Chapitre III.

—

Des différentes positions que le point, la droite et le plan peuvent avoir entre eux dans l'espace.

—

Des différentes positions que deux droites peuvent avoir entre elles.

—

Deux droites peuvent { se rencontrer, être parallèles, } elles sont situées dans un même plan.
ne pas être dans un même plan.

—

363. Droites qui se rencontrent. (**Ep. 267** — I.) *Si deux droites se coupent :*

1° *Les échelles de pente se coupent en un point qui a même cote sur chacune des deux droites;*

2° *Les horizontales qui joignent les cotes de mêmes noms des deux droites sont parallèles.*

En effet, si les deux droites se rencontrent, elles déterminent un plan dont la trace est A C et dont toutes les horizontales, telles que *dg*, *ef*, etc. sont parallèles à A C. Or, ces horizontales sont les droites qui joignent les cotes de mêmes noms des droites.

La **figure 264** montre à l'évidence que la projection du point B doit avoir même cote sur chacune des échelles de pente des droites, et que cette cote doit exprimer la hauteur B *b*.

264. Droites parallèles. (**Ep. 267** — II.) *Si deux droites sont parallèles, leurs échelles de pente sont parallèles, graduées dans le même sens et de la même manière. Les intervalles séparant des cotes égales sont égaux.*

12.

En effet, les deux plans projetants menés par les deux droites sont parallèles; leurs traces sur le plan de projection le sont donc également (**Fig. 265**). Or, ces traces sont les échelles de pente des deux droites. Les deux droites situées dans les deux plans projetants parallèles, doivent encore être dirigées dans le même sens et faire avec leurs projections des angles égaux, autrement elles ne seraient pas parallèles. De cette dernière condition, on déduit l'égalité des deux triangles acc^1 et ACC^1, d'où $ac^1 = AC^1$. L'intervalle est donc le même sur les deux droites; les échelles de pente sont donc graduées dans le même sens et de la même manière.

365. Droites non situées dans un même plan. (**Ep. 267** — III.) *Le point de rencontre des deux échelles de pente n'a plus la même cote sur chacune des deux échelles; les horizontales qui joignent les cotes de mêmes noms des deux droites ne sont plus parallèles.*

366. Droites perpendiculaires entre elles. (**Ep. 267** — IV.) Pour que la simple inspection des projections indique la perpendicularité des deux droites, il faut que l'une d'elles soit horizontale. (**Fig. 266**). Dans ce cas, la projection de l'autre droite sur un plan horizontal passant par la première sera perpendiculaire à cette première. CD sera perpendiculaire à AB. Les projections de AB et de CD sur le plan de projection sont parallèles à ces droites et par conséquent se coupent sous un angle droit.

—

Des différentes positions d'une droite à l'égard d'un plan.

—

$$\text{Une droite peut être}\left\{\begin{array}{l}\text{située dans un plan}\\ \left.\begin{array}{l}\text{parallèle . . . .}\\ \text{perpendiculaire. .}\\ \text{oblique . . . .}\end{array}\right\}\text{au plan.}\end{array}\right.$$

—

367. Droite située dans un plan. (**Ep. 269** — I.) *Une droite est située dans un plan si deux de ses points sont dans ce plan.*

Le point de cote zéro de la droite, sa trace, sera situé sur la trace du plan ; un point quelconque, de cote 4, sera situé sur l'horizontale de cote 4 du plan.

368. Droite parallèle au plan. (**Ep. 269** — III.) *Une droite est parallèle à un plan si ce dernier contient une droite parallèle à la première.*

On prendra un point quelconque du plan ; par ce point, on fait passer une droite parallèle à la droite donnée (**264**) ; cette dernière est parallèle au plan si la première est dans le plan, donc, si sa trace se trouve sur la trace du plan.

369. Droite perpendiculaire à un plan. (**Ep. 269** — II.) *Si une droite est perpendiculaire à un plan :*

1° *Les échelles de pente de la droite et du plan sont parallèles ;*

2° *Ces échelles sont cotées en sens contraires ;*

3° *La pente de la droite est l'inverse de celle du plan.*

Soit (**fig. 268.**) A un point de la trace du plan ; par ce point, menons la droite AB perpendiculaire au plan et la droite AC située dans le plan donné et perpendiculaire à la trace T ; AC sera une ligne de plus grande pente du plan.

1° Les deux droites AB et AC, perpendiculaires toutes les deux à T, se projettent sur le plan de projection H suivant des perpendiculaires à T (**49**).

Par suite, les projections de AB et AC, respectivement les échelles de pente de ces droites, ont même direction et sont parallèles.

2° La figure prouve suffisamment que les graduations de AB′ et de AC′ sont en sens contraires.

3° Les deux triangles rectangles BAB′ et CAC′ sont équiangles et donnent

$$\frac{B\,B'}{B'\,A} = \frac{A\,C'}{C\,C'};\ \text{or}\ \frac{B\,B'}{B'\,A}\ \text{est la pente de B A,}$$

$$\frac{A\,C'}{C\,C'} = \frac{1}{\text{pente de A C}} = \frac{1}{\dfrac{C\,C'}{C'\,A}}.$$

La pente de la droite est donc l'inverse de celle du plan.

Remarque. La propriété précédente donne $\frac{h}{i} = \frac{i'}{h}$; i et i' étant les intervalles des deux échelles de pente B B′ et A C′ et h l'unité de hauteur.

On tire de là $$h^2 = i \cdot i'.$$

370. Droite oblique au plan. (**Ep. 269** — IV.) Une droite oblique à un plan a sa trace en dehors de celle du plan; son échelle de pente n'est pas parallèle à celle du plan et ne jouit pas des propriétés qui caractérisent celle d'une droite perpendiculaire à un plan.

—

Des différents positions que deux plans peuvent avoir entre eux.

—

Deux plans sont parallèles ou se coupent.

—

371. Plans parallèles. *Si deux plans sont parallèles, leurs échelles de pente sont parallèles, graduées dans le même sens et de la même manière.*

En effet, les deux plans parallèles P et P′ (**Fig. 270**) ont des traces parallèles; ils sont inclinés du même côté du plan de projection et font avec celui-ci le même angle. Des plans perpendiculaires aux deux traces T et T′ coupent les deux plans suivant les droites parallèles A B et A′ B′ qui sont perpendiculaires à ces traces. Ces droites sont les lignes de plus grande pente des deux plans; elles sont parallèles, donc elles jouissent des propriétés démontrées pour le parallélisme des droites.

372. Plans qui se coupent. Dès que les échelles de pente de deux plans ne sont pas parallèles, ces plans se coupent.

Différents cas particuliers peuvent se présenter.

1er cas. — *Les échelles de pente des deux plans sont des droites quelconques.*

Les plans se rencontrent suivant une droite à déterminer par points. Deux horizontales de mêmes cotes des deux plans, suffisamment prolongées, déterminent à leur intersection un point de la droite commune aux deux plans. Ce point a pour cote la cote des horizontales qui le déterminent. D'autres points se trouvent de la même manière.

2e cas. — Les échelles de pente ont des directions parallèles. (**Fig. 271**.) Les traces horizontales A B et A′ B′ de ces deux plans sont parallèles. Les deux plans se coupent donc (**61**) suivant une horizontale parallèle à ces traces.

La projection de cette horizontale sur H sera normale aux échelles de pente des deux plans.

3e cas. — Les deux plans ont même inclinaison, même pente. Leur intersection est une droite qui se projette suivant la bissectrice de l'angle des traces ou des horizontales de ces deux plans.

4e cas. — Les deux plans sont verticaux. L'intersection commune est une verticale qui se projette suivant un point, sa trace-projection, qui est la rencontre des deux traces des plans.

5e cas. — L'un des plans est vertical. L'intersection commune se projette suivant la trace-projection de ce plan.

373. Plans se coupant à angle droit. — Plans perpendiculaires entre eux. En général, la simple inspection des échelles de pente de ces plans ne suffit pas pour reconnaître cette position particulière.

Par un point de l'un des plans, on doit abaisser une perpendiculaire sur l'autre ; si cette droite reste dans le premier plan, celui-ci sera perpendiculaire au second.

Cas particuliers. Dans quelques cas particuliers, la perpendicularité de deux plans peut se déduire des caractères de leurs échelles de pente.

1° Traces parallèles. (**Fig. 272**.) Si les deux plans P et P′, perpendiculaires dans l'espace, ont des traces parallèles, les lignes de plus grande pente de ces plans, menées par un point A de l'intersection commune, se trouvent dans un même plan projetant A B C. Comme M N est parallèle aux traces des deux plans sur H, l'angle B A C sera l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans donnés. Cet angle est donc droit et par suite A C, perpendiculaire dans la face P′ à l'arête M N du dièdre droit P P′, sera perpendiculaire à P.

Une des deux lignes de plus grande pente sera donc perpendiculaire au plan passant par l'autre et jouira, projetée sur le plan H, des propriétés énoncées pour une droite perpendiculaire à un plan (**269**).

2° Les deux plans sont verticaux. Les traces-projections se coupent à angle droit (à démontrer).

3° Un des plans est vertical. L'autre plan (**Fig. 273**), perpendiculaire au premier, coupera le plan horizontal suivant sa trace, perpendiculaire à la trace-projection (à démontrer). L'échelle de pente du plan P′ sera donc parallèle à cette trace-projection.

4° Un des plans est horizontal. L'autre plan sera vertical et n'aura qu'une trace-projection et pas d'échelle de pente.