet man den *estimated order of convergence* [12, Kapitel 11.2, S. 253], der mit

$$eoc = \frac{\log \|p - p_{h_l}\| - \log \|p - p_{h_{l+1}}\|}{\log h_l - \log h_{l+1}}$$

berechnet werden kann. Der theoretische Fehler aus Kapitel 4.4 soll sich mit den numerischen Ergebnissen bestätigen.

### 5.2.1 Neumann Randwertproblem

#### Beispiel 1

Für die Funktion  $p(x, y) = x - \frac{1}{2}$  gilt

$$\begin{aligned}\Delta p &= 0 = \operatorname{div} f, \\ \nabla p &= - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f.\end{aligned}$$

In Tabelle 5.1 wird das Ergebnis für das erste Beispiel zusammengefasst. N ist dabei die Anzahl der Knoten, M ist die Anzahl der finiten Elemente und L steht für die Anzahl der Iterationen. Es wird der  $L^2$ -Fehler des Drucks berechnet, wobei  $p$  die Lösung des kontinuierlichen Problems beschreibt und  $p_h$  für die berechnete Näherungslösung steht. Bei jeder Verfeinerung des Netzes wird ein Dreieck in vier Dreiecke zerlegt, damit vervierfacht sich die Anzahl der Elemente von einer Verfeinerungsstufe zur nächsten. Wie die Theorie vorgibt kann man erkennen, dass sich der  $L^2$ -Fehler pro Iterationsschritt viertelt.

L	N	M	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
0	5	4	93.63E-018
1	13	16	135.22E-018
2	41	64	878.61E-018
3	145	256	11.06E-015
4	545	1024	26.89E-015
5	2113	4096	248.45E-015
6	8321	16384	637.32E-015

Tabelle 5.1:  $L^2$ -Fehler für linearen Druck aus Beispiel 1

Wie zu erwarten ist der  $L^2$ -Fehler, bis auf Rechenungenauigkeiten, die durch die numerische Integration entstehen, Null. Der Grund dafür ist, dass es sich um Funktionen aus dem Ansatzraum handelt.

### Beispiel 2

Für den Druck  $p$  wurde eine genügend glatte Funktion gewählt. Für die Funktion  $p(x, y) = 5 - 3x^2$  gilt

$$\begin{aligned}\Delta p &= -6 = \operatorname{div} f, \\ \nabla p &= - \begin{pmatrix} -6x \\ 0 \end{pmatrix} = f.\end{aligned}$$

L	N	M	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	eoc
0	5	4	0.174801	
1	13	16	0.047792	1.870878
2	41	64	0.012603	1.923006
3	145	256	0.003209	1.973644
4	545	1024	0.000807	1.991917
5	2113	4096	0.000202	1.997592
6	8321	16384	0.000051	1.999298
Theorie:				2

Tabelle 5.2:  $L^2$ -Fehler für quadratischen Druck aus Beispiel 2

In Tabelle 5.2 ist der  $L^2$ -Fehler des Drucks für sechs Verfeinerungsschritte angeführt. Mit dem Aubin-Nitsche Trick (Satz 29) bekommt man für eine genügend glatte Funktion für den Druck  $p$  einen Fehler mit Konvergenzordnung  $h^2$ . Der beobachtete estimated order of convergence stimmt mit der Theorie überein.

## 5.2.2 Ultraschwache Variationsformulierung

### Beispiel 1

Auch für die ultraschwache Variationsformulierung wird der  $L^2$ -Fehler für den Druck berechnet und es wird eine Zerlegung in Viereckselemente durchgeführt. Bei jeder Verfeinerung des Netzes wird ein Viereck in vier Untervierecke zerlegt. Wie bei der Dreieckszerlegung des Neumann Problems vervierfacht sich die Anzahl der Elemente pro Iterationsschritt. Auch für die ultraschwache Formulierung wurden sechs Verfeinerungsschritte durchgeführt.

L	N	M	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	eoc
0	9	4	0.144338	
1	25	16	0.072169	1.000000
2	81	64	0.036084	1.000000
3	289	256	0.018042	1.000000
4	1089	1024	0.009021	1.000000
5	4225	4096	0.004511	1.000000
6	16641	16384	0.002255	1.000000
Theorie:				1

Tabelle 5.3:  $L^2$ -Fehler für linearen Druck aus Beispiel 1

Vergleicht man den Fehler aus Tabelle 5.3 beziehungsweise aus Tabelle 5.4 mit dem theoretischen Fehler (4.18), so lässt sich erkennen, dass die Konvergenzordnung des  $L^2$ -Fehlers für den Druck mit den beobachteten estimated order of convergence übereinstimmt.

### Beispiel 2

L	N	M	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	eoc
0	9	4	0.487340	
1	25	16	0.248433	0.972073
2	81	64	0.124805	0.993184
3	289	256	0.062476	0.998306
4	1089	1024	0.031247	0.999577
5	4225	4096	0.015625	0.999894
6	16641	16384	0.007812	0.999974
Theorie:				1

Tabelle 5.4:  $L^2$ -Fehler für quadratischen Druck aus Beispiel 2

# Literaturverzeichnis

- [1] D. Braess. *Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, Berlin Heidelberg, 2013. 5. Auflage.
- [2] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder, W. A. Wall. *Technische Mechanik 2. Elastostatik*. Springer, Berlin Heidelberg, 2017. 13. Auflage.
- [3] Wikipedia-The Free Encyclopedia. B-spline. <https://en.wikipedia.org/wiki/B-spline>.
- [4] G. Brenn, W. Meile. Strömungslehre und Wärmeübertragung 1. Vorlesungsskript, TU Graz, 2012.
- [5] M. Jung, U. Langer. *Methoden der finiten Elemente für Ingenieure. Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation*. Springer, Wiesbaden, 2013. 2. Auflage.
- [6] N. Köster. Die ultra schwache Formulierung der Poisson-Gleichung und deren numerische Approximation mit dem Galerkin-Petrov-Verfahren. Seminar Bakkalaureat TM, TU Graz, 2012.
- [7] A. Neumayr. Kopplung Finiten Elemente Methoden und Randelementmethoden für das Transmissionsproblem des Stokes-Problems. Masterarbeit, TU Graz, 2016.
- [8] G. Of. Numerische Mathematik 3. Vorlesungsmitschrift, TU Graz, WS 2010/2011.
- [9] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, Boston, 1985.
- [10] S. May, R. Rannacher, B. Vexler. Error Analysis for a Finite Element Approximation of Elliptic Dirichlet Boundary Control Problems. 2013.
- [11] O. Steinbach. Numerische Mathematik 1. 2005/1.
- [12] O. Steinbach. *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems. Finite and Boundary Elements*. Springer, New York, 2008.
- [13] O. Steinbach. Mathematische Modellierung 2. Vorlesungsmitschrift, TU Graz, WS 2014/2015.
- [14] T. Apel, S. Nicaise, J. Pfefferer. Discretization of the Poisson equation with non-smooth data and emphasis on non-convex domains. 2016.
- [15] W. Arendt, K. Urban. *Partielle Differenzialgleichungen. Eine Einführung in analytische und numerische Methoden*. Spektrum, Heidelberg, 2010.
- [16] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1986.



## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

---

Datum

---

Unterschrift