Chapitre IV.

—

Applications. — Problèmes.

Problèmes fondamentaux.

—

374. Problème I. *Une droite étant donnée par son échelle de pente, trouver la cote d'un point quelconque de cette droite.*

La solution de ce problème se base sur les deux lemmes suivants :

Lemme I. *Si une droite de l'espace est divisée en un certain nombre de parties quelconques* AB, BC, *etc.* (**fig. 274.**) *les projections de ces parties sont entre elles comme les différences des cotes de leurs extrémités.*

Ainsi on aura $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{BB' - AA'}{CC' - BB'}$.

Lemme II. *Si la droite de l'espace est divisée en parties égales, sa projection l'est également et les cotes des points de division suivent une progression arithmétique.*

Solution du problème I. (Ep. 275.) Soit à trouver la cote du point D. La cote x de ce point sera donnée par le rapport $\frac{AB}{BD} = \frac{2-1}{x-2}$. (Lemme I.)

Remarque. Pour la solution purement graphique de ce problème, voir le chapitre des rabattements.

375. Problème II. *Une droite étant donnée par son échelle de pente, trouver sur cette échelle le point dont la cote est donnée.*

Solution. (**Ep. 276.**) Soient les points A,B et C de la droite, ayant respectivement pour cotes a, b et c. Le point de cote d sera projeté en X et ce point est à une distance BX du point B, distance donnée par le rapport $\frac{AB}{BX}=\frac{b-a}{d-b}$.

Remarque. La solution purement graphique de ce problème est donnée dans le chapitre des rabattements.

376. Problème III. *Déterminer la cote d'un point situé dans un plan donné.*

Solution. (**Ep. 277.**) Le point A, situé dans le plan, se trouvera sur une horizontale de ce dernier. Cette horizontale passe par A et se projette suivant une parallèle à la trace du plan, donc, suivant une perpendiculaire à son échelle de pente. Tout point de cette horizontale ayant même cote que le point A, ce dernier aura pour cote celle du point B, laquelle se détermine par le problème précédent.

377. Problème IV. *Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite donnée.*

Solution. (**Ep. 278.**) L'échelle de pente de la droite demandée passe par le point donné A^3; elle est parallèle à l'échelle de pente de la droite donnée, graduée dans le même sens et de la même manière, sa cote 3 étant en A.

378. Problème V. *Par un point donné, mener une droite perpendiculaire à un plan donné.*

Solution. (**Ep. 279.**) L'échelle de pente de la droite passe par la projection du point E et sera parallèle à l'échelle de pente du plan. Pour graduer cette échelle, observons que la pente du plan doit être l'inverse de celle de la droite. Or, la pente du plan $\frac{h}{AB}=\frac{h}{i}$, h étant l'unité de hauteur et i l'intervalle. La pente de la droite est égale à $\frac{h}{x}$, x étant la longueur à chercher qui, sur la projection de la droite, mesure la distance entre deux *cotes rondes* qui se suivent, l'intervalle de l'échelle de pente de la droite.

La pente de la droite étant l'inverse de la pente du plan, on a $\frac{h}{x}=\frac{i}{h}$.

On voit que h, qui est moyenne proportionnelle entre i et x, sera la hauteur d'un triangle rectangle dont $i = \mathrm{AB}$ est un des segments de l'hypothénuse, et x l'autre.

Elevons donc en B une perpendiculaire à l'échelle de pente du plan, et prenons $\mathrm{BC} = h$; unissons A et C par la droite AC, et élevons en C une perpendiculaire à AC. Nous aurons le triangle rectangle ACD dans lequel le segment $\mathrm{BD} = x$.

La droite sera actuellement facile à coter, en observant toutefois que la perpendiculaire demandée et l'échelle de pente du plan donné sont cotées en sens contraire (**369**).

379. Problème VI. *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

Solution. (**Ep. 280.**) L'échelle de pente du plan passe par le point donné; elle est parallèle à l'échelle de pente du plan donné P, graduée dans le même sens et de la même manière.

Au lieu de faire passer l'échelle de pente par le point donné A, on peut la mener par un point quelconque d'une horizontale passant par A et perpendiculaire à l'échelle du plan donné, donc parallèle à la trace de ce plan et, par suite, à celle du plan demandé. Cette horizontale est donc une horizontale de ce plan.

380. Problème VII. *Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

Solution. (**Ep. 281.**) L'échelle de pente du plan sera parallèle à l'échelle de pente de la droite; elle sera graduée en sens contraire, et sa pente est l'inverse de celle de la droite (**369**).

L'intervalle de l'échelle de pente du plan sera B C, longueur qui se détermine comme dans le problème précédent (**378**).

381. Problème VIII. *Trouver la véritable longueur d'une portion de droite.*

Solution. (**Fig. 282. — Ep. 283.**) 1° On détermine les cotes des points A et B, extrémités de la droite A B (**374**). La véritable longueur de la droite de l'espace, qui a A B pour projection, sera le côté du trapèze rectangle, dont les deux côtés parallèles sont les hauteurs des points A et B et dont la hauteur est A B.

2° Cette véritable longueur est encore égale à l'hypothénuse du triangle rectangle *abb'*, dont l'un des côtés de l'angle droit est la projection A B, et l'autre la différence des hauteurs des extrémités de cette droite.

Remarque. Voir les rabattements pour la solution purement graphique.

382. **Problème IX**. *Vérifier si une droite est parallèle à un plan.*

Solution. (**Ep**. **284**.) Par un point quelconque A pris sur une horizontale du plan, on mène une droite parallèle à la droite donnée. Si cette parallèle est dans le plan, la droite de l'espace est parallèle à ce dernier. La droite auxiliaire est dans le plan, si la trace de cette droite est sur la trace du plan.

383. **Problème X**. *Vérifier si deux droites se coupent.*

Solution. On déterminera, à l'aide du problème I, la cote du point de rencontre des deux échelles de pente des droites, en considérant ce point comme situé sur chacune des deux droites. Si les cotes obtenues sont les mêmes, les droites se rencontrent.

Remarque. Une solution graphique de ce problème sera donnée dans le chapitre des rabattements.

—

Plans assujettis à satisfaire à diverses conditions.

—

384. **Problème XI**. *Par deux droites qui se coupent, faire passer un plan.*

Solution. **Ep**. **285**. En joignant, par des droites, les cotes de même nom des deux droites données, on détermine des horizontales du plan, droites parallèles à la trace de ce plan, donc parallèles entre elles.

L'échelle de pente du plan sera perpendiculaire à la trace et à toutes les horizontales ainsi déterminées; elle peut être menée par un point quelconque de cette trace, et sera graduée aux points de rencontre avec les horizontales du plan.

385. Problème XII. *Par un point et une droite, mener un plan.*

Solution. En joignant, par une droite, le point donné à un point de la droite, on détermine une droite, facile à graduer, et qui, en rencontrant la première, détermine avec celle-ci un plan. L'échelle de pente de ce plan se construit comme au problème XI.

386. Problème XIII. *Par trois points non en ligne droite, faire passer un plan.*

I. Solution. On joint les points deux à deux et l'on détermine, comme précédemment, deux droites qui se coupent et qui déterminent un plan, dont on construit l'échelle de pente comme au problème XI.

II. Solution. On joint deux points et, par le troisième, on mène une parallèle à la droite ainsi déterminée. Ces deux parallèles déterminent un plan, dont on construit l'échelle de pente comme au problème suivant.

387. Problème XIV. *Par deux droites parallèles, faire passer un plan.*

Solution. (**Ep. 286.**) Les deux droites parallèles déterminent un plan. Les droites qui unissent les cotes de même nom sont des horizontales de ce plan ; elles s'appuient sur les deux droites et sont parallèles à la trace du plan.

L'échelle de pente du plan sera la perpendiculaire à ces horizontales; elle est graduée aux points de rencontre avec ces dernières.

388. Problème XV. *Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données.*

Solution. Par le point, on mène deux droites respectivement parallèles aux deux droites données. Ces droites déterminent le plan (**384**).

389. Problème XVI. *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à une autre droite donnée.*

Solution. Par un point de la première droite, on mène une parallèle à l'autre droite donnée. Le plan ainsi déterminé passe par la première droite et sera parallèle à l'autre. L'échelle de pente de ce plan se construira comme au § 384.

390. Problème XVII. *Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan donné.*

Solution. (**Ep**. **287**.) Par un point A de la droite, on mène une perpendiculaire au plan (**38**). Cette perpendiculaire et la droite donnée déterminent le plan demandé ; l'échelle de pente se construit par le problème du § 344.

—

Intersection de deux plans.

—

391. **Problème XVIII**. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan horizontal.*

Solution. Le plan horizontal ne peut couper le plan donné que suivant une horizontale ayant pour cote la cote du plan sécant. Cette horizontale, parallèle à la trace du plan, se projette suivant une perpendiculaire à l'échelle de pente du plan, et passe par le point de cette échelle, qui a même cote que le plan sécant.

392. **Problème XIX**. *Construire la droite d'intersection de deux plans quelconques.*

Solution. (**Ep**. **289**.) On coupe les deux plans par une série de plans auxiliaires horizontaux.

Chacun de ces plans auxiliaires coupera chacun des plans donnés suivant une horizontale de même cote que celle du plan coupant.

Ces deux horizontales se rencontrent en un point qui appartient à la droite d'intersection des deux plans.

Vérification. Tous les points ainsi déterminés sont en ligne droite.

Cas particulier. *Les échelles de pente des deux plans sont parallèles.*

Solution. (**Ep**. **288**.) Dans ce cas particulier, la solution générale n'est plus applicable.

Or, deux plans ayant des échelles de pente parallèles et différemment cotées, se rencontrent suivant une horizontale. Ces plans ont en effet des traces parallèles sur le plan de projection.

Cette horizontale, perpendiculaire aux échelles de pente, rencontre ces deux échelles en des points qui ont même cote.

Le problème est donc ramené au suivant : *Construire une perpendiculaire aux deux échelles de pente, de manière qu'aux points d'intersection x et x' les cotes soient les mêmes;* ce qui revient à dire, d'après le lemme I (**374**) :

Faire en sorte que, sur les deux échelles de pente, la perpendiculaire demandée détermine deux points x et x' tels, que les rapports des distances de ces points aux points a et b, c et d, qui terminent les intervalles dans lesquels ils sont situés, soient égaux.

Or, joignons, par des droites, les points o et o, 1 et 1, ainsi que tous les points de même cote des deux échelles de pente. Ces droites, divisant chacune des deux parallèles en segments égaux, concourent en un point S, et toute transversale partant de ce point aboutira aux échelles de pente entre deux cotes successives en des points tels, que les segments déterminés sur l'intervalle de la première échelle de pente soient proportionnels aux segments déterminés sur l'intervalle de la seconde (Géométrie plane. — Triangles semblables).

La solution du problème consiste donc à déterminer le point S, et à abaisser de ce point une perpendiculaire sur les deux échelles de pente. Cette perpendiculaire sera la droite d'intersection des deux plans.

393. Problème XX. *Construire l'intersection de deux plans, l'un d'eux étant représenté par deux droites qui se coupent.*

Solution. (**Ep. 290**.) On coupe les deux plans par une série de plans horizontaux de cotes 0, 1, 2, 3, etc. Le plan de cote zéro coupe le premier plan donné suivant une horizontale de cote zéro (**391**). Les deux droites qui déterminent le second plan sont coupées chacune en un point de cote zéro, et la droite qui unit ces points sera l'horizontale de rencontre de ce plan avec le plan coupant. Cette horizontale et celle déterminée dans le premier plan donné, sont de même cote et non parallèles; elles se rencontrent en A, trace de la droite d'intersection demandée.

On détermine, d'une manière analogue, les points B^1, C^2, D^3, etc. dont l'ensemble forme la droite demandée.

394. Problème XXI. *Construire l'intersection de deux plans, dont chacun est représenté par deux droites qui se coupent.*

Solution. (**Ep. 291.**) On coupe par une série de plans horizontaux. Chacun de ces plans coupe chacun des plans donnés suivant une droite; la rencontre de deux de ces droites, fournies par le même plan sécant horizontal, sera un point de l'intersection commune des deux plans. Ces points se déterminent comme dans le problème précédent.

—

Intersection des lignes et des plans.

—

395. Problème XXII. *Construire le point de rencontre d'une droite et d'un plan.*

Solution. Par la droite, on fait passer un plan. On construit l'intersection de ce plan avec le plan donné (**390**). La droite obtenue rencontrera la droite donnée en un point qui sera le point de rencontre de la droite et du plan.

Pour faire passer un plan par la droite donnée D, on peut prendre cette dernière pour échelle de pente du plan auxiliaire (**Ep. 292.**), ou bien faire passer par un point A^2 de D, une droite auxiliaire qui, avec D, déterminent le plan demandé (**Ep. 293**).

396. Problème XXIII. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan représenté par deux droites qui se coupent.*

Solution. Par la droite, on fait passer un plan, dont on construit la ligne d'intersection avec le plan donné. La rencontre de cette figure avec la droite donnée sera le point de rencontre de celle-ci avec le plan.

Suivant que l'on prend la droite donnée pour échelle de pente du plan auxiliaire, ou que l'on détermine ce dernier en menant, par un point de la droite donnée, une autre droite quelconque, l'épure sera celle des §§ 393 ou 394.

397. Problème XXIV. *Construire la distance d'un point à un plan.*

Solution. (**Ep. 294.**) Du point donné, on abaisse une perpendiculaire sur le plan (**378**).

On construit le pied de cette perpendiculaire (**395**).

La véritable longueur qui sépare le point donné du pied de la perpendiculaire, sera la distance du point au plan. Cette longueur se détermine par le problème du § 381.

Remarque. En prenant, comme dans notre épure, la perpendiculaire pour échelle de pente du plan auxiliaire dans la recherche de son pied, on devra employer la solution du cas particulier du § 392.

398. Problème XXV. *Construire la distance d'un point à une droite.*

Solution. (**Ep. 295.**) Par le point A, on mène un plan perpendiculaire à la droite (**380**). On détermine le point de rencontre D de ce plan avec la droite (**395** et **397**).

La droite AD, qui unit ce point au point A, sera une droite perpendiculaire à la droite donnée ; c'est la distance du point A à la droite. On en détermine la véritable longueur (**381**).

399. Problème XXVI. *Construire la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan.*

Solution dans l'espace. Par un point A de la droite D, on mène une parallèle à la droite D'. On détermine le plan P de ces deux droites, plan parallèle à D'. D'un point B de D', on abaisse une perpendiculaire sur le plan P ; on en détermine le pied C. Par ce point et dans le plan P, on mène une parallèle CE à la droite D'; cette parallèle rencontre D en E, et la droite EF, perpendiculaire au plan P, sera la plus courte distance des deux droites.

La solution graphique de ce problème sera donnée dans le chapitre des rabattements.

400. Problème XXVII. *Par un point donné, mener une droite qui s'appuie sur deux droites données.*

Solution dans l'espace. Par le point donné A et la première droite D, on mène un plan (**385**). Par le même point A et la seconde droite D′, on mène un autre plan. Ces deux plans se rencontrent suivant une droite passant par A et qui, suffisamment prolongée, rencontrera chacune des deux droites D et D′. Elle est en effet dans un même plan avec chacune de ces droites.

Pour la solution graphique, voir les rabattements.

401. Problème XXVIII. *Parallèlement à une droite donnée, mener une droite qui s'appuie sur deux autres droites données.*

Solution dans l'espace. Parallèlement à la droite D, on mène un plan passant par la première droite donnée D′. Parallèlement à D, on mènera un plan passant par la seconde droite donnée D″. Ces deux plans se rencontrent suivant une droite parallèle à D et rencontrant D′ et D″ puisqu'elle est, avec chacune de ces droites, dans un même plan.

Pour la solution graphique, voir les rabattements.