

**Sonja Ritter Bakk. techn.**

**SIMULATION UND ANALYSE  
VON LASER ENTFERNUNGSMESSUNGEN  
ZUR DYNAMISCHEN BAHNBESTIMMUNG  
FÜR DEN ANWENDUNGSFALL SPACE DEBRIS**

**MASTERARBEIT**

**zur Erlangung des akademischen Grades Diplom-Ingenieurin  
Masterstudium Geomatics Science**

eingereicht an der



**Technischen Universität Graz**

Betreuer

**Dr. Sandro Krauss**

Institut für Weltraumforschung  
Österreichische Akademie der Wissenschaften

Graz, Dezember 2017

## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Graz, am.....

.....

(Unterschrift)

# Danksagung

Ich möchte mich bei der Belegschaft des Instituts für Weltraumforschung insbesondere der Arbeitsgruppe Planetengeodäsie für die freundliche Aufnahme und den Aktivitäten - zu denen ich eingeladen wurde - bedanken.

Weiters bei den Mitarbeitern der SLR Station Lustbühel für die Führung durch das Observatorium und Dipl.Ing. Harald Wirnsberger für die Bereitstellung des Softwarepaketes dynORCA und die Korrekturen der Arbeit.

Ein herzlicher Dank ergeht an Dr. Sandro Krauss für die Unterstützung während der gesamten Masterarbeit.

# Abstract

The focus of this study is a dynamic orbit determination and prediction based on satellite laser ranging (SLR) measurements especially with respect to space debris observations. The calculations are based on simulated 2-way time of flight measurements from SLR stations. Debris tracking data is rather sparse due to several limiting factors. These include weather dependency of the observations, the huge amount of objects in the tracking schedules as well as the limited prediction accuracy. Therefore the main focus of this work is to reduce a simulated observation geometry by means of different characteristics to a minimal set of measurements maintaining prediction accuracy, whereby the quality as well as the reliability of the orbit prediction should be preserved. The selection is made by the redundancy value of an observation, which reflects the influence of a single measurement within the observation geometry. Furthermore the visibility of the trajectory is limited to a certain time span during the night. Finally the global geometry is restricted to an European geometry. To take into account the usage of a supporting optical measurement system the so called terminator observation period is also differentiated. The reduced observation plans provide the basis for a least-squares adjustment to improve a predefined reference orbit. The estimated trajectory as well as the dynamical force model parameters are used to perform an orbit prediction for a time span of 14 days. It is supposed that the temporal and spatial observational data coverage as well as the position of the object along its orbit are of crucial importance both in the quality of the estimated orbit and the reliability of the prediction. Hence the influence of observation characteristics on the parameter estimation and the 14 day orbit prediction are analyzed.

# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit ist eine Fallstudie zur dynamischen Bahnbestimmung und Prädiktion basierend auf „Satellite Laser Ranging“ (SLR) Messungen, speziell im Hinblick auf „Space Debris“ Beobachtungen. Die Grundlage für die Berechnungen bilden simulierte 2-Weg Laufzeitmessungen von SLR Stationen. Laser Messungen zu Schrottobjekten stehen aus mehrererlei Gründen nur in geringem Umfang zur Verfügung. Dazu zählen die Wetterabhängigkeit der Beobachtungen, die große Anzahl an Objekten in den vorgegebenen Beobachtungsplänen, sowie die eingeschränkte Prädiktionsgenauigkeit. Daher liegt der Fokus dieser Arbeit darin eine simulierte Beobachtungsgeometrie anhand verschiedener Merkmale auf eine minimale Anzahl an Messungen zu verringern, wobei sowohl die Qualität als auch die Zuverlässigkeit der Prädiktion möglichst erhalten bleiben soll. Man wählt Messungen anhand ihres Hebelwertes aus, der den Einfluss einer Einzelmessung in der gesamten Beobachtungsgeometrie beschreibt. Weiterführend grenzt man die Sichtbarkeit der Objektbahn auf eine bestimmte Zeitspanne in der Nacht ein. Zuletzt wird die globale Geometrie auf eine europäische Geometrie eingeschränkt. Um auch den Einsatz von unterstützenden optischen Messsystemen zu berücksichtigen, erfolgt zusätzlich eine Abgrenzung der sogenannten Terminator Beobachtungsperiode. Die reduzierten Beobachtungspläne sind die Grundlage für einen Ausgleich nach kleinsten Quadraten zur Verbesserungen einer vorgegebenen Referenzbahn. Die geschätzte Bahn sowie die dynamischen Parameter des Kräfte Modells werden zur Bahnvorhersage über einen Zeitraum von 14 Tagen genutzt. Es wird angenommen, dass die zeitliche und räumliche Verteilung der Beobachtungsdaten sowie die Position des Objektes auf seiner Bahn von entscheidender Bedeutung sind sowohl im Hinblick auf die Qualität der geschätzten Bahn, als auch für die Zuverlässigkeit der Prädiktion. Daher wird der Einfluss der Eigenschaften der Beobachtungen auf die Parameterschätzung und die Bahnvorhersage nach 14 Tagen analysiert.

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	vi
Tabellenverzeichnis	viii
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Satellite Laser Ranging</b>	<b>4</b>
<b>3 Keplerbewegung</b>	<b>7</b>
3.1 Form, Größe und Orientierung . . . . .	8
3.2 Zeitlicher Verlauf der Bahnkurve . . . . .	10
3.3 Orientierung der Bahnkurve . . . . .	12
<b>4 Dynamische Bahnmodellierung</b>	<b>14</b>
4.1 Zweikörperbewegung . . . . .	16
4.2 Gravitationsfeld der Erde . . . . .	19
4.2.1 Systemrotation . . . . .	22
4.3 Drittkörperkräfte . . . . .	24
4.4 Gezeiten . . . . .	26
4.5 Relativistische Einflüsse . . . . .	27
4.6 Atmosphärenreibung . . . . .	28
4.7 Solarstrahlung . . . . .	30
4.8 Albedo . . . . .	32
4.9 Empirische Beschleunigungen . . . . .	33
4.10 Weitere Effekte . . . . .	33
<b>5 Simulation von SLR Messungen zur Bahnbestimmung</b>	<b>34</b>
5.1 Referenzbahn . . . . .	35
5.2 Simulation der SLR Messungen . . . . .	37
5.3 Differenzierung der Beobachtungsintervalle . . . . .	43
5.4 Dynamische Bahnbestimmung . . . . .	47
5.5 Qualitätsbeurteilung . . . . .	53
5.6 Bahnbestimmung aus der globalen Geometrie . . . . .	54
<b>6 Einschränkung der Beobachtungszahl</b>	<b>55</b>
6.1 Stationsgeometrie . . . . .	59
6.2 Zeitliche Verteilung der Beobachtungen . . . . .	61

6.3	Räumliche Verteilung der Messungen . . . . .	64
6.4	Elevation und Objektentfernung . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Analyse der Parameterschätzung &amp; Bahnvorhersage</b>	<b>66</b>
7.1	Bahnvorhersage . . . . .	70
7.2	Bahnbestimmung . . . . .	77
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>79</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>80</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Räumliche Dichteverteilung von „Space Debris“ . . . . .	2
1.2	Monatliche Anzahl katalogisierter erdumkreisender Objekte . . . . .	3
2.1	Laser Ranging Stationen . . . . .	4
2.2	Mittlerer LAGEOS Normalpunkt RMS verschiedener SLR Beobachtungsstationen . . . . .	6
3.1	Geometrie der Keplerellipse . . . . .	7
3.2	Laplace-Runge-Lenz Vektor . . . . .	9
3.3	Flächensatz . . . . .	10
3.4	Orientierung der Bahnellipse . . . . .	12
4.1	Zweikörperbewegung der Newton Mechanik . . . . .	18
4.2	Sphärisch harmonische Flächenfunktionen . . . . .	22
4.3	Präzessions- und Nutationskegel . . . . .	23
4.4	Dreikörperbewegung Erde, Sonne und Satellit . . . . .	24
4.5	Gezeitenfeld der Erde . . . . .	26
4.6	Layereinteilung der Erdatmosphäre . . . . .	28
4.7	Zylindrisches Schattenmodell . . . . .	32
5.1	SLR Station im NASA GSFC . . . . .	34
5.2	Ausschnitt der integrierten Referenzbahn im erdfesten System . . . . .	36
5.3	SLR Stationsgeometrie . . . . .	37
5.4	Kenndaten der SLR Stationen in der Simulationsgeometrie . . . . .	38
5.5	Modellierung der 2-Weg Laufzeitmessung . . . . .	39
5.6	Lokales Horizontsystem . . . . .	41
5.7	Konisches Schattenmodell . . . . .	43
5.8	Geometrie des konischen Schattenmodells . . . . .	44
5.9	Bahnabdeckung durch die simulierten Messungen . . . . .	45
5.10	Startzeitpunkte und Kenn-Nummer der simulierten Pässe . . . . .	46
5.11	Prinzip der dynamischen Orbitbestimmung . . . . .	47
5.12	Batch-Algorithmus zur dynamischen Orbitbestimmung . . . . .	52
5.13	Bodenspur der Referenzlösung im erdfesten System . . . . .	54
6.1	Schematische Darstellung eines Hebelpunktes . . . . .	55
6.2	Hebelwertverteilung der globalen Geometrie . . . . .	56



6.3 Hebelwertverteilung der europäischen Geometrie . . . . .	57
6.4 Globale und europäische Simulationsszenarien . . . . .	58
6.5 Stationsgeometrie der eingeschränkten globalen Szenarien A-DNT-K1 und A-NT-K1 . . . . .	59
6.6 Stationsgeometrie der eingeschränkten globalen Szenarien . . . . .	60
6.7 Stationsgeometrie des eingeschränkten europäischen Szenario . . . . .	60
6.8 Beobachtungspläne bei einer Einschränkung des Beobachtungszeitraumes und der Stationsgeometrie . . . . .	61
6.9 Beobachtungsplan des Szenario A-DNT-K2 . . . . .	62
6.10 Beobachtungsplan des Szenario A-DNT-K3 . . . . .	63
6.11 Räumliche Verteilung der Messungen, die mit den reduzierten Beobach- tungsgeometrien erreicht wird . . . . .	64
6.12 Statistische Verteilung der Elevation und Objektentfernung . . . . .	65
7.1 Präzision der Parameter und vorausberechneten Bahnkomponenten nach 14 Tagen, dargestellt als Änderung zur Referenzlösung . . . . .	66
7.2 Korrelationen zwischen den geschätzten Parametern . . . . .	69
7.3 Objektbezogene Systeme „along-track“ und „in-track“ . . . . .	70
7.4 Bahnabweichungen der globalen Szenarien in along-track Richtung . . . . .	71
7.5 Bahnabweichungen in along-track Richtung bei einer Einschränkung des Beobachtungszeitraumes und der Stationsgeometrie . . . . .	72
7.6 Bahnabweichungen der globalen Szenarien in radialer Richtung . . . . .	73
7.7 Bahnabweichungen in radialer Richtung bei einer Einschränkung des Be- obachtungszeitraumes und der Stationsgeometrie . . . . .	74
7.8 Bahnabweichungen der globalen Szenarien in normal Richtung . . . . .	75
7.9 Bahnabweichungen in normal Richtung bei einer Einschränkung des Be- obachtungszeitraumes und der Stationsgeometrie . . . . .	76
7.10 Bahnbestimmung der globalen Szenarien . . . . .	77
7.11 Bahnbestimmung bei einer Einschränkung des Beobachtungszeitraumes und der Stationsgeometrie . . . . .	78

# Tabellenverzeichnis

3.1	Zusammenhang zwischen der Form der Objektbahn und der numerischen Exzentrizität . . . . .	9
3.2	Bewegungsrichtung eines Satelliten in Abhängigkeit von der Inklination . . . . .	13
4.1	Störbeschleunigungen, die auf einen erdnahen Satelliten wirken und deren Größenordnungen . . . . .	15
4.2	Reflexionsverhalten und numerische Werte des $C_R$ Koeffizienten . . . . .	31
5.1	Bahnelemente des Simulationsobjektes zum Anfangszeitpunkt . . . . .	36
5.2	Parameterschätzung aus der gesamten globalen Geometrie . . . . .	54
6.1	Auswahlverfahren zur Einschränkung der Beobachtungsgeometrie . . . . .	57
7.1	Ergebnisse der Parameterschätzung und Bahnvorhersage nach 14 Tagen, die man mit den Simulationsszenarien erzielt. . . . .	67
7.2	Korrelationen zwischen den dynamischen Koeffizienten . . . . .	68

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Bahnbestimmung von künstlichen Objekten im Weltraum ist seit dem Start von Sputnik (1957) ein zentrales Thema. Dabei wird die Bewegung eines Körpers relativ zur Erde von unterschiedlichen physikalischen Kräften beeinflusst. Den dominantesten Einfluss übt das Schwerfeld der Erde aus. Zusätzlich wirken eine Reihe anderer Störkräfte auf die Satellitenbewegung. Angefangen bei den Gravitationsfeldern von Sonne, Mond und anderen Planeten, über die Gezeiten der festen Erde und der Ozeane sowie die Polgezeiten und relativistische Einflüsse bis hin zur Atmosphärenreibung und der elektromagnetischen Strahlung der Sonne.

In der dynamischen Bahnbestimmung wird die Objektbewegung durch physikalische Modelle dieser Krafteinflüsse beschrieben, indem man Vorinformationen über den Bahnverlauf eines Körpers (eine sogenannte Referenzbahn) nutzt. Die Genauigkeit der Bahnbestimmung hängt - unter anderem - von den verwendeten Modellen ab. Unsicherheiten treten vor allem in der Modellierung nicht-gravitativer Kräfte auf. Insbesondere LEO Satelliten sind aufgrund ihrer geringen Flughöhe sensitiv auf die Atmosphärenreibung aber auch den kurzwelligen Anteil des Schwerfeldes [Swatschina, 2012].

In der vorliegenden Studie wird die Bahn eines Objektes dynamisch aus Laser Distanzmessungen von „Satellite Laser Ranging“ (SLR) Stationen bestimmt.

Als Datengrundlage werden simulierte Beobachtungen herangezogen, die aus einer künstlichen Satellitenbahn abgeleitet werden. Diese Vorgehensweise bietet die Möglichkeit systematische Fehler und zufälliges Beobachtungsrauschen, das bei jeder Laufzeitmessung auftritt [Niemeier, 2008], gezielt an die Messungen anzubringen. Die Satellitenbahn lässt sich ausgehend von einer Anfangsposition des Objektes zu einem Referenzzeitpunkt durch numerische Integration eines physikalischen Bewegungsmodells berechnen. Mithilfe dieser künstlichen Bahn simuliert man eine reale Beobachtungssituation und erzeugt 2-Weg Laufzeitmessungen von SLR Observatorien.

In weiterer Folge wird die Gesamtanzahl der simulierten Messungen reduziert, wobei hier unterschiedliche Aspekte betrachtet werden - von der Beobachtungszeit über die teilnehmenden Stationen bis hin zum Einfluss einer Messung innerhalb der gesamten Beobachtungsgeometrie. Die Einschränkung der Beobachtungszahl führt dazu, dass die Objektbahn sowohl zeitlich als auch räumlich nicht mehr gleichmäßig abgedeckt ist. Wie in der Studie gezeigt wird, ist das Objekt letztendlich nur mehr im Perigäum beobachtbar.

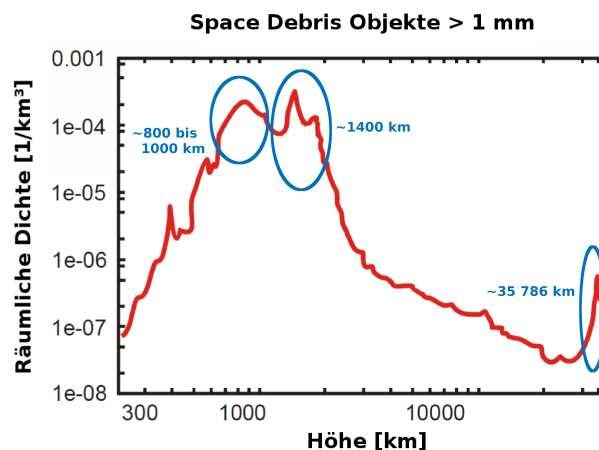
Die Einschränkung der Beobachtungszahlen und der Bahnabdeckung wird im Hinblick auf den speziellen Anwendungsfall „Space Debris“ vorgenommen.

Mit dem Begriff „Space Debris“ (Weltraummüllteile) werden ausgediente Satelliten und künstliche Objekte ohne Gebrauchswert bezeichnet, die bei einem Raketenstart oder aufgrund von Kollisionen entstehen [Kirchner et al., 2013].

„Space Debris“ stellt für bestehende als auch zukünftige Satellitenmissionen eine immer größere Bedrohung dar, da sich Müllteile durch Kollisionen untereinander selbst vermehren. Dies könnte vor allem in erdnahen Flugbahnen zur Bildung eines „Debris Belt“, einer Trümmerwolke führen [Kessler & Cour-Palais, 1978]. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom sogenannten Kaskaden oder Kessler Effekt. Diese Thematik ist seit über 40 Jahren Forschungsgegenstand und wurde erstmals von Kessler und Cour-Palais erkannt [Kessler & Cour-Palais, 1978]. Demzufolge wäre es durchaus möglich, dass gewisse Flugbahnen langfristig nicht mehr für die Raumfahrt genutzt werden können [Klinkrad, 2006].

Im Allgemeinen werden diese Trümmerteile mit aktiven und passiven Teleskopen sowie Radarsystemen im Rahmen von Messkampagnen überwacht, deren Messprinzipien in [Villa, 2010], [Samadzadegana et al., 2013] und [United Nations, 1999] beschrieben wird. Die Entwicklung von Weltraumüberwachungssystemen („Space Surveillance“) begann in den 50er Jahren mit dem Start von Sputnik [Weeden et al., 2010].

Das erste System „Minitrack“ bestand ursprünglich aus 11 weltweit verteilten Stationen und sollte zur Unterstützung der Vanguard und Explorer Space Rocket Programme [Green et al., 1970] dienen<sup>1</sup>. Heute nimmt das „Meteoroid and Space Debris Terrestrial Environment Reference“ (MASTER) Modell der „European Space Agency“ (ESA) detaillierte Analysen zur räumlichen Verteilung von Weltraumschrott und Kollisionsanalysen vor [Villa, 2010]. Mehr als 70% der Schrottobjekte befinden sich in niedrigen Umlaufbahnen unter einer Höhe von 2000 km [Andrenucci et al., 2011] (Abb. 1.1).

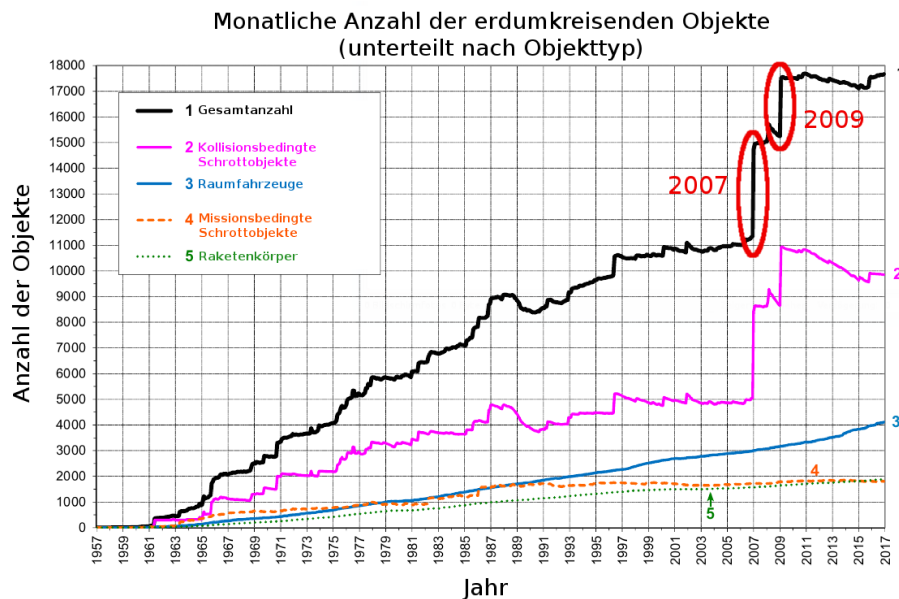


**Abbildung 1.1:** Räumliche Dichteverteilung der „Space Debris“ Objekte in Abhängigkeit von der Flughöhe. Darstellung basierend auf ESA MASTER-2001<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>[https://www.engineersaustralia.org.au/portal/system/files/engineering\\_heritage\\_australia/nomination\\_title/Carnarvon%20Tracking%20Station%20Nomination.pdf](https://www.engineersaustralia.org.au/portal/system/files/engineering_heritage_australia/nomination_title/Carnarvon%20Tracking%20Station%20Nomination.pdf)

<sup>2</sup>[http://www.dlr.de/tp/en/Portaldata/39/Resources/Handout\\_SSA.pdf](http://www.dlr.de/tp/en/Portaldata/39/Resources/Handout_SSA.pdf)

Eine hohe räumliche Konzentration an „Space Debris“ Objekten tritt zwischen 800-1000 km,  $\sim 1400$  km und im Bereich der geostationären Satelliten ( $\sim 35\,800$  km) auf. Weltraumobjekte ab einer Größe von 10 cm werden vom „U.S. Strategic Command (USSTRATCOM) Space Surveillance Network“ (SSN) getrackt und in einer Datenbank erfasst [Villa, 2010]. Die Präzision, mit der die Position von LEO Objekten in der Datenbank bekannt ist, liegt nach [Flohner et al., 2008] in along-track Richtung bei 500 m und in radialer und normaler Richtung bei ungefähr 130 m.



**Abbildung 1.2:** Monatliche Anzahl katalogisierter Objekte, aufgeschlüsselt nach Typ, Stand Jänner 2017. Darstellung basierend auf [Orbital Debris QN, 2017].

Die bislang größte unbeabsichtigte Kollision fand 2009 zwischen dem operationellen Iridium 33 und dem inaktiven russischen Kommunikationssatelliten (Kosmos 2251) statt. Zwei Jahre zuvor wurde der chinesische Fengyun-1C Wettersatellit beim Test einer Antisatellitenrakete absichtlich zerstört [Kirchner et al., 2013]. Diese Kollisionen produzierten tausende katalogisierte Schrottteile (Abb. 1.2). Um derartige katastrophale Kollisionen zwischen operationellen Satelliten und Schrottteilen zukünftig zu vermeiden, sind präzise und zuverlässige Bahndaten von „Space Debris“ Objekten notwendig.

Mit dem Hintergrund, dass der Zeitraum für die Beobachtung eines einzelnen Schrottoobjektes aufgrund verschiedener Faktoren limitiert ist (hohe Gesamtanzahl an Trümmer teilen, Tracking Vorgaben des ILRS<sup>2</sup> sowie die Tatsache, dass Lasermessungen auf gute Wetterbedingungen angewiesen sind), werden die reduzierten Beobachtungsgeometrien hinsichtlich der Ergebnisse der Bahnbestimmung und -vorhersage miteinander verglichen. Im Zuge dessen erfolgt auch eine Analyse der dahinterstehenden Beobachtungen und der Versuch einen Zusammenhang zwischen den Genauigkeiten der Orbitbestimmung und diversen Eigenschaften der Messungen abzuleiten.

<sup>2</sup>[https://space-geodesy.nasa.gov/docs/2017/ILRS\\_IAGTravauux\\_20170602.pdf](https://space-geodesy.nasa.gov/docs/2017/ILRS_IAGTravauux_20170602.pdf)

## Kapitel 2

# Satellite Laser Ranging

„Satellite Laser Ranging“ (SLR) zu passiven geodätischen Satelliten (wie ETALON-1, -2, LAGEOS-1, -2, Ajisai, Lares, Starlette, Stella, Larets<sup>1</sup>) liefert präzise Daten zur Berechnung von hochgenauen Satellitenorbits. Diese bilden unter anderem die Datengrundlage für das Internationale Terrestrische Referenzsystem (ITRF), die Bestimmung der Erdrotationsparameter und des statischen und zeitvariablen Anteils des Erdschwerefeldes<sup>2</sup>. Nach wie vor ist der langwellige Anteil des Schwerefeldes (vor allem die Erdabplattung) mit Hilfe von SLR am genauesten bestimmbar [Maier et al., 2014].

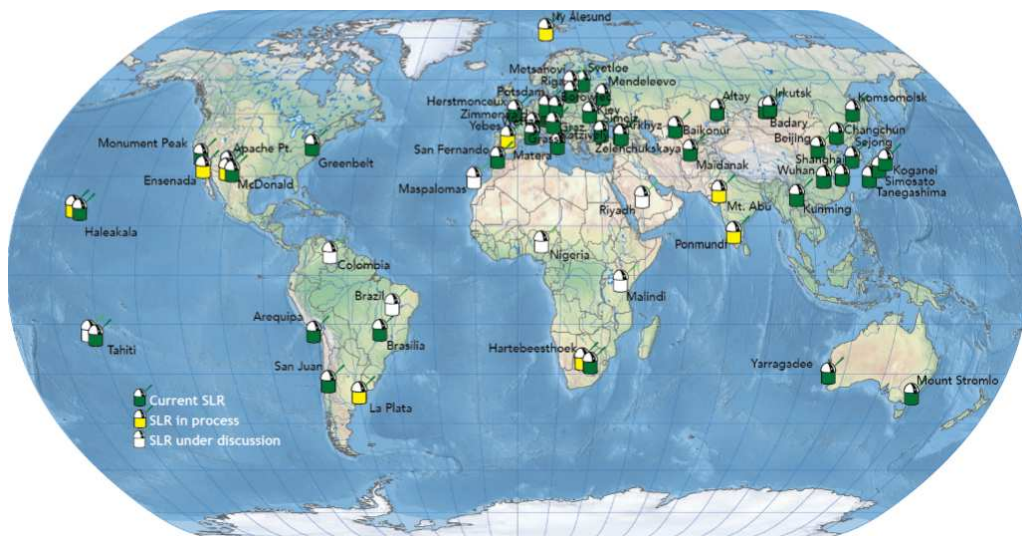


Abbildung 2.1: Übersicht der „Laser Ranging“ Stationen, Stand Mai 2017<sup>2</sup>.

Das Internationale Laser Ranging Service (ILRS) wurde 1998 als ein Service der „International Association of Geodesy“ (IAG) gegründet. Die Basis der ILRS Organisation bilden über 40 Beobachtungsstationen (Abb. 2.1). Die Stationsgeometrie ist durch eine inhomogene Verteilung gekennzeichnet<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>[https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/missions/satellite\\_missions/](https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/missions/satellite_missions/)

<sup>2</sup>[https://space-geodesy.nasa.gov/docs/2017/ILRS\\_IAGTravaux\\_20170602.pdf](https://space-geodesy.nasa.gov/docs/2017/ILRS_IAGTravaux_20170602.pdf)

<sup>3</sup>[https://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG\\_docs/Travaux2015/17\\_ILRS\\_Report\\_2011-2015.pdf](https://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG_docs/Travaux2015/17_ILRS_Report_2011-2015.pdf)

SLR ist eine Beobachtungsmethode, die 2-Weg Laufzeitmessungen zu reflektortragenden (kooperativen) Satelliten durchführt. An diesen Reflektoren (CCRs) wird der Laserstrahl gerichtet reflektiert [Seeber, 2003].

Das Messprinzip ist wie folgt:

(1) Ein Laser generiert einen Puls im grünen Spektralbereich ( $\lambda_{LP} = 532$  nm), wobei ein Teil der Energie des Pulses dazu verwendet wird um die elektronische Zeitmessung zu starten. (2) Der Puls wird durch ein optisches System zum Teleskop geleitet und von dort zum Satelliten gesendet. (Das Teleskop wird mithilfe von vorausberechneten Bahndaten auf das Objekt ausgerichtet.) (3) Der Laserstrahl breitet sich durch die Atmosphäre aus und erfährt dabei eine Laufzeitverzögerung. Die Signalstärke nimmt während der Ausbreitung proportional mit dem Quadrat der Distanz ab. Ein Teil des Laserstrahls wird an den Retroreflektoren des Satelliten reflektiert. (4) Trifft ein Teil des reflektierten Pulses am Photoelektronendetektor in der Station auf und ist dieser empfangsbereit, wird durch die Energie des Pulses eine Zeitmessung ausgelöst.

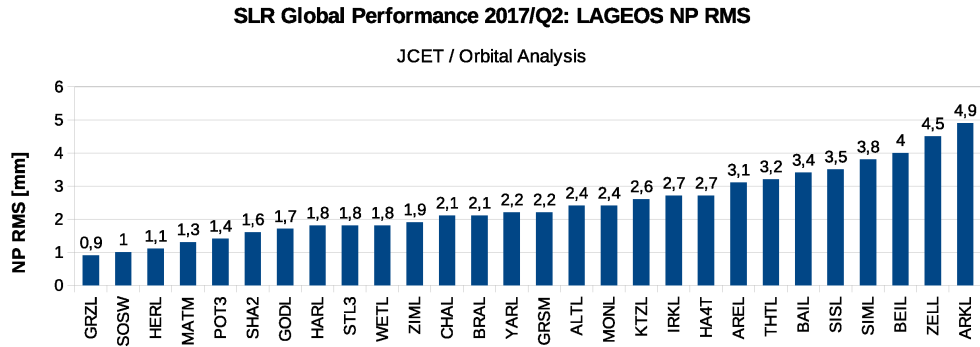
Über die Laser-Radar Gleichung [National Research Council, 2014] kann ein Zusammenhang zwischen der Energie des ankommenden Pulses, den Systemeigenschaften des Lasersystems und der Querschnittsfläche des Objektes hergestellt werden. Nach einer Studie von [Voelker et al., 2013] kann der Energieverlust beim Durchlaufen der Atmosphäre durch die Nutzung der Fundamentalwellenlänge des Lasersystems im nahen Infrarot (NIR,  $\lambda_{LP} = 1064$  nm) minimiert werden - was insbesondere bei der Beobachtung von unkooperativen Objekten (ohne CCR) mit geringen Querschnittsflächen relevant ist.

Die Differenz aus Sende- und Empfangszeitpunkt entspricht der 2-Weg Laufzeit  $z(t)$ . Die geometrische 1-Weg Entfernung  $\rho_g$  wird - unter Vernachlässigung der Korrekturterme um die Laufzeitverzögerungen (Kap. 5.2) - aus der halben Laufzeit und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  mit Gl. 2.1 berechnet [Seeber, 2003].

$$\rho_g = c \cdot \frac{z(t)}{2} \quad (2.1)$$

Die Rohmessungen werden als Full Rate Daten bezeichnet. Diese werden im Postprocessing mit einem statistischen Verfahren (dem Herstmonceux Algorithmus) in Normalpunkte (NPs) konvertiert. Dadurch wird die Präzision der Distanzmessungen erhöht und das Datensampling reduziert. Eine Beschreibung des Kompressionsalgorithmus ist in [Seeber, 2003] enthalten.

Die Präzision der Laser Distanzmessungen kann über die NP Genauigkeit angegeben werden und hängt unter anderem von der Qualität der Lasersysteme der Stationen ab (Abb. 2.2).



**Abbildung 2.2:** Mittlerer LAGEOS Normalpunkt RMS verschiedener SLR Beobachtungsstationen - berechnet aus den Messungen im Zeitraum von April bis Juni 2017 (Datengrundlage: ILRS<sup>4</sup>).

Durch die Bildung von NPs kann der RMS Wert der Distanzmessungen von  $\sim 5$  bis 50 mm auf  $\sim 1$  bis 12 mm reduziert werden [Montenbruck und Gill, 2000].

<sup>4</sup>[https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/network/system\\_performance/global\\_report\\_cards/performance\\_2016q4\\_wLLR.html](https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/network/system_performance/global_report_cards/performance_2016q4_wLLR.html)



## Kapitel 3

# Keplerbewegung

Der Astronom Johannes Kepler hat im 16. Jahrhundert drei grundlegende Gesetze der Planetenbewegung anhand der Umlaufbahn des Mars beschrieben. Er griff dabei auf astronomische Beobachtungen von Tycho Brahe zurück.

Die ersten beiden Gesetze veröffentlichte Kepler 1609 in seinem Werk „*Astronomia Nova*“. Die Positionen der Planeten hat Kepler geometrisch durch die Verhältnisse ihrer Entfernungen beschrieben, da er weder die genauen Distanzen noch die Massen der Planeten kannte.

Mit den drei Gesetzen beschreibt Kepler die elliptische Bewegung eines sphärischen Körpers um die Sonne, dessen gesamte Masse in einem Punkt konzentriert ist. Zusätzlich dazu gilt die Annahme, dass keine externen Kräfte auf den Körper wirken. Die Gesetze haben auch Gültigkeit für die Bewegung eines Satelliten um die Erde. Die Erklärung für die Planetenbewegung um die Sonne lieferte erst Isaac Newton im 17. Jahrhundert [Stephenson, 1987].

Die Bahnellipse eines Körpers in Abb. 3.1 ist durch ihre Form und Größe, die Zeit in der ein bestimmter Winkel überstrichen wird und die Orientierung in Bezug auf ein Inertialsystem im Raum eindeutig festgelegt.

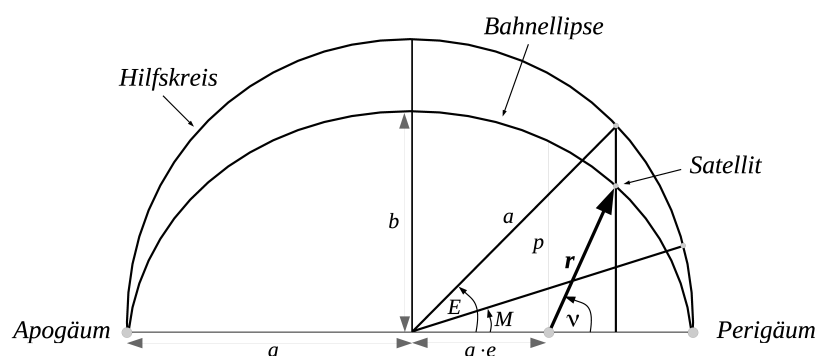


Abbildung 3.1: Geometrie der Bahnellipse [Montenbruck und Gill, 2000]<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Modifiziert anhand: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kepler-Gleichung>

## 3.1 Form, Größe und Orientierung

„Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen in deren Brennpunkt die Sonne steht“ (Erstes Keplersches Gesetz).

### Ebene Bewegung

Mit dem ersten Gesetz beschrieb Kepler, dass sich ein Körper in einer ebenen, elliptischen Bahn um einen Zentralkörper bewegt.

Eine ebene Bewegung vollführt der Körper dann, wenn die Kräfte, die auf ihn ausgeübt werden, zum Radiusvektor wirken [Montenbruck und Gill, 2000]. Somit ist der Drehimpulsvektor  $\mathbf{C}$  pro Einheitsmasse in Gleichung 3.1 konstant.

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} = \textit{konstant} \quad (3.1)$$

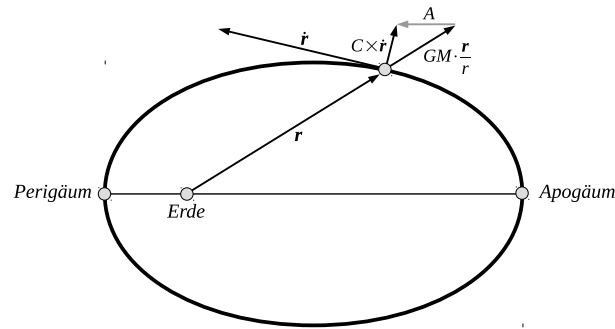
Der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{r}}$  zeigt in Richtung der Tangente an die Bahnkurve. Der Geschwindigkeits- und Radiusvektor  $\mathbf{r}$  liegen in einer Ebene, der Drehimpulsvektor  $\mathbf{C}$  steht orthogonal auf die Bahnebene.

### Orientierung in der Bahnebene, Form und Größe der Bahnkurve

Die Bewegung eines Körpers auf der Bahnkurve wird in Bezug auf eine Referenzrichtung (das Perigäum) beschrieben, die durch den Laplace-Runge-Lenz Vektor  $\mathbf{A}$  in Abb. 3.2 bestimmt ist. Dieser zeigt in Richtung Perigäum und gibt dadurch die Orientierung der Bahnellipse in Bezug auf den Zentralkörper an. Er liegt in der Bahnebene, seine Richtung ist parallel zur großen Halbachse. Über den Betrag des Vektors kann auf die Form der Ellipse (die numerische Exzentrizität  $e$ ) geschlossen werden. Allgemein hat der Vektor als Betrag das  $k$ -fache (Masse des Körpers  $\cdot$  Gravitationskonstante) der numerischen Exzentrizität [Lohr, 1976], [Montenbruck und Gill, 2000]. Er wird mit der Gleichung 3.2 aus der Kepler Bewegungsgleichung des Keplerproblems und dem Drehimpulsvektor  $\mathbf{C}$  abgeleitet [Montenbruck und Gill, 2000].  $GM$  ist das Produkt aus Gravitationskonstante und Erdmasse.

$$\mathbf{A} = -GM \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{C} \times \dot{\mathbf{r}} \quad \textit{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} GM \cdot e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Der Laplace-Runge-Lenz Vektor ist in der Zweikörperbewegung eine Erhaltungsgröße. Das heißt, dass sich die Form (Exzentrizität) und die Orientierung (Richtung des Perigäums) der Ellipse nicht ändern. Die numerische Exzentrizität  $e$  bestimmt die Form des Kegelschnittes. Sie gibt das Verhältnis zwischen dem Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt und der großen Halbachse an [Bartsch, 1994]. Tab. 3.1 enthält eine Zuordnung zwischen Kegelschnitten und numerischer Exzentrizität. Je höher der Wert der Exzentrizität, desto elliptischer ist die Bahn. Hyperbel und Parabel werden auch als „Fluchtbahnen“ bezeichnet [Tapley et al., 2004].

Abbildung 3.2: Laplace-Runge-Lenz Vektor<sup>2</sup>.

**Tabelle 3.1:** Zusammenhang zwischen der Form der Objektbahn und der numerischen Exzentrizität [Tapley et al., 2004].

Kegelschnitt	Numerische Exzentrizität
Kreis	$e = 0$
Ellipse	$0 < e < 1$
Parabel	$e = 1$
Hyperbel	$e > 1$

Die Größe der Ellipse ist durch die große Halbachse  $a$  bestimmt. Die Verbindung des erdnächsten Punktes (Perigäum) und des erdfernen Punktes (Apogäum) wird als Ap-sidenlinie bezeichnet [Seeber, 2003].

### Beschreibung der Bahnkurve

Die Bahnkurve eines Körpers lässt sich in einem ebenen Koordinatensystem durch die Polarkoordinaten  $r$  und die wahre Anomalie  $\nu$  mit dem Halbparameter  $p$  (semi latus rectum) als Kegelschnittgleichung 3.3 darstellen.

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \nu} \quad \text{mit} \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{GM} \quad (3.3)$$

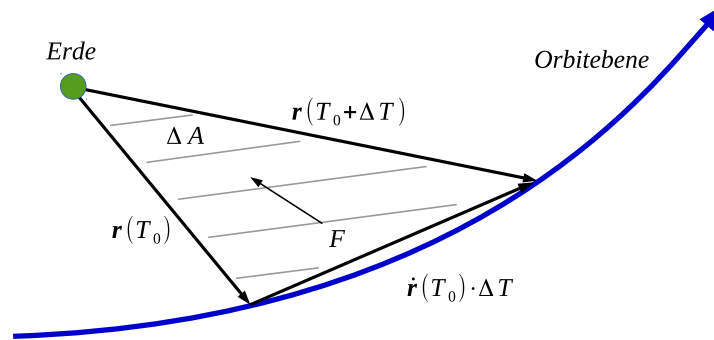
Die Bewegung auf einer elliptischen Bahn bedeutet, dass die Distanz zwischen dem Körper und dem Brennpunkt nicht konstant bleibt.

Die größte Entfernung zum Zentralkörper erreicht der Körper im Apogäum und die niedrigste im Perigäum [Montenbruck und Gill, 2000].

<sup>2</sup><https://de.wikipedia.org/wiki/Laplace-Runge-Lenz-Vektor>

## 3.2 Zeitlicher Verlauf der Bahnkurve

„Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Satellit auf seiner Bahn vorwärts bewegt, ändert sich mit der Zeit, sodass der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht“ (zweites Keplersches Gesetz).



**Abbildung 3.3:** Flächensatz. Wirkt die Störkraft in Richtung des Massenzentrums, bleibt der Drehimpulsvektor konstant und der Körper bewegt sich in einer ebenen Bahn [Montenbruck und Gill, 2000].

Das zweite Keplersche Gesetz beschreibt den Flächensatz in Abb. 3.3. Wählt man die zeitliche Schrittweite der Satellitenbewegung klein genug, kann die Bewegung eines Satelliten als linear angesehen werden. Die Flächenänderung  $\Delta A$  berechnet man mit dem Zusammenhang in Gl. 3.4 aus der Zeitdifferenz  $\Delta T$  und der Norm des Drehimpulsvektors  $\mathbf{C}$ . Der Betrag des Drehimpulsvektors ist die Flächengeschwindigkeit und wird als Konstante verwendet [Montenbruck und Gill, 2000].

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \Delta T\| = \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{C}\| \cdot \Delta T \quad (3.4)$$

Aus dem Flächensatz wird die Zeit  $T$  (die Umlaufdauer) abgeleitet, die der Körper benötigt um die gesamte Ellipse zu überstreichen.

„Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich proportional zu den Kuben der großen Halbachse der Ellipse“ (drittes Keplersches Gesetz).

Zwischen zwei Perigäumsdurchgängen  $T_0$  und  $T_1$  überstreicht der Körper den gesamten Flächeninhalt ( $a \cdot b \cdot \pi$ ) der Ellipse, daher gilt [Seeber, 2003]:

$$a \cdot b \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{C}\| \cdot (T_1 - T_0) \quad \text{mit} \quad T = T_1 - T_0 \quad (3.5)$$

Durch Einsetzen der Zusammenhänge  $C^2 = GM \cdot p$ ,  $p = a \cdot (1 - e^2)$  und  $b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2)$  wird aus Gl. 3.5 die Umlaufdauer  $T$  in Gl. 3.6 abgeleitet, die ausschließlich von der großen Halbachse abhängt. In der Umlaufdauer ist auch die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$

(der überstrichene Winkel pro Zeiteinheit) enthalten [Brandt et al., 1996].

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad \text{mit} \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (3.6)$$

Aus dem Flächensatz folgt nun, dass der Körper in gleichen Zeiten unterschiedliche Winkel zurücklegt. Der zeitliche Verlauf des Körpers kann nun entweder über die wahre Anomalie ( $\nu$ ), die exzentrische Anomalie ( $E$ ) oder die mittlere Anomalie ( $M$ ) beschrieben werden (Abb. 3.1). Der Vorteil der mittleren Anomalie gegenüber den anderen beiden ist, dass sie über die Zeit linear interpoliert werden kann. Im Perigäum sind alle drei Anomalien Null, der Zusammenhang zu  $\nu$  und  $E$  kann wie folgt dargestellt werden [Seeber, 2003]:

$$\tan \nu = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E}{\cos E - e} \quad (3.7)$$

Die Keplergleichung 3.8 stellt schließlich den Zusammenhang zwischen der mittleren und der exzentrischen Anomalie  $E$  her [Montenbruck und Gill, 2000].

$$M = E - e \cdot \sin E = \bar{\omega} \cdot (T_2 - T_0) \quad (3.8)$$

Für einen Umlauf ( $2\pi$ ) betrachtet, ergibt sich daraus das dritte Keplersche Gesetz in der Newton Mechanik:

$$2\pi = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \cdot T \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{T^2}{a^3} \quad (3.9)$$

Das Vis-Viva Gesetz stellt in Gl. 3.10 die tangentielle Geschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit von der großen Halbachse  $a$  und der Entfernung  $r$  des Körpers zum Zentralkörper dar [Montenbruck und Gill, 2000].

$$v^2 = \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = GM \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (3.10)$$

Wie man in der Gl. 3.10 erkennt, ist die Geschwindigkeit des Körpers nur von der Größe der Ellipse (oder des Kegelschnittes) und nicht von der Form abhängig. Die Geschwindigkeit des Körpers nimmt mit zunehmender Halbachse ab und mit geringerer Entfernung zum Zentralkörper zu.

### 3.3 Orientierung der Bahnkurve

Die Orientierung der Bahnkurve im Raum wird durch Drehungen um die Koordinatenachsen des Inertialsystems (ECI) beschrieben (Abb. 3.4). Der Ursprung des Inertialsystems liegt im Massenzentrum der Erde. Die X-Achse zeigt in Richtung Frühlingspunkt (der Schnittlinie zwischen der Äquatorebene und der Ekliptik) und die Z-Achse zum Nordpol. Die Y-Achse steht orthogonal auf die anderen beiden Achsen [Seeber, 2003], [Montenbruck und Gill, 2000].

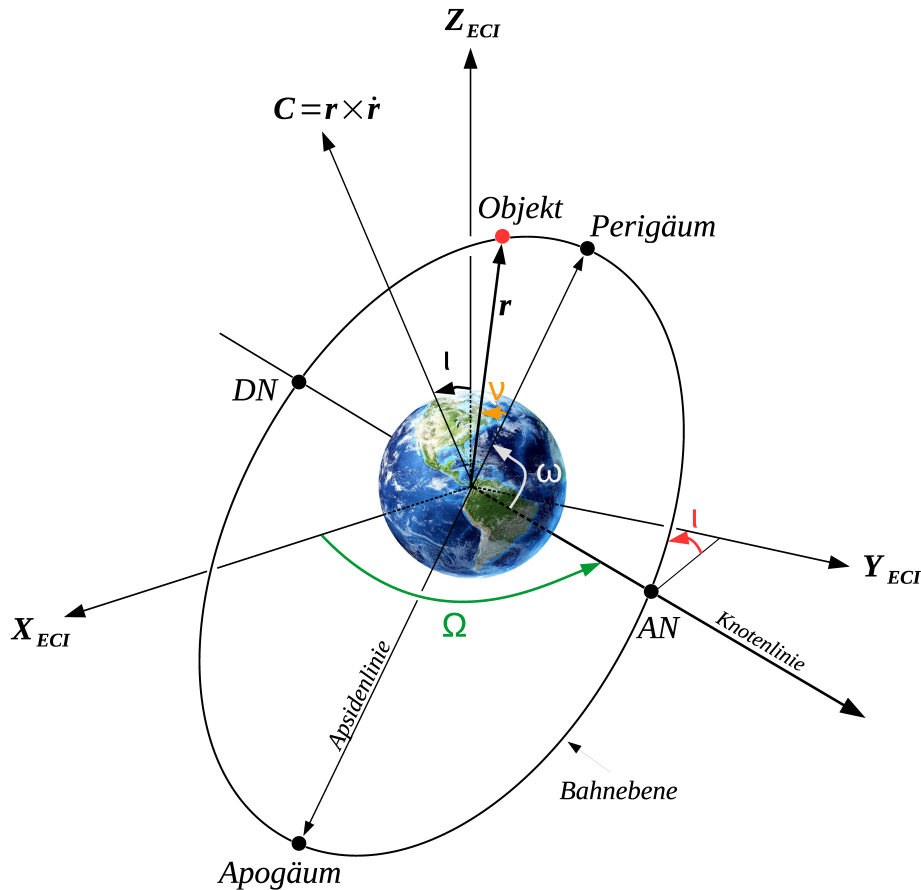


Abbildung 3.4: Beschreibung der Satellitenposition in einem Inertialsystem. Darstellung basierend auf [Tapley et al., 2004].

Die Inklination  $i$  beschreibt die Neigung der Bahnebene gegen die Äquatorebene und nimmt Werte zwischen 0 und  $2\pi$  an. Sie bestimmt die Richtung der Satellitenbewegung (Tab. 3.2) [Montenbruck und Gill, 2000], [Seeber, 2003].

**Tabelle 3.2:** Bewegungsrichtung eines Satelliten in Abhängigkeit von der Inklination [Seeber, 2003].

Inklination	Bewegung
$0 < i < \frac{\pi}{2}$	Satellitenbewegung nach Osten (prograd mit der Erdrotation)
$\frac{\pi}{2} < i < \pi$	Satellitenbewegung nach Westen (retrograd entgegen der Erdrotation)

Die Rektaszension des aufsteigenden Knotens  $\Omega$  zeigt die Richtung zwischen dem Frühlingspunkt und der Knotenlinie an. Die Knotenlinie verbindet den aufsteigenden (AN) und den absteigenden (DN) Knoten miteinander.

Das Argument des Perigäums  $\omega$  bestimmt die Ausrichtung der Ellipse in der Bahnebene und beschreibt den Winkel zwischen der Knotenlinie und der Richtung zum Perigäum [Tapley et al., 2004], [Montenbruck und Gill, 2000].

## Kapitel 4

# Dynamische Bahnmodellierung

Die von Kepler beschriebene elliptische Bewegung eines Objektes um einen als Punktmasse approximierten sphärischen Zentralkörper, wird durch eine Reihe von Störkräften beeinflusst, die einerseits durch die Drittkörperkräfte (Sonne, Mond und Planeten) und andererseits durch die Interaktion mit der Umgebung (den Atmosphärenmolekülen sowie der elektromagnetischen Strahlung der Sonne) zustande kommen.

In der präzisen dynamischen Bahnbestimmung wird die Bewegung eines Satelliten durch ein physikalisches Modell  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$  dieser Kräfteinflüsse beschrieben. Dieses setzt sich aus (a) der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}_z(t)$  durch den Zentralkörper, (b) der inhomogenen Massenverteilung der Erde  $\ddot{\mathbf{r}}_{egf}(t)$ , (c) dem Einfluss  $\ddot{\mathbf{r}}_{3b}(t)$  der Drittkörper und (d) der Gezeiten  $\ddot{\mathbf{r}}_{tide}(t)$  (Gezeiten der festen Erde und der Ozeane, Polgezeiten), (e) der Relativistik  $\ddot{\mathbf{r}}_{rel}$  und den nicht-gravitativen Beschleunigungen, die durch (f) den Reibungswiderstand der Atmosphäre  $\ddot{\mathbf{r}}_{drag}(t)$  und (g) den Strahlungsdruck der Sonne  $\ddot{\mathbf{r}}_{srp}(t)$  sowie (h) die Albedo  $\ddot{\mathbf{r}}_{alb}(t)$  verursacht werden, in der Gl. 4.1 zusammen [Seeber, 2003], [Tapley et al., 2004], [Montenbruck und Gill, 2000].

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -GM \cdot \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} + \ddot{\mathbf{r}}_s(t) \quad (4.1)$$

mit

$$\ddot{\mathbf{r}}_s(t) = \ddot{\mathbf{r}}_{egf}(t) + \ddot{\mathbf{r}}_{3b}(t) + \ddot{\mathbf{r}}_{tide}(t) + \ddot{\mathbf{r}}_{rel}(t) + \ddot{\mathbf{r}}_{drag}(t) + \ddot{\mathbf{r}}_{srp}(t) + \ddot{\mathbf{r}}_{alb}(t) \quad (4.2)$$

Die Kräfteinflüsse werden in gravitative (konservative) und nicht-gravitativ (nicht - konservative) unterteilt. Gravitative Kräfte werden durch Planeten verursacht und führen zu einer Beschleunigung. Ein Satellit verändert dadurch seine Bewegung (seine Geschwindigkeit und infolge seine Lage). Die Bewegungsänderung erfolgt in Richtung der einwirkenden Kraft (zweites Newton Axiom).



Nicht-gravitativ Kräfte besitzen kein Kraftfeld. Sie interagieren mit der Oberfläche des Satelliten [Montenbruck und Gill, 2000]. Tab. 4.1 enthält eine Übersicht der Störbeschleunigungen, die von den oben genannten Kräften verursacht werden.

**Tabelle 4.1:** Störbeschleunigungen, die auf einen LEO Satelliten wirken und deren Größenordnungen [Bock, 2003].

Kraft	Beschleunigung [m/s <sup>2</sup> ]
Zentrales Kraftfeld	8.6
Erdabplattung ( $J_2$ )	$2.0 \cdot 10^{-2}$
Schwerefeld (ohne $J_2$ )	$2.0 \cdot 10^{-4}$
Gravitationsfeld des Mondes	$1.0 \cdot 10^{-6}$
Gravitationsfeld der Sonne	$4.0 \cdot 10^{-7}$
Atmosphärenreibung	$5.0 \cdot 10^{-7}$
Strahlungsdruck der Sonne	$3.0 \cdot 10^{-8}$
Albedo	$4.0 \cdot 10^{-10}$

## 4.1 Zweikörperbewegung

Die Bewegung eines Objektes um einen Zentralkörper entspricht dem klassischen Zweikörperproblem, das von Sir Isaac Newton 1687 in seinem Werk „*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*“ beschrieben wurde. Im ersten Buch „*De motu corporum*“ erklärt er in drei Axiomen die Bewegung zweier - als Punktmassen approximierter - Körper zueinander [Newton, 1729]. Zusätzlich dazu hat er mit dem Gravitationsgesetz eines der grundlegenden Gesetze der Physik aufgestellt. Newton gilt damit als der Begründer der klassischen Mechanik [Tapley et al., 2004].

### Lex I.

*„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.“*

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, linearen Bewegung solange keine äußeren Kräfte darauf einwirken (erstes Newton Axiom). Der lineare Impuls  $\mathbf{p}$  bleibt zeitlich konstant. Der Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und wird nicht beschleunigt. Unter der Annahme, dass sich die Masse  $m$  des Körpers mit der Zeit nicht ändert, gilt Folgendes [Brandt et al., 1996]:

$$\mathbf{F} = 0 \quad , \quad \mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v} = \textit{konstant} \quad , \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad . \quad (4.3)$$

### Lex II.

*„Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressi, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.“*

Die Bewegungsänderung eines Körpers ist proportional zur einwirkenden Kraft und erfolgt in Richtung der Kraft, durch die sie verursacht wird (zweites Newton Axiom). Daraus folgt, dass eine einwirkende Kraft den Betrag und die Richtung des Impulsvektors  $\mathbf{p}$  und somit die Bewegung eines Körpers verändert. Die Bewegung ist in Richtung der einwirkenden Kraft  $\mathbf{F}$  gerichtet. Die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}$ , die durch diese Kraft verursacht wird, ist umgekehrt proportional zur Masse  $m$  des Körpers. Unter der Annahme, dass die Masse mit der Zeit konstant bleibt, gilt

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\ddot{\mathbf{r}} \quad . \quad (4.4)$$

Mit den ersten beiden Axiomen definiert Newton ein nicht beschleunigtes - inertiales - oder gleichmäßig beschleunigtes Referenzsystem, in dem sich der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) gleichförmig linear bewegt oder ruht. Die Gesetze sind nur in einem Inertialsystem gültig [Brandt et al., 1996].

**Lex III.**

*„Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive duorum corporum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.“*

Zu jeder Aktion gibt es eine Reaktion: Die wechselseitigen Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben sind gleich groß und wie in Gl. 4.5 zueinander ausgerichtet (drittes Newton Axiom) [Brandt et al., 1996].

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (4.5)$$

**Gravitationsgesetz**

*„Every particle of matter in the Universe attracts every other particle of matter with a force directly proportional to the product of their masses and inversely proportional to the square of the distance between them.“*

Das Gravitationsgesetz in Gl. 4.6 stellt die Kraftwirkung  $\mathbf{F}_{12}$ , die ein Körper auf einen Zweiten ausübt dar. Sie ist umgekehrt proportional zur Entfernung der beiden Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$ . Die Beschleunigung nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab.  $G$  ist die Gravitationskonstante,  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  sind die Richtungsvektoren der beiden Körper [Brandt et al., 1996].

$$\mathbf{F}_{12} = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (4.6)$$

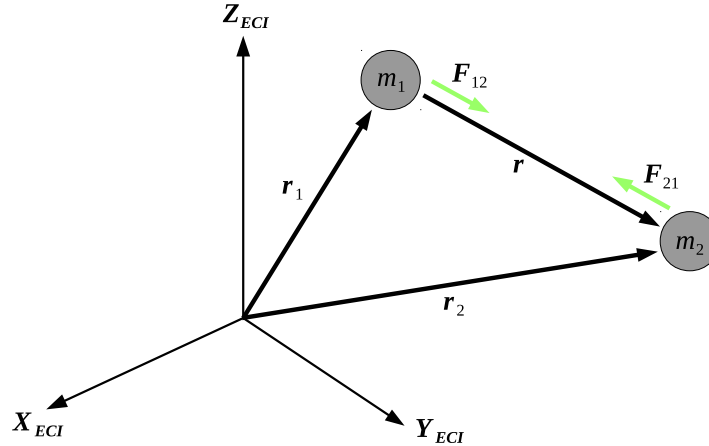
**Superpositionsprinzip**

Zusätzlich zu diesen drei Axiomen beschreibt Newton das Superpositionsprinzip der Mechanik: Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, addieren sich diese wie in Gl. 4.7 vektoriell zu einem gesamten Kraftvektor auf [Newton, 1729], [Tapley et al., 2004].

$$\mathbf{F}_{ges} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \quad (4.7)$$

### Bewegung zweier Körper zueinander

Aus dem Gravitationsgesetz und dem zweiten Newton Axiom lässt sich die relative Bewegung zweier Punktmassen als Zweikörperbewegung der Newton Mechanik darstellen.



**Abbildung 4.1:** Zweikörperbewegung der Newton Mechanik. Relative Bewegung der Körper mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  [Tapley et al., 2004].

Setzt man das zweite Axiom mit dem Gravitationsgesetz gleich, erhält man die Bewegungsgleichungen 4.8 und 4.9 der Körper mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  und dem Differenzvektor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Die Massen  $m_1$  und  $m_2$  im Gravitationsgesetz werden als Gravitationsmassen bezeichnet.  $m_1$  im zweiten Newton Axiom ist die träge Masse eines Körpers. Nach dem schwachen Äquivalenzprinzip entspricht die Gravitationsmasse der trägen Masse [De Aquino, 2002].

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^3} \cdot \mathbf{r} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{F}_{21} = m_2 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^3} \cdot \mathbf{r} \quad (4.9)$$

Daraus lässt sich die relative Bewegung als Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in der Gleichung 4.10 darstellen. Im Fall eines erdumkreisenden Satelliten, entspricht  $m_1$  der Gravitationsmasse der Erde und  $m_2$  der des Satelliten. Die Satellitenmasse  $m_2$  (für LAGEOS-1  $\approx 407 \text{ kg}$ <sup>1</sup>) ist im Vergleich zur Erdmasse vernachlässigbar. Die Gravitationsmasse der Erde  $m_1$  bezeichnet man infolge mit  $M$ .  $\ddot{\mathbf{r}}_{12}$  ist die Beschleunigung, die der Satellit in einer Entfernung  $r$  durch die Erde erfährt [De Aquino, 2002].  $G$  ist die Gravitationskonstante ( $\sim 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -GM \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.10)$$

Die Kräfte  $\mathbf{F}_{12}$  und  $\mathbf{F}_{21}$  können auch aus einem Potential durch Gradientenbildung abgeleitet werden [Brandt et al., 1996].

<sup>1</sup>[https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/missions/satellite\\_missions](https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/missions/satellite_missions)

## 4.2 Gravitationsfeld der Erde

Die Erdfigur ist aufgrund der Erdrotation abgeplattet, wobei sich die Durchmesser am Pol und Äquator um  $\sim 20$  km unterscheiden. Dadurch variiert auch die Schwerebeschleunigung  $g$  mit Werten von 978 gal am Äquator und 983 gal ( $1 \text{ gal} = 0.01 \text{ m/s}^2$ ) an den Polen [Hofmann-Wellenhof et al., 2005]. Die Abplattung übt den größten Einfluss auf die Satellitenbewegung aus und führt zu einer Präzessionsbewegung der Bahnebene und einer Wanderung der Knotenlinie. Aufgrund des geringen Abstandes zur Erde sind Satelliten in niedrigen Flughöhen sensitiver auf diesen Einfluss.

Die Schwerebeschleunigung, die auf einen Satelliten wirkt, erhält man aus dem Gradient des Potentials in Gl. 4.11 [Montenbruck und Gill, 2000].

$$\ddot{\mathbf{r}}_{egf} = \text{grad } V \quad (4.11)$$

Geht man davon aus, dass die gesamte Erdmasse in einem Punkt konzentriert ist, approximiert man das Gravitationspotential der Erde mit Gl. 4.12 durch das Potential einer Punktmasse.

$$V = \frac{GM}{r} \quad (4.12)$$

Tatsächlich ist die Massenverteilung im Erdinneren wesentlich komplexer und man geht davon aus, dass sich der Körper aus einzelnen Massenelementen  $dm$  in Gl. 4.13 mit der Dichte  $\rho_m$  zusammensetzt. Mit  $dv_P$  wird das Volumenelement bezeichnet.

$$dm = \rho_m \cdot dv_P \quad (4.13)$$

Summiert man die Einflüsse (die Potentiale) aller Massenelemente, erhält man mit Gl. 4.14 das gesamte Potential  $V$ , das auf den Punkt  $P(x, y, z)$  wirkt. Da man davon ausgeht, dass die Massenelemente infinitesimal klein sind, geht die Summe in ein Integral über. Der Abstand zwischen den Massenelementen  $dm$  und dem Punkt wird mit  $r$  und das Massenelement selbst mit  $\xi, \eta, \zeta$  bezeichnet [Hofmann-Wellenhof et al., 2005].

$$V(x, y, z) = G \iiint_{v_P} \frac{\rho_m(\xi, \eta, \zeta)}{r} dv_P \quad dv_P = d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.14)$$

Im Außenraum der Erde - außerhalb von erzeugenden Massen - ist die Dichte  $\rho_m$  Null, das heißt das Potential ist im Außenraum eine harmonische Funktion und erfüllt die Laplace Gleichung 4.15. Die Funktion ist stetig und stetig-differenzierbar und kann in eine Reihe entwickelt werden.

$$\Delta V = 0 \quad (4.15)$$

Im Innenraum der Erde ist eine Auswertung des Integral genau an jenem Punkt nicht möglich, wo der Abstand  $r$  zu Null wird und der Ausdruck  $1/r$  daher gegen Unendlich geht. Die Laplace Gleichung ist nicht erfüllt und innerhalb von erzeugenden Massen gilt die Poisson Gleichung 4.16.

$$\Delta V = -4\pi G\rho \quad (4.16)$$

Da das Potential außerhalb von erzeugenden Massen eine harmonische Funktion ist, kann es in eine Kugelfunktionsreihe entwickelt werden [Hofmann-Wellenhof et al., 2005]. Die Kugelfunktionsreihe ist eine Linearkombination der Lösungen der Laplace Gleichung in sphärischen Koordinaten.

Die Anwendung des Laplace Operators auf das Potential  $V$  ergibt die Laplace Gleichung 4.17.

$$\Delta^2 V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (4.17)$$

Die Basisfunktionen der Kugelfunktionsreihe leitet man mit dem Separationsansatz aus der Laplace Gleichung ab, wobei man davon ausgeht, dass sich die Potentialfunktion in Gl. 4.18 darstellen lässt als das Produkt zweier Funktionen  $f(r)$  und  $Y_n(\vartheta, \lambda)$ .

$$V(r, \vartheta, \lambda) = f(r) \cdot Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (4.18)$$

### Radiale Abhängigkeit

Substituiert man Gl. 4.18 in Gl. 4.17 und führt eine Trennung der Variablen durch, resultiert daraus die Differentialgleichung der Funktion  $f(r)$ , die man mit der Konstanten  $n \cdot (n + 1)$  gleichsetzt.

Für die Funktion  $f(r)$  erhält man dadurch in den Gleichungen 4.19 und 4.20 jeweils eine Lösung für den Innenraum und eine für den Außenraum.

$$V_1(r, \vartheta, \lambda) = r^n \cdot Y_n(\vartheta, \lambda) \quad , \quad r \leq 1 \quad (4.19)$$

$$V_2(r, \vartheta, \lambda) = r^{-(n+1)} \cdot Y_n(\vartheta, \lambda) \quad , \quad r > 1 \quad (4.20)$$

Auf die partielle Differentialgleichung der sphärischen harmonischen Flächenfunktionen  $Y_n(\vartheta, \lambda)$  wendet man die folgende Substitution an:

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = g(\vartheta) \cdot h(\lambda) \quad . \quad (4.21)$$

Führt man eine Trennung der Variablen durch, erhält man zwei gewöhnliche Differentialgleichungen der Funktionen  $g(\vartheta)$  und  $h(\lambda)$ , die man durch Gleichsetzen mit der Konstanten  $m^2$  löst.

### Längenabhängigkeit

Die Differentialgleichung für die Funktion  $h(\lambda)$  ergibt die zwei Lösungen in Gl. 4.22:

$$h_1(\lambda) = \cos(m\lambda) \quad \text{und} \quad h_2(\lambda) = \sin(m\lambda) \quad . \quad (4.22)$$

Die Linearkombination dieser beiden Lösungen in Gl. 4.23 ist die Überlagerung einer Sinus und Cosinus Schwingung mit den Schwerefeldkoeffizienten  $C_{nm}$  und  $S_{nm}$  als Amplituden. Sie sind nur von der geographischen Länge  $\lambda$  abhängig.

$$h(\lambda) = C_{nm} \cdot \cos(m\lambda) + S_{nm} \cdot \sin(m\lambda) \quad (4.23)$$

Die Schwerefeldkoeffizienten ( $C_{nm}$  und  $S_{nm}$ ) beschreiben die maximale Abweichung vom Referenzellipsoid. Mit zunehmendem Grad nimmt die Amplitude ab. Die Frequenz der Schwingung wird durch die Ordnung  $m$  bestimmt. Je höher die Ordnung, desto hochfrequenter ist die Schwingung [Brandt et al., 1996].

### Breitenabhängigkeit

Die Legendre Differentialgleichung für  $g(\vartheta)$  ergibt als Lösungen die Legendreschen Funktionen  $P_{nm}(\cos\vartheta)$ :

$$g(\vartheta) = P_{nm}(\cos\vartheta) \quad . \quad (4.24)$$

Der Grad  $n$  und die Ordnung  $m$  sind auf Integer Werte beschränkt, wobei die Ordnung kleiner oder gleich sein muss als der Grad, damit man eine physikalisch sinnvolle Lösung erhält. Die Legendreschen Funktionen sind nur von der Poldistanz  $\vartheta = \pi/2 - \varphi$  abhängig [Hofmann-Wellenhof et al., 2005].

Die Linearkombination dieser Basisfunktionen in Gl. 4.25 approximiert den Einfluss des Schwerefeldes auf Satellitenhöhe durch eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen.

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{R} \cdot \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n_{max}} P_{nm}(\cos\vartheta) \cdot [C_{nm} \cdot \cos(m\lambda) + S_{nm} \cdot \sin(m\lambda)] \quad (4.25)$$

Der maximale Grad  $n_{max}$  der harmonischen Koeffizienten  $C_{nm}$  und  $S_{nm}$  bestimmt die Auflösung des Schwerefeldes. Ein Schwerefeld bis zu einem maximalen Grad  $n_{max}$  hat  $(1 + n_{max})^2$  Koeffizienten. Der Term  $(R/r)^{n+1}$  beschreibt die Signalabschwächung mit zunehmendem Abstand  $r$  [Barthelmes, 2013].

### Besondere Schwerefeldkoeffizienten

Der Koeffizient  $C_{00}$  ist 1, wenn das Referenzellipsoid und die Erde dieselbe Masse besitzen. Die Koeffizienten  $C_{10}$ ,  $C_{11}$  und  $S_{11}$  stehen im Zusammenhang mit den Koordinaten des Geozentrums und sind Null, wenn der Ursprung des Referenzellipsoids ins Massenzentrum der Erde gelegt wird [Barthelmes, 2013]. Die Grad 2 Koeffizienten (mit Ausnahme von  $C_{20}$ ) bringt man in Verbindung mit den Trägheitsmomenten und -produkten der Erde. Sind alle Koeffizienten Null, fallen die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen der Erde zusammen [Tapley et al., 2004].

Die Abb. 4.2 stellt die drei Arten der sphärisch harmonischen Funktionen gegenüber.

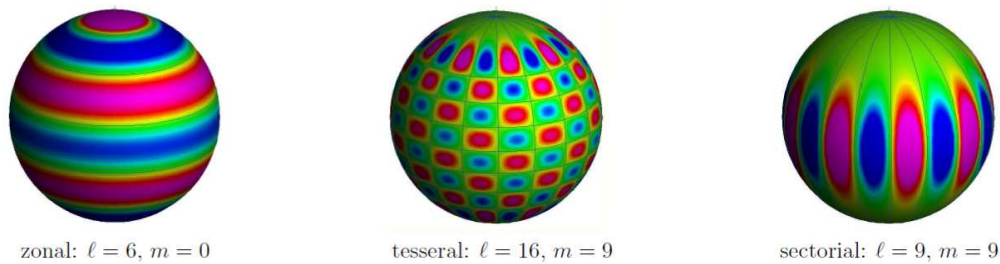


Abbildung 4.2: Sphärisch harmonische Flächenfunktionen [Barthelmes, 2013, 19].

Modelliert man die Kugelfunktionsreihe nur mit den längenunabhängigen zonalen  $C_{n0}$  Koeffizienten wie im linken Teil der Abb. 4.2, ist die Massenverteilung symmetrisch zur Rotationsachse. Der Koeffizient  $C_{20}$  ist eine Maßzahl zur Beschreibung der Erdabplattung. Sektorielle Koeffizienten sind von gleichem Grad und gleicher Ordnung ( $l = m \neq 0$ ) und für Tesserales gilt  $m \neq l \neq 0$  [Barthelmes, 2013].

#### 4.2.1 Systemrotation

Die Bewegung eines Objektes wird mithilfe der klassischen Newton Mechanik in einem quasi-inertialen rotationsfreien System beschrieben, dessen Ursprung im Geozentrum liegt. Beobachtungen, die von der Erde aus durchgeführt werden, beziehen sich auf ein System, das an die Erdrotation gebunden ist [Montenbruck und Gill, 2000]. Um die Messungen zur Bahnbestimmung in Kap. 5 nutzen zu können, benötigt man eine Transformationsvorschrift vom erdfesten (ECE) ins raumfeste (ECI) System. Dieser Übergang wird auch dazu eingesetzt, um die Stationskoordinaten vom erdfesten ins raumfeste System zu transformieren [Montenbruck und Gill, 2000].

Gravitationskräfte von Sonne und Mond verursachen (aufgrund der Schiefe der Ekliptik und der Erdabplattung) Schwankungen in der Ausrichtung der Erdrotationsachse und des Äquators.



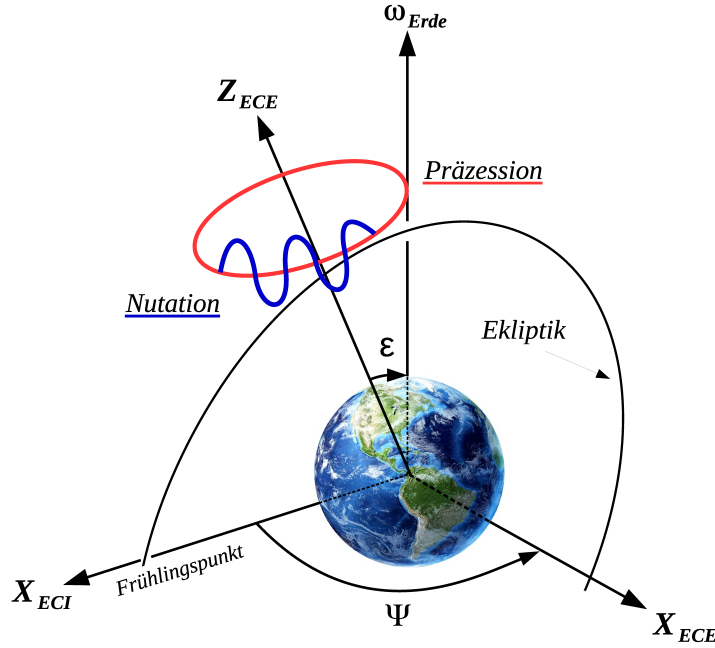


Abbildung 4.3: Präzessions- und Nutationskegel, basierend auf [Tapley et al., 2004].

Ein Referenzsystem ist daher nach dem mittleren Äquator, der Ekliptik und dem Frühlingsspunkt einer Referenzeпоche (beispielsweise J2000.0) ausgerichtet.

Der Frühlingsspunkt ist die Schnittgerade zwischen dem Äquator und der Ekliptik, wenn die Sonne bei ihrer scheinbaren Bewegung von Süden kommend den Äquator überquert. Die X-Richtung des ECI Systems ( $\mathbf{X}_{ECI}$ ) in Abb. 4.3 zeigt in diese Raumrichtung [Tapley et al., 2004]. Die X-Achse des ECE Systems ist entlang des Greenwich Meridians ausgerichtet.

$\Psi$  in der Abb. 4.3 zeigt vom Frühlingsspunkt zum momentanen Schnittpunkt zwischen dem Erdäquator und der Ekliptik.  $\epsilon$  ist die Schiefe der Ekliptik ( $\sim 23.4^\circ$ ) um die der Erdäquator gegenüber der Ekliptik geneigt ist.

Der Übergang vom ECI ins ECE System erfolgt unter Berücksichtigung der Präzessions- und Nutationsbewegung  $\mathbf{P}_E(t)$  und  $\mathbf{N}_E(t)$ , der Polbewegung  $\mathbf{\Pi}_E(t)$  und der Erdrotation  $\mathbf{\Theta}_E(t)$  mit Gl. 4.26.

$$\mathbf{r}_{ECE} = \mathbf{\Pi}_E(t) \cdot \mathbf{\Theta}_E(t) \cdot \mathbf{N}_E(t) \cdot \mathbf{P}_E(t) \cdot \mathbf{r}_{ECI} \quad (4.26)$$

Die Präzessionsbewegung  $\mathbf{P}_E(t)$  ist ein langperiodischer Effekt und äußert sich als kegelartige Bewegung der Erdrotationsachse um den Ekliptikpol (mit einer Periode von  $\sim 26000$  Jahren). Mit Nutation  $\mathbf{N}_E(t)$  bezeichnet man einen kurzperiodischen Effekt [Montenbruck und Gill, 2000]. Beide Effekte sind in der Abb. 4.3 illustriert.

### 4.3 Drittkörperkräfte

Durch die Anziehungskräfte von Sonne, Mond und Planeten kommt es zu einer Bewegungsänderung des Satelliten, wobei mit zunehmender Entfernung ( $1/r^2$ ) die Anziehungskräfte abnehmen. Die Berechnung der Störbeschleunigung - verursacht durch Drittkörper - ist eine Erweiterung der klassischen Zweikörperbewegung. Der dritte Körper führt zu einer direkten Beschleunigung des Satelliten, verursacht aber auch eine zeitliche Variation des Erdschwerefeldes und beeinflusst die Bewegung dadurch indirekt [Montenbruck und Gill, 2000].

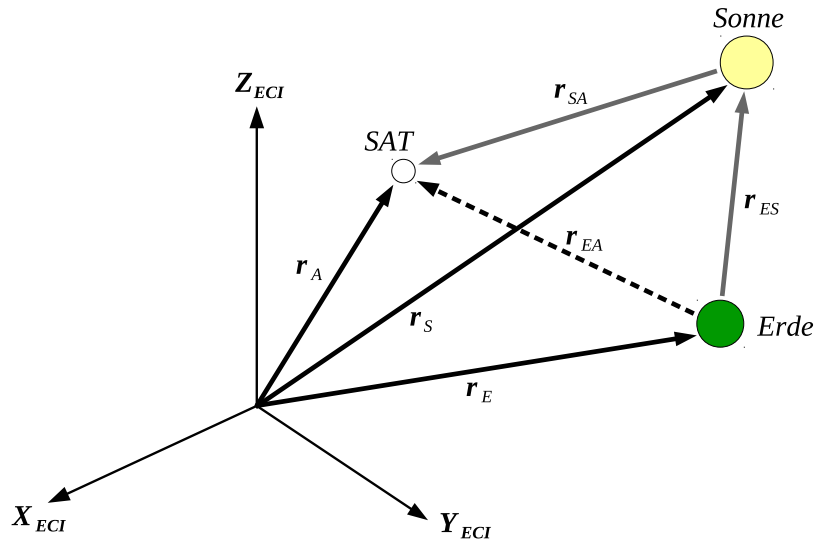


Abbildung 4.4: Direkter und indirekter Einfluss eines dritten Körpers auf die Bewegung eines Satelliten, basierend auf [Seeber, 2003].

Die Zweikörperbewegung wird in Abb. 4.4 um einen dritten Körper (die Sonne) erweitert. Da die drei Körper als Punktmassen  $m_E$ ,  $m_A$  und  $m_S$  approximiert werden, kann die Kraftwirkung zwischen den Körpern durch das Newton Gravitationsgesetz in vektorieller Form beschrieben werden. Die Kräfte  $\mathbf{F}_{EA}$  und  $\mathbf{F}_{SA}$ , die Erde (E) und Sonne (S) auf den Satelliten (A) ausüben, lauten basierend auf [Seeber, 2003]:

$$\mathbf{F}_{EA} = -Gm_E m_A \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_E}{\|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_E\|^3} = -Gm_E m_A \frac{\mathbf{r}_{EA}}{\|\mathbf{r}_{EA}\|^3} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{F}_{SA} = -Gm_S m_A \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S}{\|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S\|^3} = -Gm_S m_A \frac{\mathbf{r}_{SA}}{\|\mathbf{r}_{SA}\|^3}. \quad (4.28)$$

Nach dem Newton Superpositionsprinzip ist der gesamte Krafteinfluss  $\mathbf{F}_{Sat}$  auf den Satelliten in Gl. 4.29 als Summe der Einzelkräfte  $\mathbf{F}_{EA}$  und  $\mathbf{F}_{SA}$  darstellbar.

$$\mathbf{F}_{Sat} = m_A \cdot \ddot{\mathbf{r}}_A = -m_A G \left( m_E \frac{\mathbf{r}_{EA}}{\|\mathbf{r}_{EA}\|^3} + m_S \frac{\mathbf{r}_{SA}}{\|\mathbf{r}_{SA}\|^3} \right) \quad (4.29)$$

Nach demselben Prinzip der Gleichungen 4.27 und 4.28 lassen sich die Krafteinflüsse  $\mathbf{F}_{SE}$  und  $\mathbf{F}_{AE}$  auf die Erde (E) herleiten, die durch die Potentiale der Sonne (S) und des Satelliten (A) zustande kommen. Aus der Summe der Einzelkräfte ergibt sich mit Gl. 4.30 die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_{Erde}$ , die auf die Erde wirkt.

$$\mathbf{F}_{Erde} = m_E \cdot \ddot{\mathbf{r}}_E = +m_E G \left( m_S \frac{\mathbf{r}_{ES}}{\|\mathbf{r}_{ES}\|^3} + m_A \frac{\mathbf{r}_{EA}}{\|\mathbf{r}_{EA}\|^3} \right) \quad (4.30)$$

Nun möchte man die Gesamtbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}_{EA}$  des Satelliten berechnen, die durch die Erde und die Sonne verursacht wird. Die Beschleunigung ist die Kraft pro Einheitsmasse und lässt sich aus der Relativbewegung zwischen der Erde und dem Satelliten berechnen. Man beachte, dass der Richtungsvektor  $\mathbf{r}_{SA}$  zwischen der Sonne und dem Satelliten in Gl. 4.31 nun in die umgekehrte Richtung zeigt.

$$\ddot{\mathbf{r}}_{EA} = \ddot{\mathbf{r}}_A - \ddot{\mathbf{r}}_E = -G(m_E + m_A) \frac{\mathbf{r}_{EA}}{\|\mathbf{r}_{EA}\|^3} + Gm_S \left( \frac{\mathbf{r}_{AS}}{\|\mathbf{r}_{AS}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_{ES}}{\|\mathbf{r}_{ES}\|^3} \right) \quad (4.31)$$

Der erste Term in der Gl. 4.31 entspricht der Beschleunigung, die durch das Potential der Erde verursacht wird (Zweikörperbewegung). Der zweite Term enthält den direkten und indirekten Einfluss des Drittkörpers. Wie man anhand der Gl. 4.31 erkennt, hängt der indirekte Term nur von der relativen Entfernung  $\mathbf{r}_{ES}$  zwischen der Erde (E) und der Sonne (S) ab. Sind mehrere Drittkörper beteiligt, lässt sich die Gesamtbeschleunigung als Summe der Einzelbeschleunigungen darstellen:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{3B} = \sum_{J=1}^{n3B} G_J \cdot m_J \left( \frac{\mathbf{r}_{AJ}}{\|\mathbf{r}_{AJ}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_{EJ}}{\|\mathbf{r}_{EJ}\|^3} \right) \quad (4.32)$$

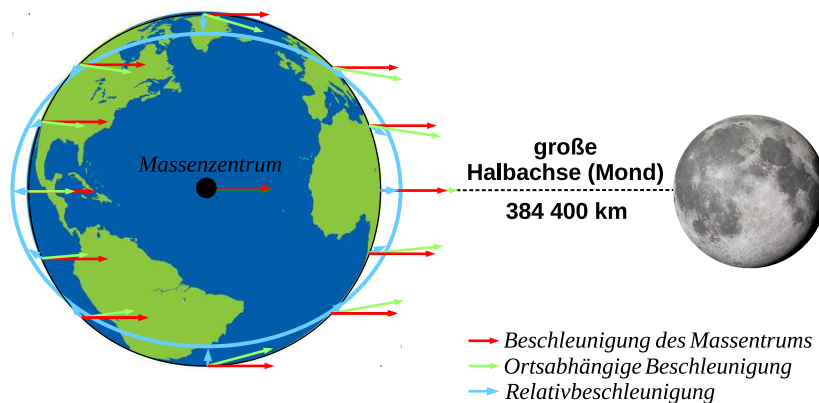
Die Drittkörperkräfte verursachen säkulare (langfristige lineare) Störungen der Rektaszension des aufsteigenden Knotens, des Argument des Perigäums und der Anomalien. Es kommt zu einer Präzessionsbewegung der Knotenlinie und einer Drehung der Apsidenlinie. Zusätzlich dazu treten in den Bahnelementen periodische Variationen mit einem Zyklus von 14 und 183 Tagen auf, die mit der Mond- und Sonnenbewegung in Verbindung stehen [Seeber, 2003].

## 4.4 Gezeiten

Unter dem Begriff Gezeiten versteht man periodische Deformationen des festen Erdkörpers, Änderungen in den Ozeanmassen und Auflasteffekte. Die Verursacher dieser Effekte sind Sonne, Mond und andere Planeten. Der Mond übt aufgrund des geringen Abstandes zur Erde (mit einer Halbachse von  $\sim 384\,400$  km) den größten Einfluss aus. Der Einfluss der Sonne ist infolge deren Masse trotz ihres großen Abstandes zur Erde (von  $1 \text{ AU} \approx 150 \text{ MIO km}$ ) nicht zu vernachlässigen [Wendt, 2004].

Bedingt durch die relative Lage der Erde zur Sonne und zum Mond treten kurzperiodische Gezeitenvariationen auf (mit Frequenzen von ungefähr 12 und 24 Stunden sowie 27 Tagen), im Zusammenhang mit den Umlaufzeiten der Apsidenlinie und der Knotenlinie des Mondes aber auch Langzeiteffekte von ungefähr 8.8 und 18.6 Jahren [Agnew, 2007].

Die Gezeitenkräfte eines Planeten kann man als Feld darstellen, wie in Abb. 4.5 anhand von Erde und Mond gezeigt ist. Das Gravitationspotential des Mondes übt eine Kraftwirkung auf das Massenzentrum der Erde aus. Dieses wirkt mit der gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Kraft auf den Mond (rote Vektoren). Jeder Punkt auf der Erdoberfläche übt genauso eine (in diesem Fall breitenabhängige) Kraft auf den Mond aus (Grün). Die Differenz ergibt die Relativkraft pro Einheitsmasse (Blau), das Gezeitenfeld.



**Abbildung 4.5:** Gezeitenfeld der Erde aus der Relativbeschleunigung zwischen dem Massenzentrum der Erde und der ortsabhängigen Beschleunigung [Wendt, 2004].

### Gezeiten der festen Erde und der Ozeane

Verformungen in der Erdkruste werden als Gezeiten der festen Erde bezeichnet. Die Deformationen liegen nach [Boehm, 2010] im Dezimeterbereich (bis zu  $\sim 50$  cm).

Mit Ozeangezeiten bezeichnet man Verlagerungen der Ozeanmassen [Petit et al., 2010]. Das Gezeitenpotential wird als variabler Anteil der Schwerefeldkoeffizienten  $C_{nm}$  und  $S_{nm}$  in einer Kugelfunktionsreihe modelliert. Diese Anteile werden über die Love Zahl ausgedrückt, welche die Elastizität eines Körpers beschreibt [Petit et al., 2010].

Das Gezeitenpotential besteht aus einem permanenten und einem periodischen Anteil. Dahingehend unterscheidet man verschiedene Gezeitensysteme:

- (1) Das „Mean Tide“ System enthält den permanenten Einfluss von Sonne und Mond.
- (2) Im „Zero Tide“ System ist ausschließlich das Langzeitmittel enthalten, das sich durch die elastische Verformung der Erde ergibt.
- (3) Das „Tide Free“ System repräsentiert ein Schwerfeld unter Abwesenheit von Gezeiteneffekten. Die Schwerfeldlösungen unterscheiden sich dadurch in der Abplattung ( $C_{20}$ ) [Petit et al., 2010]. Der periodische Anteil verursacht den indirekten Gezeiteneinfluss (in Kap. 4.3) auf den Körper und wird als zeitvariabler Anteil der Schwerfeldkoeffizienten beschrieben [Mäkinen et al., 2009].

## 4.5 Relativistische Einflüsse

Im Bezug auf die relative Bewegung eines Objektes zur Erde treten drei relativistische Einflüsse auf:

- (1) Das Schwarzschild Feld (benannt nach Karl Schwarzschild, Ende des 19. Jahrhunderts) führt zu einer Beschleunigung des Körpers von  $\sim 10^{-9}$  m/s<sup>2</sup>.
  - (2) Die „De-Sitter“ Präzession (geodätische Präzession) liegt in einer Größenordnung von  $\sim 10^{-11}$  m/s<sup>2</sup>.
  - (3) Der Störeinfluss des „Lense-Thirring“ Effektes („Frame Dragging“) beträgt  $\sim 10^{-11}$  m/s<sup>2</sup>.
- Die Einflüsse (2) und (3) verursachen eine Präzessionsbewegung der Apsiden- und Knotenlinie [Combrinck, 2013].

## 4.6 Atmosphärenreibung

Die Erdatmosphäre übt auf erdnahe Satelliten einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss aus. Sie bildet eine gasförmige Hülle um die Erdoberfläche und absorbiert elektromagnetische Strahlung der Sonne [Kallenrode, 2006]. Die Atmosphäre wird in mehrere Schichten mit unterschiedlichen Temperaturverläufen untergliedert, die in Abb. 4.6 dargestellt sind.

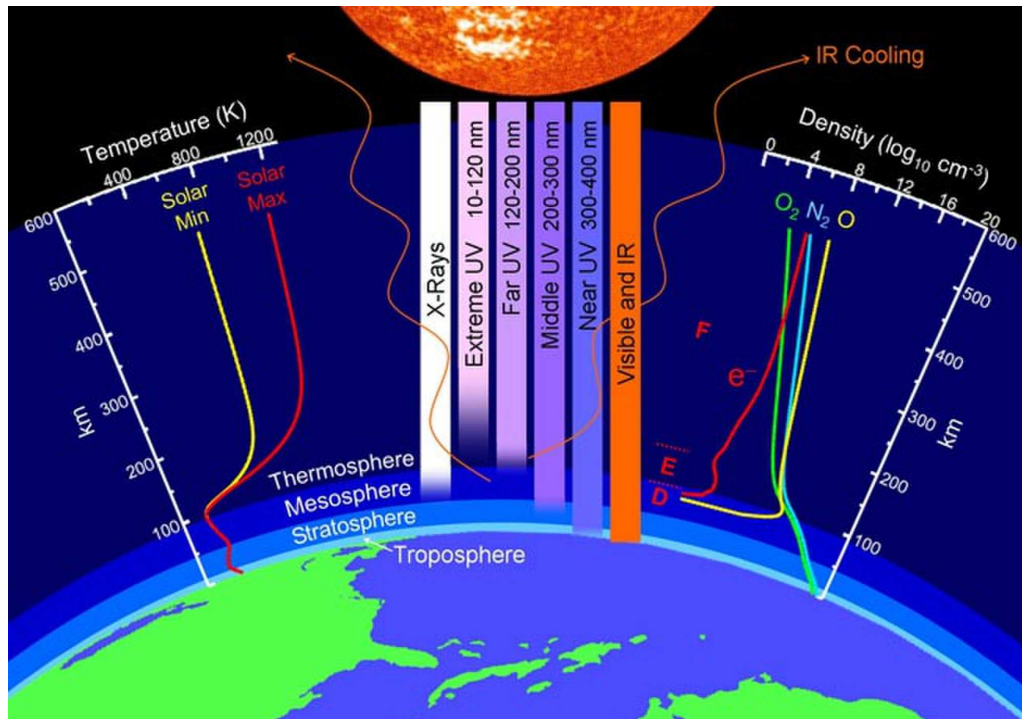


Abbildung 4.6: Schichten der oberen Erdatmosphäre, Credit: John Emmert/NRL<sup>2</sup>.

Die unterste Schicht ist die Troposphäre, deren Abgrenzung nach oben - aufgrund unterschiedlicher Einfallswinkel der Sonne - breitenabhängig ist. In polaren Gebieten liegt die Grenze bei  $\sim 7$  km, in den Tropen bei  $\sim 20$  km. Die Troposphäre enthält  $\sim 80\%$  der gesamten Atmosphärenmasse. An die Troposphäre grenzt die Stratosphäre an, die in einer Höhe von  $\sim 50$  km in die Mesosphäre übergeht. Ab einer Höhe von ungefähr 90 km endet die untere Atmosphäre.

Die obere Atmosphäre beginnt mit der Thermosphäre, in der es zu einem stetigen Temperaturanstieg kommt. Die Ausdehnung der Thermosphäre ist mit der Solaraktivität korreliert und kann bis zu einer Höhe von  $\sim 500$  km reichen, wo sie fließend in die Exosphäre übergeht. Sie nimmt volumsmäßig den größten Teil der Atmosphäre ein. In diesem Teil der Atmosphäre befinden sich die Umlaufbahnen der low-earth Satelliten.

<sup>2</sup><https://www.space.com/8770-record-collapse-earth-upper-atmosphere-puzzles-scientists.html>

Die Atmosphärenmoleküle interagieren mit der Oberfläche des Satelliten. Dadurch entsteht ein Reibungswiderstand (auch als Atmosphärendruck bezeichnet), der primär entgegen der Bewegungsrichtung eines Körpers wirkt [Montenbruck und Gill, 2000]. Durch die Atmosphärenreibung verringert sich die kinetische Energie und führt mit der Zeit zu einer Abnahme der großen Halbachse und der Exzentrizität. Dieser Effekt ist vor allem bei erdnahen Satelliten dominant und wird im Perigäum zusätzlich verstärkt.

Die Atmosphärendichte bestimmt (neben anderen Faktoren) die Größenordnung des Reibungswiderstandes und ist mit der Solaraktivität korreliert. Im Zyklus von  $\sim 11$  Jahren findet eine Umpolung des Magnetfeldes der Sonne statt. Das Sonnenplasma rotiert an den Polen langsamer als am Äquator und führt dazu, dass sich die Magnetfeldlinien ineinander verdrehen. Dadurch wird eine Polumkehr verursacht, in deren Zusammenhang ein erhöhtes Maß an Solaraktivität feststellbar ist.

Die Reibungskraft pro Einheitsmasse (die Beschleunigung  $\mathbf{\ddot{r}}_{drag}$ ) ist durch Gl. 4.33 beschrieben, wobei man bei der Modellierung davon ausgeht, dass die Erde und die Atmosphäre in dieselbe Richtung rotieren [Montenbruck und Gill, 2000].

$$\mathbf{\ddot{r}}_{drag} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_A(h) \cdot C_D \cdot \frac{A}{m} \cdot \frac{\mathbf{V}_r}{\|\mathbf{V}_r\|} \cdot \|\mathbf{V}_r\|^2 \quad (4.33)$$

Die Beschleunigung hängt von unterschiedlichen Faktoren ab - von der Atmosphärendichte und dem Widerstand, den der Satellit leisten kann, über die Relativgeschwindigkeit bis zum Fläche-zu-Masse Verhältnis: (1) Die Atmosphärendichte  $\rho_A(h)$  nimmt mit abnehmender Höhe zu (wie man auf der rechten Seite der Abb. 4.6 erkennen kann).

(2) Der  $C_D$  Koeffizient ist eine komplexe und ungenau bekannte Größe und kann aus Spektrometer-, Manometer- oder Akzelerometermessungen von Satelliten abgeleitet werden [Moe & Moe, 2005]. Die typischen Werte für diesen Koeffizienten liegen zwischen 1.5 und 3 [Krauss, 2013]. (3) Das Fläche zu Masse Verhältnis ( $A/m$ ) beeinflusst die Druckwirkung, die auf den Satelliten mit der Masse  $m$  ausgeübt wird, wobei  $A$  die Querschnittsfläche ist, die dem Atmosphärenstrom ausgesetzt ist. Die beiden Größen fasst man gemeinsam mit dem  $C_D$  Koeffizienten auch zum ballistischen Koeffizienten  $BC = C_D \cdot A/m$  zusammen [Swatschina, 2012], [Sang et al., 2013]. (4) Die Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{V}_r$  des Körpers zur Atmosphäre kann aus der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_E$  der Erde, dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$  und dem inertialen Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  des Satelliten in Gl. 4.34 abgeleitet werden [Montenbruck und Gill, 2000].

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r} \quad (4.34)$$

### Dichte der Thermosphäre

Die Thermosphärendichte auf Flughöhe wird aus empirischen Modellen bestimmt. Zu deren Hauptvertreter zählen Jacchia-Bowman (JB2008; [Bowman et al., 2008]), MSIS (NRLMSISE-00; [Picone et al., 2002]) und DTM (DTM-2013; [Bruinsma, 2015]).

Die Dichte verringert sich exponentiell mit zunehmender Höhe. Die Herleitung erfolgt aus der Gasgleichung 4.35, die über die Gaskonstante  $R_A$  ( $=8.3144 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ ) und die molare Masse  $M_A$  eines bestimmten Gases einen Zusammenhang zwischen der Dichte  $\rho_A$ , dem Druck  $p_A$  und der Temperatur  $T_A$  der Thermosphäre herstellt.

$$\rho_A = \frac{p_A \cdot M_A}{R_A \cdot T_A} \quad (4.35)$$

Die Druckänderung mit der Höhe in Gl. 4.36 ist gleichzusetzen mit dem Produkt aus Dichte und negativer Schwerebeschleunigung  $g(h)$  und wird durch die hydrostatische Gleichung ausgedrückt.

$$\frac{dp_A}{dh} = -\rho_A(h) \cdot g(h) \quad (4.36)$$

Diese beiden Zusammenhänge führen auf die barometrische Höhenformel in Gl. 4.37, mit der die Höhenabhängigkeit der Thermosphärendichte beschrieben wird.  $\rho_A(h_0)$  ist die Dichte auf einer Referenzhöhe  $h_0$ .

$$\rho_A(h) = \rho_A(h_0) \exp\left(-\int_{h_0}^h \frac{dh}{H'(h)}\right) \quad (4.37)$$

mit

$$\frac{1}{H'(h)} = \frac{1}{H(h)} + \frac{1}{T_A(h)} \cdot \frac{dT_A(h)}{dh} \quad (4.38)$$

## 4.7 Solarstrahlung

Die elektromagnetische Strahlung der Sonne wirkt (wie der Reibungswiderstand der Atmosphäre) eine nicht-konservative Kraft auf die Oberfläche eines Satelliten aus, die durch Absorption oder Reflexion von Photonen entsteht [Montenbruck und Gill, 2000].

Die Störbeschleunigung, die durch die Solaraktivität verursacht wird, ist in Gl. 4.39 gegeben, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und 1 AU ( $\approx 150 \text{ MIO km}$ ) die mittlere Entfernung zwischen der Erde und der Sonne darstellen [Seeber, 2003].

$$\ddot{\mathbf{r}}_{srp} = \nu \cdot C_R \cdot \frac{\Phi}{c} \cdot \frac{A}{m} \cdot AU^2 \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Sonne}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Sonne}\|^3} \quad (4.39)$$

Der Einfluss der elektromagnetischen Strahlung auf einen Satelliten, hängt von unterschiedlichen Einflussfaktoren ab:

- (1) Die Solarkonstante  $\Phi$  ( $\sim 1367 \text{ Wm}^{-2}$ ) beschreibt die Photonenenergie  $\Delta E_p$ , die im Zeitintervall  $\Delta t$  die Fläche  $A$  durchläuft [Montenbruck und Gill, 2000].
- (2) Der dynamische  $C_R$  Koeffizient ist ein Indikator für die Reflexionseigenschaften der Satellitenoberfläche



[Lyon, 2004]. (3) Die Schattenfunktion  $\nu$  ist ein Skalierungsfaktor und beschreibt die Abnahme der Solarintensität in Bereichen mit gestreutem Restlicht und im Erdschatten [Cook, 2001], [Montenbruck und Gill, 2000]. (4) Ein Körper mit einem geringen Fläche zu Masse ( $A/m$ ) Verhältnis erfährt eine geringere Störkraft (Druckwirkung) [Cook, 2001]. (5) Der Entfernung  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{Sonne}}$  des Körpers zur Sonne sowie der mittleren Distanz AU zwischen Erde und Sonne.

### Reflexionseigenschaften der Körperfläche

Der dynamische Koeffizient  $C_R$  beschreibt die Reflexionscharakteristik und den Zusammenhang mit der Energieaufnahme einer Oberfläche. Er kann als Gewichtungsfaktor interpretiert werden, der den Prozentsatz der Strahlung angibt, die von der Satellitenfläche reflektiert wird [Cook, 2001]. Er nimmt Werte zwischen 0 und 2 an, die in Tab. 4.2 erklärt sind. Ein Wert von 0 drückt aus, dass die Oberfläche keine thermische Energie aufnimmt [Lyon, 2004]. Der Koeffizient ist materialabhängig und wird in der Bahnbestimmung meist mitgeschätzt [Montenbruck und Gill, 2000].

**Tabelle 4.2:** Typische Werte für den  $C_R$  Koeffizienten [Lyon, 2004].

$C_R$	Reflexionsverhalten
0	Es wird keine Energie auf den durchlässigen Körper übertragen.
1	Die gesamte Strahlung wird vom Körper absorbiert und wieder abgegeben. Die gesamte Energie wird auf den Körper übertragen.
2	Der Körper reflektiert die gesamte Strahlung. Die doppelte Energie wird übertragen.

### Schattenwurf durch die Erde

Der Schattenwurf durch die Erde ist ein weiterer Faktor, der durch die Schattenfunktion  $\nu$  beschrieben wird. Tritt der Körper in den Erdschatten ein, reduziert sich die Fläche der Sonnenscheibe, die den Körper direkt bestrahlt und der Störeinfluss der Solarstrahlung verringert sich.

Zur Beschreibung des Schattenwurfes setzt man Modelle in zylindrischer oder konischer Form ein. Ersteres geht davon aus, dass der Übergang in den Schattenbereich abrupt erfolgt. Im zweiten differenziert man zwischen den Schatten- (umbra) und den Halbschatten- (penumbra) bzw. Übergangsbereichen. Befindet sich der Satellit in vollständiger Abschattung durch die Erde, ist er keiner direkten Solarstrahlung ausgesetzt und  $\nu$  nimmt den Wert 0 an. In den penumbra Regionen ist er noch im Einfluss von gestreutem Restlicht der Sonne und die Störbeschleunigung wird mit einem Skalierungsfaktor zwischen 0 und 1 versehen. Ein Berechnungsalgorithmus für  $\nu$  ist in [Cook, 2001] enthalten. Das zylindrische Schattenmodell wird im Folgenden und eine Variante des konischen Modells im Zuge der Modellierung der Simulationsdaten in Kap. 5.3 beschrieben. Der Richtungsvektor zwischen Erde und Sonne in Abb. 4.7 wird mit  $\mathbf{r}_{\text{Sonne}}$  und der Orthogonalabstand des Satelliten von diesem Vektor mit  $U_D$  bezeichnet. Die Richtungsvektoren zwischen der Erde und dem Satelliten  $\mathbf{r}$  und der Sonne  $\mathbf{r}_{\text{Sonne}}$  schließen den Winkel  $U_A$  ein. Die Bestimmung der Abschattung erfolgt aus dem Vergleich des Erdradi-

us  $R_E$  mit den Größen  $U_A$  und  $U_D$ . Ist die Distanz  $U_D \leq R_E$  und  $\cos(U_A) > 0$ , befindet sich der Satellit im Erdschatten.

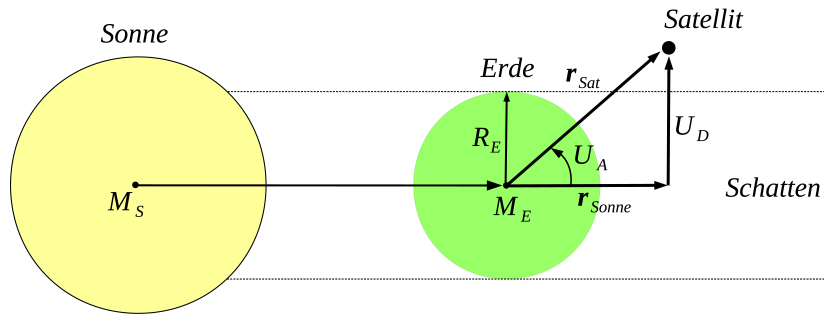


Abbildung 4.7: Zylindrisches Schattenmodell, basierend auf [Seeber, 2003].

Den Winkel  $U_A$  leitet man aus dem Skalarprodukt der Richtungsvektoren  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}_{\text{Sonne}}$  mit Gl. 4.40 ab [Cook, 2001].

$$\cos(U_A) = \frac{\mathbf{r}_{\text{Sonne}} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_{\text{Sonne}}\| \cdot \|\mathbf{r}_{\text{Sat}}\|} \quad (4.40)$$

Den Orthogonalabstand  $U_D$  liefert der trigonometrische Zusammenhang in Gl. 4.41 mit dem Winkel  $U_A$ .

$$U_D = \sin(U_A) \cdot r \quad (4.41)$$

## 4.8 Albedo

Zusätzlich zum direkten Einfluss der Solarstrahlung tritt ein indirekter Effekt auf, der mit Albedo bezeichnet wird. Diese setzt sich aus einem kurzwelligem optischen Anteil und einem langwelligem Strahlungsanteil im infraroten Spektralbereich zusammen. Die Atmosphäre der Erde übt eine Schutzfunktion gegenüber der elektromagnetischen Strahlung der Sonne aus und absorbiert einen großen Prozentsatz der Solarstrahlung. Die übrige Strahlung dringt bis zur Erdoberfläche vor. Der kurzwellige optische Anteil dieser Strahlung wird direkt an der Erdoberfläche reflektiert. Er wird nur vom sonnenbestrahlten Teil der Erde emittiert. Beim langwelligem infraroten Strahlungsanteil handelt es sich um eine Emission von Strahlung, die von der Erdoberfläche absorbiert wurde [Montenbruck und Gill, 2000]. Die Größenordnung der Albedo ist abhängig von der Flughöhe und liegt bei niedrig fliegenden Satelliten ungefähr bei 10% bis 35% des direkten Einflusses. Die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}_{alb}$ , die aufgrund der Albedo zustande kommt, wird durch Gl. 4.42 beschrieben.

$$\ddot{\mathbf{r}}_{alb} = \Psi \cdot C_R \cdot \frac{A}{m} \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \quad (4.42)$$

$C_R$  ist ein Maß für die Reflexionscharakteristik der Satellitenoberfläche,  $A$  ist die Querschnittsfläche der Satellitenoberfläche,  $m$  die Masse des Satelliten,  $\mathbf{r}$  der Positionsvektor des Satelliten. Mit  $\Psi$  wird der Strahlungsdruck, der von der Erde ausgeht, bezeichnet. Dieser hängt von verschiedenen Faktoren - wie den Reflexionseigenschaften der Erdoberfläche, dem Bewölkungsgrad und dem Winkel zwischen der Sonne, der Erde und dem Satelliten - ab [Wolf, 2000].

## 4.9 Empirische Beschleunigungen

Durch die empirischen Beschleunigungen werden Ungenauigkeiten in der Modellierung von (nicht-gravitativen) Kräften ausgeglichen. Die Fehlersignatur zeigt Schwingungen mit der Periode einer Umlaufdauer (1-cycle-per-revolution) [Tapley et al., 2004]. Die Modellierung erfolgt als Überlagerung von drei Bewegungen in Gl. 4.43. Die Bewegung setzt sich aus zwei Schwingungen und einem konstanten Anteil  $\mathbf{a}_0$  zusammen. Die Schwingungen haben unterschiedliche Amplituden ( $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$ ) mit derselben Kreisfrequenz, der wahren Anomalie  $\nu$ .

$$\ddot{\mathbf{r}}_{emp} = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot \sin\nu + \mathbf{a}_2 \cdot \cos\nu) \quad (4.43)$$

Die Rotationsmatrix  $\mathbf{E}$  transformiert die empirischen Beschleunigungen vom körpereigenen ins inertielle Referenzsystem. Die empirischen Beschleunigungen können auf die radiale, along-track oder normale Komponente des körpereigenen Systems angewendet werden [Tapley et al., 2004].

## 4.10 Weitere Effekte

### Auflasteffekte durch Ozeangezeiten

Auflasteffekte entstehen durch Massenverlagerungen am festen Erdkörper (ocean loading) infolge der Ozeangezeiten und führen zu Veränderungen der Erdkruste (bis zu 1 m) und zu Verschiebungen der Beobachtungsstationen [Petit et al., 2010].

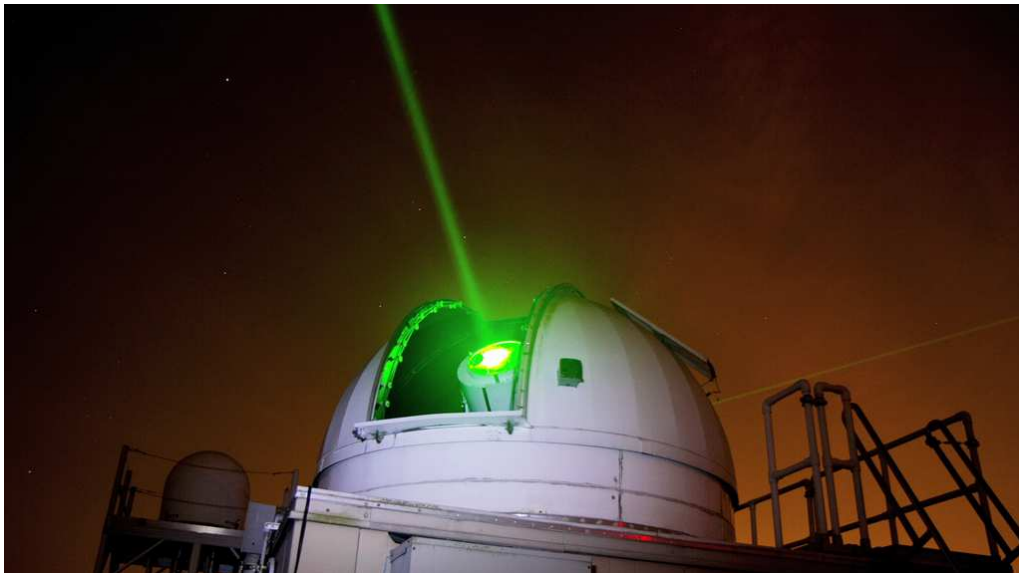
### Polgezeiten

Darunter sind Verformungen der Erde aufgrund von Veränderungen in der Ausrichtung der Rotationsachse zusammengefasst [Agnew, 2007], [Petit et al., 2010].

## Kapitel 5

# Simulation von SLR Messungen zur Bahnbestimmung

Im folgenden Kapitel leitet man SLR Messungen aus einer künstlichen Objektbahn ab und führt damit eine dynamische Bahnbestimmung durch. Den Orbit bestimmt man aus der Lösung der dynamischen Bewegungsgleichung in Kap. 4 für einen Zeitraum von drei Tagen und simuliert damit eine reale Beobachtungssituation. Als Beobachter setzt man SLR Observatorien ein. Diese Vorgehensweise bietet die Möglichkeit systematische Fehler und zufälliges Beobachtungsrauschen gezielt an die Messungen anzubringen und deren Auswirkungen auf die Bahnbestimmung und -vorhersage zu analysieren.



**Abbildung 5.1:** Laser Ranging Beobachtungsstation des NASA Goddard Space Flight Center<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup><https://svs.gsfc.nasa.gov/11283>

## 5.1 Referenzbahn

Durch numerische Integration des dynamischen Bewegungsmodells und der Anfangsposition  $\mathbf{X}(t_0)$  des Objektes wird eine Referenzbahn abgeleitet, aus der die Laser Entfernungsmessungen berechnet werden.

Der Zustandsvektor  $\mathbf{X}(t)$  in Gl. 5.1 beschreibt die Satellitenposition zu einem Zeitpunkt  $t$  durch den Positionsvektor  $\mathbf{r}(t)$  und den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ .

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \dot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Die Satellitenbewegung kann als zeitliche Änderung des Zustandsvektors  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  mit Gl. 5.2 beschrieben werden mit dem Positionsvektor  $\mathbf{r}(t)$ , dem Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  sowie dem Vektor  $\mathbf{p}$  als Argument.  $\mathbf{p}$  enthält die dynamischen Parameter (unter anderem den  $C_D$  und  $C_R$  Koeffizienten sowie die Schwerefeldkoeffizienten).

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \ddot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Die Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p})$  wurden in Kap. 4 hergeleitet und enthalten zusätzlich zu der Beschleunigung durch den Zentralkörper  $\ddot{\mathbf{r}}_z(t)$  im ersten Term der Gl. 5.3 sämtliche Störeinflüsse  $\ddot{\mathbf{r}}_s(t)$  (ausgehend vom Erdschwerefeld  $\ddot{\mathbf{r}}_{egf}(t)$ ) über die direkten Einflüsse von Sonne und Mond, die indirekten Gezeiten der festen Erde und der Ozeane, die Polgezeiten  $\ddot{\mathbf{r}}_{tide}(t)$  und die relativistischen Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{r}}_{rel}(t)$  bis hin zu den nicht-gravitativen Einflüssen der Atmosphärenreibung  $\ddot{\mathbf{r}}_{drag}(t)$  und der elektromagnetischen Strahlung der Sonne  $\ddot{\mathbf{r}}_{srp}(t)$ .

$$\ddot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}) = -GM \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} + \ddot{\mathbf{r}}_s(t) \quad (5.3)$$

Sind die Anfangswerte des Zustandsvektors  $\mathbf{X}(t_0)$  und der dynamischen Parameter  $\mathbf{p}_0$  präzise bekannt, kann die Bahn des Satelliten aus der Lösung des Integrals in Gl. 5.4 mit einer geeigneten Integrationsmethode bestimmt werden [Xu, 2010].

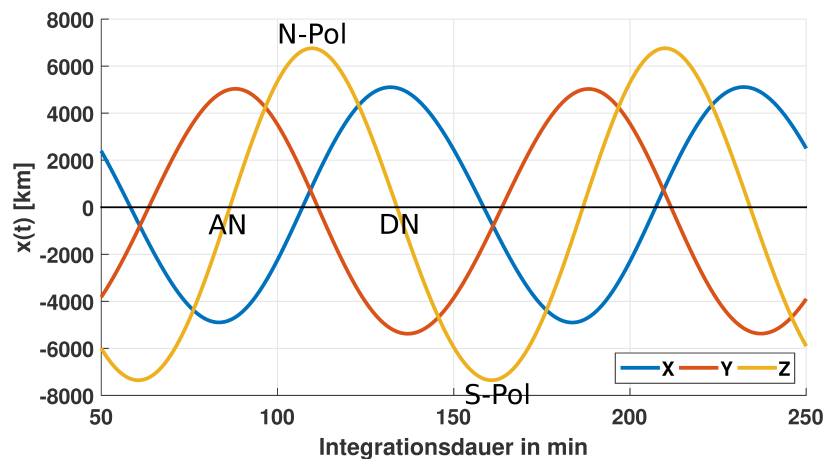
$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{X}}(t) \cdot dt \quad (5.4)$$

Die Anfangsposition  $\mathbf{X}(t_0)$  des Simulationsobjektes ist durch die Keplerelemente in Tab. 5.1 festgelegt. Die Umlaufbahn befindet sich im LEO Band mit einer Perigäumshöhe von  $\sim 920$  km. Die Bewegungsrichtung ist (mit einer Inklination von  $99.6^\circ$ ) retrograd entgegen der Erdrotation in Richtung Westen vorgegeben. Das Apogäum befindet sich über der Südhalbkugel, wo das Objekt seine minimale Geschwindigkeit erreicht. Durch den exzentrischen Orbit erhöht man die Zeitspanne, in der sich das Objekt über der Südhalbkugel befindet.

**Tabelle 5.1:** Bahnelemente des Objektes zum Zeitpunkt  $t_0$ .

$a$	[km]	7296.864	$\omega$	[°]	57.88
$e$		0.07	$\Omega$	[°]	320.53
$i$	[°]	99.6	$M$	[°]	0.00

Die Abb. 5.2 zeigt 200 Minuten der integrierten Referenzbahn im erdfesten System. Das Objekt bewegt sich von Süden kommend in Richtung Nordpol und an diesem vorbei, wenn die Z-Komponente des Zustandsvektors ihren maximalen Wert erreicht. Der Pol wird aufgrund der Bahninklination von  $99.6^\circ$  nicht überquert. Die weitere Bewegung erfolgt südwärts über den absteigenden Knoten (DN) in Richtung Südpol. Die zweite Extremstelle in Z-Richtung ist aufgrund der exzentrischen Bahn absolut gesehen höher als die Erste. Im aufsteigenden Knoten (AN) bewegt sich das Objekt ein zweites Mal über den Äquator. Der zeitliche Abstand zwischen dem aufsteigenden und absteigenden Knoten entspricht der halben Umlaufdauer von ungefähr 100 Minuten (Gl. 3.6), damit vollführt das Objekt pro Tag  $\sim 14.5$  Umläufe.

**Abbildung 5.2:** Die ersten beiden vollständigen Umläufe des Objektes im erdfesten System.

## 5.2 Simulation der SLR Messungen

Mit der integrierten Satellitenbahn wurde eine reale Beobachtungssituation simuliert. Dazu wurden 36 SLR Stationen<sup>2</sup> ausgewählt, von denen die Objektbahn über eine Zeitspanne von drei Tagen durch 2-Weg Laufzeitmessungen aufgezeichnet wurde.

### Stationsgeometrie

Wie man in der Abb. 5.3 erkennt, sind die Stationen innerhalb der Gesamtgeometrie sehr inhomogen verteilt. Auf der Südhalbkugel wurden fünf aktive Observatorien ausgewählt, zwei davon in Australien (Yarragadee und Mt. Stromlo) und jeweils eine in Südafrika (Hartebeesthoek), Südamerika (San Juan) und Ozeanien (Tahiti). Amerika verzeichnet vier Observatorien (Greenbelt, McDonald, Monument Peak und Haleakala), der asiatische Kontinent zehn. Europa weist mit einer Zahl von 17 die höchste Dichte auf. Eine detaillierte Auflistung aller 36 Stationen ist in der Abb. 5.4 enthalten.

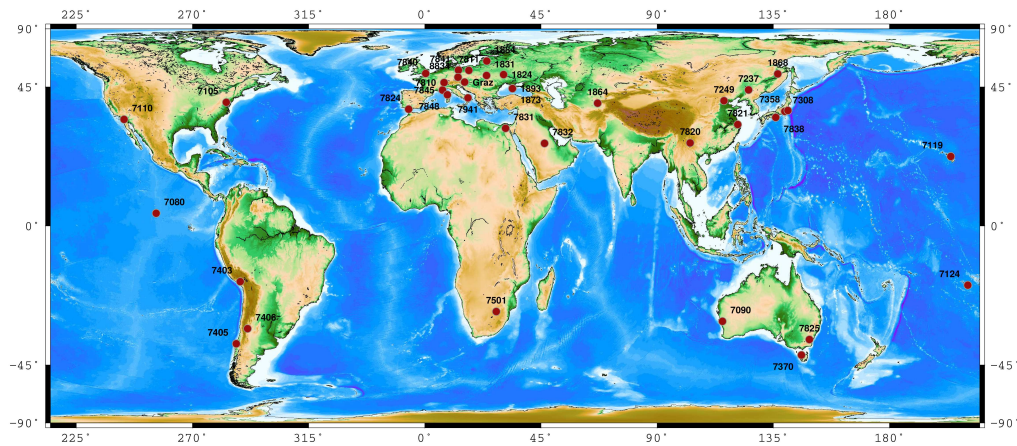


Abbildung 5.3: SLR Stationsgeometrie bestehend aus 36 Observatorien.

### 2-Weg Laufzeitmessung

Die 2-Weg Laufzeitmessung  $z(t)$  modelliert man mit Gl. 5.5 aus der einfachen geometrischen Distanz  $\rho_g(t)$  zwischen dem Observatorium und dem Objekt unter Berücksichtigung der atmosphärisch  $\Delta\rho_{atm}(t)$  und relativistisch  $\Delta\rho_{rel}(t)$  bedingten Laufzeitverzögerungen. Da jede Messung in der Praxis zufällige Fehler enthält, wird ein gaußverteiltes weißes Rauschen  $n_\varepsilon$  (mit einer Standardabweichung von einem Zentimeter) eingeführt [Tapley et al., 2004].

$$z(t) = \frac{2}{c} \cdot (\rho_g(t) + \Delta\rho_{atm}(t) + \Delta\rho_{rel}(t)) + n_\varepsilon \quad (5.5)$$

Die Berechnungsprozedur ist in den nachfolgenden Schritten (1) bis (4) zusammengefasst und wird ausgehend von der ersten Beobachtungsstation und Objektposition auf

<sup>2</sup><https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/network/stations/index.html>

der Bahn für alle 36 Stationen und Objektpositionen bis zum Ende der dreitägigen Simulationsperiode wiederholt.

Europa				
1	1824	GLSL	Golosiiv	Ukraine
2	1873	SIML	Simeiz	Ukraine
3	1884	RIGL	Riga	Lettland
4	1886	ARKL	Arkhyz	Russland
5	1888	SVEL	Svetloe	Russland
6	1889	ZELL	Zelenchukskya	Westrussland
7	1893	KTZL	Katzively	Ukraine
8	7806	METL	Metsahovi	Finnland
9	7810	ZIML	Zimmerwald	Schweiz
10	7811	BORL	Borowiec	Polen
11	7824	SFEL	San Fernando	Spanien
12	7839	GRZL	Graz	Österreich
13	7840	HERL	Herstmonceaux	Großbritannien
14	7841	POT3	Potsdam	Deutschland
15	7845	GRSM	Grasse	Frankreich
16	7941	MATM	Matera	Italien
17	8834	WETL	Wetzell	Deutschland
Ozeanien				
18	7124	THTL	Tahititi	Französisch Polynesien
Südamerika				
19	7406	SJUL	San Juan	Argentinien
Asien				
20	1868	KOML	Komsomolsk	Russland
21	1879	ALTL	Altay	Russland
22	1887	BAIL	Baikonur	Kasachstan
23	1890	BADL	Badary	Russland
24	7237	CHAL	Changchun	China
25	7249	BEIL	Beijing	China
26	7308	KOGC	Koganei	Japan
27	7820	KUNL	Kunming	China
28	7821	SHA2	Shanghai	China
29	7838	SISL	Simosato	Japan
Vereinigte Staaten				
30	7080	MDOL	McDonald	Texas
31	7105	GODL	Greenbelt	Maryland
32	7110	MONL	Monument Peak	Kalifornien
33	7119	HA4T	Haleakala	Hawaii
Australien				
34	7090	YARL	Yarragadee	Australien
35	7825	STL3	Mount Stromlo	Australien
Afrika				
36	7501	HARL	Hartebeesthoek	Südafrika

Abbildung 5.4: Kenndaten der 36 SLR Stationen in der Simulationsgeometrie (Monument Nummer, Stationscode und -name, geographische Lage) <sup>3</sup>.

<sup>3</sup><https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/network/stations/active/index.html>

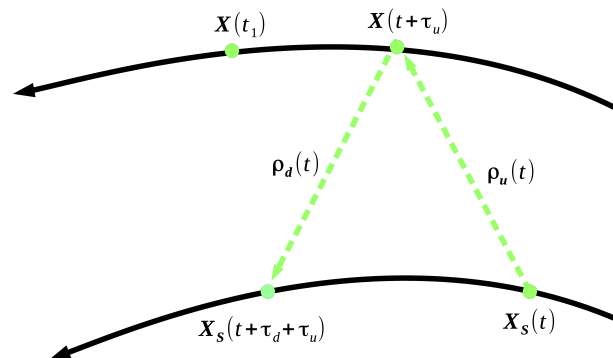


**(1) Geometrische Distanz**

Die geometrische 1-Weg Distanz  $\rho_g(t)$  berechnet man aus der Entfernung zwischen der Station  $\mathbf{X}_S(t)$  zum Sendezeitpunkt  $t$  und dem Objekt  $\mathbf{X}(t + \tau_u)$  zum Reflexionszeitpunkt  $t + \tau_u$  auf der künstlichen Satellitenbahn mit Gl. 5.6 [Tapley et al., 2004]. Die Bahn ist durch diskrete Stützstellen mit einem Sampling von 60 Sekunden vorgegeben. Der Zeitpunkt der ersten bekannten Objektposition gilt als erster Sendezeitpunkt  $t$  der Station.

$$\rho_g(t) = \|\mathbf{X}(t + \tau_u) - \mathbf{X}_S(t)\| \quad (5.6)$$

Die Koordinaten der Bodenstation werden aus den SLRF2008 Koordinaten <sup>4</sup> und den Geschwindigkeiten abgeleitet und unter Berücksichtigung von Präzession, Nutation, Polbewegung und Erdrotation vom ECE ins ECI System transformiert. Zusätzlich berücksichtigt man die Stationsbewegung, die aufgrund der Gezeiten der festen Erde und der Ozeane sowie der Polgezeiten zustande kommt [Petit et al., 2010]. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Laserpulses mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt, bewegt sich das Objekt während der Signalausbreitung weiter und reflektiert den Puls mit einer zeitlichen Verzögerung. Bei einer mittleren Flughöhe von 1500 km entspricht dies einer Signalausbreitungsdauer von ungefähr fünf Millisekunden.



**Abbildung 5.5:** Die 2-Weg Laufzeitmessung wird in einen „uplink“ und „downlink“ Weg aufgespalten, basierend auf [Montenbruck und Gill, 2000].

Bei SLR Messungen zu „Space Debris“ Objekten werden typischerweise 2-Wege Distanzmessungen durchgeführt. Diese werden in einen „uplink“ und einen „downlink“ Weg aufgeteilt (Abb. 5.5). Der „uplink“ Weg  $\rho_u$  in Gl. 5.7 wird zwischen der Station zum Sendezeitpunkt  $t$  und dem Objekt zum Reflexionszeitpunkt  $t + \tau_u$  gemessen, der „downlink“ Weg  $\rho_d$  zwischen dem Objekt zum Reflexionszeitpunkt und der Station zum Empfangszeitpunkt  $t + \tau_u + \tau_d$ . Der Zusammenhang mit der Laufzeit wird über die Lichtgeschwindigkeit  $c$  hergestellt. Zur Berechnung des „uplink“ und „downlink“ Weges wurde der Algorithmus in [Montenbruck und Gill, 2000] für den Sendezeitpunkt angepasst.

<sup>4</sup><http://ilrs.gsfc.nasa.gov/science/awg/SLRF2008.html>

$$\rho_g(t) = \frac{1}{2}(\rho_u + \rho_d) \quad (5.7)$$

Die „uplink“ Zeit  $\tau_u$  wird durch Fixpunktiteration der Gl. 5.8 aus den Koordinaten der Bodenstation  $\mathbf{X}_S(t)$  zum Sendezeitpunkt und dem Objekt  $\mathbf{X}(t + \tau_u^i)$  zum Reflexionszeitpunkt des Signals berechnet. Die Objektkoordinaten erhält man durch eine Interpolation der Referenzbahn.

$$\tau_u^{i+1} = \frac{\|\mathbf{X}(t + \tau_u^i) - \mathbf{X}_S(t)\|}{c} \quad (5.8)$$

Die Initialisierung der „uplink“ Zeit erfolgt mit dem Wert Null. Die Iteration wird abgebrochen, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender „uplink“ Zeiten unter einer Schranke von  $10^{-12}$  Sekunden ( $\approx 0.3$  mm) liegt [Tapley et al., 2004].

Die „downlink“ Zeit leitet man mit Gl. 5.9 ab, in gleicher Weise wie die „uplink“ Zeit aus der geometrischen Distanz zwischen dem Objekt  $\mathbf{X}(t + \tau_u)$  zum Reflexionszeitpunkt und dem Observatorium  $\mathbf{X}_S(t + \tau_u + \tau_d^i)$  zum Empfangszeitpunkt. Die zuvor berechnete „uplink“ Zeit ist der Startwert für die „downlink“ Zeit [Montenbruck und Gill, 2000].

$$\tau_d^{i+1} = \frac{\|\mathbf{X}(t + \tau_u) - \mathbf{X}_S(t + \tau_u + \tau_d^i)\|}{c} \quad (5.9)$$

## (2) Distanzkorrekturen

Im Anschluss wird eine Distanzkorrektur um die atmosphärischen  $\Delta\rho_{atm}(t)$  und relativistischen  $\Delta\rho_{rel}(t)$  Signalverzögerungen vorgenommen.

### *Signalverzögerung durch die Atmosphäre*

Ein Laserpuls erfährt während seiner Ausbreitung durch die Troposphäre eine elevationsabhängige Signalverzögerung  $\Delta\rho_{atm}(t)$ . Zur Korrektur dieses Einflusses gibt es Modelle von [Mendes et al., 2004] und [Marini et al., 1973], die auf demselben Grundprinzip beruhen. Man berechnet die Signalverzögerung in Zenit Richtung und überträgt diese auf den tatsächlichen Elevationswinkel der Beobachtung. Diese Modelle liefern nach [Seeber, 2003] zuverlässige Korrekturwerte für Elevationen über  $10^\circ$ .

Die Gesamtverzögerung in Zenit Richtung ergibt sich theoretisch durch die Integration aller Störeinflüsse entlang des zurückgelegten Signalweges. Eine geschlossene Form zur Bestimmung der Signalverzögerung wird in [Mendes et al., 2004] beschrieben. In der Praxis berechnet man diesen Korrekturterm nach [Petit et al., 2010] aus dem atmosphärischen Druck, der Temperatur und dem partiellen Wasserdampfdruck an der Bodenstation.

### Relativistische Distanzkorrektur

Die Erdmasse verursacht eine relativistisch bedingte Verlängerung der Signallaufzeit  $\Delta\rho_{rel}(t)$ , die mit Shapiro Effekt bezeichnet wird. Für LAGEOS-1 (Perigäumshöhe von  $\sim 5860$  km) beträgt die Korrektur  $\sim 7$  mm [Combrinck, 2013].

### (3) Sichtbarkeitsüberprüfung

Die Sichtbarkeitsüberprüfung erfolgt anhand der Elevation unter der das Objekt von der Station aus gesehen wird. Erscheint das Objekt erstmals über einer Elevation von  $10^\circ$  beginnt ein Pass. Ab diesem Zeitpunkt simuliert man (durch Iteration der Schritte 1 und 2) 2-Weg Laufzeitmessungen mit einem Sampling von 15 Sekunden solange bis das Objekt wieder unter eine Elevation von  $10^\circ$  sinkt.

Zur Berechnung der Elevationswinkel wird ein lokales Horizontsystem im Beobachtungsstandort errichtet. Dessen Nord- und Ostachse sind entlang des lokalen Meridians und Parallelkreises der Station ausgerichtet. Die z-Achse zeigt in Richtung Zenit. Die Objektposition wird über das Azimuth  $A$  und die Elevation  $E$  in Abb. 5.6 beschrieben.

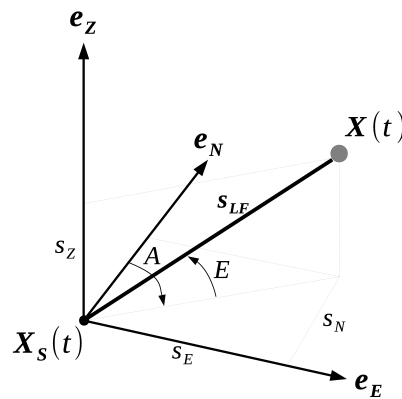


Abbildung 5.6: Einführung eines lokalen Horizontsystems im Beobachtungsstandort, basierend auf [Montenbruck und Gill, 2000].

Die Elevation  $E$  in Gl. 5.10 wird von der Horizontalebene aus in Richtung der Verbindungslinie  $\mathbf{s}_{LF}$  zwischen der Station und dem Objekt gemessen. Das Azimuth  $A$  in Gl. 5.10 liegt zwischen der Nordrichtung und dem in die Tangentialebene projizierten Differenzvektor  $\mathbf{s}_{LF}$ .

$$\tan A = \left( \frac{s_E}{s_N} \right) \quad , \quad \tan E = \frac{s_Z}{\sqrt{s_E^2 + s_N^2}} \quad (5.10)$$

Die Komponenten  $s_E$ ,  $s_N$  und  $s_Z$  erhält man mit Gl. 5.11 durch die orthogonale Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_{LF}$  in Gl. 5.12.  $\varphi$  und  $\lambda$  sind die geographischen Koordinaten der Station  $\mathbf{X}_S(t)$ ,  $\mathbf{X}(t)$  die Objektkoordinaten im ECE System.

<sup>4</sup>[https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/missions/satellite\\_missions/current\\_missions/lag1\\_general.html](https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/missions/satellite_missions/current_missions/lag1_general.html)

$$\mathbf{s}_{LF} = \mathbf{T}_{LF} \cdot [\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_S(t)] \quad (5.11)$$

mit

$$T_{LF} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\sin\varphi \cdot \cos\lambda & \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\varphi \cdot \sin\lambda & \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_E^T \\ \mathbf{e}_N^T \\ \mathbf{e}_Z^T \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

#### (4) Beobachtungsrauschen

In jeder Art von Messung ist eine zufällige Messunsicherheit enthalten, die als Beobachtungsrauschen bezeichnet wird. In der Praxis steigt das Beobachtungsrauschen aufgrund atmosphärischer Einflüsse mit sinkender Elevation an. Um die simulierten Beobachtungen an reale Bedingungen anzupassen, wäre daher die Berücksichtigung eines elevationsabhängigen Fehlers von Vorteil [Niemeier, 2008] und [Dettmering, 2003].

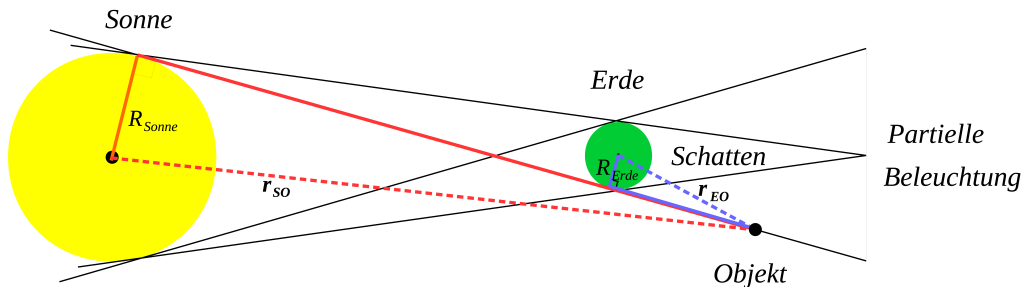
In dieser Studie führt man den Distanzmessungen ein zufälliges gaußverteiltes weißes Rauschen zu mit einem Mittelwert von Null und einer Standardabweichung von einem Zentimeter.

## 5.3 Differenzierung der Beobachtungsintervalle

Die berechneten 2-Weg Laufzeitmessungen werden in die Intervalle Tag und Nacht unterteilt, die im weiteren Verlauf der Studie zu einer Reduktion der Messungen eingesetzt werden. Beobachtungen, die an der Tag-Nacht Grenze stattfinden, werden ebenso differenziert, da sie beim Einsatz passiver optischer Messsysteme von Bedeutung sind.

Die Beobachtungsperioden bestimmt man aus geometrischen Beziehungen zwischen der Sonne, der Erde und dem Objekt oder der Beobachtungsstation durch sogenannte Schattenmodelle, die bereits in Kap. 4.7 beschrieben wurden.

In dieser Studie kommt ein konisches Modell zum Einsatz [Cook, 2001]. Man legt einen Drehkegel an die Erde und die Sonne an und leitet Dreiecksbeziehungen durch Schnitte ab (Abb. 5.7).



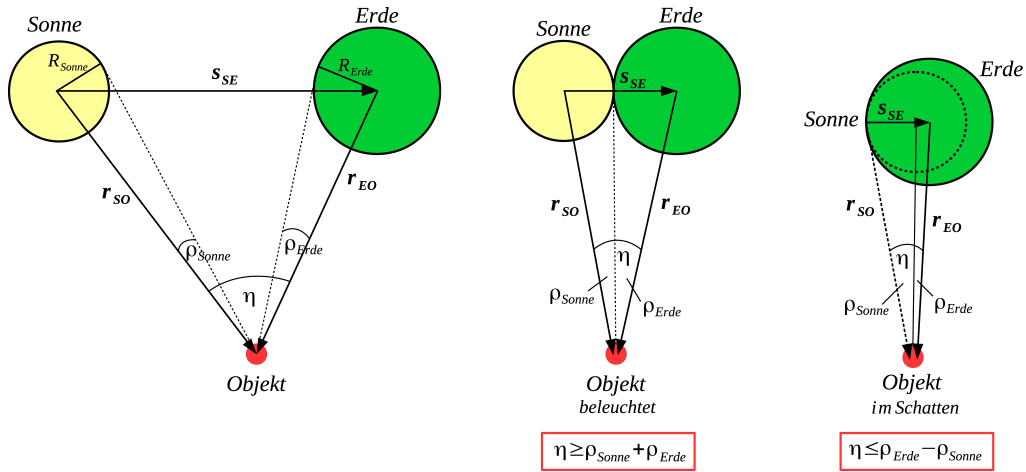
**Abbildung 5.7:** Konisches Schattenmodell, das zur Bestimmung der relativen Lage zwischen dem Objekt, der Erde und der Sonne verwendet wird, basierend auf [Cook, 2001].

### Bestimmung der Abschattung

Die beiden farblich markierten Dreiecke in Abb. 5.7 werden zur Schattenanalyse eingesetzt. Man unterscheidet dabei die Fälle der vollständigen oder partiellen Beleuchtung, sowie die vollständige Abschattung durch die Erde. Die Analyse basiert auf einem Vergleich der Winkel  $\eta$ ,  $\rho_{\text{Erde}}$  und  $\rho_{\text{Sonne}}$  in der Abb. 5.8. Mit  $\rho_{\text{Erde}}$  und  $\rho_{\text{Sonne}}$  bezeichnet man jene Winkel unter denen der Erd- und der Sonnenradius vom Objekt aus gesehen werden. Die Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten von Erde und Sonne erscheint unter dem Winkel  $\eta$ .

Wird das Objekt vollständig oder partiell von der Sonne bestrahlt (mittlerer Teil der Abb. 5.8), ist  $\eta$  größer oder gleich der Winkelsumme aus  $\rho_{\text{Erde}}$  und  $\rho_{\text{Sonne}}$ . Befindet sich das Objekt im rechten Teil der Abb. 5.8 im Erdschatten, muss  $\eta$  kleiner oder gleich der Differenz aus  $\rho_{\text{Erde}}$  und  $\rho_{\text{Sonne}}$  sein [Cook, 2001].

Eine Messung wird dem Zeitintervall Tag zugeordnet, wenn sich die Station auf der beleuchteten Seite der Erde befindet. An der Tag-Nacht Grenze liegt das Observatorium auf der sonnenabgewandten Seite der Erde und das Objekt ist vollständig oder partiell beleuchtet.



**Abbildung 5.8:** Die linke Grafik zeigt die geometrische Beziehung zwischen den Winkeln  $\eta$ ,  $\rho_{Sonne}$  und  $\rho_{Erde}$ . In der mittleren Grafik befindet sich die Sonne kurz vor dem Eintritt in den Erdschatten. In der rechten Grafik ist die Sonne vollständig von der Erde verdeckt, basierend auf [Cook, 2001].

Die Winkel  $\rho_{Sonne}$  und  $\rho_{Erde}$  leitet man aus den in Rot und Blau markierten Dreiecken in Abb. 5.7 trigonometrisch ab [Cook, 2001]:

$$\sin \rho_{Sonne} = \frac{R_{Sonne}}{\|\mathbf{r}_{SO}\|} \quad , \quad \sin \rho_{Erde} = \frac{R_{Erde}}{\|\mathbf{r}_{EO}\|} \quad . \quad (5.13)$$

Aus den geometrischen Zusammenhängen im linken Teil der Abb. 5.8 bestimmt man mit Gl. 5.14 den Winkel  $\eta$  unter dem die geradlinige Verbindung  $\mathbf{s}_{SE}$  zwischen den Mittelpunkten von Sonne und Mond vom Objekt aus sichtbar ist [Cook, 2001].

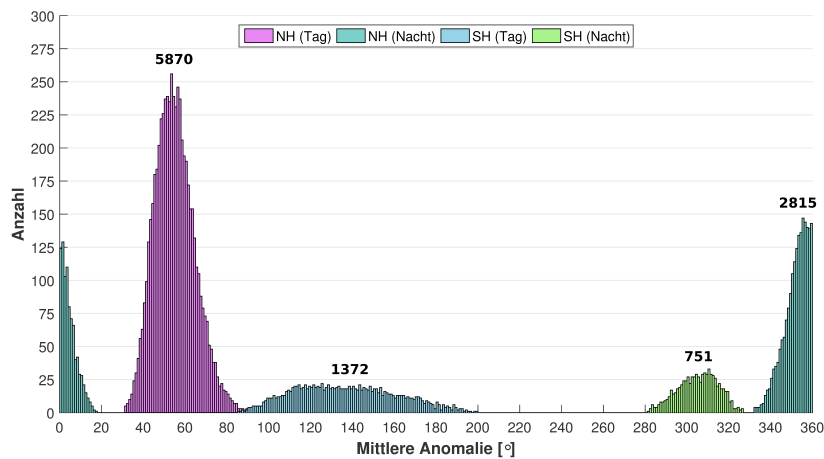
$$\cos \eta = \frac{\mathbf{r}_{EO} \cdot \mathbf{r}_{SO}}{\|\mathbf{r}_{EO}\| \cdot \|\mathbf{r}_{SO}\|} \quad (5.14)$$

### Bahnabdeckung durch die 2-Weg Laufzeitmessungen

In der Abb. 5.9 ist die Bahnabdeckung, die man mit den simulierten Messungen erreicht, als Histogramm der mittleren Anomalien dargestellt. Tagbeobachtungen von Stationen der Nordhalbkugel (NH) sind in Violett, Nachtbeobachtungen in Türkis dargestellt. Messungen der Südhalbkugel (SH) sind die Farben Blau (tagsüber) und Grün (nachts) zugeordnet.

Die Messungen teilen sich in einem unausgewogenen Verhältnis von  $\sim 4 : 1$  auf die Nord- und Südhemisphäre auf, was auf die hohe Stationsdichte der Nordhalbkugel (mit 31/36 Stationen) zurückzuführen ist. Das Verhältnis zwischen Tag und Nacht Beobachtungen liegt bei  $\sim 2 : 1$ . Tagsüber ist der absteigende Ast zwischen dem Perigäum (ab einer mittleren Anomalie von  $\sim 30^\circ$ ) und dem Apogäum beobachtbar. Nachts ist das Objekt zwischen dem aufsteigenden Knoten und dem Perigäum sowie beim Perigäumsdurchgang sichtbar.

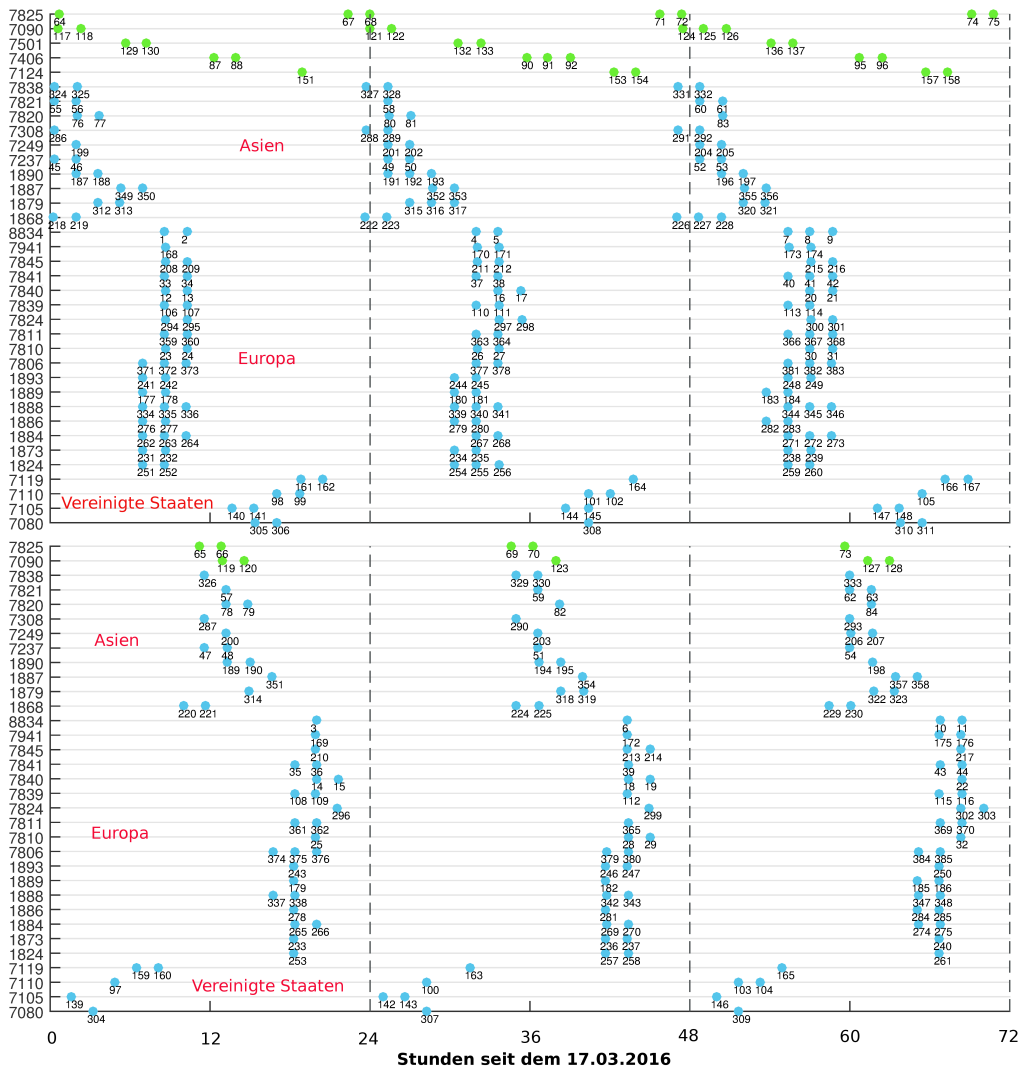
Zwischen dem Apogäum und dem aufsteigenden Knoten ist das Objekt aufgrund fehlender Observatorien nicht sichtbar. Das Perigäum und die Richtung zwischen dem Perigäum und dem absteigenden Knoten ( $\sim 30^\circ$ - $90^\circ$ ) wird aufgrund der hohen Stationsdichte am häufigsten beobachtet.



**Abbildung 5.9:** Bahnabdeckung durch die simulierten 2-Weg Laufzeitmessungen. Die Farbkodierung bezieht sich auf unterschiedliche Hemisphären und Beobachtungszeitspannen. Die Bahnposition ist über die mittlere Anomalie mit einer Schrittweite von  $1^\circ$  dargestellt.

Die Abb. 5.10 enthält die Startzeitpunkte und die Kennnummern der simulierten Pässe (wobei die Nordhalbkugel in Blau und die Südhalbkugel in Grün dargestellt sind). Jede Station beobachtet das Objekt jeden Tag ungefähr zum selben Zeitpunkt. Aufgrund der hohen Stationsdichte in Europa ist das Objekt tagsüber im besten Fall von 17, nachts von 14 Observatorien gleichzeitig beobachtbar. Pro Tag sind von jeder Station aus maximal drei Pässe (innerhalb eines vierstündigen Zeitraumes) sichtbar.

### 5.3 Differenzierung der Beobachtungsintervalle



**Abbildung 5.10:** Übersicht der Startzeitpunkte und Kenn-Nummer der Pässe, die tagsüber (obere Grafik) und nachts (untere Grafik) durchgeführt werden können. Messungen der Südhalbkugel sind in Grün und jene der Nordhalbkugel in Blau dargestellt.

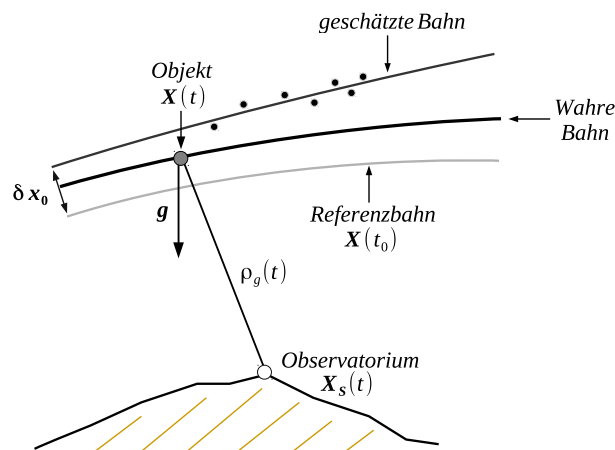


## 5.4 Dynamische Bahnbestimmung

In der dynamischen Bahnbestimmung werden der Zustandsvektor und die dynamischen Parameter  $C_D$  und  $C_R$  aus einer Reihe von Beobachtungen - den simulierten SLR Messungen - geschätzt. Der Zustandsvektor geht mit einem Fehler von 100 m in der großen Halbachse in den Ausgleich ein, die dynamischen Koeffizienten sind fehlerfrei. Man führt eine Referenzbahn ein, die durch den Zustandsvektor  $\mathbf{X}(t_0)$  vorgegeben ist und bestimmt in einem Ausgleich nach kleinsten Quadraten die Zuschläge zum Zustandsvektor  $\delta\mathbf{x}_0$  und den dynamischen Koeffizienten  $\delta\mathbf{p}_0$ , die im Parametervektor  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$  in Gl. 5.15 zusammengefasst sind.

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{x}_0 \\ \delta\mathbf{p}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(t_0) - \hat{\mathbf{X}}(t_0) \\ \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Im Ausgleich wird die Referenzbahn in der Abb. 5.11 so an die simulierten 2-Weg Messungen  $\mathbf{z}(t)$  angepasst, dass die Quadratsumme der Verbesserungen  $\epsilon$  minimal ist [Tapley et al., 2004], [Niemeier, 2008].



**Abbildung 5.11:** Prinzip der dynamischen Orbitbestimmung zur Verbesserung der Referenzbahn durch 2-Weg Laufzeitmessungen, basierend auf [Tapley et al., 2004].

Die gemessene 1-Weg geometrische Distanz  $l(t)$  wird aus den Beobachtungen  $\mathbf{z}(t)$  durch das Anbringen der Korrekturterme - um die Signalverzögerungen durch die Troposphäre und Relativistik (Gl. 5.5) - abgeleitet.

Der Zusammenhang zwischen der Entfernung und dem Parametervektor  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$  wird durch die Matrix  $\mathbf{H}$  in Gl. 5.16 beschrieben [Seeber, 2003].

$$\mathbf{y}(t) + \epsilon = \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t_0) \quad (5.16)$$

$\epsilon$  ist der Residuenvektor, der das Beobachtungsrauschen enthält. Der Verbesserungsvektor  $\mathbf{y}(t)$  wird aus der Differenz der korrigierten Entfernungsmessung  $l(t)$  und der Modellbeobachtung  $\mathbf{h}(t, \mathbf{X})$  berechnet (Gl. 5.17).

$$\mathbf{y}(t) = l(t) - \mathbf{h}(t, \mathbf{X}) \quad (5.17)$$

Die Matrix  $\mathbf{H}$  stellt den linearen Zusammenhang zwischen der geometrischen Distanz und dem Parametervektor  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$  her und setzt sich aus der Mapping Matrix  $\tilde{\mathbf{H}}$ , der State Transition Matrix  $\Phi(t, t_0)$  und der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}(t)$  in Gl. 5.18 zusammen. Die Mapping Matrix  $\tilde{\mathbf{H}}$  stellt einen Zusammenhang zwischen der Beobachtung und dem Zustandsvektor  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}$  zum Beobachtungszeitpunkt  $t$  her. Die State Transition Matrix bringt den Zustandsvektor  $\mathbf{X}$  mit dem initialen Zustandsvektor  $\mathbf{X}(t_0)$  in Verbindung. Die Sensitivitätsmatrix beschreibt die Änderung des Zustandsvektors in Abhängigkeit von einer Änderung der dynamischen Parameter.

$$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}} \cdot \begin{bmatrix} \Phi(t, t_0) & \mathbf{0}_{6xu} \\ \mathbf{0}_{6x6} & \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

### State Transition Matrix $\Phi$ und Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}$

Die Herleitung der State Transition Matrix  $\Phi(t, t_0)$  und der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}(t)$  erfolgt durch die Bildung der partiellen Ableitungen der Bewegungsgleichung  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  (der zeitlichen Änderung des Zustandsvektors) nach dem initialen Zustandsvektor  $\mathbf{X}(t_0)$  und dem Vektor  $\mathbf{p}_0$ , der die dynamischen Koeffizienten enthält (Gl. 5.19) [Xu, 2010].

Da die Bewegungsgleichung nicht direkt vom Zustandsvektor und den Koeffizienten abhängt, erfolgt die Differentiation unter Anwendung der Kettenregel.

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p})}{\partial(\mathbf{X}(t_0), \mathbf{p}_0)} = \frac{\partial f(t, \mathbf{X}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial(\mathbf{X}(t_0), \mathbf{p}_0)} + \frac{\partial f(t, \mathbf{X}, \mathbf{p})}{\partial(\mathbf{X}(t_0), \mathbf{p}_0)} \quad (5.19)$$

Die partielle Ableitung des Bewegungsmodells nach dem Zustandsvektor  $\mathbf{X}$  in Gl. 5.19 entspricht der Matrix  $\mathbf{A}(t)$  in Gl. 5.20, welche die Geschwindigkeiten und Störbeschleunigungen auf die Positions- und Geschwindigkeitskomponenten abbildet. Die Auswertung der Ableitungen erfolgt an der Referenzbahn  $\mathbf{X}_{ref}$ .

$$\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial f(t, \mathbf{X}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_{ref}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_{3x3} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \mathbf{r}(t)}_{3x3} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}_{3x3} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Die rechte untere (3x3) Matrix in der Gl. 5.20 entfällt, wenn die Störbeschleunigung nicht von der Geschwindigkeit abhängt. Diese ist nur dann besetzt, wenn auch die Ableitungen der Atmosphärenreibung berücksichtigt werden.

Da die Geschwindigkeit nicht von der Position abhängt, ist der linke obere (3x3) Teil der Matrix Null. Die Ableitung nach der Geschwindigkeit ergibt die Einheitsmatrix.

Die Ableitung des Zustandsvektors nach dem Parametervektor in Gl. 5.21 ergibt die Übertragungsmatrix  $\Phi(t, t_0)$  und die Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}(t)$ . Die Sensitivitätsmatrix ist von der Dimension (6xu), wobei  $u$  der Anzahl der geschätzten Parameter entspricht.

$$\begin{bmatrix} \Phi(t, t_0) & \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial(\mathbf{X}(t_0), \mathbf{p}_0)} \right|_{\mathbf{X}_{ref}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}(t_0)}_{6x6} & \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{p}_0}_{6xu} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Die State Transition Matrix  $\Phi(t, t_0)$  in Gl. 5.22 - beschreibt die Entwicklung des Systems und damit den Zusammenhang zwischen den Zustandsvektoren zu den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t$  [Tapley et al., 2004].

$$\Phi(t, t_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}(t_0)} \right|_{\mathbf{x}_{ref}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \mathbf{r}(t_0)_{3 \times 3}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(t_0)_{3 \times 3}} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \mathbf{r}(t_0)_{3 \times 3}} & \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(t_0)_{3 \times 3}} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Die Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}(t)$  in Gl. 5.23 enthält die partiellen Ableitungen des Zustandsvektors  $\mathbf{X}$  nach den Parametern  $\mathbf{p}_0$  [Montenbruck und Gill, 2000].

$$\mathbf{S}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{p}_0} \right|_{\mathbf{x}_{ref}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \mathbf{p}_0} & 3 \times u \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \mathbf{p}_0} & 3 \times u \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Die Gl. 5.19 kann somit folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial (\mathbf{X}(t_0), \mathbf{p}_0)} = \mathbf{A}(t) \cdot \begin{bmatrix} \Phi(t, t_0) & \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} + \frac{\partial f(t, \mathbf{X}, \mathbf{p})}{\partial (\mathbf{X}(t_0), \mathbf{p}_0)} \quad (5.24)$$

Da die Parameter  $\mathbf{p}_0$  des dynamischen Modells nicht zeitabhängig sind, kann die Reihenfolge der Differentiation in Gl. 5.24 vertauscht werden und man erhält die zeitliche Änderung der State Transition Matrix und der Sensitivitätsmatrix in Gl. 5.25 [Xu, 2010].

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial (\mathbf{X}(t_0), \mathbf{p}_0)} \cdot \frac{d}{dt} = \begin{bmatrix} \Phi(t, t_0) & \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi}(t, t_0) & \dot{\mathbf{S}}(t) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Löst man die Differentialgleichungen 5.26 und 5.27 mit den Anfangswerten des Zustandsvektors und der dynamischen Koeffizienten durch numerische Integration, erhält man die State Transition und die Sensitivitätsmatrix zum Zeitpunkt  $t$  (vgl. [Tapley et al., 2004], [Montenbruck und Gill, 2000]).

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \cdot \Phi(t, t_0) \quad , \quad \Phi(t, t_0) = [\mathbf{I}_{6 \times 6} \quad \mathbf{0}_{6 \times u}] \quad (5.26)$$

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{S}(t) + \frac{\partial f(t, \mathbf{X}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_0} \quad , \quad \mathbf{S}(t) = [\mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \mathbf{0}_{6 \times u}] \quad (5.27)$$

Da die Auswertung der partiellen Ableitungen an der Referenzbahn erfolgt, muss die Objektposition auf der Bahn zum Zeitpunkt  $t$  bekannt sein. Diese erhält man durch numerische Integration des dynamischen Bewegungsmodells  $\dot{\mathbf{X}}$  in Gl. 5.28 mit dem Anfangswerten  $\mathbf{X}(t_0)$  und  $\mathbf{p}_0$  (vgl. [Tapley et al., 2004], .

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}) \quad , \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_0), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \quad (5.28)$$

### Mapping Matrix $\tilde{\mathbf{H}}$

Die korrigierten Entfernungsmessungen  $\mathbf{l}(t)$  stehen über die Funktion  $\mathbf{h}(t, \mathbf{X})$  in Gl. 5.29 mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{X}$  zum Beobachtungszeitpunkt  $t$  im Zusammenhang.  $\varepsilon$  enthält das Beobachtungsrauschen [Tapley et al., 2004].

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{h}(t, \mathbf{X}) + \varepsilon \quad (5.29)$$

Die Beobachtungsgleichung  $\mathbf{h}(t, \mathbf{X})$  wird durch die geometrische 1-Weg Distanz in Gl. 5.30 aus der Entfernung zwischen der Station  $\mathbf{X}_S(t)$  zum Sendezeitpunkt  $t$  und dem Objekt  $\mathbf{X}(t + \tau_u)$  zum Reflexionszeitpunkt  $t + \tau_u$  gebildet.

$$\mathbf{h}(t, \mathbf{X}) = \|\mathbf{X}(t + \tau_u) - \mathbf{X}_S(t)\| \quad (5.30)$$

Die Funktion ist nicht-linear und wird durch eine Taylorreihe erster Ordnung in Gl. 5.31 approximiert. Glieder höherer Ordnung werden bei der Reihenentwicklung vernachlässigt [Tapley et al., 2004]. Die Auswertung erfolgt an der Referenzbahn  $\mathbf{X}_{ref}$ .

$$\mathbf{l}(t) \approx \mathbf{h}(t, \mathbf{X}_{ref}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(t, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_{ref}} \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{X}_{ref}(t)] + \varepsilon \quad (5.31)$$

Die Differenz der gemessenen 1-Weg Entfernung  $\mathbf{z}(t)$  und der Modellgröße  $\mathbf{h}(t, \mathbf{X}_{ref})$  wird als Verbesserung  $\mathbf{y}(t)$  und die Abweichung zwischen dem Zustandsvektor auf der geschätzten  $\mathbf{X}$  und der Referenzbahn  $\mathbf{X}_{ref}$  mit  $\mathbf{x}(t)$  bezeichnet. Das linearisierte Beobachtungsmodell ist in Gl. 5.32 dargestellt.

$$\mathbf{y}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(t, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_{ref}} \cdot \mathbf{x}(t) + \varepsilon \quad (5.32)$$

Die partielle Ableitung in Gl. 5.32 entspricht der Mapping Matrix  $\tilde{\mathbf{H}}$  und stellt durch Gl. 5.33 den linearen Zusammenhang zwischen dem Differenzvektor  $\mathbf{x}(t)$  zum Beobachtungszeitpunkt  $t$  und der Verbesserung  $\mathbf{y}(t)$  her [Tapley et al., 2004].

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{x}(t) + \varepsilon \quad (5.33)$$

### Ausgleich nach kleinsten Quadraten

Die Parameterschätzung erfolgt iterativ bis das Konvergenzkriterium in Gl. 5.40 erfüllt ist. Der Ausgleich wird mit einer einheitlichen Gewichtung durchgeführt, da nur Entfernungsmessungen in die Bahnbestimmung eingehen. Unterschiedliche Normalpunktgenauigkeiten einzelner Beobachtungsstationen, sowie Korrelationen zwischen den Beobachtungen werden vernachlässigt. Die Hauptdiagonale der Gewichtsmatrix  $\mathbf{R}_i^{-1}$  enthält die inversen Varianzen (die quadrierten Standardabweichungen)  $\sigma_i^2$ . Die Standardabweichung wird mit 1 cm festgelegt und entspricht der Standardabweichung des zufälligen Fehlers der simulierten Messungen. Der initiale Parametervektor  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$  geht als Pseudobeobachtung  $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$  mit der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_0^{-1}$  in den Ausgleich ein.

Somit erhält man das Ausgleichssystem 5.34 - die dynamischen Koeffizienten schätzt man mit, die Anfangswerte sind fehlerfrei.

$$(\mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{H}_i + \mathbf{P}_0^{-1}) \cdot \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \cdot \mathbf{y}(t_i) + \mathbf{P}_0^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}(t_0) \quad (5.34)$$

Der Parametervektor  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$  enthält die Zuschläge zum initialen Zustandsvektor und den dynamischen Koeffizienten. Die Design Matrix  $\mathbf{H}_i$  setzt sich aus der Übertragungsmatrix  $\Phi(t_i, t_0)$ , der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}(t_i)$  und der Mapping Matrix  $\tilde{\mathbf{H}}_i$  in Gl. 5.35 zusammen. Die Sensitivitätsmatrix ist nur dann enthalten, wenn auch dynamische Koeffizienten mitgeschätzt werden. Die Verbesserung  $\mathbf{y}(t_i)$  enthält die Abweichung zwischen der Messung  $l(t)$  und der Modellgröße  $\mathbf{h}(t, \mathbf{X}_{ref})$  [Montenbruck und Gill, 2000].

$$\mathbf{H}_i = \tilde{\mathbf{H}}_i \cdot [\Phi(t, t_0) \quad \mathbf{S}(t)] \quad (5.35)$$

Da alle Beobachtungen  $\mathbf{y}(t_i)$  in einem Schritt prozessiert werden, wird der batch - Algorithmus zur Parameterschätzung eingesetzt. Dies bedeutet dass, das Ausgleichssystem 5.34 in eine linke  $\mathbf{A}$  und rechte Seite  $\mathbf{N}$  aufgespalten, (Gl. 5.36 und 5.37) und schrittweise bis zur letzten Messung aufsummiert wird [Tapley et al., 2004].

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{H}_i + \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}_0^{-1} \quad (5.36)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \cdot \mathbf{y}(t_i) + \mathbf{N} \quad , \quad \mathbf{N} = \mathbf{P}_0^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}(t_0) \quad (5.37)$$

Das Normalgleichungssystem wird bis zur letzten Beobachtung aufsummiert und anschließend gelöst:

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{N} \quad . \quad (5.38)$$

Danach erfolgt eine Korrektur der Initialwerte um die (im Parametervektor enthaltenen) Zuschläge  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$ . Die Differenz zwischen der ursprünglichen und der ausgeglichenen Beobachtung in Gl. 5.39 ergibt den Residuenvektor  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_i$ , der zur Konvergenzüberprüfung eingesetzt wird [Niemeier, 2008].

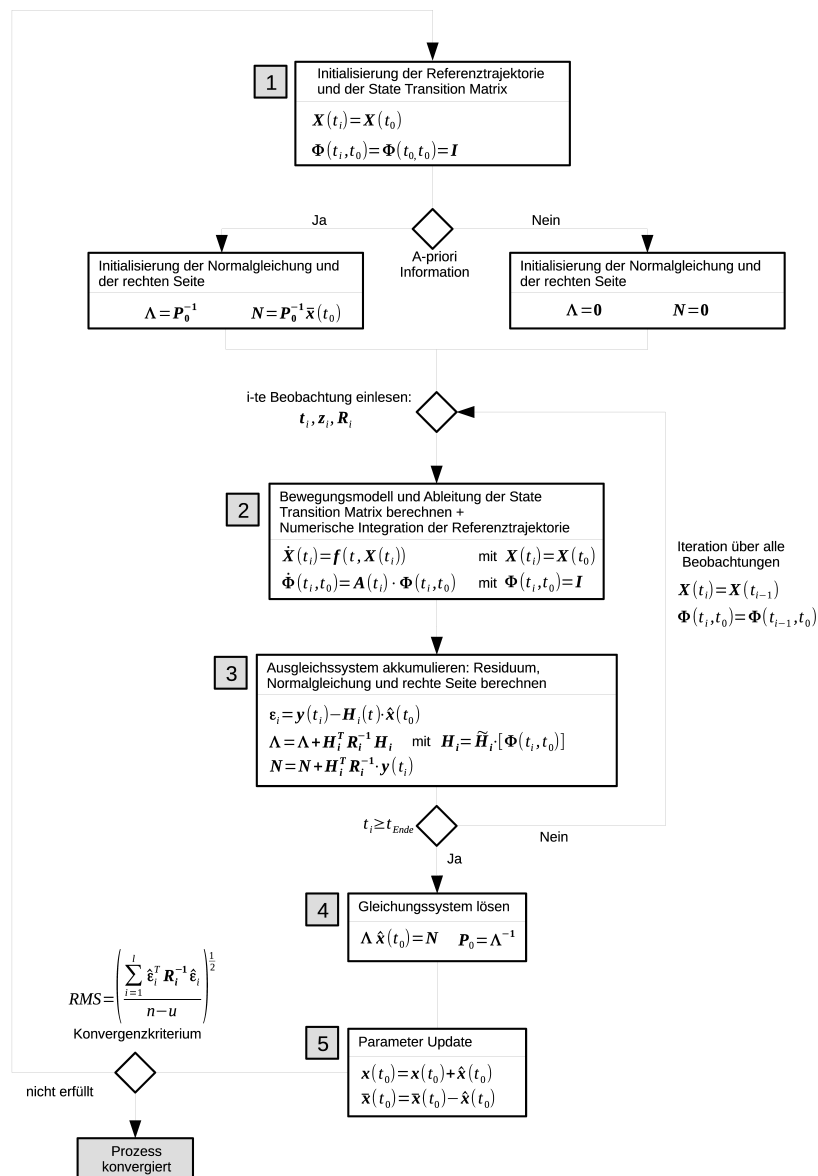
$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_i = \mathbf{y}_i(t) - \mathbf{H}_i(t) \cdot \hat{\mathbf{x}}(t_0) \quad (5.39)$$

Die Konvergenz prüft man anhand der empirischen Standardabweichung  $s_0$ . Die Iteration wird abgebrochen, wenn die Änderung zweier aufeinanderfolgender Standardabweichungen

chungen unter einem festgelegten Grenzwert liegt. Die Freiheitsgrade in Gl. 5.40 werden aus der Anzahl der Beobachtungen  $n$  und der geschätzten Parameter  $u$  bestimmt [Niemeier, 2008].

$$s_0 = \sqrt{\frac{\sum \hat{\epsilon}_i^T \mathbf{R}^{-1} \hat{\epsilon}_i}{n - u}} \quad (5.40)$$

Das Flussdiagramm des Berechnungsalgorithmus (unter Vernachlässigung der Sensitivitätsmatrix) basiert auf [Tapley et al., 2004].



**Abbildung 5.12:** Dynamische Bahnbestimmung unter Anwendung des batch-Algorithmus. Darstellung basierend auf [Tapley et al., 2004].

## 5.5 Qualitätsbeurteilung

Die Qualitätsbeurteilung der Parameterschätzung erfolgt über verschiedene Genauigkeitsmaße (von der Standardabweichung über den mittleren Punktfehler bis zum empirisch bestimmten Schätzfehler). Die Standardabweichungen  $\sigma_{x_i}$  (formale Fehler) geben an wie präzise die Parameter mit dem angenommenen funktionalen und stochastischen Modell bestimmbar sind. Sie werden aus den Hauptdiagonalelementen der Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter (dem invertierten Normalgleichungssystem) abgeleitet, wobei die empirische Standardabweichung  $s_0$  in Gl. 5.41 herausgezogen ist [Niemeier, 2008].

$$\sigma_{x_i} = s_0 \cdot \sqrt{q_{xx}} \quad (5.41)$$

Zur Bestimmung des absoluten Punktlagefehlers in der Position und der Geschwindigkeit setzt man den mittleren Punktfehler  $\sigma_p$  ein, der mit Gl. 5.42 aus den quadrierten Standardabweichungen der einzelnen Koordinatenrichtungen gebildet wird.

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2} \quad (5.42)$$

Der empirisch bestimmte Schätzfehler ergibt sich aus der Differenz des fehlerfreien  $\mathbf{X}(t_0)$  und des geschätzten Wertes  $\hat{\mathbf{X}}(t_0)$  des initialen Zustandsvektors sowie der Zuschläge  $\mathbf{p}_0 - \hat{\mathbf{p}}_0$  in den dynamischen Parametern durch Gl. 5.43. Er gibt an, wie präzise die Parameter unter Berücksichtigung tatsächlicher Beobachtungen bestimmbar sind.

$$\sigma_{POS,VEL} = \mathbf{X}(t_0) - \hat{\mathbf{X}}(t_0) \quad (5.43)$$

$$\sigma_{CD,CR} = \mathbf{p}_0 - \hat{\mathbf{p}}_0 \quad (5.44)$$

Der empirische Fehler in der Position und Geschwindigkeit wird durch den mittleren Punktfehler in Gl. 5.42 aus den empirischen Fehlern der einzelnen Koordinatenrichtungen abgeleitet.

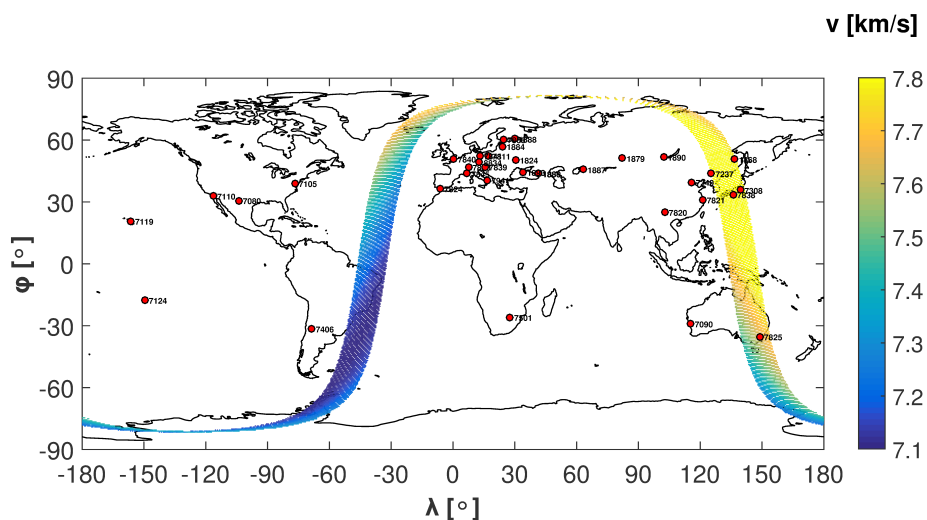
## 5.6 Bahnbestimmung aus der globalen Geometrie

Anhand der globalen Geometrie - bestehend aus 10808 simulierten SLR Messungen - wurde eine Parameterschätzung durchgeführt. Der Anfangswert des Zustandsvektors enthielt einen Fehler von 100 m in der großen Halbachse  $a$ . Die dynamischen Koeffizienten ( $C_D$ ,  $C_R$ ) gingen fehlerfrei in den Ausgleich ein, wurden allerdings mitgeschätzt. Die Ergebnisse der Parameterschätzung sind in Tab. 5.2 zusammengefasst und werden in Kap. 7 als Referenzlösung eingesetzt. Sowohl der formale als auch der empirisch bestimmte Lagefehler ( $\sigma_{POS}$ ) liegen unter 1 mm, die absolute Geschwindigkeit ( $\sigma_{VEL}$ ) ist mit einer Präzision von weniger als  $1 \mu\text{m/s}$  bestimmbar. Der  $C_R$  Koeffizient erhält eine höhere Verbesserung als der  $C_D$  Koeffizient.

**Tabelle 5.2:** Formale und empirische Fehler der geschätzten Parameter, die aus der globalen Geometrie (10808 Messungen) abgeleitet wurden.

	$\sigma_{POS}$ [mm]	$\sigma_{VEL}$ [ $\mu\text{m/s}$ ]	$\sigma_{CD}$	$\sigma_{CR}$
Formaler Fehler	0.8	0.7	$+2.6 \cdot 10^{-6}$	$+8.0 \cdot 10^{-5}$
Empirischer Fehler	0.4	0.6	$-1.6 \cdot 10^{-6}$	$-5.0 \cdot 10^{-5}$

Ausgehend von diesem verbesserten Zustandsvektor erfolgte eine Prädiktion der Objektbahn für einen Zeitraum von 14 Tagen, mit demselben dynamischen Bewegungsmodell, das auch zur Integration der Referenzbahn eingesetzt wurde. Die Integrationsschrittweite beließ man bei 60 Sekunden. Diese Bahn gilt im Folgenden als Referenzlösung, mit der die 14-Tage Bahnvorhersagen der eingeschränkten Beobachtungsgeometrien in Kap. 7 verglichen werden. Die Abb. 5.13 enthält die Bodenspur der integrierten Referenzlösung im erdfesten System. Die Farbkodierung bezieht sich auf die absolute Geschwindigkeit des Objektes im erdfesten System.



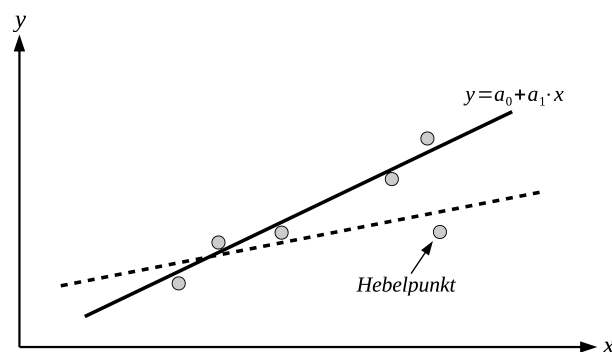
**Abbildung 5.13:** Bodenspur der Referenzlösung im erdfesten System.



## Kapitel 6

# Einschränkung der Beobachtungszahl

Im vorherigen Kapitel wurde eine globale Beobachtungsgeometrie aus 10808 Laserentfernungsmessungen abgeleitet und zur Bahnbestimmung eingesetzt. Im Folgenden wird die Gesamtanzahl der SLR Messungen anhand einer Hebelwertanalyse reduziert. Der Hebelwert beschreibt den Einfluss einer Beobachtung in der gesamten Beobachtungsgeometrie [Niemeier, 2008] und wird aus der Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{vv}$  der Verbesserungen abgeleitet. Beobachtungen mit einem hohen Hebelwert (gleichzusetzen mit einem niedrigen Redundanzanteil) werden als einflussreiche Datenpunkte angesehen. Als Hebelpunkt bezeichnet man eine Messung, die - geometrisch gesehen - weit von den übrigen Datenpunkten entfernt ist und somit einen großen Einfluss auf die Parameterschätzung ausübt [Niemeier, 2008]. Die Abb. 6.1 illustriert den Einfluss eines Hebelpunktes auf eine Ausgleichsgerade.



**Abbildung 6.1:** Schematische Darstellung eines Hebelpunktes und dessen Auswirkungen auf eine Ausgleichsgerade, basierend auf [Niemeier, 2008].

Der Hebelwert wird in der Studie auch zur numerischen Beschreibung der Datendichte und der Bahnabdeckung eingesetzt und kann dazu beitragen Regionen sowie Stationen, Pässe und einzelne Beobachtungen aufzudecken, die einen hohen Stellenwert in der gesamten Beobachtungsgeometrie haben. Die Kovarianzmatrix der Verbesserungen  $\mathbf{Q}_{vv}$  enthält in der Diagonale die Redundanzanteile  $r_i$  der Beobachtungen [Niemeier, 2008]

und wird durch den Zusammenhang in Gl. 6.1 aus der Design Matrix  $\mathbf{H}$  abgeleitet, in der die Beobachtungsgeometrie (die relative Lage zwischen dem Objekt und der Station zum Beobachtungszeitpunkt) enthalten ist.

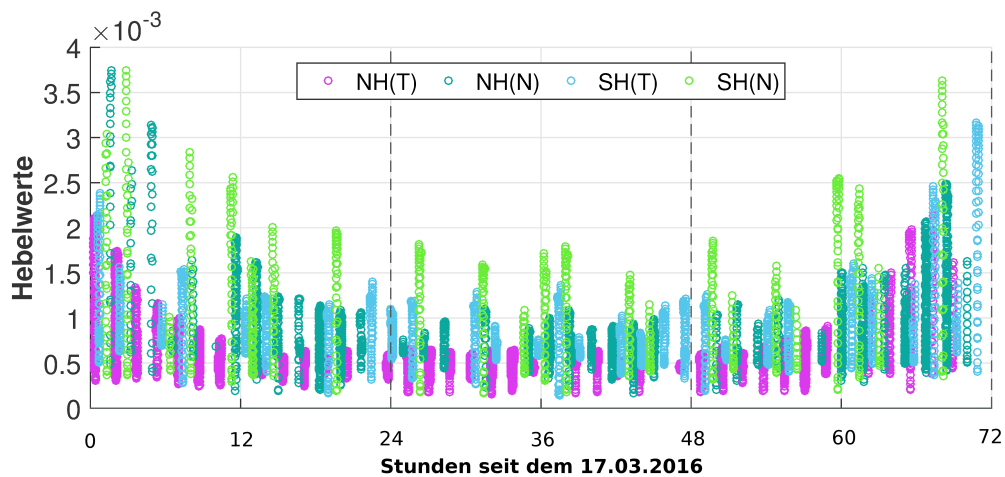
$$\mathbf{Q}_{vv} = [\mathbf{I} - \mathbf{H} \cdot (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^T] = \mathbf{I} - \mathbf{P} \quad (6.1)$$

Die Redundanzanteile  $r_i$  stehen mit den Hebelwerten  $h_i$  in der Hauptdiagonale der Projektionsmatrix  $\mathbf{P}$  im rechten Ausdruck der Gl. 6.1 in folgendem Zusammenhang:

$$r_i = 1 - h_i \quad . \quad (6.2)$$

### Globale Beobachtungsgeometrie

Die Abb. 6.2 stellt die Hebelwerte der globalen Beobachtungsgeometrie dar. Durch die farbliche Kodierung werden Hemisphären und Beobachtungsintervalle abgegrenzt. Die Hebelwertmaxima treten zu Beginn und am Ende des 3-tägigen Simulationszeitraums auf. Observatorien auf der Südhalbkugel (Blau und Grün) führen aufgrund der geringen Stationsdichte die einflussreicheren Messungen durch. Die höchste Datenredundanz tritt (wie bereits anhand der Abbildungen 5.9 und 5.10 beschrieben) tagsüber auf der Nordhalbkugel (Violett) auf.



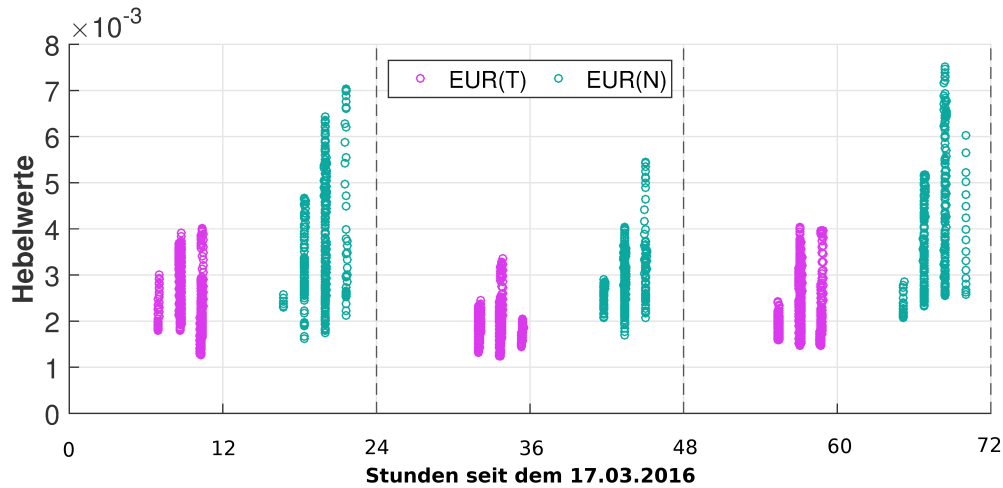
**Abbildung 6.2:** Größenordnung und Verteilung der Hebelwerte der simulierten Beobachtungen. Die Hebelwerte von Messungen der Nordhalbkugel (NH) sind in Violett (Tagbeobachtungen) und Dunkelgrün (Nachtbeobachtungen) und der Südhalbkugel (SH) in Blau (Tag) und Grün (Nacht) dargestellt.

### Europäische Beobachtungsgeometrie

Die globale Geometrie wurde infolge reduziert, insofern dass nur die folgenden 10 europäischen Observatorien als Beobachter eingesetzt wurden:

Graz (Österreich), Wettzell und Potsdam (Deutschland), Zimmerwald (Schweiz), San Fernando (Spanien), Grasse (Frankreich), Herstmonceux (Vereinigtes Königreich), Riga (Lettland), Borowiec (Polen) und Metsahovi (Finnland).

Die Abb. 6.3 stellt die Hebelwertverteilung der europäischen Geometrie dar. Wie auch in der globalen Geometrie (Abb. 6.2) sind Messungen, die zu Beginn und am Ende des Simulationszeitraums stattfinden, durch höhere Hebelwerte gekennzeichnet, wobei die Hebelwertmaxima des 1. und 2. bzw. 2. und 3. Tages innerhalb der europäischen Geometrie geringere Differenzen aufweisen. Im Gegensatz zur globalen Geometrie tritt das Hebelwertmaximum der Nachtbeobachtungen nicht am 1. sondern am 3. Tag auf. Tagbeobachtungen (Violett) zeigen - wie auch in der globalen Geometrie - höhere Redundanzwerte.



**Abbildung 6.3:** Größenordnung und Verteilung der Hebelwerte der eingeschränkten europäischen Geometrie. Die Hebelwerte von Messungen, welche tagsüber stattfinden sind in Violett dargestellt. Nachtbeobachtungen sind in Dunkelgrün gekennzeichnet.

### Einschränkung der Beobachtungsgeometrie

Infolge wurde die globale Geometrie anhand der Hebelwerte der Beobachtungen auf einen empirisch ermittelten Wert von 72 Messungen mit jeweils 24 pro Tag reduziert. In der Tab. 6.1 sind drei Auswahlverfahren (K1-K3), welche für die Reduktion der Beobachtungen Anwendung fanden, zusammengefasst.

**Tabelle 6.1:** Auswahlverfahren, die zur Einschränkung der Beobachtungsgeometrie eingesetzt wurden.

<b>K1</b>	Auswahl von 24 Messungen pro Tag mit maximalen Hebelwerten.
<b>K2</b>	Elimination von Beobachtungen anhand einer Abstandsfunktion. Anschließend Auswahl von 24 Messungen pro Tag mit maximalen Hebelwerten.
<b>K3</b>	Auswahl von 24 Messungen pro Tag mit minimalen Hebelwerten.

Mit den Verfahren K1 und K3 wählt man jene Messungen mit den höchsten bzw. niedrigsten Hebelwerten aus. Die Methode K2 unterscheidet sich von den anderen beiden dahingehend, dass gewisse Datenpunkte vor der Selektion verworfen werden.

Die Elimination der Messungen erfolgt anhand der Abstandsfunktion  $DST_i$  in Gl. 6.3, die einen Zusammenhang zwischen dem Hebelwert  $h_i$ , dem Redundanzanteil  $r_i$ , der em-

pirischen Standardabweichung  $s_0$ , der Standardabweichung des Beobachtungsrauschens  $\sigma_0$  und der Anzahl der geschätzten Parameter  $u$  herstellt [Jagadeeswari et al., 2013].

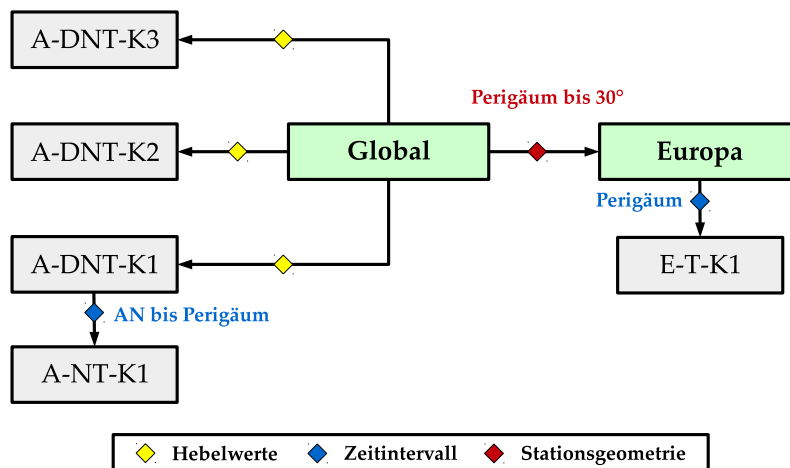
$$DST_i = \frac{s_0^2}{u \cdot \sigma_0^2} \cdot \frac{h_i}{r_i^2} \quad (6.3)$$

Diese Abstandsfunktion  $DST_i$  wird für jeden Datenpunkt ausgewertet. Sämtliche Messungen, deren  $DST_i$  über einer Schranke von

$$DST_i > \mu_{DST} + \sigma_{DST} \quad (6.4)$$

liegen, werden aus der Gesamtgeometrie eliminiert. Dadurch erhält man eine Auswahl an Messungen, deren Hebelwerte in derselben Größenordnung liegen.

Durch die Anwendung der drei Auswahlverfahren (K1-K3), die in der Tab. 6.1 zusammengefasst sind, wurden die Simulationsszenarien A-DNT-K1, A-DNT-K2 und A-DNT-K3 in der Abb. 6.4 aus der globalen Geometrie abgeleitet.



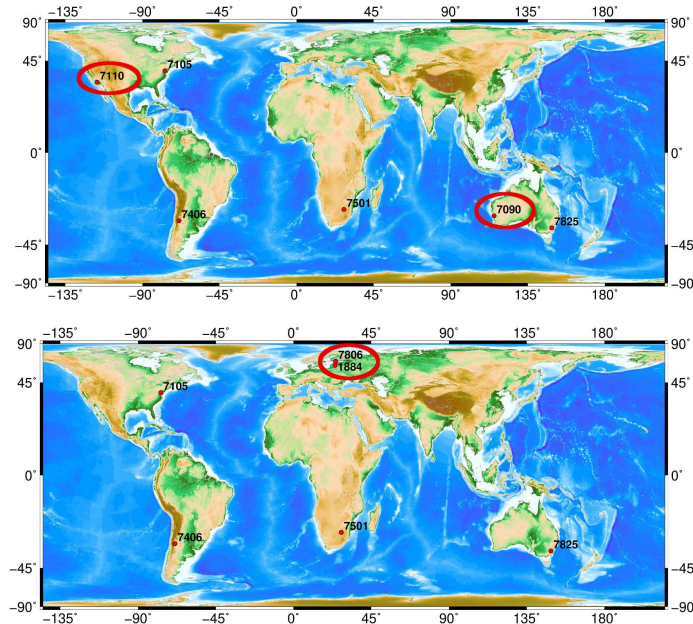
**Abbildung 6.4:** Globale und europäische Simulationsszenarien, die aus der Gesamtgeometrie anhand verschiedener Merkmale (Hebelwerte, Zeitintervall und Stationen) abgeleitet wurden.

Anschließend wurde die globale Geometrie auf die Zeitspanne Nacht eingeschränkt und durch die Anwendung des Auswahlverfahrens K1 das Simulationsszenario A-NT-K1 abgeleitet. Die Sichtbarkeit des Objektes reduziert sich dadurch auf die Richtung vom aufsteigenden Knoten über das Perigäum bis zum Perigäumsdurchgang.

Das Szenario E-T-K1 wurde - unter Anwendung des Verfahrens K1 - aus der europäischen Geometrie und einer Einschränkung des Beobachtungsintervalls auf die Tag-Nacht Grenze (die sogenannte Terminator Periode) hergeleitet.

## 6.1 Stationsgeometrie

Die folgenden Abb. 6.5 und 6.6 zeigen die Stationsgeometrien, die sich durch die Anwendung der Auswahlverfahren K1 bis K3 (A-DNT-K1 bis K3) sowie die Einschränkung auf die Beobachtungszeitspanne Nacht (A-NT-K1) ergeben.

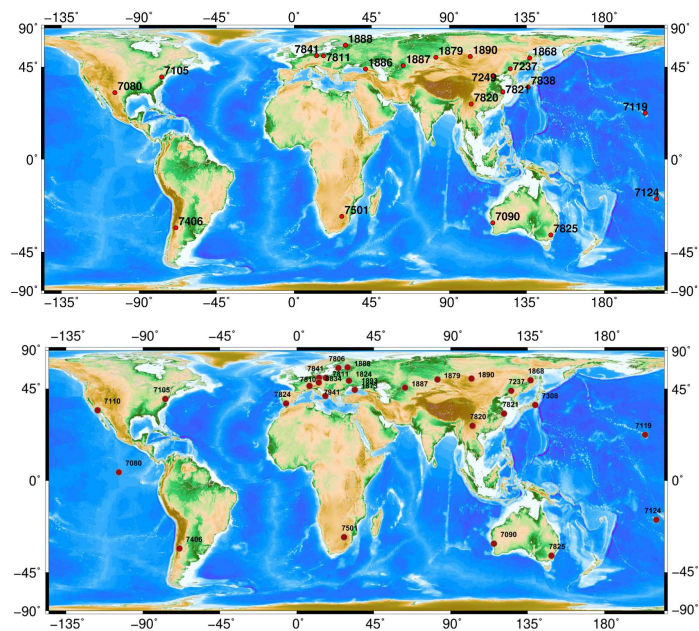


**Abbildung 6.5:** Stationsgeometrie der eingeschränkten globalen Szenarien. Darstellung von oben nach unten: A-DNT-K1 und A-NT-K1. Credit: GMT

Die Stationsgeometrie des Szenario A-DNT-K1 (Abb. 6.5, Pos. 1) besteht aus sechs Observatorien, wovon sich zwei (7105, 7110) in den Vereinigten Staaten und vier (7090, 7406, 7501, 7825) auf der Südhalbkugel befinden.

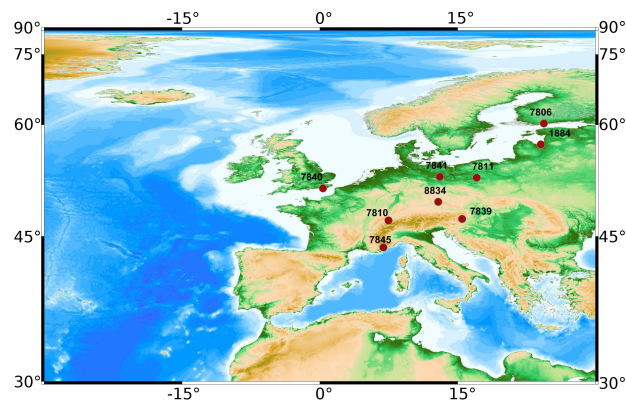
Durch die Einschränkung der Beobachtungszeitspanne in A-NT-K1 (Abb. 6.5, Pos. 2) ändern sich die teilnehmenden Stationen, während die Anzahl von sechs erhalten bleibt. Als Beobachter werden ein Observatorium in den Vereinigten Staaten (7105), zwei in Europa (1884, 7806) und drei auf der Südhalbkugel (7406, 7501, 7825) ausgewählt. Im Vergleich zu Szenario A-DNT-K1 befinden sich nun zwei Stationen (1884, 7806) näher am Perigäum.

Die Auswahl von Beobachtungen mit niedrigen Hebelwerten (A-DNT-K2, A-DNT-K3) führt zu einer deutlichen Erhöhung der Stationsanzahl auf 21 und 28 (Abb. 6.6, Pos. 1 und 2).



**Abbildung 6.6:** Stationsgeometrie der eingeschränkten globalen Szenarien. Darstellung von oben nach unten: A-DNT-K2 und A-DNT-K3. Credit: GMT

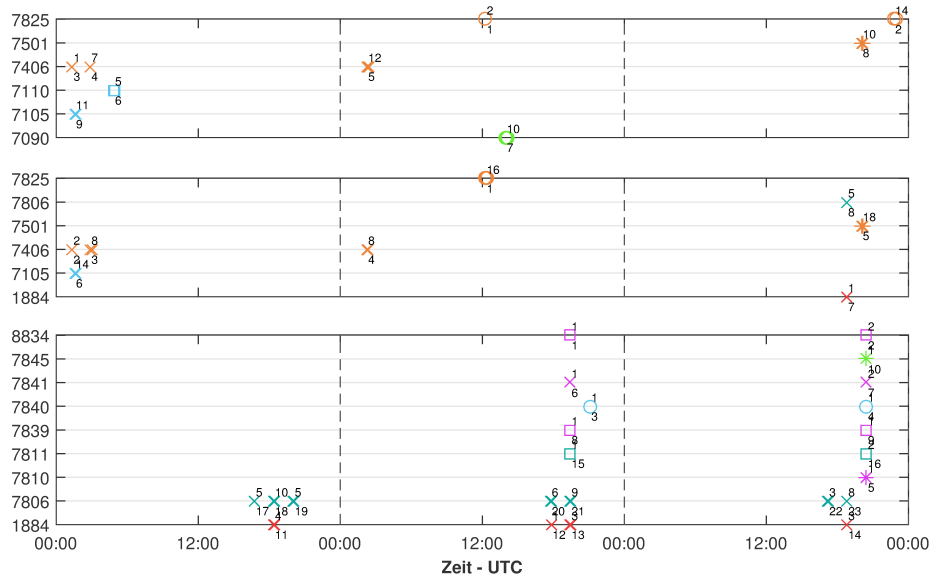
Bei einer Einschränkung auf die europäische Stationsgeometrie und die Terminator Periode im Szenario E-T-K1 (Abb. 6.7) sind alle europäischen Observatorien mit Ausnahme der Station San Fernando (7824) beteiligt.



**Abbildung 6.7:** Stationsgeometrie des eingeschränkten europäischen Szenario E-T-K1.

## 6.2 Zeitliche Verteilung der Beobachtungen

Die zeitliche Verteilung der Messungen ist in der Abb. 6.8 für die Szenarien A-DNT-K1, A-NT-K1 sowie E-T-K1 dargestellt. Der Beobachtungszeitraum erstreckt sich über drei Tage.



**Abbildung 6.8:** Zeitliche Abdeckung des dreitägigen Simulationszeitraumes durch Messungen. Die obere Zahl gibt die Anzahl der enthaltenen Beobachtungen, die untere die Kennnummer des Passes an. Pos. 1-3: A-DNT-K1, A-NT-K1 und E-T-K1.

Den Szenarien ist eine sehr inhomogene Beobachtungsverteilung gemein. Die Messungen der globalen Szenarien A-DNT-K1 (Pos. 1) und A-NT-K1 (Pos. 2) finden am Anfang und am Ende sowie in der ersten Hälfte des zweiten Tages statt. Schränkt man die Stationsgeometrie auf Europa und die Terminator Periode ein (Pos. 3), finden die Beobachtungen am Ende eines Tages statt. Gegenüber den globalen Szenarien erhöht sich die Anzahl der beteiligten Stationen von sechs auf neun. Die enthaltenen Pässe werden am zweiten und dritten Tag annähernd gleichzeitig gemessen.

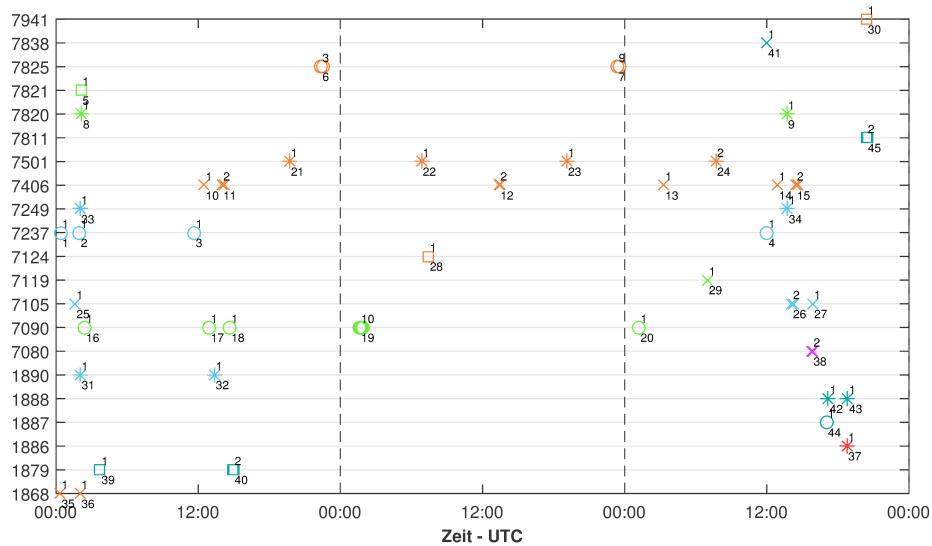
Zwischen den Beobachtungsgruppen treten (bedingt durch die Auswahl der Beobachtungen mit maximalen Hebelwerten) große Datenlücken von  $\sim 18$  bis über 24 Stunden auf.

Am Szenario A-DNT-K1 sind insgesamt sechs Observatorien beteiligt, wovon sich zwei (7105, 7110) in den Vereinigten Staaten und vier (7090, 7825, 7406, 7501) auf der Südhalbkugel befinden. Die Messungen sind ungefähr im Verhältnis 1 : 4 auf die Hemisphären Nord und Süd verteilt. Durch die Einschränkung der Beobachtungszeitspanne in A-NT-K1 ändern sich die teilnehmenden Stationen, die Anzahl von sechs bleibt erhalten. Im Vergleich zu Szenario A-DNT-K1 werden die Stationen Yarragadee (7090) und Monument Peak (7110) durch Riga (1884) und Metsahovi (7806) ersetzt. Die Messungen verteilen sich im Verhältnis 2 : 3 auf die Nord- und Südhalbkugel.

## 6.2 Zeitliche Verteilung der Beobachtungen

Bei einer Einschränkung auf die europäische Stationsgeometrie und die Terminator Periode sind alle europäischen Observatorien mit Ausnahme der Station San Fernando (7824) beteiligt.

Die Abbildungen 6.9 und 6.10 zeigen die Beobachtungspläne der Szenarien A-DNT-K2 und A-DNT-K3.



**Abbildung 6.9:** Beobachtungsplan des Szenario A-DNT-K2. Die obere Zahl gibt die Anzahl der enthaltenen Beobachtungen, die untere die Kennnummer des Passes an.



Die Auswahl von Messungen mit niedrigen und gleich hohen Hebelwerten in A-DNT-K2 sowie A-DNT-K3 (Abb. 6.9) führt zu einer guten zeitlichen Verteilung der Beobachtungen und - verglichen mit A-DNT-K1 - zu einer deutlichen Erhöhung der Stationsanzahl auf 21 und 28. Die Entfernungsmessungen der Szenarien A-DNT-K2 und A-DNT-K3 teilen sich ungefähr im Verhältnis 3 : 4 bzw. 3 : 1 auf die Nord- und die Südhalbkugel auf. Der Nachteil der Auswahlverfahren K2 und K3 liegt in der hohen Anzahl der benötigten Stationen und Pässe und folglich zeitlich unzusammenhängenden Beobachtungen. Im Szenario A-DNT-K3 werden am ersten Beobachtungstag beispielsweise sechs Pässe mit nur einer Messung ausgewählt.

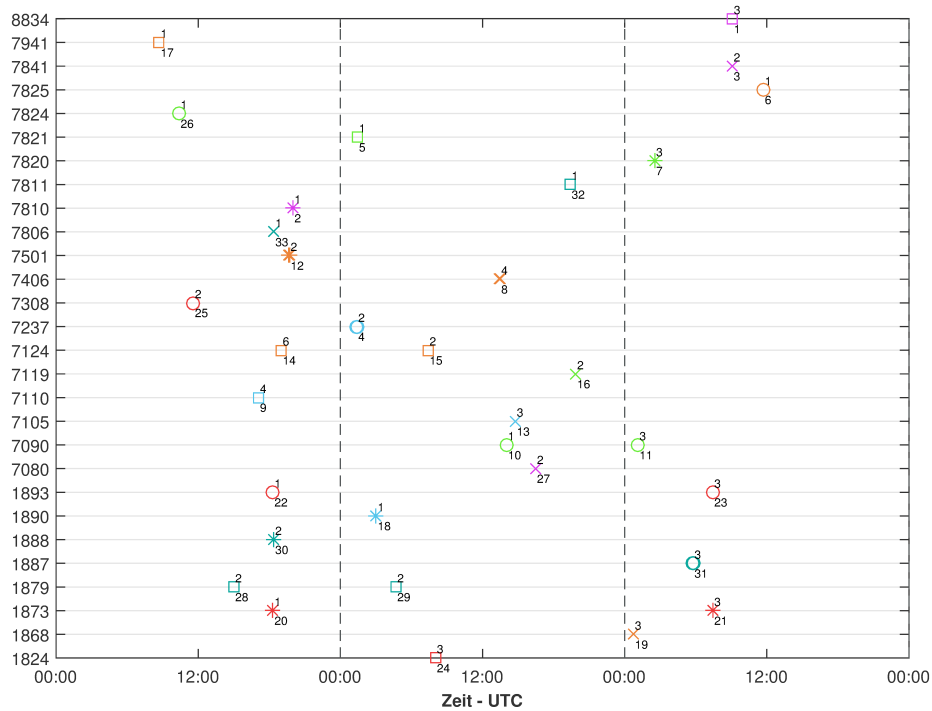
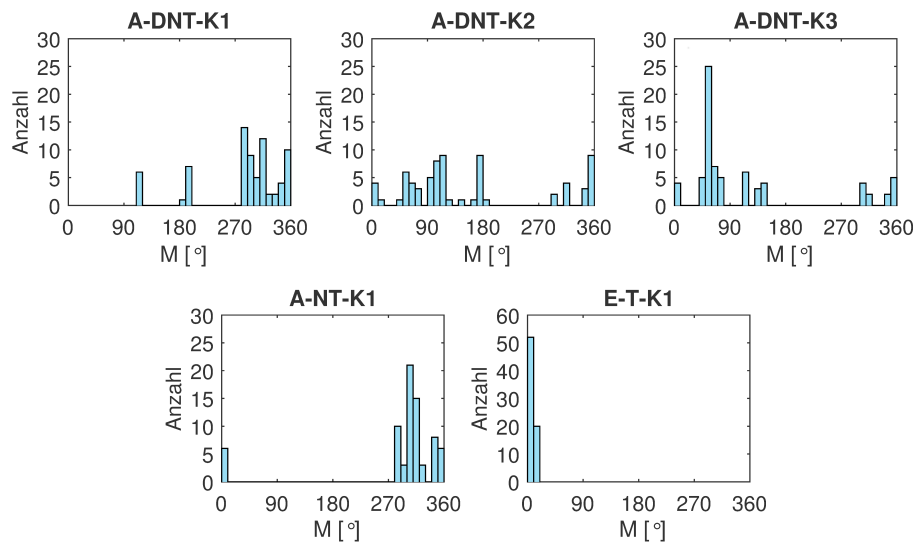


Abbildung 6.10: Beobachtungsplan des Szenario A-DNT-K3. Die obere Zahl gibt die Anzahl der enthaltenen Beobachtungen, die untere die Kennnummer des Passes an.

### 6.3 Räumliche Verteilung der Messungen

Die räumliche Verteilung der Messungen vergleicht man in der Abb. 6.11 durch eine Häufigkeitsverteilung der mittleren Anomalien (mit einer  $10^\circ$  Einteilung). Der Bahnbogen zwischen dem Apogäum und dem aufsteigendem Knoten ist aufgrund der Bahngeometrie von den Stationen aus nicht sichtbar.

Im Szenario A-DNT-K1 (Pos. 1) wird primär die Richtung zwischen dem aufsteigendem Knoten und dem Perigäum beobachtet. Der Bahnbogen zwischen dem absteigendem Knoten und dem Apogäum wird in einem Pass der Station Mount Stromlo (7825) aufgezeichnet, der  $\sim 1/3$  der Beobachtungen enthält. Das Szenario A-DNT-K3 (Pos. 3) ist durch eine gute räumliche Verteilung der Messungen gekennzeichnet, wobei der Bahnbogen zwischen  $45^\circ$  und  $90^\circ$  mittlerer Anomalie am häufigsten beobachtet wird.



**Abbildung 6.11:** Räumliche Verteilung der Messungen im dreitägigen Simulationszeitraum. Darstellung von links nach rechts, oben nach unten (Pos. 1-5): A-DNT-K1, A-DNT-K2, A-DNT-K3, A-NT-K1 und E-T-K1.

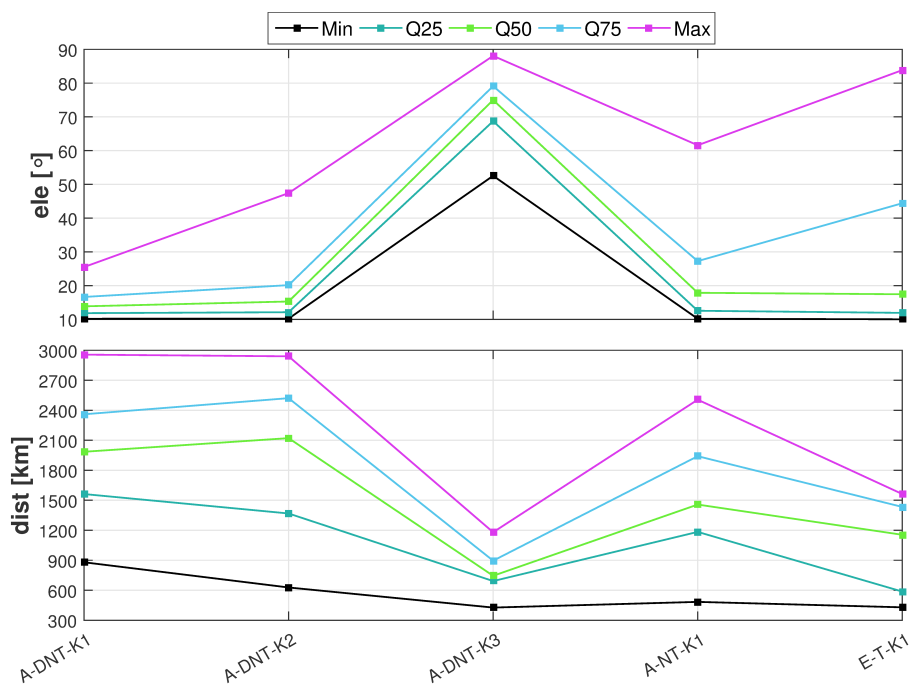
Die Auswahl von Messungen mit niedrigen Hebelwerten (A-DNT-K2) führt durch die hohe Stationsdichte (21 Observatorien) zu einer relativ gleichmäßigen räumlichen Verteilung, wobei es Bahnpositionen (wie das Perigäum und die Richtung zwischen dem absteigendem Knoten und dem Apogäum) gibt, die häufiger beobachtet werden. 53% dieser Beobachtungen finden tagsüber statt. Durch die Einschränkung auf die Zeitspanne Nacht erhöht man im Szenario A-NT-K1 die Anzahl der Messungen in Perigäumsnähe. Bei einer weiteren Reduktion der Stationsgeometrie auf Europa und die Terminator Periode (Pos. 5) im Szenario E-T-K1 wird die Objektbahn ausschließlich nach dem Perigäumsdurchgang aufgezeichnet. Man beachte die abweichende Skalierung der y-Achse.

## 6.4 Elevation und Objektentfernung

Die folgende Abb. 6.12 stellt die statistische Verteilung der Elevationen (ele) und der gemessenen Entfernungen (dist) über den minimalen Wert, die Quantile (0.25, 0.5 und 0.75) und den maximalen Wert dar.

Im globalen Szenario A-DNT-K1 sind Beobachtungen mit hohen Hebelwerten durch niedrige Elevationen (unter  $\sim 30^\circ$ ) und hohe Entfernungen zum Objekt (50% über 2000 km) charakterisiert. Für Messungen mit hohen Redundanzwerten (A-DNT-K3) hingegen sind hohe Elevationswinkel (50% über  $\sim 70^\circ$ ) und kurze Distanzen (50% unter  $\sim 800$  km) typisch. Durch die Auswahl von Beobachtungen mit niedrigen Hebelwerten (A-DNT-K2) erhält man eine Kombination aus niedrigen und hohen Elevationen, die 1 : 1 den Bereichen unter  $\sim 15^\circ$  und bis  $\sim 50^\circ$  zuzuordnen sind.

Durch eine Einschränkung des Beobachtungszeitraums in A-NT-K1 drückt man die Entfernungen zum Objekt im Vergleich zu A-DNT-K1 etwas nach unten. Der Maximalwert (violette Linie) verringert sich von  $\sim 2800$  m auf  $\sim 2500$  m. Bedingt durch die Limitierung der Bahnabdeckung auf das Perigäum, reduziert die europäische Stationsgeometrie E-T-K1 die gemessenen Distanzen weiter.

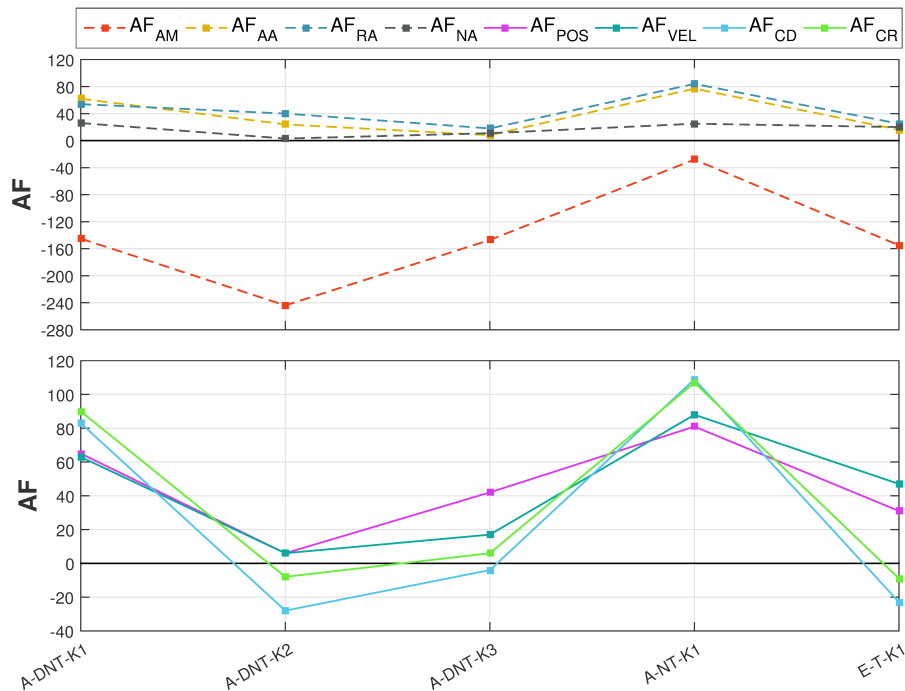


**Abbildung 6.12:** Statistische Verteilung der Objektentfernungen (dist) und Elevationen (ele): Minimum (Schwarz), 25% Quartil Q25 (Türkis), Median Q50 (Grün), 75% Quartil Q75 (Blau) und Maximum (Violett).

# Kapitel 7

## Analyse der Parameterschätzung & Bahnvorhersage

In der Abb. 7.1 sind die Ergebnisse der Parameterschätzung und Bahnvorhersage zusammengefasst, die man mit den Szenarien (A-DNT-K1 bis K3, A-NT-K1 und E-T-K1) erzielt.



**Abbildung 7.1:** Empirische Fehler der geschätzten Parameter (das sind die absolute Position und Geschwindigkeit, der  $C_D$  und  $C_R$  Koeffizient) und Prädiktionsfehler in den (along-track, radial und normal) Bahnkomponenten nach 14 Tagen. Die Zahlenwerte sind als Änderungsfaktoren (AF) zur Referenzlösung aufzufassen.

Der untere Teil zeigt die empirischen Fehler der geschätzten Parameter im Verhältnis (AF) zu der Referenzlösung in Kap. 5.6, die aus der Gesamtgeometrie (mit 10808 Beobachtungen) berechnet wurden.  $AF_{POS}$  und  $AF_{VEL}$  bezeichnen die absoluten Fehleränderungen in Position und Geschwindigkeit,  $AF_{CD}$  und  $AF_{CR}$  die Änderungen in den dynamischen Koeffizienten.

Der obere Teil der Grafik vergleicht die empirischen Prädiktionsfehler, die nach 14 Tagen in den Bahnkomponenten auftreten. Diese sind als Verhältnis zur Referenzlösung zu interpretieren. Dazu bildet man den Quotienten  $AF$  aus den Bahnresiduen  $\Delta \mathbf{x}_{RSN}$  bzw.  $\Delta \mathbf{x}_{KAW}$  (vgl. Kap. 7.1) der - in den Simulationsszenarien - geschätzten Bahn und der Referenzbahn. In along-track Richtung wird zwischen der mittleren Fehleränderung  $AF_{AM}$  und der Änderung der maximalen Amplitude des periodischen Anteils  $AF_{AA}$  unterschieden. In der radialen und normal Richtung sind ausschließlich die Änderungen  $AF_{RA}$  und  $AF_{NA}$  der Amplituden angegeben.

### Parameterschätzung und Bahnprädiktion nach 14 Tagen

Die ungenaueste Parameterschätzung erfolgt mit den Szenarien A-DNT-K1 und A-NT-K1 (7.1), die Messungen mit hohen Hebelwerten enthalten. Durch die Zunahme der Beobachtungen in Perigäumsnähe im Szenario A-NT-K1 erhöhen sich im Vergleich zu A-DNT-K1 die Fehler in allen Parametern.

Bei einer Einschränkung auf die europäische Stationsgeometrie und die Terminator Periode im Szenario E-T-K1 erzielt man im Vergleich zu den globalen Szenarien (A-DNT-K1, A-NT-K1) eine präzisere Schätzung aller Parameter.

Der Zustandsvektor ist mit dem Szenario A-DNT-K2 (niedrige Hebelwerte) am genauesten bestimmbar. Die dynamischen Koeffizienten erhalten im Szenario A-DNT-K3 (niedrige Hebelwerte) die geringsten Zuschläge, wobei der  $C_D$  Koeffizient etwas genauer geschätzt wird.

Ein numerischer Vergleich der Ergebnisse der Parameterschätzung und 14-Tage Bahnvorhersage ist in der Tab. 7.1 gegeben.

**Tabelle 7.1:** Ergebnisse der Parameterschätzung und Bahnvorhersage nach 14 Tagen, die man mit den Simulationsszenarien erzielt.

Szenario	Parameterschätzung				Bahnvorhersage (14 Tage)			
	$AF_{POS}$	$AF_{VEL}$	$AF_{CD}$	$AF_{CR}$	$AF_{AM}$	$AF_{AA}$	$AF_{RA}$	$AF_{NA}$
A-DNT-K1	65	63	83	90	-145	62	54	26
A-DNT-K2	6	6	-28	-8	-244	24	40	3
A-DNT-K3	42	17	-4	6	-147	8	18	11
A-NT-K1	81	88	109	107	-28	77	84	25
E-T-K1	31	47	-23	-9	-155	16	25	20

Die präziseste Bahnvorhersage erzielt man mit A-NT-K1, wobei hier in allen Bahnkomponenten die höchsten periodischen Bahnfehler auftreten. Die along-track Richtung ist mit den globalen Szenarien A-DNT-K1 (hohe Hebelwerte), A-DNT-K3 (niedrige Hebelwerte) und der europäischen Stationsgeometrie E-T-K1 annähernd gleich präzise bestimmbar.

Durch die Einschränkung auf eine europäische Stationsgeometrie und die Terminator Periode erzielt man im Vergleich zu Szenario A-DNT-K1 allerdings geringere Bahnfehler in radialer und normal Richtung.

Die präzise Bahnvorhersage aus einem ungenauen Parametersatz im Szenario A-NT-K1 kann unter Umständen dadurch erklärt werden, dass das Beobachtungsrauschen nicht korrekt aus den Daten entfernt wird und ein Teil des zufälligen Messfehlers von den dynamischen Koeffizienten (oder auch dem Zustandsvektor) aufgenommen wird. Die Bahn könnte sich dadurch den fehlerhaften Messungen anpassen und künstlich modifiziert werden. Mit unterschiedlichen Parametersätzen (die durch jeweils andere Bahnabdeckungen zustande kommen) erzielt man somit andere Prädiktionsgenauigkeiten.

### Korrelationen zwischen den geschätzten Parametern

Zur Analyse von Korrelationen zwischen den Komponenten des Zustandsvektors und den dynamischen Koeffizienten wurden die Korrelationskoeffizienten  $CC_{ij}$  nach Gl. 7.1 aus der Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter abgeleitet [Niemeier, 2008].

$$CC_{ij} = \frac{\sigma_{x_{ij}}}{\sigma_{x_i} \cdot \sigma_{x_j}} \quad (7.1)$$

In der Tab. 7.2 sind die Korrelationskoeffizienten  $CC_{CD,CR}$  der Simulationsszenarien dargestellt. Zwischen den Koeffizienten  $C_D$  und  $C_R$  treten in allen Szenarien (mit Ausnahme von A-DNT-K2 und A-DNT-K3) hohe Korrelationen über  $\sim 0.95$  auf. In A-DNT-K2 und A-DNT-K3 sind diese mit Werten von  $\sim 0.74$  sowie  $\sim 0.47$  schwach korreliert.

**Tabelle 7.2:** Korrelationen zwischen den dynamischen Koeffizienten  $C_D$  und  $C_R$ .

	$CC_{CD,CR}$
A-DNT-K1	1.00
A-DNT-K2	0.74
A-DNT-K3	0.47
A-NT-K1	0.99
E-T-K1	0.95

Die Abb. 7.2 zeigt die Korrelationen zwischen den Komponenten des initialen Zustandsvektors und den dynamischen Koeffizienten. Korrelationskoeffizienten mit Absolutwerten über 0.7 sind farblich hervorgehoben. In den Szenarien A-DNT-K1, A-DNT-K3, und A-NT-K1 treten hohe positive bzw. negative Korrelationen zwischen den geschätzten Parametern auf. Die Szenarien A-DNT-K2 (Pos. 2) und E-T-K1 (Pos. 5) sind durch schwache Korrelationskoeffizienten charakterisiert.

	Px	Py	Pz	Vx	Vy	Vz	C <sub>D</sub>	C <sub>R</sub>
Px	1							
Py	-0.67	1						
Pz	-0.87	0.82	1					
Vx	0.83	-0.90	-0.93	1				
Vy	-0.82	0.91	0.87	-0.84	1			
Vz	-0.84	0.93	0.87	-0.91	0.97	1		
C <sub>D</sub>	0.83	-0.93	-0.93	0.92	-0.97	-0.98	1	
C <sub>R</sub>	0.81	-0.92	-0.90	0.89	-0.89	-0.98	1	1

	Px	Py	Pz	Vx	Vy	Vz	C <sub>D</sub>	C <sub>R</sub>
Px	1							
Py	-0.06	1						
Pz	0.71	-0.54	1					
Vx	0.44	-0.09	0.25	1				
Vy	-0.19	0.60	-0.34	0.45	1			
Vz	-0.76	0.51	-0.98	-0.35	0.35	1		
C <sub>D</sub>	-0.66	0.04	-0.65	-0.24	-0.12	0.57	1	
C <sub>R</sub>	-0.33	-0.26	-0.11	-0.11	-0.38	-0.01	0.74	1

	Px	Py	Pz	Vx	Vy	Vz	C <sub>D</sub>	C <sub>R</sub>
Px	1							
Py	-0.78	1						
Pz	0.91	-0.90	1					
Vx	0.80	-0.87	0.79	1				
Vy	-0.91	0.89	-0.88	-0.78	1			
Vz	-0.94	0.91	-0.99	-0.86	0.92	1		
C <sub>D</sub>	-0.36	0.14	-0.45	-0.03	0.13	0.34	1	
C <sub>R</sub>	0.54	-0.67	0.44	0.75	-0.71	-0.56	0.47	1

	Px	Py	Pz	Vx	Vy	Vz	C <sub>D</sub>	C <sub>R</sub>
Px	1							
Py	-0.58	1						
Pz	-0.81	0.78	1					
Vx	0.78	-0.93	-0.93	1				
Vy	-0.79	0.94	0.90	-0.96	1			
Vz	-0.78	0.94	0.85	-0.97	0.97	1		
C <sub>D</sub>	0.73	-0.95	-0.89	0.96	-0.97	-0.94	1	
C <sub>R</sub>	0.74	-0.95	-0.89	0.96	-0.98	-0.96	0.99	1

	Px	Py	Pz	Vx	Vy	Vz	C <sub>D</sub>	C <sub>R</sub>
Px	1							
Py	-0.82	1						
Pz	0.77	-0.57	1					
Vx	0.37	-0.63	0.41	1				
Vy	-0.23	0.18	-0.39	-0.12	1			
Vz	-0.36	0.37	-0.65	-0.59	0.83	1		
C <sub>D</sub>	0.08	-0.46	-0.14	0.52	-0.43	-0.42	1	
C <sub>R</sub>	0.35	-0.69	0.08	0.62	-0.41	-0.46	0.95	1

**Abbildung 7.2:** Korrelationen zwischen den geschätzten Parametern. Die Darstellung enthält von links nach rechts und oben nach unten (Pos. 1-5) die folgenden Szenarien: A-DNT-K1, A-DNT-K2, A-DNT-K3, A-NT-K1, und E-T-K1.

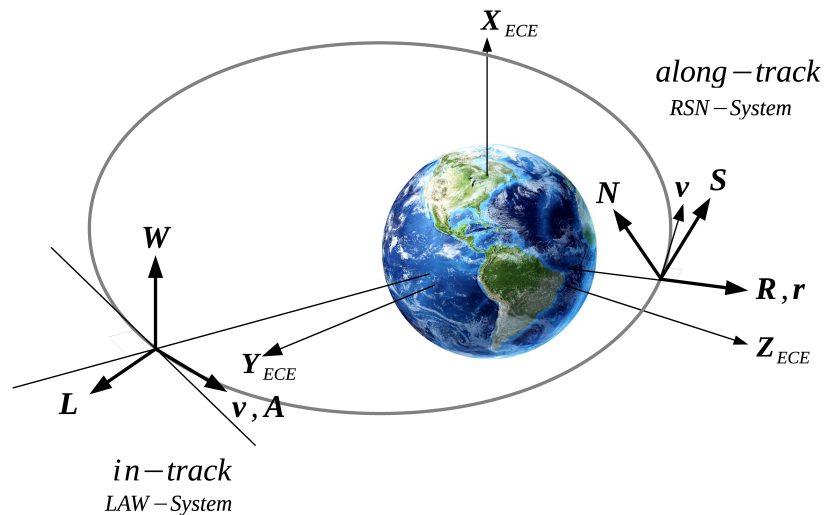
## 7.1 Bahnvorhersage

Durch numerische Integration der geschätzten Zustandsvektoren und des Bewegungsmodells - unter Berücksichtigung der geschätzten dynamischen Koeffizienten - wurde eine Bahnvorhersage über einen Zeitraum von 14 Tagen berechnet. Die Bahnprädiktionen der Simulationsszenarien werden anhand der Referenzbahn miteinander verglichen. Dafür wurde die Differenz  $\Delta \mathbf{x}(t)$  der geschätzten  $\mathbf{X}_{est}(t)$  und der Referenzbahn  $\mathbf{X}_{ref}(t)$  im erdfesten System in Gl. 7.2 berechnet und in ein objektbezogenes Koordinatensystem transformiert.

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_{est}(t) - \mathbf{X}_{ref}(t) \quad (7.2)$$

Durch die Wahl eines solchen Koordinatensystems ist es möglich Abweichungen entlang des Geschwindigkeits- und Radiusvektors zu separieren. Der Ursprung eines objektbezogenen Systems liegt im Massenzentrum des Satelliten, die Achsen bewegen sich mit dem Objekt mit (Abb. 7.3) [Vallado, 2003].

Zur Darstellung der Bahnresiduen in along-track (A) Richtung kommt das „in-track“ (KAW) System zum Einsatz, dessen zweite Achse entlang des Geschwindigkeitsvektors ausgerichtet ist. Zur Beschreibung des radialen Fehlers wird das „along-track“ (RSN) System verwendet, da dessen zweite Achse mit dem Radiusvektor zusammenfällt. Die Bahnresiduen in normal Richtung beziehen sich ebenso auf das RSN-System.



**Abbildung 7.3:** Die objektbezogenen Systeme „along-track“ (RSN) und „in-track“ (KAW), basierend auf [Vallado, 2003].

Die Bahnresiduen  $\Delta \mathbf{x}(t)$  im erdfesten System transformiert man mit der Matrix  $\mathbf{LAW}$  in Gl. 7.3 in das „in-track“ System. Die Transformationsmatrix wird aus dem Radiusvektor  $\mathbf{r}$  und Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  des erdfesten Zustandsvektors  $\mathbf{X}_{ref}(t)$  auf der Referenzbahn abgeleitet. Die zweite Achse  $\mathbf{A}$  ist entlang des Geschwindigkeitsvektors ausgerichtet



[Vallado, 2003].

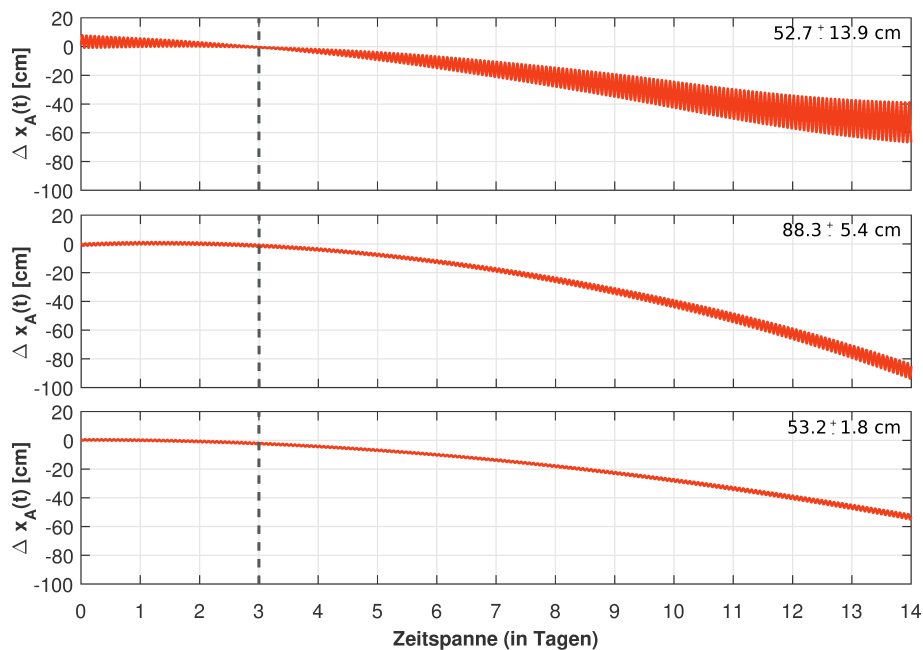
$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad \mathbf{W} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\|} \quad \mathbf{L} = \mathbf{A} \times \mathbf{W} \quad \Delta \mathbf{x}_{KAW}(t) = [\mathbf{LAW}]^{-1} \Delta \mathbf{x}(t) \quad (7.3)$$

Die Rotationsmatrix  $\mathbf{RSN}$  vom erdfesten ins objektbezogene „along-track“ System erhält man mit Gl. 7.4 in gleicher Weise aus dem Radiusvektor  $\mathbf{r}$  und Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  des erdfesten Zustandsvektors  $\mathbf{X}_{ref}(t)$  auf der Referenzbahn. In diesem Fall ist die zweite Achse in Richtung des Radiusvektors ausgerichtet [Vallado, 2003].

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\|} \quad \mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{R} \quad \Delta \mathbf{x}_{RSN}(t) = [\mathbf{RSN}]^{-1} \Delta \mathbf{x}(t) \quad (7.4)$$

### Bahnresiduen in along-track Richtung

In den folgenden beiden Abb. 7.4 und 7.5 sind die Bahnabweichungen  $\Delta \mathbf{x}_A(t)$  zwischen der geschätzten und der Referenzbahn in along-track Richtung (A) im KAW-System dargestellt. Die Abb. 7.4 enthält die Szenarien A-DNT-K1, A-DNT-K2 und A-DNT-K3 (Pos. 1-3). Die numerischen Werte in der rechten oberen Ecke geben die mittleren Fehler und die maximalen Amplituden der periodischen Fehleranteile nach 14 Tagen an.

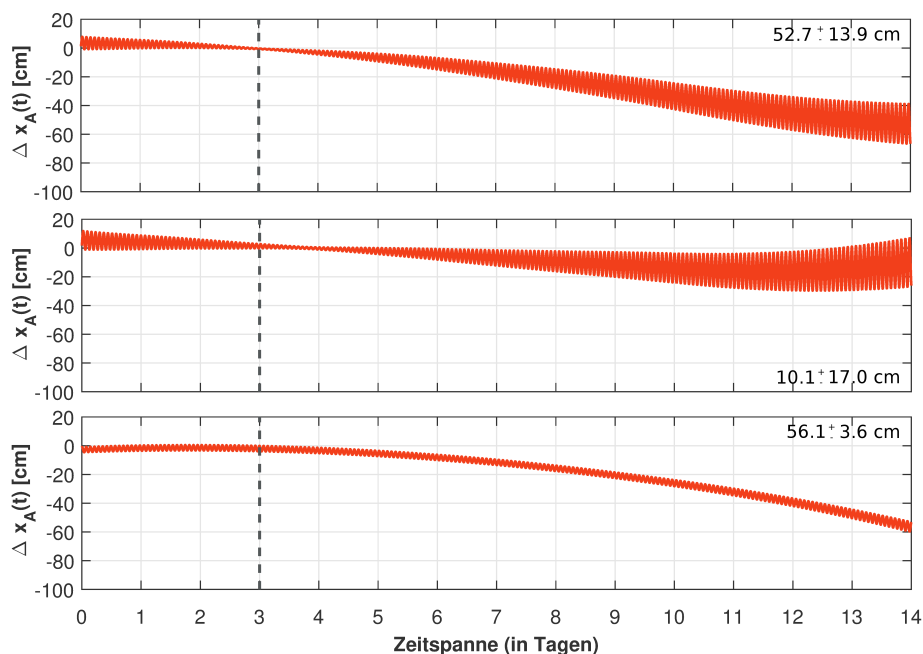


**Abbildung 7.4:** Bahnabweichungen der globalen Szenarien in along-track Richtung. Pos. 1-3: A-DNT-K1, A-DNT-K2 und A-DNT-K3.

Der geringste mittlere Fehler tritt im Szenario A-DNT-K1 (Pos. 1) auf, in der alle Parameter am ungenauesten geschätzt wurden. Die Bahnresiduen zeigen ungefähr bis zum 13. Tag einen negativen linearen Trend und stabilisieren sich danach auf einen mittleren Fehler von  $\sim 52.7$  cm. Es ist eine starke Erhöhung der Amplitude der periodischen Bahnfehler erkennbar, was auf die ungenaue Parameterschätzung zurückzuführen ist. Das heißt die geschätzte Bahn verliert gegenüber der Referenzbahn zuerst an Höhe, balanciert sich bis zum Ende der Vorhersageperiode auf einer niedrigeren Flughöhe ein, wobei die Instabilitäten während eines Orbitumlafs zunehmen. Nach 14 Tagen erreichen die periodischen Bahnfehler mit  $\sim 13.9$  cm ungefähr den dreifachen bis sechsfachen Wert der anderen beiden Szenarien.

Die ungenaue Schätzung der dynamischen Koeffizienten (insbesondere des  $C_D$  Koeffizienten) des Szenario A-DNT-K2 (Pos. 2) wirkt sich in einem stark negativen linearen Trend aus - in along-track Richtung erzielt man nach 14 Tagen eine mittlere Genauigkeit von  $\sim 88$  cm. In A-DNT-K3 (Pos. 3) tritt in along-track Richtung ebenso ein negativer linearer Trend auf, der allerdings geringer ausfällt als im Szenario A-DNT-K2, was mit der genaueren Schätzung der dynamischen Parameter in Verbindung gebracht werden kann. Der mittlere Fehler liegt mit  $\sim 53$  cm im Bereich des Szenario A-DNT-K1, die Amplituden sind kleiner.

Die Abb. 7.5 stellt die Ergebnisse der Szenarien mit hohen Hebelwerten gegenüber. Die Grafik enthält die globalen Szenarien A-DNT-K1 und A-NT-K1 sowie das europäische Szenario E-T-K1 (Pos. 1-3).



**Abbildung 7.5:** Bahnabweichungen in along-track Richtung, die sich bei einer Einschränkung des Beobachtungszeitraumes und der Stationsgeometrie ergeben. Pos. 1-3: A-DNT-K1, A-NT-K1 und E-T-K1.

Der Parametersatz des Szenario A-NT-K1 (Pos. 2) produziert nach 14 Tagen den geringsten mittleren Fehler von  $\sim 10.1$  cm. Die Bahnresiduen verlaufen im Mittel bis zum  $\sim 12$ . Tag mit einem leichten negativen Trend, der ab dort in einen positiven übergeht. Die Amplituden der periodischen Fehler nehmen von allen Szenarien den höchsten Wert von  $\sim 17$  cm an.

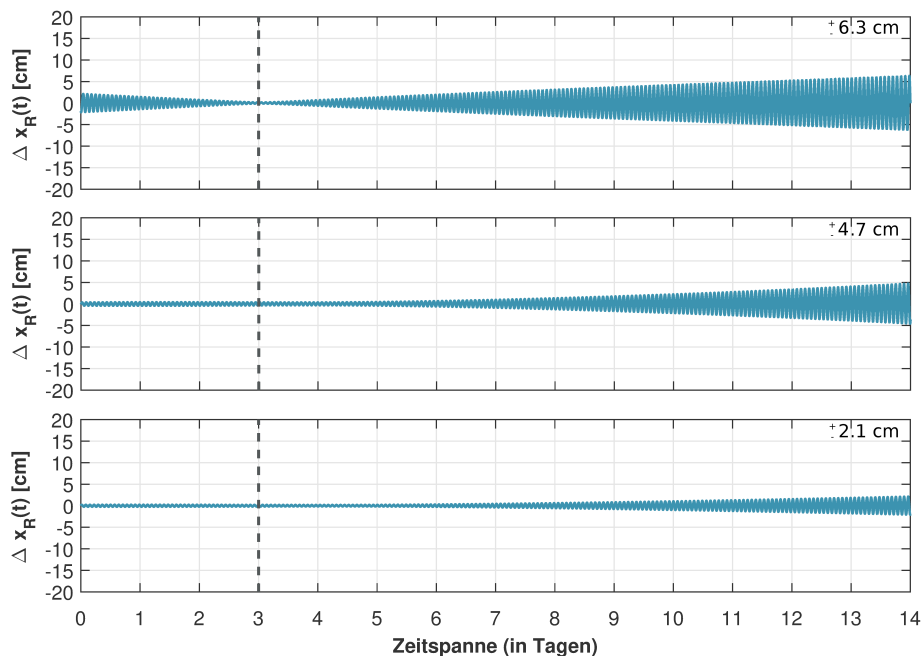
Der Fehlerverlauf der Bahnresiduen des europäischen Szenario E-T-K1 (Pos. 3) ist vergleichbar mit A-DNT-K3, wobei dort geringere Amplituden auftreten. Diesbezüglich wäre zu untersuchen, ob ein Zusammenhang mit den Schätzfehlern in den dynamischen Koeffizienten besteht.

In einer Studie von [Aida et al., 2013] werden Fehler in along-track Richtung auf eine ungenaue Schätzung des ballistischen Koeffizienten ( $BC = C_D \cdot A/m$ ) und der großen Halbachse  $a$ , aber auch der Exzentrizität  $e$  zurückgeführt.

### Bahnresiduen in der radialen Richtung

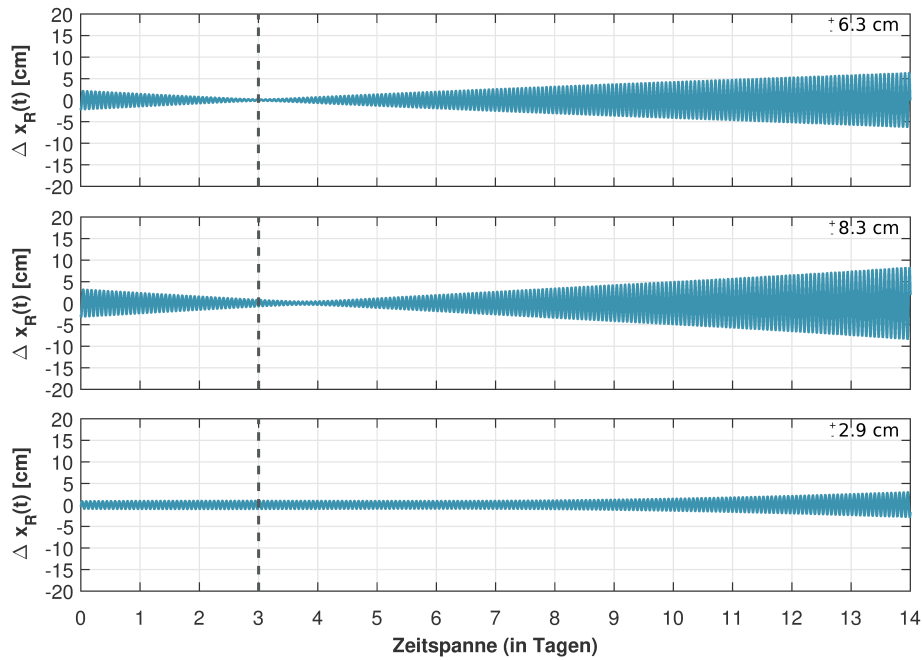
Die nachfolgenden Abbildungen 7.6 und 7.7 vergleichen die radialen (R) Abweichungen  $\Delta x_R(t)$  im RSN-System. Der Mittelwert der Bahnresiduen liegt in allen Szenarien im Millimeterbereich. Die Grafik 7.6 enthält die globalen Szenarien A-DNT-K1, A-DNT-K2 und A-DNT-K3 (Pos. 1-3).

Die Fehlerrelationen zwischen den Szenarien sind mit der along-track Richtung vergleichbar. Die radiale Richtung ist mit dem Parametersatz A-DNT-K3 (genaueste Schätzung des  $C_D$  Koeffizienten) am präzisesten bestimmt (Pos. 3). Die Bahnresiduen verlaufen bis zum 7. Tag mit einer konstanten Amplitude und erreichen nach 14 Tagen einen Wert von  $\sim 2.1$  cm.



**Abbildung 7.6:** Bahnabweichungen der globalen Szenarien in radialer Richtung. Pos. 1-3: A-DNT-K1, A-DNT-K2, A-DNT-K3.

Die nachfolgende Abb. 7.7 stellt die Bahnabweichungen der globalen Szenarien A-DNT-K1 sowie A-NT-K1 und der europäischen Beobachtungsgeometrie E-T-K1 gegenüber. Wie anhand der beiden oberen Grafiken erkennbar ist, treten in A-DNT-K1 und A-NT-K1 (ungenaueste Parameterschätzung) hohe Bahnresiduen auf. Man beachte, dass sich die Fehlersignatur der globalen Szenarien vom europäischen (Pos. 3) unterscheidet: In A-DNT-K1 und A-NT-K1 nehmen die Amplituden bis zum dritten bzw. vierten Tag ab und steigen dann wieder an, während im Szenario E-T-K1 ein konstanter Verlauf über acht Tage erkennbar ist.

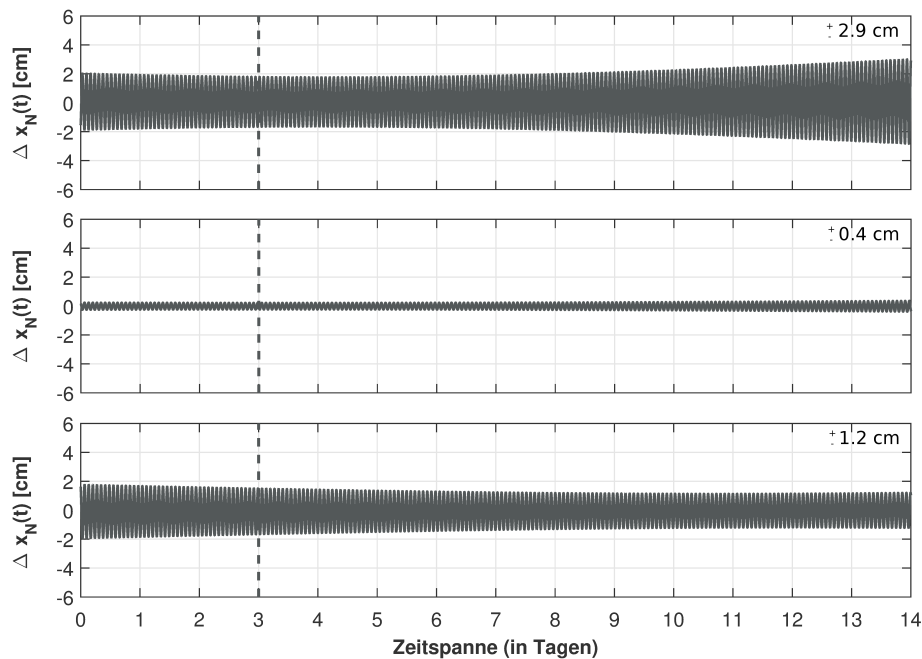


**Abbildung 7.7:** Bahnabweichungen in radialer Richtung bei einer Einschränkung des Beobachtungszeitraumes und der Stationsgeometrie. Pos. 1-3: A-DNT-K1, A-NT-K1 und E-T-K1.

### Bahnresiduen in der normal Richtung

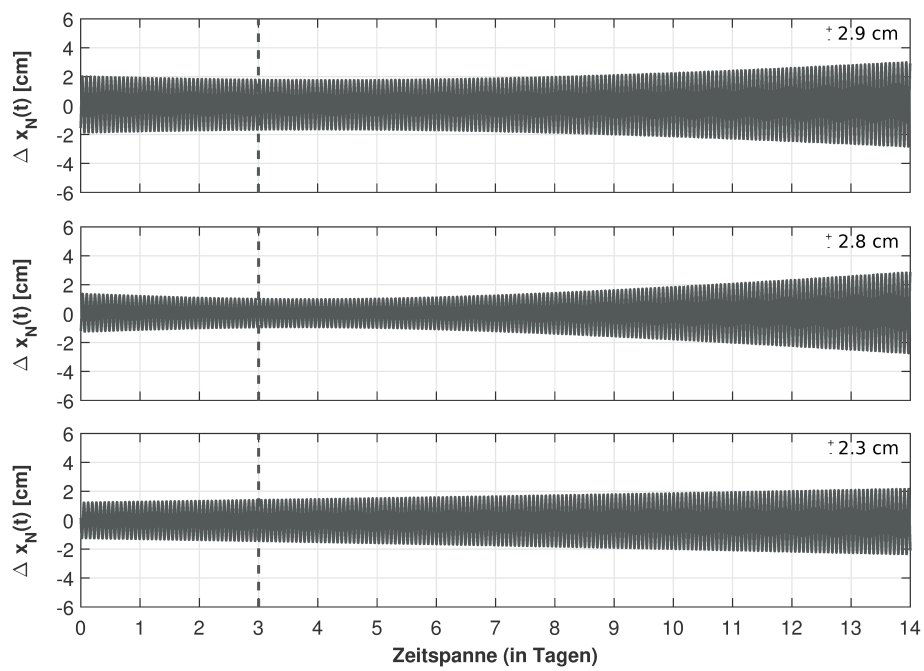
Die folgenden beiden Abbildungen 7.8 und 7.9 geben eine Übersicht der Bahnresiduen  $\Delta \mathbf{x}_N(t)$  in normal Richtung (N) im RSN-System. Der Mittelwert der Bahnresiduen liegt in allen Szenarien im Millimeterbereich. Die Abb. 7.8 zeigt die Ergebnisse der globalen Szenarien A-DNT-K1, A-DNT-K2 und A-DNT-K3 (Pos. 1-3). Anhand dieser Abweichungen kann man eine Aussage treffen, wie weit sich die geschätzte Bahn in Normalrichtung von der Referenzbahn entfernt.

Die geringsten Störungen in normal Richtung treten im Szenario A-DNT-K2 (Pos. 2) auf. Die Abweichungen verlaufen über die gesamte Periode annähernd konstant mit einer Amplitude unter  $\sim 0.4$  cm. Die Szenarien A-DNT-K1 und A-DNT-K3 weisen am Ende der 14 Tage höhere Amplituden im Bereich von 2.9 und 1.2 cm auf.



**Abbildung 7.8:** Bahnabweichungen der globalen Szenarien in normal Richtung. Pos. 1-3: A-DNT-K1, A-DNT-K2, A-DNT-K3.

In der Abb. 7.9 sind die Bahnresiduen gegenübergestellt, die sich aus den Parametersätzen der globalen Szenarien A-DNT-K1 und A-NT-K1 sowie dem europäischen Szenario E-T-K1 ergeben. Die höchsten Abweichungen in normal Richtung treten (wie auch in der radialen Richtung) in A-DNT-K1 (Pos. 1) und A-NT-K1 (Pos. 2) mit der ungenauesten Parameterschätzung auf. Der geringere mittlere Fehler in along-track Richtung wird durch höhere Ungenauigkeiten in den radial und normal Bahnkomponenten kompensiert. Die beiden Szenarien zeigen in allen Bahnkomponenten ein ähnliches Fehlermuster. Die periodischen Fehler nehmen bis zum Ende des dritten bzw. fünften Tages ab und bis zum Ende des 14. Tages wieder zu.



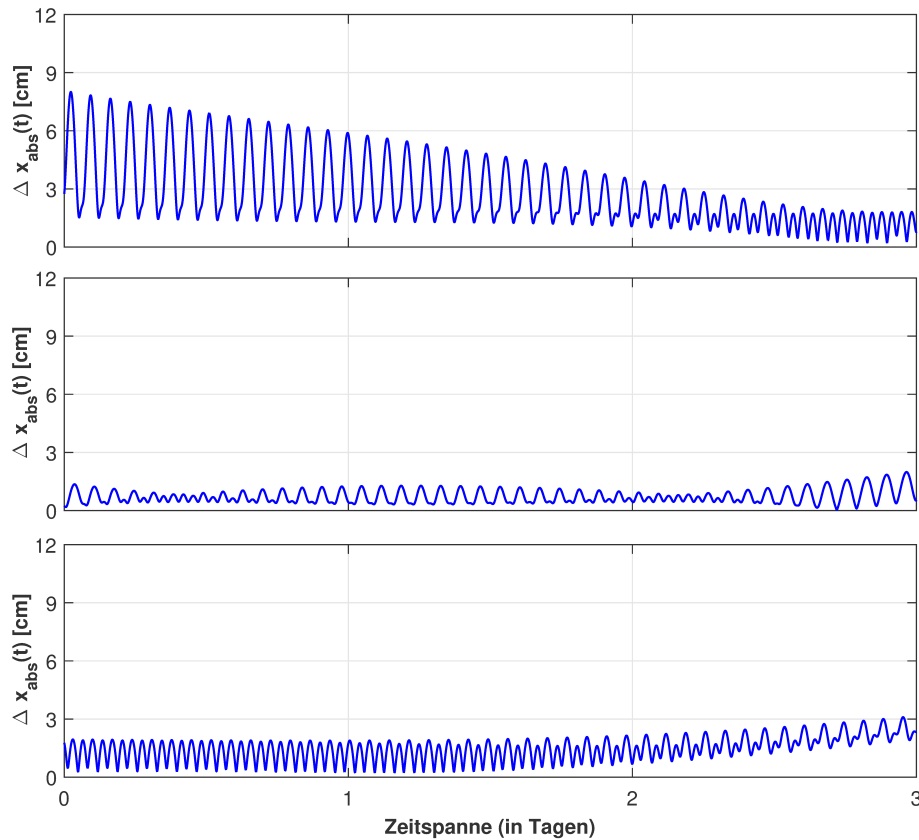
**Abbildung 7.9:** Bahnabweichungen in normal Richtung bei einer Einschränkung des Beobachtungszeitraumes und der Stationsgeometrie. Pos. 1-3: A-DNT-K1, A-NT-K1 und E-T-K1.

## 7.2 Bahnbestimmung

Die Abweichungen, die innerhalb der Bahnbestimmung (Tag 1 bis 3) auftreten, sind in den folgenden beiden Grafiken 7.10 und 7.11 abgebildet. Die Darstellung erfolgt anhand des absoluten Positionsfehlers  $\Delta \mathbf{x}_{abs}(t)$  in Gl. 7.5, der aus den Differenzen  $\Delta \mathbf{x}(t)$  der geschätzten und der Referenzbahn abgeleitet wurde.

$$\Delta \mathbf{x}_{abs}(t) = \|\Delta \mathbf{x}(t)\| \quad (7.5)$$

Alle Szenarien zeigen ein anderes Fehlermuster, das im Zusammenhang mit der Verteilung der Beobachtungen steht, die in Kap. 6.2 besprochen wurde.



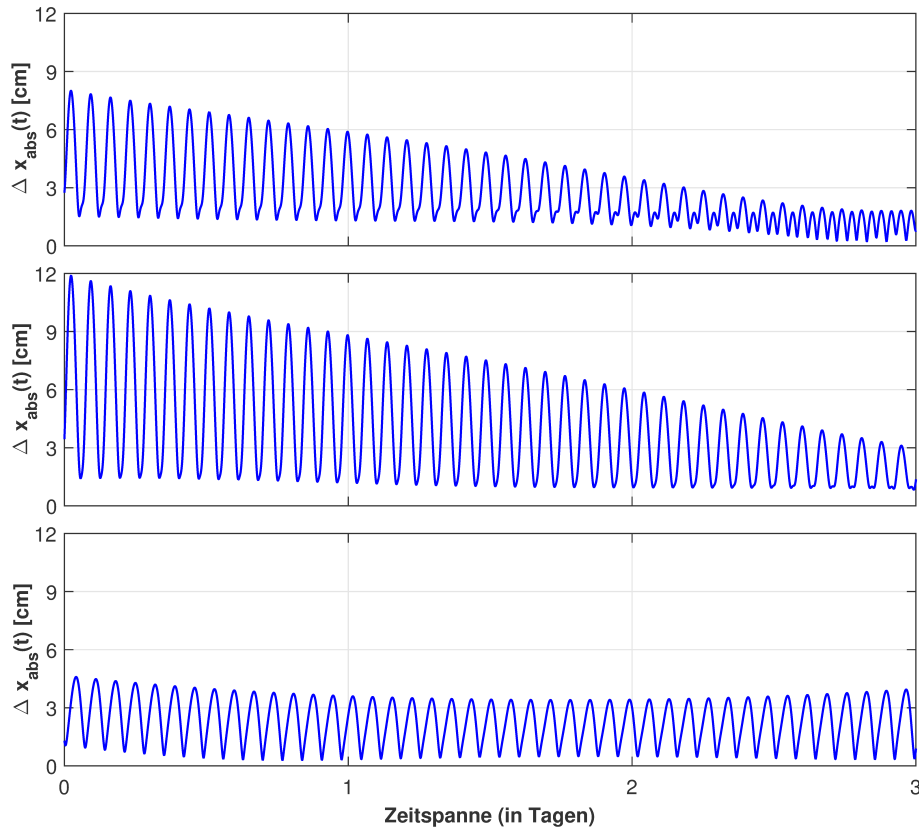
**Abbildung 7.10:** Absoluter Positionsfehler innerhalb der Bahnbestimmungsperiode bei einer Einschränkung des Beobachtungszeitraumes und der Stationsgeometrie. Pos. 1-3: A-DNT-K1, A-DNT-K2, A-DNT-K3.

Aus der Abb. 7.10 geht hervor, dass die höchsten Abweichungen im Szenario A-DNT-K1 (Pos. 1) auftreten, wo die Messungen zu Beginn und am Ende der Beobachtungsperiode sowie in der Mitte des 2. Tages stattfinden. Sowohl der lineare Trend als auch der periodische Fehleranteil sind am stärksten ausgeprägt.

Die anderen beiden Szenarien sind durch eine zeitlich gleichmäßige Beobachtungsverteilung sowie eine hohe Stationsanzahl gekennzeichnet. Die Bahnresiduen verlaufen in beiden Fällen relativ konstant über die gesamte Beobachtungsperiode. In A-DNT-K2 (Pos. 2) ist der periodische Fehleranteil zusätzlich von einer Schwingung einer Periode

von  $\sim 2$  Tagen überlagert. Die periodischen Bahnfehler im Szenario A-DNT-K3 (Pos. 3) zeigen ab dem 3. Tag einen positiven Trend und zusätzlich dazu verändert sich das Fehlermuster.

In der Abb. 7.11 sind die Bahnresiduen der globalen Szenarien (A-DNT-K1, A-NT-K1) sowie des europäischen Szenario (E-T-K1) dargestellt.



**Abbildung 7.11:** Absoluter Positionsfehler innerhalb der Bahnbestimmungsperiode bei einer Einschränkung des Beobachtungszeitraumes und der Stationsgeometrie. Darstellung von oben nach unten: A-DNT-K1, A-NT-K1 und E-T-K1.

Die hier verglichenen Szenarien weisen höhere Bahnresiduen auf als A-DNT-K2 und A-DNT-K3, deren Beobachtungspläne durch eine gute zeitliche Abdeckung und hohe Stationsdichte gekennzeichnet sind. Die Fehlermuster der globalen Szenarien (A-DNT-K1, A-NT-K1) weisen im Gegensatz zu den europäischen (Messungen am Tagesende) einen negativen linearen Trend auf, der sich erst am Ende der Bahnbestimmungsperiode stabilisiert. Die Residuen A-NT-K1 (Pos. 2) nehmen innerhalb der drei Tage kontinuierlich ab, während diese in A-DNT-K1 (Pos. 1) ungefähr in der Mitte des dritten Tages auf ihren minimalen Wert einschwingen.

Das europäische Szenario E-T-K1 (dessen Beobachtungszeitraum auf die Terminator Periode begrenzt ist), zeigt gegenüber den globalen Szenarien (A-DNT-K1, A-NT-K1) einen geringeren und konstant verlaufenden mittleren Bahnfehler sowie niedrigere Amplituden, was vermutlich auf die höhere Stationsbeteiligung zurückzuführen ist.



## Kapitel 8

# Zusammenfassung und Ausblick

Der Fokus dieser Studie war darauf ausgerichtet Laufzeitmessungen zu einem Satelliten zu simulieren, um daraus eine globale Beobachtungsgeometrie abzuleiten und diese anhand verschiedener Auswahlverfahren zu reduzieren. Diese eingeschränkten Beobachtungsgeometrien wurden anhand der Ergebnisse der Parameterschätzung und Präzision der Bahnvorhersage über eine Zeitspanne von 14 Tagen miteinander verglichen.

Die Genauigkeit mit der die Bahn eines Objektes bestimmt und vorausberechnet werden kann, hängt neben der Integrationsmethode vom dynamischen Bewegungsmodell sowie den im Ausgleich geschätzten Parametern und der Präzision mit der die Anfangsposition des Objektes bekannt ist auch von den Eigenschaften der Beobachtungen - der zeitlichen und räumlichen Verteilung und den Entfernungen zum Objekt - ab. Da SLR Stationen innerhalb des ILRS einem vorgegebenen Beobachtungsplan unterliegen, steht ihnen für spezielle Anwendungen wie „Space Debris“ eine geringe Zeitspanne zur Verfügung. Aus diesem Grund ist eine Beobachtungsgeometrie, die bei einer möglichst geringen Anzahl an Messungen dennoch qualitativ hochwertige Ergebnisse liefert, von großem Interesse.

Unter der Annahme, dass jedes Observatorium ausreichende Kapazitäten besitzt um alle sichtbaren Pässe zu diesem Objekt zu verfolgen, wurde eine Beobachtungsgeometrie bestehend aus 10808 Entfernungsmessungen abgeleitet. Im Hinblick auf die beschränkte Beobachtbarkeit von „Space Debris“ Objekten wurde diese auf eine Zahl von 72 reduziert. Zur Einschränkung der Beobachtungszahlen wurde vordergründig der Hebelwert eingesetzt, der den Einfluss einer Messung innerhalb der Gesamtgeometrie beschreibt. In weiterer Folge wurden auch andere Merkmale - wie der Zeitraum in dem das Objekt sichtbar ist, sowie die Stationsgeometrie selbst - in der Einschränkung integriert.

Anhand der präsentierten Simulationsergebnisse konnte gezeigt werden, dass man - bei einer Auswahl von Messungen mit hohen Hebelwerten - sowohl mit einer globalen als auch mit einer europäischen Beobachtungsgeometrie annähernd dieselbe mittlere Bahnpräzision in along-track Richtung erreicht. Mit dem Szenario A-DNT-K1 erzielt man mit einer Stationsanzahl von 6 nach 14 Tagen einen mittleren along-track Prädiktionsfehler von ungefähr 53 cm. Die Einschränkung auf die Beobachtungsperiode Nacht im Szenario

---

A-NT-K1 führt dazu, dass - bedingt durch die Änderung der Stationsgeometrie gegenüber A-DNT-K1 - mehr Perigäumsbeobachtungen ausgewählt werden. Dadurch erhöht sich die Prädiktionsgenauigkeit in along-track Richtung auf  $\sim 10$  cm, wobei die periodischen Bahnfehler leicht zunehmen.

Anhand des Szenario E-T-K1 konnte gezeigt werden, dass die Objektbahn auch bei einer Einschränkung der globalen auf eine europäische Stationsgeometrie und die Terminator Periode annähernd gleich präzise vorausberechnet werden kann. Die Sichtbarkeit des Objektes ist dadurch ausschließlich auf das Perigäum limitiert. Gegenüber dem Szenario A-DNT-K1 erhöht sich der mittlere Prädiktionsfehler in along-track Richtung geringfügig von  $\sim 53$  auf 56 cm. Die periodischen Bahnfehler können dadurch sogar reduziert werden. Der Nachteil dieser Einschränkung liegt darin, dass die Stationsanzahl auf 9 erhöht wird.

Am Vergleich der Szenarien A-DNT-K1 und A-DNT-K3 wurde festgestellt, dass man aus Messungen mit hohen und niedrigen Hebelwerten - unter der Voraussetzung einer globalen Beobachtungsgeometrie - annähernd dieselbe Bahnpräzision in along-track Richtung erreichen kann. Die Auswahl niedriger Hebelwerte im Szenario A-DNT-K3 bringt im Vergleich zu A-DNT-K1 den Vorteil, dass in allen Bahnkomponenten geringere periodische Fehler auftreten. Der Nachteil liegt allerdings darin, dass die Stationsbeteiligung mit einer Zahl von 28 sehr hoch ist.

Im Szenario A-DNT-K2 wurden Datenpunkte vor der Auswahl durch die Einführung einer Abstandsfunktion verworfen. Dadurch ergab sich eine - mit dem Szenario A-DNT-K3 vergleichbare - Beobachtungsgeometrie mit niedrigen Hebelwerten. Der Versuch hat allerdings gezeigt, dass man dadurch keine Verbesserung in der Bahnvorhersage erzielen kann. Zudem tritt der Nachteil einer hohen Stationsbeteiligung von 22 auf. Die Bahnpräzision in along-track Richtung liegt in diesem Szenario ungefähr bei 88 cm.

Abschließend wurde anhand der Szenarien A-DNT-K1 und A-DNT-K3 festgestellt, dass große zeitliche Datenlücken zwischen den Beobachtungsgruppen keinen negativen Einfluss auf die Bahnvorhersage ausüben.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass die präziseste Bahnvorhersage mit Szenario A-NT-K1 erfolgte, das zugleich die ungenaueste Schätzung des Zustandsvektors und der dynamischen Koeffizienten lieferte. Diesbezüglich wäre zu klären, wodurch dieser Effekt verursacht wird.

Der Nachteil aller - in der Studie verwendeten - Auswahlverfahren liegt darin, dass zumeist zeitlich unzusammenhängende Messungen ausgewählt werden. Dies führt vor allem in den Szenarien A-DNT-K2 und A-DNT-K3 zu einer hohen Anzahl an Beobachtungsstationen und Pässen. Das Verbesserungspotential dieser Studie liegt darin, zeitlich zusammenhängende Beobachtungsgruppen auszuwählen, beispielsweise ganze Pässe oder zumindest zeitlich aufeinanderfolgende Datenpunkte innerhalb eines Passes.

# Literaturverzeichnis

- [Agnew, 2007] Agnew, D.C. (2007). Earth Tides. in: Treatise on Geophysics and Geodesy, Herring TA, Ed., pp. 163-195, New York: Elsevier. 170, 172
- [Aida et al., 2013] Aida, S., Kirschner, M. (2013). Accuracy assessment of SGP4 orbit information conversion into osculating elements. in: Proceedings 6th European Conference on Space Debris, Darmstadt. 2, 4
- [Andrenucci et al., 2011] Andrenucci, M., Pergola, P., Ruggiero, A. (2011). Active Removal of Space Debris. Expanding foam application for active debris removal: final report. University of Pisa. 8
- [De Aquino, 2002] De Aquino, F. (2002). Correlation Between Gravitational and Inertial Mass: Theory and Experimental Test. in: ArXiv Physics e-prints. 1
- [Barthelmes, 2013] Barthelmes, F. (2013). Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models: theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM); revised Edition, (Scientific Technical Report, 09/02), Potsdam : Deutsches GeoForschungs-Zentrum GFZ, 32 pages. 18-19 doi: 10.2312/GFZ.b103-0902-26
- [Bartsch et al., 2005] Bartsch, G., Klein, B. (2005). A Flexible Digital Receiver Architecture For Space Debris Measurements, Astronomy and Space Reconnaissance. in: Proc. of the 4th European Conference on Space Debris, ESA/ESOC, Darmstadt, Germany, pp. 627-630.
- [Bartsch, 1994] Bartsch, H.J. (1994). Taschenbuch mathematischer Formeln. 16. Auflage, Leipzig. 263
- [Bennett et al., 2015] Bennett, J.C., Sang, J., Smith, C., Zhang, K. (2015). An analysis of very short-arc orbit determination for low-Earth objects using sparse optical and laser tracking data. in: Advances in Space Research, vol. 55, iss. 2, pp. 617-629. doi:10.1016/j.asr.2014.10.020
- [Bock, 2003] Bock, H. (2003). Efficient Methods for Determining Precise Orbits of Low Earth Orbiters using the Global Positioning System. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Vol. 65, Schweizerische Geodätische Kommission. 78
- [Boehm, 2010] Boehm, S. (2010). Der Einfluss der Gezeiten auf die Erdrotation. in: Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation (2), pp. 116-123. 119
- [Bowman et al., 2008] Bowman, B.R., Tobiska, W.K., Marcos, F., Huang, C. (2008). The Thermospheric Density Model JB2008 using New EUV Solar and Geomagnetic Indices. in:

- 37th COSPAR Scientific Assembly, 37. 1
- [Brandt et al., 1996] Brandt, S., Dahmen, H.D. (1996). *Mechanik, Eine Einführung in Experiment und Theorie*. 3. Auflage. 1, 4-7, 20-21, 26-29, 42, 45-47, 51-55, 58-59, 87-88, 100, 117
- [Bruinsma, 2015] Bruinsma, S. (2015). The dTm-2013 thermosphere model. in: *J. Space Weather Space Clim.*, D17, M11. 1
- [Combrinck, 2013] Combrinck, L. (2013). *General Relativity and Space Geodesy*. in: Xu G. (eds) *Sciences of Geodesy - II*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 53-95. 56, 59, 61, 63 doi:10.1007/978-3-642-28000-9\_2
- [Cook, 2001] Cook, D.G. (2001). *Solar radiation pressure modeling issues for high altitude satellites*. Department of the air force air university, Air force institute of technology, thesis. 1-2, 2-6, 2-4, 2-6, 2-7, 3-5, 3-6, 3-7, 3-8, 3-13, 3-16, 3-38, 3-39, 3-40, 3-41, 3-42, 3-43, 3-44
- [Cordelli et al., 2015] Cordelli, E., Vananti, A., Schildknecht, T. (2015). *Optimization of Optical Follow-up Strategies Based on Covariance Analysis* (Unpublished). in: *Proceedings of 6th European Conference for Aeronautics and Space Sciences*. Krakow, Poland. 1 doi:10.7892/boris.73950
- [Dettmering, 2003] Dettmering, D. (2003). *Die Nutzung des GPS zur dreidimensionalen Ionosphärenmodellierung*. Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik. 58, 84
- [Dwidar et al., 2014] Dwidar, Hany R. (2014). *Prediction of Satellite Motion under the Effects of the Earth's Gravity, Drag Force and Solar Radiation Pressure in terms of the KS-regularized Variables*. in: *International Journal of Advanced Computer Science & Application*, vol. 5, iss. 5, pp. 35-41. 1
- [Flohner et al., 2008] Flohrer, T., Krag, H., Klinkrad H. (2008). *Assessment and Categorization of TLE Orbit Errors for the US SSN Catalogue*. *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference (AMOS)*, September 17-19 Maui, Hawaii, USA, pp. 504-515. 9
- [Green et al., 1970] Green, C.M.L., Lomask, M. (1970). *Vanguard: a history*. Washington : Scientific and Technical Information Division. National Aeronautics and Space Administration.
- [Hofmann-Wellenhof et al., 2005] Hofmann-Wellenhof, B., Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Springer Wien, New York. 5-8, 11-14, 43, 45, 56, 64
- [IADC, 2002] Inter-Agency Space Debris Coordination Committee, IADC Space Debris Mitigation Guidelines, 2002, Inter-Agency Space Debris Coordination Committee, Inter-Agency Space Debris Coordination Committee Space Debris Mitigation Guidelines Update. 5
- [Jagadeeswari et al., 2013] Jagadeeswari, T., Harini, N. (2013). *Identification of outliers by cook's distance in agriculture datasets*. in: *International Journal of engineering and computer science*, vol. 2, iss. 6, pp. 2045-2049.

- [Jentzsch, 2012] Jentzsch, G. (2006). Earth tides and ocean tidal loading. in: Tidal Phenomena (66), pp. 145-171.
- [Kallenrode, 2006] Kallenrode, M.B. (2006). Physik der Atmosphäre. Universität Osnabrück. 1
- [Kaufman, 2007] Kaufman, A., Hansen, R. (2007). Principles of the gravitational method. in: Methods in Geochemistry and Geophysics, vol.41, Elsevier Science, December. 32, 34-35, 55
- [Kessler & Cour-Palais, 1978] Kessler, D.J., Cour-Palais, B.G. (1978). Collision Frequency of Artificial Satellites: The Creation of a Debris Belt. in: Journal of Geophysical Research, vol.83, no.A6, pp. 2637-2646. 2637,
- [Kirchner et al., 2013] Kirchner, G., Koidl F., Friederich, F., Buske, I., Völker, U., Riede, W. (2013). Laser Measurements to Space Debris from Graz SLR Station. in: Advances in Space Research, vol. 51, iss. 1, pp. 21-24, JASR 11082. 1 doi: 10.1016/j.asr.2012.08.009
- [Klinkrad, 2006] Klinkrad, H. (2006). Space Debris: Models and Risk Analysis. Springer, Berlin. 2
- [Klokočník et al., 2014] Klokočník, J., Kostecký, J., Kalvoda, J., Eppelbaum, L. V., Bezdek, A. (2014). Gravity Disturbances, Marussi Tensor, Invariants and Other Functions of the Geopotential Represented by EGM 2008. 89 in: Journal of Earth Science Research, vol. 2, iss. 3, pp.88-101.
- [Krásná, 2013] Krásná, H. (2013). Estimation of solid Earth tidal parameters and FCN with VLBI. in: Geowissenschaftliche Mitteilungen, Band 91, Department für Geodäsie und Geoinformation.
- [Krauss, 2013] Krauss, S. (2013). Response of the Earth's thermosphere during extreme solar events. A contribution of satellite observations to atmospheric evolution studies. PhD. thesis, Graz University of Technology. 7-8, 13-16, 35-36, 39-40, 64-65, 69-70
- [Krauss, 2016] Krauss, S. (2016) Introduction to Satellite Geodesy, TU Graz. Unterlagen zur Lehrveranstaltung.
- [Lohr, 1976] Lohr, L.L. (1976). Hybrid orbitals and the runge-lenz vector. in: International journal of quantum chemistry, vol. 10, pp. 799-809. 800 doi:10.1002/qua.560100511
- [Lyon, 2004] Lyon, R.H. (2004). Geosynchronous Orbit Determination Using Space Surveillance Network Observations and Improved Radiative Force Modeling. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. 133-134
- [Mäkinen et al., 2009] Mäkinen J., Ihde J. (2009). The Permanent Tide In Height Systems. Sideris M.G. (eds) Observing our Changing Earth, International Association of Geodesy Symposia, vol 133, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 81-82. 81 doi:10.1007/978-3-540-85426-5\_10
- [Maier et al., 2014] Krauss, S., Maier, A., Baur, O. (2014). The role of Satellite Laser Ranging in terrestrial gravity field recovery. in: Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation 102, pp. 3-10. 3
- [Marini et al., 1973] Marini, J.W., Murray, C.W. (1973). Correction of Laser

- Range Tracking Data for Atmospheric Refraction at Elevations Above 10 Degrees. GSFC Report X-591-73-351, Greenbelt, MD, November.
- [Orbital Debris QN, 2017] The NASA Orbital Debris Program Office, Orbital Debris Quarterly News, vol. 21, iss. 1, February 2017. 12
- [Mendes et al., 2004] Mendes, V.B., Pavlis, E.C. (2004). High-accuracy zenith delay prediction at optical wavelengths. in: *Geophysical Research Letters* 31. 1 doi:10.1029/2004GL020308
- [Petit et al., 2010] IERS Conventions (2010). Gérard Petit and Brian Luzum (eds.). (IERS Technical Note ; 36) Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie. 15-17, 81, 93-94, 99, 108-109, 155-156, 164
- [Moe & Moe, 2005] Moe, K., Moe, M.M. (2004). Gas-surface interactions and satellite drag coefficients. in: *Planetary and Space Science* 53(8), pp.793-801. 1
- [Picone et al., 2002] Picone, J. M., Hedin, A. E., Drob, D. P., Aikin, A. C. (2002). NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: Statistical comparisons and scientific issues. in: *Journal of Geophysical Research*, 107(A12), 1468. 1 doi:10.1029/2002JA009430.
- [Montenbruck und Gill, 2000] Montenbruck, O., Gill, E. (2000). *Satellite Orbits: Models, Methods, Applications*. Springer Berlin Heidelberg. 16-23, 25-26, 53-54, 56-57, 59-60, 63, 70, 77, 79, 81, 83-87, 107-108, 112, 117-118, 170-171, 178, 181, 185, 203, 209-214, 233-234, 240-241, 258, 262, 266-267
- [Ramachandran, 2015] Ramachandran, M.P. (2015). Approximate State Transition Matrix and Secular Orbit Model. in: *International Journal of Aerospace Engineering*, vol. 2015, Article ID 475742, 6 pages. 4 doi:10.1155/2015/475742
- [National Research Council, 2014] National Research Council (2014) *Laser Radar: Progress and Opportunities in Active Electro-Optical Sensing*. Washington DC: The National Academies Press. 11 doi:10.17226/18733
- [Samadzadegana et al., 2013] Samadzadegana, F., Alidoost, F. (2013). The design and implementation of an optical astronomical satellite tracking system. *ISPRS - International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, XL-1/W3, pp. 25-30. 1
- [Newton, 1729] Newton, I., translated by Bruce, I. (1729). *The mathematical principles of natural philosophy*, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 3rd Ed. 66-67
- [Sang et al., 2013] Sang, J., Bennett, J.C., Smith, C.H. (2013). Estimation of ballistic coefficient of low altitude debris objects from historical two line elements. in: *Advances in Space Research* (52), pp.117-124. 117, 121 doi:10.1016/j.asr.2013.03.010
- [Niemeier, 2008] Niemeier, W. (2008). *Ausgleichsrechnung, Statistische Auswertemethoden*. 6, 10-12, 28, 49, 133, 138, 139, 141, 147, 216-217, 270-272, 274, 279, 292-293

- [Sang et al., 2014] Sang, J., Bennett, J.C., Smith, C. (2014). Experimental results of debris orbit predictions using sparse tracking data from Mt. Stromlo. in: *Acta Astronautica* (102), pp. 258–268. doi:10.1016/j.actaastro.2014.06.012
- [Sang et al., 2014a] Sang, J., Bennett, J.C. (2014). Achievable debris orbit prediction accuracy using laser ranging data from a single station. in: *Advances in Space Research*, vol. 54, p. 119-124. doi:10.1016/j.asr.2014.03.012
- [Scharroo et al., 1998] Scharroo, R., Visser, P. (1998). Precise orbit determination and gravity field improvement for the ERS satellites. in: *Journal of Geophysical Research* 103(C4), pp.8113–8127, doi:10.1029/97JC03179
- [Seeber, 2003] Seeber, G. (2003). *Satellite geodesy*. Berlin: Walter de Gruyter. 13, 63-67, 71-73, 81, 83-84, 98-101, 104, 129, 404-406, 411-414, 418-424
- [Stephenson, 1987] Felber, H.J. (1990). B. Stephenson: Kepler's physical astronomy, *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*, vol. 13, Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg. London. Paris, Tokyo 1987, 21 pages. 21
- [Swatschina, 2012] Swatschina, P. (2012). Dynamic and Reduced-Dynamic Precise Orbit Determination of Satellites in Low Earth Orbits. in: *Geowissenschaftliche Mitteilungen* (89), series editor: P. Swatschina, issued by: Department für Geodäsie und Geoinformation. 32, 44, 47-48, 50
- [Tapley et al., 2004] Tapley, B.D., Schutz, B.E., Born, G.H. (2004). *Statistical Orbit Determination*, Elsevier Academic Press, New York. 2-3, 11, 17-21, 24-25, 28-29, 53-54, 61-64, 69, 72-73, 82, 94, 102, 105, 115-116, 161, 163-164, 169, 172-173, 176, 179, 194-199
- [United Nations, 1999] Technical Report on Space Debris, Text of the Report Adopted by the Scientific and Technical Subcommittee of the United Nations Committee on the Peaceful Uses of Outer Space, United Nations, New York, 1999. 4-8
- [Vallado, 2003] Vallado, D. (2003). Covariance Transformations for Satellite Flight Dynamics Operations. in: *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, Big Sky, Montana, pp. 1–35. 8, 9
- [Villa, 2010] Villa, F. (2010). Feasibility study of an innovative surveillance system for space debris observations in LEO based on optical telescopes. Master thesis. 26, 53
- [Voelker et al., 2013] Völker, U., Friedrich, F., Buske, I., Hampf, D., Riede, W., Giesen, A. (2013). Laser based observation of space debris: Taking benefits from the fundamental wave. in: *6th European Conference on Space Debris*. 1, 2
- [Weeden et al., 2010] Weeden, B., Cefola P., Sankaran J. (2010). Global Space Situational Awareness Sensors, in: *Proc. of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference*, held in Wailea, Maui, Hawaii, September 14-17, p.E13. 1
- [Wendt, 2004] Wendt, A. (2004). *Untersuchungen zu gezeitenbedingten Hö-*

henänderungen des subglazialen Lake Vostok, Antarktika, Fakultät für Forst-, Geo- und Hydrowissenschaften der Technischen Universität Dresden, Dissertation. 22

[Wolf, 2000] Wolf, R. (2000). Satellite orbit and ephemeris determination using inter satellite links. Dissertation. 37

[Xu, 2010] Xu, G. (2010). Sciences of Geodesy-I, Advances and future directions. Springer Berlin Heidelberg. 141, 142, 143