Chapitre X.

Applications.

Résolution de l'angle trièdre.

302. Un angle trièdre contient trois angles plans ou faces et trois angles dièdres qui sont mesurés par les angles plans correspondants.

Désignons par α, β et γ les trois faces et par A, B et C les trois dièdres respectivement opposés aux faces α, β et γ.

Trois de ces six éléments étant donnés, on peut se proposer de trouver les trois autres, ce qui s'appelle *résoudre le trièdre.*

Les données de ce problème peuvent être choisies de six manières différentes.

On peut considérer comme données du problème :

1° Les trois faces α, β et γ.

2° Les deux faces β et γ et l'angle dièdre compris A.

3° Les deux faces β et γ et le dièdre B opposé à la face β.

4° Les trois angles dièdres A, B et C.

5° Les deux angles dièdres A et B et la face α opposée au dièdre A.

6° Les deux angles dièdres A et B et la face commune γ.

Démontrons que ces six manières différentes de poser l'énoncé du problème de la résolution de l'angle trièdre peuvent se ramener aux trois premières.

A cet effet, d'un point quelconque pris à l'intérieur du trièdre abaissons une perpendiculaire sur chacune de ses faces ; nous formerons un trièdre supplémentaire du trièdre donné.

Soient A_1, B_1 et C_1 les valeurs des trois angles dièdres, α_1, β_1 et γ_1 celles des trois angles plans de ce trièdre supplémentaire, éléments opposés respectivement aux faces α, β et γ et aux angles dièdres A, B et C du trièdre proposé.

Les propriétés bien connues des trièdres supplémentaires nous donnent les relations :

$A_1 = 180^\circ - \alpha$; $B_1 = 180^\circ - \beta$; $C_1 = 180^\circ - \gamma$.

$\alpha_1 = 180^\circ - A$; $\beta_1 = 180^\circ - B$; $\gamma_1 = 180^\circ - C$.

Quatrième cas. *Etant donnés les trois angles dièdres* A, B *et* C, *construire les trois faces* α, β et γ.

La considération du trièdre supplémentaire nous donne :

$A = 180^\circ - \alpha_1$; $B = 180^\circ - \beta_1$ et $C = 180^\circ - \gamma$.

Donc, les trois dièdres A, B et C étant connus, les trois faces α_1, β_1 et γ_1 du trièdre supplémentaire le sont également et par suite on peut, à l'aide du premier cas, construire les trois dièdres A_1, B_1 et C_1 de ce trièdre supplémentaire.

Or, A_1, B_1 et C_1 connus nous donnent immédiatement :

$A_1 = 180^\circ - \alpha$; $B_1 = 180^\circ - \beta$ et $C_1 = 180^\circ - \gamma$.

C'est-à-dire, que la connaissance des trois dièdres entraîne, par la considération du trièdre supplémentaire, la détermination des trois faces du trièdre proposé.

Le quatrième cas est donc ramené au premier.

Cinquième cas. *Etant donnés deux dièdres* A *et* B *et la face* α *opposée au dièdre* A, *construire les deux faces* β *et* γ *et le dièdre* C.

Le trièdre supplémentaire nous donne :

$A = 180^\circ - \alpha_1$; $B = 180^\circ - \beta_1$ et $\alpha_1 = 180^\circ - A_1$.

On connait donc de ce trièdre supplémentaire deux faces α_1 et β_1 et le dièdre A_1 opposé à l'une d'elles, la face α_1, ce qui suffit, d'après le troisième cas, pour déterminer les autres éléments, la face γ_1 et les deux dièdres B_1 et C_1.

Or, $\gamma_1 = 180^\circ - C$; $B_1 = 180^\circ - \beta$ et $C_1 = 180^\circ - \gamma$.

La connaissance de γ_1, B_1 et C_1 du trièdre supplémentaire entraîne donc la détermination des deux faces β et γ et du dièdre C opposé à γ.

Ce qui ramène ce cinquième cas au troisième.

Sixième cas. *On donne deux dièdres* A *et* B *et la face commune* γ, *construire les autres éléments de ce trièdre.*

Le trièdre supplémentaire nous donnera encore :

$A = 180^\circ - \alpha_1$; $B = 180^\circ - \beta_1$ et $\gamma = 180^\circ - C_1$.

Donc, dans le trièdre supplémentaire on connait deux faces α_1 et β_1 ainsi que le dièdre compris C_1. Ces conditions suffisent, d'après le deuxième cas, pour déterminer, de ce trièdre supplémentaire, la face γ_1 ainsi que les deux dièdres A_1 et B_1. Or, ces éléments une fois connus nous donnent les relations :

$A_1 = 180^\circ - \alpha$; $B_1 = 180^\circ - \beta$ et $\gamma_1 = 180^\circ - C$; desquelles on tire α, β et C.

On connait donc du trièdre proposé deux faces et le dièdre compris.

Le sixième cas est donc ramené au second.

La résolution des angles trièdres est donc ramenée aux trois cas suivants :

Résoudre le trièdre, connaissant :

1° Les trois faces du trièdre ;

2° Deux de ses faces et le dièdre compris ;

3° Deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles.

303. Premier cas. *Connaissant les trois faces d'un angle trièdre, construire les trois angles dièdres.*

Solution dans l'espace. Si l'on avait le trièdre bien représenté dans l'espace et placé avec une de ses faces ASC sur P_1, on pourrait opérer comme suit :

On coupe le trièdre par un plan passant par un point quelconque v de SB et normal à cette arête. Ce plan coupera les faces BSA et BSC suivant les deux droites vm et vn, normales en v à SB, et la face ASC suivant mn normale à la projection B'S de BS sur P_1.

Le triangle mvn donnera en v l'angle plan correspondant du dièdre SB opposé à ASC. (**Fig. 212.**)

Pour avoir les dièdres SA et SC, on coupera par des plans normaux à SA et SC et menés par un même point a de l'arête BS.

Ces plans couperont les faces des dièdres suivant le droites ap et $a'p$, as et $a's$ et se coupent eux-mêmes suivant la droite aa' normale à P_1.

Les triangles rectangles ainsi obtenus apa' et asa' ont même hauteur, se construisent par rabattement et donnent en p et s les angles plans des dièdres SA et SC.

Solution graphique. (Ep. 213.) Projection du trièdre sur P_1. La face ASC $= \beta$ sera placée sur P_1. En construisant sur AS et CS les angles AS(B) $= \gamma$ et DS(B) $= \alpha$, on aura les rabattements, sur P_1, des deux autres faces γ et α ; les droites S(B) et S(B) sont les rabattements sur P_1 de la troisième arête SB du trièdre. Ces rabattements ont été opérés autour de SA et de SD.

Pour relever l'arête SB, prenons sur les deux rabattements un point (a) à égale distance de S. Ces points sont les rabattements sur P_1 autour de SA et de SC du seul et même point a de l'arête SB. Comme la projection a' d'un point a est toujours liée à son rabattement (a) par une perpendiculaire à l'axe de rotation, on voit que, dans ce cas, le point a' se trouve au point de rencontre des deux perpendiculaires abaissées de (a) et (a) sur SA et SC. Le point a' obtenu. Sa' sera la projection sur P_1 de l'arête SB du trièdre ; ce dernier est donc représenté et projeté sur P_1.

Angles plans des dièdres A et C. Coupons le trièdre par un plan normal à SA et par un autre plan normal à SC et faisons passer ces plans par le même point a'. Le plan normal à SA coupera la face ASB suivant une droite normale en p à SA et qui est rabattue suivant sa vraie longueur en $p(a)$. Le plan normal à SC coupera BSC suivant une droite normale à SD et rabattue en vraie grandeur le long de $s(a)$. Les triangles rectangles $aa'p$ et $aa's$ de la figure de l'espace peuvent donc être construits. On en connait les bases $a'p$ et $a's$ et les hypothénuses $p(a)$ et $s(a)$.

Les triangles $(a)a'p$ et $(a)a's$ ainsi obtenus donnent en p et s les angles plans correspondants des dièdres SA et SC.

Vérification. Les deux triangles $aa'p$ et $aa's$ dans l'espace ont le côté aa' commun ; il faut donc, sur l'épure, que $a'(a) = a'(a)$, ce qui se vérifie en décrivant de a' comme centre avec $a'(a)$ comme rayon un arc qui passera par l'autre sommet (a).

Angle plan du dièdre B. On coupe le trièdre par un plan normal à l'arête SB. La trace de ce plan sur P_1 sera mn normale à SB$'$. Ce plan coupe la face ASB suivant une droite normale à SB et passant par m et la face CSB suivant une droite passant par n et normale à SB. Ces deux droites se trouvent donc rabattues en $m(v)$ et $n(v)$, perpendiculaires abaissées de m sur S(B) et de n sur l'autre rabattement S(B) de SB.

Ayant les trois côtés mn, $m(v)$ et $n(v)$ du triangle mvn de l'espace, on peut construire ce triangle $mn(v)$ et l'on aura en (v) l'angle plan correspondant du dièdre B.

Vérification. Le sommet (v) du triangle $m(v)n$ tombe sur SB′ (**221**).

Remarques. On peut toujours supposer que, des trois faces données du trièdre, la face ASC soit la plus grande.

Dans le relèvement des points (a) rabattus sur P_1 autour de SA et de SC, ces points décrivent, dans l'espace, des circonférences de cercle perpendiculaires, l'une à SA, l'autre à SC. La première se projette suivant son diamètre $(a)k$, corde de l'arc atk, et la seconde suivant $(a)l$, corde de l'arc $(a)kl$. (**Fig. 214**).

Pour que ces deux circonférences se rencontrent, les traces-projections de leurs plans doivent se rencontrer, donc aussi les cordes $(a)k$ et $(a)l$.

Or, si ces deux cordes se rencontrent, il faut que la somme des deux arcs $ln + kt$ soit plus grande que l'arc tn, ou, en d'autres termes :

Le problème, pour être possible, exige que la plus grande des faces du trièdre soit plus petite que la somme des deux autres faces. On sait encore que la somme doit être moindre que quatre droits.

304. Problème II. Deuxième cas. *Connaissant deux faces d'un angle trièdre et l'angle dièdre compris, construire la troisième face et les deux autres dièdres.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 215**.) Si, avec les données du problème, on parvient à construire les projections du tièdre, supposé placé avec une des faces connues sur P_1, il suffirait de construire le rabattement de l'arête SB autour de SC sur P_1, pour avoir la troisième face α inconnue. On connaîtrait alors les trois faces du trièdre et l'on aurait ramené ce cas au premier.

Soit CSA la face connue placée sur P_1 et coupons le trièdre, supposé construit, par un plan normal à SA. Ce plan coupe la face γ suivant *am*, droite normale à SA, le plan P_1 suivant *ma'* normale à SA, et le plan projetant de SB suivant *aa'*. Les trois droites *aa'*, *a'm* et *ma* formeront un triangle rectangle, dont l'angle aigu en *m* est l'angle plan correspondant du dièdre connu SA.

Si l'on rabat la face γ connue sur P_1, la longueur du côté *am* du triangle *aa'm* sera rabattue suivant $(a)m$. On aurait donc l'hypothénuse $m(a) = ma$ du triangle *aa'm*, un angle aigu en *m*, le sommet *m* et la direction *ma'* du côté *ma'*. Le triangle peut alors être construit et donnera *a'*, première projection d'un point *a* de la troisième arête inconnue. Cette troisième arête sera donc représentée, projetée sur P_1 ainsi que le trièdre lui-même. Le rabattement de la troisième face CSB sur P_1 peut se faire et donnera la troisième face.

Solution graphique. (**Ep. 216.**) Plaçons la face β dans P_1 et sur SA et dans P_1, construisons un angle égal à γ, la deuxième face connue. S(B) sera le rabattement de la troisième arête SB du trièdre, rabattement opéré autour de SA sur P_1. Relevons cette arête, et à cet effet, relevons en un point (a). Ce point se projette en un point de la perpendiculaire abaissée de (a) sur SA. $m(a)$ sera l'hypothénuse du triangle *ama'* de l'espace, lequel triangle, construit avec l'angle aigu *s* connu, donnera *a'*, première projection de *a*.

On a donc S*a'*B' pour projection de la troisième arête.

Rabattement de SB sur P_1 autour de SC. Il suffira de rabattre le point *a*. Le rabattement (a) se trouvera sur la normale abaissée de *a'* sur SC et sur l'arc de cercle décrit de S comme centre avec $S(a)$ comme rayon $S(a)$ est, en effet, la distance du point *a* au sommet S, distance qui se trouve rabattue sur S(B) autour de SA.

Le rabattement de SB nous donne CS(B) pour troisième face α du trièdre.

Le problème est ramené au premier cas.

305. Problème III. Troisième cas. *Connaissant deux faces d'un angle trièdre et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, construire la troisième face et les deux autres angles dièdres.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 217.**) Dans ce troisième cas, comme dans le cas précédent, on placera une des faces connues, la face ASC, sur P_1 et l'on construira, avec les données du problème, la projection orthogonale sur P_1 de l'arête SB. En opérant ensuite le rabattement de SB sur P_1, autour de l'arête SC prise pour axe de rotation, on obtiendra la troisième face BSC du trièdre et l'on aura ramené ce troisième cas au premier.

Il s'agit donc de construire la projection de SB sur P_1 ou de construire la projection o' d'un point o quelconque de SB.

A cet effet, coupons le trièdre, supposé connu et placé avec ASC sur P_1, par un plan normal à l'arête SA. Ce plan coupe ASC suivant la droite mn perpendiculaire en m à l'arête SA, la face ASB suivant mo, perpendiculaire en m à AS et la face BSC suivant une droite no. Le trièdre sera coupé suivant le triangle mon. On connait mn et l'on peut construire mo par le rabattement de la face BSA sur P_1, mais on ne connait pas on.

Si l'on parvient à avoir les éléments nécessaires pour construire le triangle mon, on n'aurait qu'à abaisser du sommet o une perpendiculaire sur la base mn, pour avoir en o' un point de la projection orthogonale de l'arête SB sur P_1.

Coupons le plan du triangle mon par un plan passant par un point quelconque v' de mn et perpendiculaire à SC. Ce plan est perpendiculaire à P_1 et coupera le plan mon, également normal à P_1, suivant vv' perpendiculaire à P_1 et par suite à mn. Le plan P_1 sera coupé par ce plan auxiliaire suivant la droite $v'p$, normale à SC, et le plan de la troisième face BSC suivant vp, normale en p à SC. L'angle des deux droites vp et $v'p$ sera l'angle plan correspondant du dièdre SC connu.

Il résulte de là, que le triangle rectangle $vv'p$ est connu, qu'il peut être construit et que l'on a vv', la perpendiculaire qu'il faut élever en un point v' de mn pour arriver à un point v du côté no du triangle mno.

On peut donc, sur mn et dans P_1, construire la direction que prend le rabattement de no. Le sommet o sera sur cette direction et de plus à une distance $m(o)$ de m. On aura par suite facilement ce sommet o. La perpendiculaire abaissée ensuite de o sur mn nous donnera o' et par suite $So'B'$, ce qui ramène ce troisième cas au premier.

Solution graphique. (**Ep. 218.**) Soient ASC la face connue placée dans P_1 et AS(B) le rabattement sur P_1 autour de AS de la deuxième face connue. Par (o) pris sur S(B) menons le plan normal à AS, plan qui coupe ASC suivant mn, perpendiculaire à AS, et la face ASB de l'espace suivant mo, droite rabattue sur P_1 suivant $m(o)$. nm et $m(o)$ sont deux côtés du triangle mon suivant lequel le trièdre est coupé.

Soit v' un point de mn par lequel on mène le plan normal à SC.

Si sur $v'p$ comme base, on construit un triangle rectangle, dont l'angle aigu en p est l'angle plan correspondant du dièdre SC, on aura $(v)v'p$, qui sera le rabattement du triangle $vv'p$ de l'espace. $(v)v'$ est donc la perpendiculaire qu'il faut élever en v' à mn pour avoir un point (v) du rabattement du côté $n(o)$ du triangle rabattu mon de l'espace.

En décrivant de m comme centre, avec $m(o)$ pour rayon, un arc de cercle qui coupe le côté $n(v)$ prolongé en (o), on aura $m(o)n$, rabattement sur P_1 du triangle mon de l'espace et par suite o' et, en dernier lieu, So'B', projection sur P_1 de l'arête OB.

Cette arête se rabat ensuite sur P_1 autour de SC en S(B) et donne la troisième face CSB du trièdre. Ce qui ramène ce troisième cas au premier.

Remarques. I. Dans l'hypothèse de notre épure, le problème admet deux solutions. L'arc de cercle que l'on décrit de m comme centre, avec $m(o)$ pour rayon, coupe, en effet, $n(v)$ en deux points qui répondent tous les deux aux conditions du problème.

II. Si l'arc de centre m et de rayon (o) touche la droite $n(v)$, le problème n'admettra qu'une solution.

III. Le problème devient impossible, si cet arc de cercle ne touche ni ne coupe la droite $n(v)$.

Vérifications. Dans le rabattement autour de SC des deux arêtes SB et SB_1 qui répondent à la question du problème, les rabattements (o) et (o_1) des points o et o_1 se trouvent :

I. Sur les normales abaissées de o' et o'_1 sur SC ;

II. Sur l'arc de cercle décrit de S comme centre, avec S(O) pris sur S(B) comme rayon, distance qui marque celle de ces points au point S ;

III. Respectivement sur les arcs de cercles décrits de n comme centre commun, avec les rayons égaux, l'un à $n(o)$, l'autre à $n(o_1)$, longueurs prises sur $n(v)(o)$. Ces longueurs marquent, en effet, les distances du point n respectivement aux points o et o_1 de l'espace.

—

Trièdres trirectangles.

—

Nous donnons quelques problèmes relatifs aux trièdres trirectangles qui trouveront leur application dans la théorie des projections axonométriques ; nous les faisons précéder de quelques propriétés principales de ces trièdres.

306. Propriétés. I. *Le point de concours des hauteurs d'un triangle acutangle est la projection, sur le plan de ce triangle, des sommets de deux trièdres trirectangles, dont les arêtes passent par les sommets de ce triangle.*

II. *En coupant les trois faces d'un trièdre trirectangle par un plan quelconque, les projections, sur ce triangle, des trois arêtes du trièdre coïncident avec les directions des trois hauteurs de ce triangle.*

III. *Lorsque dans un plan, trois droites concourent en un point et forment en ce point trois angles obtus, on peut toujours les considérer comme les projections, sur ce plan, des trois arêtes d'un trièdre trirectangle.*

307. Problème IV. *Construire les projections d'un trièdre trirectangle, dont les arêtes passent par les sommets d'un triangle acutangle donné.*

Solution. (Ep. 219.) Posons le triangle $a'b'c'$ donné dans le premier plan de projection et prenons P_2 perpendiculaire au côté $a'b'$.

Nous savons que le sommet du trièdre trirectangle se projette

---

Les propriétés des trièdres trirectangles se trouvent démontrées dans la partie du cours qui traite des projections axonométriques. (Suppléments au traité de Géométrie descriptive, premier fascicule. — Projections axonométriques.)

sur P_1, plan du triangle $a'b'c'$, au point de concours s' des hauteurs de ce triangle. La projection du trièdre sur P_1 est donc trouvée.

Rabattons s' sur P_1 autour de $a'b'$ pris pour axe de rotation. La face $a'b's'$ étant un triangle rectangle en s', le rabattement (s) du sommet s' se trouvera à l'intersection de la perpendiculaire abaissée de s' sur l'axe $a'b'$ avec la demi-circonférence de cercle décrite sur $a'b'$ comme diamètre.

Comme la hauteur sm de la face $a'b's$ du trièdre est parallèle à P_2, la projection s'' de s sera à la rencontre de la perpendiculaire $s's''$ à l'axe avec l'arc de cercle décrit de $b''a''$ comme centre avec sm pour rayon.

Le sommet s'' trouvé, $b''s''c''$ sera la deuxième projection du trièdre trirectangle.

Remarques. I. L'arête sc étant perpendiculaire aux deux arêtes sb et sa, sera perpendiculaire à leur plan, donc à la face abs et par suite à sm.

Il faut donc, puisque cs et sm sont parallèles à P_2, que $s''c''$ soit perpendiculaire à $s''a''$, ce qui se vérifie par une demi-circonférence de cercle qui, décrite sur $a''c''$ comme diamètre, passera par s''.

II. Il existe un deuxième trièdre symétrique du premier par rapport au plan du triangle donné $a'b'c'$.

308. Problème V. *Etant données les projections sur* P_1 *des trois arêtes d'un trièdre trirectangle, trouver les projections de ces arêtes sur* P_2.

Solution. (**Ep. 220.**) Prenons P_2 parallèle à l'une des arêtes sc du trièdre et construisons le triangle acutangle suivant lequel le trièdre se projette sur P_1.

Nous savons que, sur ce triangle, les projections des trois arêtes coïncident avec les directions des trois hauteurs. L'arête $s'c'$ prolongée sera donc la direction de la hauteur correspondante à la base $a'b'$, laquelle sera donc perpendiculaire à l'axe de projection.

Donc, d'un point b' quelconque pris sur s', on abaisse une perpendiculaire sur $s'c'$ que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre en a' avec $s'a'$; $b'a'$ sera un des côtés du triangle. Les deux autres côtés $b'c'$ et $a'c'$ seront menés par b' et a' et sont perpendiculaires respectivement aux arêtes $s'a'$ et $s'b'$; ils doivent se rencontrer en c' pour former le triangle demandé $a'b'c'$.

Ce triangle construit, le problème est ramené au cas précédent (**307**).

309. Problème VI. *Un trièdre trirectangle étant donné, le couper de manière que la section soit un triangle acutangle donné.*

Solution. (**Ep. 221.**) Sur le triangle acutangle donné $a'b'c'$ placé sur P_1, on construit un trièdre trirectangle (**306**). On détermine par rabattement la longueur de ses trois arêtes. Ce sont les longueurs $(s)a'$, $(s)c'$ et $s''b''$.

On détermine ensuite sur les arêtes correspondantes du trièdre donné, et à partir du sommet S, des longueurs égales aux arêtes du trièdre auxiliaire. Le triangle formé par les extrémités a, b et c de ces longueurs sera la section demandée, elle sera égale au triangle donné $a'b'c'$.

La solution graphique se déduit aisément de ce qui précède ainsi que des problèmes IV et V. Les longueurs $(s)(a)$, $(s)(c)$ et $s''b''$ sont égales respectivement à $(s)a'$, $(s)c'$ et $s''b''$.

310. Problème VII. *Etant données les projections d'un trièdre trirectangle, trouver les angles de pente de ses faces avec le plan* P_1.

Solution. (**Ep. 222.**) Le trièdre est placé de manière que sa projection sur P_1 soit le triangle acutangle $a'b'c'$ et que son arête sc soit parallèle à P_2.

Les plans projetants qui passent par les arêtes sc, sb et sa coupent les faces $sb'c'$, $sa'c'$ et $sa'b'$ suivant des lignes de plus grande pente sd, sc et sb.

Faisons tourner ces plans projetants et amenons les à être parallèles à P_2, en prenant pour axe de rotation la projetante ss' perpendiculaire à P_1 (**278**). On obtiendra pour angles de pente des arêtes les angles $s''a_1''x$, $s''b_1''x$, $s''c_1''x$, et pour angles de pente des faces, les angles $s'_1b''v$, $s''e_1''x$ et $s''d_1''x$.

Etudes de projections. — Figures planes. — Polyèdres.

—

Exercices. — Problèmes.

—

311. Problème VIII. *On donne le centre et le rayon d'une circonférence de cercle située dans un plan donné, construire les projections orthogonales de cette circonférence sur les deux plans de projection* P_1 et P_2.

Lemme. On sait, par la géométrie élémentaire, que la projection orthogonale d'une circonférence de cercle sur un plan est une ellipse.

Le grand axe de cette ellipse est égal au diamètre parallèle au plan de projection et le petit axe sera la projection du diamètre normal au premier.

A l'aide de ces données, la construction des projections d'une circonférence de cercle revient à la construction des projections de son centre et à celles des diamètres parallèles aux plans de projections et de ceux parallèles aux premiers.

Le centre et les axes de l'ellipse obtenus, celle-ci se construira par points.

Le problème précédent présente trois cas différents.

Le plan qui contient la circonférence à projeter est :

1° normal à P_1 ;

2° normal à P_2 ;

3° quelconque.

I. Cas. *La circonférence est située dans un plan normal à* P_1.

Solution. (**Ep. 223.**) On donne le rayon r et le centre de la circonférence par ses deux projections o' et o''.

On opère le rabattement du plan T de la circonférence sur P_1. On obtiendra en (o) le rabattement du centre et de ce point, avec le rayon donné, on décrira une circonférence de cercle qui sera le rabattement sur P_1 de la circonférence donnée

De ce rabattement on remonte aux projections (**183**.—I.).

Pour avoir la tangente en un point f'' de la circonférence projetée, on construit la tangente en (f) au rabattement et l'on relève cette droite en $x''f''$ (**185**).

Remarque. Au lieu de rabattre le plan T avec le centre o sur P_1, on pourrait rabattre ce plan sur P_2 et opérer comme précédemment.

Autre solution. La projection de la circonférence sur P_1 est une portion de la trace T_1 égale à $a'b'$, projection du diamètre parallèle à P_2. La projection sur P_2 est une ellipse dont o'' est le centre, $a''b''$ le petit axe et la projection $c''d''$ du diamètre normal au premier le grand axe.

Cette ellipse sera construite par points.

Deuxième cas. *La circonférence est dans un plan normal à* P_2.

Solution. (**Ep. 224**.) On rabat le plan T avec le centre de la circonférence sur P_1. Le point (o) sera le rabattement du centre et de ce point comme centre, avec le rayon r de la circonférence donnée, on décrit une circonférence qui sera le rabattement de la première et que l'on relève en projections sur P_1 et P_2 (**187**).

Pour avoir la tangente au point quelconque f', on construira la tangente à la courbe rabattue en (f) et l'on relève cette droite $x\,(f)$ en $x\,f'$ et $x''\,f''$.

Remarque. Au lieu de rabattre le plan T avec le centre o sur P_1, on pourrait opérer le rabattement sur P_2 et continuer ensuite la solution comme précédemment.

Autre solution. La projection de la circonférence sur P_2 est une partie de T_2 égale à la projection $a''b''$ sur P_2 du diamètre parallèle à ce plan.

La projection sur P_1 est une ellipse dont $d'c'$, projection du diamètre parallèle à P_1, est le grand axe et $a'b'$, projection sur P_1 du diamètre normal au premier, le petit axe.

Ces éléments suffisent pour permettre la construction de l'ellipse par points.

Troisième cas. *La circonférence est située dans un plan quelconque.*

Solution. (**Ep. 225.**) On donne les deux traces du plan de la circonférence ainsi que les projections du centre. Après avoir opéré le rabattement du plan de la courbe et de son centre sur P_1, on décrit de ce point comme centre, avec le rayon de la circonférence donnée, une circonférence cercle qui sera le rabattement de la première sur P_1. On relève un point de cette courbe et l'on se trouve ramené au problème du §. **139**.

Remarque. On pourrait opérer le rabattement du plan de la courbe et de son centre sur P_2 et achever le problème comme précédemment.

Autre solution. Projection sur P_1. (**Ep. 225.**) La projection sur P_1 sera une ellipse dont o' est le centre. Le grand axe de cette courbe sera $a'b'$, projection sur P_1 du diamètre parallèle à P_1 ; $a'b'$ est parallèle à T_1.

Le petit axe est la projection sur P_1 du diamètre normal à ab, diamètre qui se projette suivant une normale à $a'b'$ menée par o'. Le problème est ramené à celui de porter sur $o'm'$, à partir de o', et des deux côtés de ce point, des longueurs qui sont les projections du rayon r de la circonférence de cercle.

Ce dernier problème se résoud, comme au §. 199, à l'aide d'un rabattement auxiliaire du centre o sur P_1.

Projection sur P_2. La projection sur P_2 sera une ellipse dont o'' est le centre et $f''g''$ le grand axe; $f''g''$ est parallèle à T_2 et égal à $2r$.

Le petit axe se projette le long de $o''n''$, droite normale à $f''g''$ et à T_2, et il s'agit de porter sur $o''n''$, à partir de o'' et dans les deux directions, une longueur égale à la projection, sur cette ligne, du rayon r de la circonférence donnée. Cette dernière opération se fait, comme au §. **199**, à l'aide d'un rabattement auxiliaire du centre o sur P_2.

312. Exercices et cas particuliers. 1° *Construire les projections d'une circonférence située dans un plan déterminé par deux droites qui se coupent.*

2° *Construire les projections d'une circonférence située dans un plan déterminé par deux droites qui se coupent, le centre étant le point de rencontre de ces droites.*

3° *Par trois points non en ligne droite, faire passer une circonférence.*

313. Problème VIII. *Construire les projections d'un carré, connaissant les deux projections d'un côté et la direction de la projection sur* P_1 *de l'un des côtés adjacents.*

Solution dans l'espace. Si l'on avait la direction de la projection sur P_2 du côté adjacent au côté donné, le problème serait ramené à celui de construire, dans un plan donné, un carré dont on connait le côté et les directions de deux côtés adjacents, problème qui se résoud par un rabattement.

Pour avoir la projection sur P_2 du côté adjacent, amenons par une rotation autour d'un axe normal à P_1 le côté donné dans une position parallèle à P_2. La projection du côté adjacent sera entraînée dans ce mouvement de rotation et sa nouvelle position se déterminera aisément.

La nouvelle projection sur P_2 de ce second côté sera normale à la nouvelle position du premier (**49**).

On peut donc déterminer la nouvelle position de la première trace du second côté, ramener cette trace dans sa position primitive et avoir ainsi les éléments qui déterminent la projection sur P_2 de ce côté.

Le reste du problème s'achèvera en rabattant le plan des deux côtés obtenus sur P_1, en construisant dans ce rabattement un carré sur les deux côtés rabattus et en passant ensuite du rabattement aux projections.

Solution graphique. (**Ep. 226.**) Soient ab le côté donné et e' la direction de la première projection d'un côté adjacent.

Menons par a un axe normal à P_1 et faisons tourner ab et e' autour de cet axe jusqu'à ce que ab soit parallèle à P_2; la projection e' sera entraînée jusqu'en e'_1 (**275**). La projection nouvelle e''_1 de e sur P_2 sera normale en a'' à $a''m''_1$, nouvelle projection sur P_2 de ab. On a donc en h'_1 la nouvelle position de la première trace de e, trace qui se ramène en h' sur e' et qui se projette en h'' sur P_2 pour y donner $h''a''$, seconde projection du deuxième côté prolongé du carré.

Le carré est donc situé dans le plan des deux droites ab et e qui se coupent en a ; a est même un des sommets du carré dont deux côtés sont alignés sur ab et e. On rabat ab et e sur P_1 (**209** et **191**) ; à partir de (a) et sur $(a)(b)$ comme côté, on construit le carré $(a)(b)(c)(d)$. Ce carré sera le rabattement du carré demandé.

On relève $(a)(b)(c)(d)$ en $a'b'c'd'$ et $a''b''c''d''$, en se servant de trois séries de droites parallèles (**196**).

314. Exercices et applications des deux problèmes précédents.

1° *Construire les projections d'une circonférence qui touche les plans de projections* P_1 *et* P_2 *et dont le plan est parallèle à l'axe.*

2° *Construire les projections d'une circonférence de cercle inscrite dans le triangle formé par les traces* T_1 *et* T_2 *d'un plan et par une droite donnée qui s'appuie sur ces traces.*

3° *Construire les projections d'un carré, connaissant les deux projections de l'un des côtés et la droite sur laquelle se trouve la première projection du du côté opposé au premier.*

4° *Construire les projections d'un carré, connaissant celles d'un côté et l'angle du plan de ce carré avec* P_1.

5° *Construire les projections d'un triangle équilatéral, connaissant les deux projections d'un côté et la direction de la première projection d'un deuxième côté.*

315. Problème IX. *Construire les projections d'un prisme droit reposant par sa base sur* P_1, *connaissant la base et la hauteur du prisme.*

Solution graphique. (**Ep. 227.**) Le prisme se projette sur P_1 suivant le polygone de sa base.

Les arêtes du prisme projetées sur P_2 sont perpendiculaires à l'axe ; la base supérieure se projette sur P_2 suivant une droite parallèle à l'axe ; la base inférieure se projette sur l'axe.

Notations. L'arête e, invisible en projection sur P_2, sera marquée en ponctué.

316. Problème X. *Construire les projections d'un prisme droit à base pentagonale reposant par une de ses faces latérales sur* P_1, *le plan de la base faisant avec* P_2 *un angle* α.

Solution graphique. (**Ep. 228.**) La base $abcde$ du prisme se trouvera dans un plan T normal à P_1 et faisant un angle α avec P_2.

On rabat ce plan sur P_1 et l'on construit sur T_1 un pentagone égal à celui de la base du prisme et reposant suivant ab sur T_1.

Le polygone $a'(b)(c)(d)e'$ sera le rabattement, sur P_1, de la base du prisme.

Ce polygone sera relevé en $a'b'c'd'e'$ et $a''b''c''d''e''$ (**183**).

Les arêtes du prisme sont perpendiculaires à la base, donc à T ; elles se projettent sur P_1 suivant leurs véritables longueurs le long des normales à T_1 et sur P_2 suivant des droites parallèles à l'axe de projection.

La seconde base du prisme sera parallèle à la première.

Notations. Dans la projection du prisme sur P_2, l'arête $b''b''_1$ ainsi que les côtés $c''_1b''_1$ et $b''_1a''_1$ de la base postérieure sont invisibles, donc à marquer en ponctué. En projection sur P_1, les deux arêtes $a'a'_1$ et $e'e'_1$ sont cachées, donc ponctuées.

317. Problème XI. *Construire les projections d'une pyramide triangulaire dont on connait les six arêtes et qui répose par sa base sur* P_1.

Solution graphique. (Ep. 229.) On construira sur P_1 le triangle $a'b'c'$ de la base dont les trois côtés sont connus. Cette base se projette sur P_2 suivant l'axe en $a''b''c''$.

Sur $a'c'$ comme base, avec les deux côtés as et cs construisons un triangle $a'c'(s)$, qui sera le rabattement sur P_1 de la face sac de la pyramide. Le sommet (s) de ce triangle sera le rabattement autour de $a'c'$ du sommet s de la pyramide.

Construisons un autre triangle sur $b'c'$, ayant pour base $b'c'$ et pour côtés latéraux les deux arêtes connues bs et cs. Ce triangle $(s)c'b'$ sera le rabattement sur P_1 de la face latérale scb de la pyramide ; (s) sera le rabattement autour de $c'b'$ du sommet s de cette dernière.

Comme le rabattement d'un point sur P_1 est uni à la projection de ce point sur ce plan par une normale à l'axe de rotation, nous voyons, que s' se trouve au point de rencontre des normales abaissées des deux rabattements (s) du sommet s sur les axes $a'c'$ et $c'b'$.

La projection de la pyramide sur P_1 se trouve ainsi déterminée.

La projection sur P_2 sera déterminée, dès que l'on a la projection s'' du sommet s de la pyramide.

Opérons la rotation de l'arête sc de la pyramide autour d'un axe normal à P_1 et passant par *s* et amenons *sc* à être parallèle à P_2. La trace sur P_1 de cette arête aura pour nouvelles projections c'_1 et c''_1 (**275**), et la nouvelle projection de cette arête sur P_2 passera par c''_1 et par s'' et sera égale à la vraie longueur *cs*.

Le sommet s'' est donc déterminé ; il se trouve à la rencontre de l'arc de cercle de rayon *cs* décrit de c'' comme centre avec la normale $s's''$ à l'axe de projection.

Notations. L'arête $s''c''$ est à marquer en ponctué ; c'est la seule arête invisible dans la projection de la pyramide sur P_2.

318. Problème XII. *Construire les projections et le développement du tétraèdre régulier, connaissant la longueur de l'arête.*

Solution graphique. (**Ep. 230**.) Les projections du tétraèdre régulier s'obtiennent comme celles de la pyramide triangulaire.

Développement. La base du tétraèdre et les triangles équilatéraux construits sur chaque côté de cette base constituent le développement de ce polyèdre.

319. Problème XIII. *Construire les projections et le développement de l'hexaèdre régulier, connaissant la longueur de l'arête.*

Solution graphique. (**Ep. 231**.) L'hexaèdre, placé sur P_1 avec une de ses faces parallèles à P_2, se projette sur P_1 suivant le carré de sa base et sur P_2 suivant un autre carré.

Si nous supposons le solide éloigné de P_2 d'une longueur égale à son côté, le développement de l'hexaèdre comprendra le carré de la base, quatre carrés construits sur les côtés de la base et le carré de la projection du solide sur P_2.

Notations. La position adopté pour le solide n'admet aucune arête à tracer en ponctué.

320. Problème XIV. *Construire les projections et le développement de l'octaèdre régulier, connaissant la longueur de l'arête.*

Solution graphique. (**Ep. 232**.) Dans un octaèdre régulier les trois diagonales se coupent à angle droit et en parties égales.

Prenons une des diagonales parallèle à P_2 ; les deux autres se projettent sur P_1 suivant des droites se coupant à angle droit et en parties égales au point $e'f'$, projection sur P_1 de la première diagonale, prise normale à P_1.

Donnons aux premières projections des deux diagonales parallèles à P_1 une direction voulue. L'octaèdre sera formé de deux pyramides quadrangulaires, à base carrée commune, placées symétriquement par rapport au plan des deux diagonales parallèles à P_1. La projection de l'octaèdre sur P_1 sera la même que celle de l'une des deux pyramides quadrangulaires.

La projection de cette pyramide sur P_1 a pour contour un carré dont le côté est égal à l'arête de l'octaèdre et dont les diagonales ont des directions connues. On construira ce carré, dont on unira les sommets $a'b'c'd'$ au centre f' et la projection de l'octaèdre est déterminée sur P_1.

La projection sur P_2 s'obtient en relevant les points a', b', c' et d' sur le plan de la base en a'', b'', c'' et d'', et en unissant ces points à e'' et f'', projections sur P_2 des sommets e et f de l'octaèdre.

La longueur $e''f''$ étant égale à $a'c'$ et divisée en parties égales par le plan $a''b''c''d''$.

Notations. Les arêtes eb et bf sont invisibles sur P_2 et s'y projettent suivant les lignes ponctuées $e''b''$ et $b''f''$.

Développement. Le développement de l'octaèdre s'obtient en construisant sur un côté de ce solide, $d'c'$ par exemple, un triangle équilatéral $d'c'(e)$, qui sera le rabattement de la face dce de l'octaèdre sur le plan des deux diagonales parallèles à P_1.

Le triangle équilatéral construit sur $c'(e)$ sera le rabattement autour de $c'(e)$ de la face ceb, etc.

Le développement comprendra, comme l'épure l'indique, huit triangles équilatéraux correspondant aux faces de l'octaèdre, et groupés de telle façon qu'une feuille de carton, de papier ou de métal, découpée suivant le contour extérieur de cette figure et pliée suivant les différentes arêtes, s'applique exactement sur la surface latérale totale du polyèdre.

321. Problème XV. *Construire les projections et le développement du dodécaèdre régulier, connaissant la longueur de l'arête.*

Solution graphique. (Ep. 233.) Le dodécaèdre a douze faces qui sont des pentagones réguliers. Ces faces sont groupées autour du centre du polyèdre de manière à être parallèles deux à deux.

Projection sur P_1. Supposons le dodécaèdre placé sur P_1, de manière que le pentagone $1'2'3'4'5'$ qui sert de base ait le côté $4'5'$ normal à l'axe de projection.

Chaque côté de ce pentagone servira de base à une des cinq faces latérales groupées autour de la base.

Sur les côtés $4'3'$ et $4'\,5'$ de la base, construisons les pentagones réguliers $3'(10)(11)(12)4'$ et $4'(12)(13)(14)5'$. Ces deux polygones peuvent être considérés comme les faces $4'\,3'$ et $4'\,5'$ du dodécaèdre rabattues sur P_1. Comme sur le polyèdre ces deux faces ont l'arête $4'12$ commune, nous voyons que le sommet 12 se trouve rabattu sur P_1, d'abord en (12) autour de $4'\,3'$, puis en (12') autour de $4'\,5'$. Sa projection sur P_1 se trouvera par suite en $12'$, point de rencontre des perpendiculaires abaissées des deux rabattements du point 12 sur les axes de rabattement respectifs (**179**.—I).

$4'\,12'$ est donc la projection sur P_1 d'une première arête latérale du dodécaèdre.

Les arêtes $3'10'$, $2'8'$, $1'6'$, $5'14'$ se trouvent par les mêmes considérations ; ces projections ont toutes même longueur ; par suite les sommets $12'$, $10'$, $8'$, $6'$ et $14'$ se trouvent sur une circonférence de cercle de centre $0'$ et de rayon $0'\,12'$.

Le côté (12)(11) du polygone $4'\,3'$ (10)(11)(12) sera le rabattement sur P_1, autour de $4'\,3'$, du côté 12—11 du polyèdre. Ce rabattement rencontre l'axe de rabattement $4'\,3'$ prolongé en (13). En unissant ce point (13) au point $12'$, on aura en $11'$, point de rencontre de $(13)12'$ avec la perpendiculaire abaissée du rabattement (11) sur l'axe de rabattement $4'\,3'$, la projection du sommet 11 du polyèdre sur P_1 (**179**).

Ce sommet $11'$ se trouve sur le rayon $11\,0'$; tous les autres sommets $9'$, $7'$, $15'$ et $13'$ se construisent par les mêmes considérations, se trouvent à la même distance de $0'$ et l'on démontrera

---

Propriétés des polyèdres réguliers et construction de ces solides. (Poinsot, Journal de l'Ecole polytechnique, t. IV, p. 35. — Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie, 1874, p. 233.)

aisément qu'ils sont, avec les sommets $12'$ $10'$ $8'$ $6'$ et $14'$ sur une même circonférence de cercle.

Comme d'un autre côté les arêtes $12'11'$, $11'10'$, $10'9'$, etc. sont toutes de même longueur, les sommets de rang pair et ceux de rang impair diviseront la circonférence de rayon $0'12'$ en dix parties égales et sont les sommets d'un décagone régulier.

Nous avons ainsi la projection, sur P_1, *de la face latérale inférieure* du dodécaèdre.

Projection sur P_2. La face projetée en $14'$ $5'$ $4'$ $12'$ $13'$ est, dans l'espace, perpendiculaire à P_2 ; elle se projette donc sur P_2 suivant une droite. Cette droite $13''$ $5''$ est égale à la vraie longueur de l'apothème d'une des faces du polyèdre ; elle passe par $5''$ et coupe la normale à l'axe $13'$ $13''$ en $13''$.

Tous les sommets de rang impair, à l'exception de ceux de la base inférieure, se projettent en $13''$, $11''$, $9''$, $7''$ et $15''$ sur une parallèle à l'axe de projection menée par $13''$.

Les sommets de rang pair se projettent en $14''$ $12''$ $10''$ $8''$ et $6''$ sur la parallèle à l'axe de projection menée par $12''$ et $14''$ qui se projettent, comme toute la face 14 5 4 12 13, sur la droite $5''$ $13''$.

Remarque. Dans la projection de la face latérale inférieure du dodécaèdre sur P_2, $5''$ $13''$ est la *vraie longueur de l'apothème d'une face polygonale* du solide et $2''$ $8''$ la *vraie longueur du côté du polyèdre régulier*.

Projection de la face latérale supérieure du dodécaèdre. Les projections sur P_1 et P_2 des six facettes qui constituent la face latérale supérieure du dodécaèdre s'obtiennent par les considérations qui ont servi à la construction des projections de la face latérale inférieure. Les faces du polyèdre étant deux à deux parallèles, on voit que le pentagone qui a les deux arêtes $7'$ $8'$ et $8'$ $9'$ pour côtés doit se projeter sur P_2 le long de $8''$ $7''$, droite parallèle à $13''$ $4''$ et que cette projection $18''$ $8''$ doit être égale à $4''$ $13''$ qui représente la projection sur P_2 de la face pentagonale parallèle à celle que nous considérons. De là se déduisent $7'$ $18'$ et $9'$ 19, projections sur P_1 des côtés de cette face.

On sait toutefois que ces côtés, projetés sur P_1, sont dirigés suivant les rayons du cercle $0' 7'$, comme le sont, et pour la même raison, les côtés $4' 12'$ et $5' 14'$. Ces considérations suffisent pour achever les projections du dodécaèdre sur P_1 et sur P_2.

Développement du dodécaèdre régulier. (**Ep. 234**.) Adoptons une échelle réduite de 1 à 3/4 et construisons, à cette échelle, un pentagone régulier sur chacun des cinq côtés du pentagone 1 2 3 4 5 de la base ; l'ensemble de ces polygones formera le développement de la face latérale inférieure du dodécaèdre.

Sur le côté 8 9 de l'un de ces polygones, on construira de même un nouveau pentagone régulier, développement de l'une des faces de la face latérale supérieure du dodécaèdre.

Le côté 19 18 de ce pentagone servira de base à un pentagone régulier 19 18 17 16 20, développement de la base supérieure qui, avec les cinq pentagones réguliers construits sur ses côtés, constitueront le développement de la face latérale supérieure du dodécaèdre.

L'ensemble des deux développements sera celui de la face latérale totale du polyèdre régulier.

Remarque. Un feuille de papier, de carton ou de métal, découpée suivant le développement et pliée suivant les arêtes des deux bases, inférieure et supérieure, et suivant le côté commun 8 9, peut être appliquée sur le dodécaèdre et le recouvrira totalement et exactement.

322. Problème XVI. *Construire les projections et le développement de l'icosaèdre régulier, connaissant la longueur d'une arête.*

Solution graphique (**Ep. 235**.) Prenons une des diagonales de l'icosaèdre perpendiculaire à P_1. Les pyramides pentagonales qui ont les extrémités 1 et 12 de cette diagonale pour sommets ont pour faces latérales des triangles équilatéraux, ayant l'arête du polyèdre pour longueur des côtés. Ces faces sont également inclinées sur la

---

(*) Dans les problèmes des §. §. 311, 312 etc. qui sont du ressort du dessin des projections, une des applications de la Géométrie descriptive, on peut appliquer la remarque faite au § 2 et remplacer P_1 et P_2 respectivement par plan horizontal et plan vertical etc.

diagonale, laquelle est normale à la base de ces pyramides. Ces bases, dont le côté est égal à l'arête du polyèdre, sont donc des pentagones réguliers parallèles à P_1 ; elles se projettent sur P_1 suivant des pentagones réguliers ayant pour centre la projection de la diagonale 1 12.

Plaçons la projection de la base pentagonale de la pyramide supérieure de manière que le côté $2'3'$ soit normal à l'axe de projection.

Sur $2'\,3'$ comme côté, construisons un triangle équilatéral $3'2'(1)$. Ce triangle sera le rabattement, sur le plan de la base supérieure de la pyramide, de la face triangulaire 1 2 3.

Cette face est normale à P_2 ; sa projection sur P_2 sera une droite, égale à la vraie longueur $x(1)$ de l'apothème. Il suffira donc de décrire de l'extrémité $1''$ comme centre, avec $x(1)$ pour rayon, un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire abaissée de $3'$ et $2'$ sur l'axe de projection pour avoir, en $3''\ 2''$, la projection du côté 3 2 de la base pentagonale de la pyramide supérieure. Cette base, parallèle à P_1, se projette sur P_2 suivant une parallèle à l'axe de projection et donne en $6''$, $4''$ et $5''$ les projections sur P_2 de ses sommets.

Considérons actuellement le triangle $2'3'(1)$, non plus comme le rabattement de la face 3 2 1, mais bien comme celui de la face 3 2 9, qui fait partie de la face latérale d'une nouvelle pyramide pentagonale ayant le sommet 9 du triangle 3 2 9 pour sommet.

Le sommet 9, rabattu en (9) sur P_1, se relève en abaissant de (9) une normale sur l'axe de rabattement $3'2'$ (**179**). Comme le sommet 9 est à une distance du sommet inférieur 12 égale à l'arête du polyèdre, et que cette distance et arête sont parallèles et égales à l'arête 1 5, leurs projections sur P_1 seront égales à $1'\ 5'$ et il suffira de porter cette longueur à partir de $1'$ sur $1'(9)$, pour avoir, en $9'$, la projection sur P_1 d'un premier sommet de la base pentagonale de la pyramide inférieure. Le pentagone régulier $9'8'7'11'10'$ sera la projection de cette base.

Pour avoir la projection du sommet 9 sur P_2, il suffira de décrire de $3''2''$ comme centre, avec l'apothème $x(9)$ comme rayon, un arc de cercle, qui coupera la perpendiculaire $9'9''$ à l'axe de projection au point $9''$ demandé.

La base de la pyramide pentagonale inférieure sera par suite projetée en $9''8''7''11''10''$ sur une parallèle à l'axe de projection.

Les projections du polyèdre sur P_1 et P_2 sont ensuite facilement complétées comme le montre l'épure.

Développement de l'icosaèdre régulier. (**Ep. 236.**) Construisons, à une échelle moindre, un triangle équilatéral dont le côté a même longueur, réduite à l'échelle adoptée, que l'arête de l'icosaèdre. Nommons ce triangle 1 2 3. Nous aurons ainsi le développement d'une première face du polyèdre. Sur le côté 3 1 de ce triangle, construisons un autre triangle équilatéral, qui sera le développement de la deuxième face de l'icosaèdre.

L'épure montre suffisamment la suite des opérations pour arriver au développement complet du polyèdre.

Remarque. Une feuille de papier, de carton ou de métal, découpée suivant la figure du développement et pliée suivant les côtés communs des facettes triangulaires, peut être appliquée complétement et exactement sur la surface latérale totale de l'icosaèdre.

323. Problème XVII. *Construire les projections d'un prisme droit à base rectangulaire reposant par cette base sur un plan perpendiculaire à P_2. On donne la hauteur du prisme ainsi que le rabattement de la base sur* P_1.

Solution graphique. (**Ep. 237.**) Soit $(a)(b)(c)(d)$ le rabattement sur P_1 de la base *abcd* suivant laquelle ce solide repose sur le plan T dont les traces sont T_1 et T_2.

On relève le rectangle rabattu en $(a)(b)(c)(d)$. A cet effet, on en relève d'abord un sommet, le sommet (a), dont les projections seront a' et a'' (**186**). Pour relever les trois autres sommets, on se servira avec avantage de deux séries de droites parallèles, les perpendiculaires abaissées de ces points sur l'axe de rotation T_1 et les côtés parallèles $(a)(d)$ et $(b)(c)$ du rectangle (**196**). La diagonale $(d)(b)y'$ relevée en $d'b'y'$ pourra servir de vérification (**179**). La première projection du polygone de la base inférieure du prisme sera donc le parallélogramme $a'b'c'd'$, lequel se projette sur P_2, le long de T_2, en $a''b''c''d''$.

Les arêtes du prisme se projettent sur P_2 suivant des droites perpendiculaires à T_2 et suivant leurs véritables longueurs.

En portant cette véritable longueur connue sur chaque arête, on déterminera la projection sur P_2 de la base supérieure $\alpha\beta\gamma\delta$ du solide.

De la projection sur P_2 on passe aisément à la projection des arêtes et de la base supérieure sur le plan P_1. Ces arêtes projetées sur P_1 sont normales à T_1 (**58**), donc parallèles à l'axe de projection.

Notations. Tel que le prisme est placé par rapport aux plans de projection, l'arête $c\gamma$ est cachée sur P_2, les deux côtés *cb* et *ab* de la base et l'arête $b\beta$ sont cachées sur P_2.

Ces lignes sont donc à tracer en ponctué.

324. Exercices et cas particuliers. I° *Même problème, le prisme ayant sa base dans un plan perpendiculaire à* P_1.

On construira les projections de la base du prisme (**183**). Les arêtes du solide sont perpendiculaires au plan T de la base qui est perpendiculaire à P_1 ; elles se projettent donc sur P_1 suivant leurs véritables dimensions sur des perpendiculaires à T_1 et sur P_2 suivant des parallèles à l'axe de projection.

II° *Construire les projections d'un cube, connaissant le côté et le rabattement de la base sur* P_1 :

1° *Le cube est placé sur un plan perpendiculaire à* P_2 ;

2° *Le cube a sa base dans un plan perpendiculaire à* P_1.

III° *Projections du prisme droit à base triangulaire reposant par sa base sur un plan normal à* P_1 *ou à* P_2.

On donne le rabattement de la base sur P_1 et la hauteur du prisme.

IV° *Construire les projections d'une pyramide régulière, connaissant la hauteur et le rabattement de la base sur* P_1.

La base est située dans un plan normal à P_2 *ou dans un plan normal à* P_1.

Le rabattement de la base est un polygone régulier dont on construit le centre. On relève ce centre et la base sur le plan qui les contient. Par le centre ainsi construit on mène une normale au plan de la base et l'on porte sur cette normale, à partir du centre, une longueur égale à la hauteur de la pyramide. L'extrémité de cette hauteur sera le sommet de la pyramide. Ce sommet, avec les droites qui l'unissent aux sommets de la base, déterminent les arêtes de la pyramide.

V° *Faire l'épure du n°* IV *pour le cas d'une pyramide régulière à base triangulaire, carrée, pentagonale, hexagonale, octogonale, décagonale, etc.*

VI° *Construire les projections d'une pyramide quelconque reposant par sa base sur un plan normal à* P_1 *ou à* P_2. *On donne la hauteur de la pyramide, le rabattement sur* P_1 *de la base ainsi que celui de la projection s du sommet sur le plan de cette base.*

On relève la base et la projection s du sommet. Par ce dernier point s obtenu, on mène une normale au plan T qui contient la base et l'on porte sur cette normale, à partir de son pied sur T, une longueur égale à la hauteur de la pyramide.

L'extrémité de cette longueur sera le sommet de la pyramide. On unira par des droites les projections ainsi construites du sommet aux projections de mêmes noms des sommets de la base et l'on aura les projections de la pyramide.

VII° **Exercices**. *Appliquer les constructions précédentes à la pyramide oblique à base triangulaire, carrée, rectangulaire, polygonale quelconque.*

325. Problème XVIII. *Construire les projections d'un prisme droit à base rectangulaire reposant par cette base sur un plan de profil. On donne la hauteur du prisme ainsi que le rabattement de la base sur* P_1.

Solution. (**Ep. 238.**) La base rabattue en $(a)(b)(c)(d)$ sera relevée et donne ainsi pour ses projections les longueurs $c''d''a''b''$ et $d'c'b'a'$ situées respectivement sur les traces T_2 et T_1 du plan de profil (**183**).

Les arêtes du prisme sont, dans les deux projections, parallèles à l'axe de projection et se projettent sur P_1 et P_2 suivant leurs véritables longeurs.

Notations. L'arête d'' est invisible en projection sur P_2.

Dans la projection du prisme sur P_1, c'est l'arête b' qui est cachée.

Les deux arêtes d'' et b' sont donc à tracer en ponctué.

326. Cas particuliers et exercices. I° *Même problème pour un prisme droit à base carrée, pour un prisme droit à base triangulaire et pour un prisme droit à base polygonale quelconque.*

II° *Projections d'une pyramide régulière reposant par sa base sur un plan de profil. On donne le rabattement de la base ainsi que la hauteur de la pyramide.*

On construira le centre de la base rabattue et l'on relève cette base avec son centre dans le plan de profil.

Par les projections du centre, on mène une perpendiculaire au plan de profil et l'on porte sur cette perpendiculaire, et à partir du centre, une longueur égale à la hauteur de la pyramide pour avoir, à l'extrémité de cette longueur, le sommet du solide.

Les projections de la pyramide s'achèvent en unissant, par des droites, les projections du sommet aux projections de mêmes noms de la base déjà construite.

III° *Appliquer les constructions précédentes à la pyramide régulière à base triangulaire, carrée, pentagonale, hexagonale, etc.*

IV° *Construire les projections d'une pyramide quelconque reposant par sa base sur un plan de profil. On donne la hauteur de la pyramide, le rabattement sur* P_1 *de la base et celui de la projection du sommet de la pyramide sur cette base.*

On opère comme au n° II et l'on peut appliquer les constructions à une pyramide dont la base est un polygone quelconque donné.

327. Problème XIX. *Construire les projections d'un prisme droit à base rectangulaire reposant par cette base sur un plan parallèle à l'axe de projection. On donne la hauteur du prisme et le rabattement de sa base sur* P_1.

Solution graphique. (**Ep. 239.**) Soient T_1 et T_2 les traces du plan T sur lequel repose le prisme et $(a)(b)(c)(d)$ le rabattement sur P_1 de la base.

Opérons un changement de plan de projection. Prenons pour nouveau système de plans de projection celui formé par P_1 et P_3, P_3 étant normal à l'axe de projection. Le nouvel axe A_1 sera normal à l'ancien.

Construisons (**251**) la nouvelle trace T_3 du plan T ainsi que les projections du prisme sur les plans T_1 et T_3. Cette dernière construction se fera comme au problème XVII du §. **323**.

Ayant obtenu les projections du prisme sur P_1 et P_3, on passera de la projection sur P_3 à celle sur P_2. On observera, dans ces opérations, que pour passer des projections a' et a''' d'un point quelconque a du prisme aux projections a' et a'' de ce point, il suffit d'abaisser de a' une normale sur le nouvel axe A et de porter sur cette perpendiculaire, et à partir de A, une longueur égale à la distance qui sépare a''' de l'ancien axe A_1. L'extrémité de cette perpendiculaire sera la projection a'' du point a. (**246.** Règle pratique.)

On trouvera ainsi les deux projections du prisme proposé.

328. Exercices et cas particuliers. *Appliquer le problème précédent à la construction des projections :*

I° *Du cube ;*

II° *Du prisme droit à base triangulaire ;*

III° *Du prisme droit à base quelconque ;*

IV° *De la pyramide régulière à base triangulaire, à base carrée, pentagonale, hexagonale, etc.*

V° *De la pyramide oblique à base quelconque.*

On donne le rabattement sur P_1 de la base de ces solides, les hauteurs des prismes et, pour les deux derniers cas, le rabattement sur P_1 de la projection du sommet sur le plan de la base et la hauteur de la pyramide.

329. Problème XX. *Construire les projections d'un prisme droit à base rectangulaire reposant par cette base sur un plan oblique par rapport à* P_1 *et* P_2. *On donne la hauteur du prisme ainsi que le rabattement de la base sur* P_1.

Solution graphique. (Ep. 240.) Opérons un changement de plan de projection. Prenons pour nouveau système celui des deux plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à la trace T_1 du plan T de la base du prisme. Le nouvel axe A_1 sera normal à T_1. On construira T_3 (**251**) et l'on aura ramené le problème à celui, de construire les projections du prisme reposant par sa base sur un plan perpendiculaire à P_3 (**323**).

On construira, d'après ce problème, les projections du prisme sur P_1 et P_3. De la projection sur P_3 on passera à celle sur P_2 en suivant la marche exposée au §. **327**.

330. Exercices et cas particuliers. *Appliquer le problème précédent à la construction des projections :*

I° *Du cube ;*

II° *Du prisme droit à base triangulaire ;*

III° *Du prisme droit à base quelconque ;*

IV° *De la pyramide régulière à base triangulaire, à base carrée, pentagonale, hexagonale, etc ;*

V° *De la pyramide oblique à base quelconque.*

On donne les rabattements sur P_1 des bases de ces solides, les hauteurs des prismes et, pour les deux derniers cas, le rabattement sur P_1 de la projection du sommet de la pyramide sur le plan de sa base.

331. Problème XXI. *Construire les projections d'un cube qui repose sur un plan donné. On connait les projections de l'une des arêtes de sa base.*

Solution graphique. (**Ep. 241.**) On construit le rabattement sur P_1 du plan donné T et de l'arête *ab* y située (**191**). Sur le rabattement de cette arête comme côté, on construit un carré que l'on relève ensuite en projections en $a'b'c'd'$ et $a''b''c''d''$. A cet effet, on se sert de trois séries de droites parallèles (**196**), les parallèles $(a)(d)$ et $(b)(c)$, $(a)(b)$ et $(d)(c)$ et les perpendiculaires abaissées des sommets (a), (b), (c) et (d) de la base sur l'axe de rabattement.

Par les sommets *a, b, c* et *d* de la base ainsi obtenues en projections, on mène des normales au plan T et l'on portera, à partir de ces sommets et sur ces perpendiculaires, des longueurs égales à la vraie longueur $(a)(b)$ de l'arête cube.

Les extrémités α, β, γ, et δ de ces normales formeront les sommets de la base supérieure du cube. Pour porter, à partir du point *c*, une longueur égale à $(a)(b)$ sur la normale menée par *c* au plan T, on opère par rotation. On fait tourner la normale $c\,\gamma$ autour d'un axe ω mené par *c* normalement à P_1, jusqu'à ce que la droite $c\,\gamma$ soit parallèle à P_2 (**279**). Dans cette position, on porte sur la droite la longueur $c''\gamma''_1$ égale à $(a)(b)$. L'extrémité γ''_1 qui se projette sur P_1 en γ'_1 sera ramenée sur la position primitive de la droite et donne, en γ'' et γ', les deux projections du sommet γ de la base supérieure du cube.

Comme les arêtes latérales du cube sont normales à T_1, elles auront les projections de mêmes noms égales et parallèles. Les projections du cube s'achèveront donc facilement.

332. Exercices et applications. *Appliquer le problème précédent :*

I° *Au prisme droit à base rectangulaire ;*

II° *Au prisme droit à base quelconque ;*

III° *A la pyramide régulière dont on connaît la hauteur et un côté de la base ; cette base étant triangulaire, carrée, pentagonale, hexagonale, etc. ;*

IV° *A la pyramide oblique à base quelconque.*

On connaît les projections d'un côté de la base, le plan et la nature de celle-ci, les projections sur P_1 et P_2 du pied de la hauteur de la pyramide ainsi que la vraie longueur de cette hauteur.

333. Problème XXII. *Construire les projections du tétraèdre régulier, connaissant l'arête et le plan sur lequel le tétraèdre doit reposer par une de ses faces.*

Solution graphique. (**Ep. 242.**) On rabat la trace T_2 du plan donné sur P_1 (**191**). Sur P_1, avec l'arête du tétraèdre comme côté, on construit un triangle équilatéral $(a)(b)(c)$ qui sera le rabattement de la face du tétraèdre placée sur T. On construit le centre de ce triangle, le point de rencontre (s') des bissectrices des angles de $(a)(b)(c)$. Ce point (s') sera le rabattement sur P_1 du pied de la hauteur du tétraèdre sur le plan T de la base *abc*.

La base rabattue $(a)(b)(c)$ et le pied (s') sont ensuite relevés en projections.

A cet effet, on prolongera les côtés $(a)(b)$ et $(a)(c)$ de la base jusqu'aux traces (T_2) et T_1 en (m) et x', (z) et n'.

On relève ces points *m, x, n* et *z* (**192**) et l'on a les moyens pour trouver les projections $a'b'c'$ et $a''b''c''$ de la base, ainsi que les projections s' et s'' du pied de la hauteur abaissée du sommet S du tétraèdre sur le plan de la base.

Par le point *s* ainsi obtenu, on mène une perpendiculaire au plan T et l'on porte sur cette perpendiculaire, et à partir du pied *s*, une longueur égale à la hauteur du tétraèdre. L'extrémité S de cette perpendiculaire sera le sommet du tétraèdre.

La hauteur du tétraèdre est égale à $(s)(s')$, côté de l'angle droit du triangle rectangle construit sur $(s')(c)$ avec $(c)(s)$ égal à l'arête du tétraèdre. Cette longueur $(s)(s')$ ainsi construite sera portée sur la perpendiculaire S*s* en employant, à cet effet, une rotation de cette ligne autour d'un axe ω mené par *s* normalement à P_1 (**279**).

Le sommet S du tétraèdre ainsi obtenu, joint par des droites aux sommets *a*, *b* et *c* de la base, donnera les arêtes latérales du solide.

Notations. Dans la projection du tétraèdre sur P_1, l'arête $a'b'$ sera cachée, donc à tracer en ponctué. La projection du solide sur P_2 donne l'arête cachée $a''c''$.

334. Problème XXIII. *Construire les projections d'un cube, supposé suspendu par un de ses sommets, de manière que la diagonale correspondante soit normale à* P_1 *et touche ce plan. On donne le rabattement sur* P_1 *de la base du cube.*

Solution graphique. (**Ep. 243.**) Soit $(a)(b)(c)(d)$ le rabattement sur P_1 de la base du cube, base qui touche P_1 au point (a). Supposons la diagonale de cette base normale à l'axe A et opérons un changement de plan de projection, en adoptant pour nouveau système de plans de projection celui formé par P_1 et P_3, P_3 étant normal à P_1 et à l'axe A, donc parallèle à la diagonale du cube qui est normale à P_1 et à un plan diagonal mené par cette droite.

Ce plan diagonal (**Fig. 244.**) contient la diagonale ab de la base, les arêtes du cube passant par a et b et la diagonale $a\beta$ normale à P_1.

Ces différentes lignes se projettent sur le nouveau plan P_3 suivant leurs véritables longueurs ; la projection de la base $abcd$ du cube coïncidera avec la projection de la diagonale ab. Cette dernière diagonale se projette sur P_3 suivant $a'''b'''$, droite qui fait avec $a'''\beta'''$ perpendiculaire à A_1, l'angle γ que la diagonale $a\beta$ du cube fait dans l'espace avec la diagonale ab de la base.

On construira (**fig. 245.**) cet angle γ ; on tracera la direction $a'''b'''$ et l'on construit les projections du cube sur P_1 et P_3, en se basant sur le § **327**. Le cube reposera, comme le prisme du problème XIX, sur le plan de la base $a'''b'''$ parallèle à l'axe A.

De la projection du cube sur P_3 on passera à celle sur P_2 (**327**).

335. Problème XXIV. *Une pyramide repose par sa base sur* P_1 ; *construire les angles de pente des arêtes et des faces sur* P_1 *ainsi que les angles que font les faces latérales entre elles.*

Solution graphique. (Ep. 246). Angles de pente des arêtes. On fera tourner les arêtes autour d'un axe normal à P_1 et passant par le sommet de la pyramide jusqu'à ce qu'elles soient parallèles à P_2 (**279**). Dans cette nouvelle position, l'angle que $s''a''_1$, nouvelle projection de l'arête as sur P_2, fait avec l'axe de projection sera l'angle pente de sa sur P_1.

Angles de pente des faces latérales. On coupera les faces par des plans perpendiculaires à leurs traces sur P_1 et l'on obtient des lignes de plus grande pente de ces faces. Les angles de pente de ces lignes de plus grande pente sont les angles de pente des faces sur P_1.

C'est ainsi que l'angle β est l'angle de pente de la face sad.

Angle de deux faces latérales. Pour avoir l'angle γ sous lequel les deux faces *sbc* et *sdc* se coupent, on coupe ces deux plans par un plan normal à leur intersection commune *sc* et l'on achève comme au § **221** (2^de^ solution).

336. Prolème XXV. *Construire les projections d'une pyramide dont on connaît la base et les inclinaisons des faces latérales sur cette base.*

Solution graphique. (Ep. 247.) Plaçons la base dans P_1 et construisons les lignes de plus grande pente des faces latérales. D'un point o' pris a l'intérieur de la base, menons des plans normaux aux arêtes $a'b'$, $b'c'$ et $c'a'$. Ces plans coupent les faces latérales de la pyramide suivant les lignes de plus grande pente, lesquelles se projettent sur P_1 suivant $o'm'$, $o'n'$ et $o'p'$.

En faisant tourner ces lignes autour d'un axe de rotation $o'o''$ normal à P_1 jusqu'à ce qu'elles soient parallèles à P_2, on aura pour nouvelles projections de ces lignes sur P_1 les droites $o'm'_1$, $o'n'_1$, $o'p'_1$ et sur P_2 les droites $m''_1e''_1$, $n''_1g''_1$ et $p''_1f''_1$, droites qui font avec l'axe de projection les angles α, β et γ, angles de pente des faces latérales dont ces lignes sont les lignes de plus grande pente.

Chaque face de la pyramide étant actuellement représentée par sa trace sur P_1 et par sa ligne de plus grande pente, on en déterminera les droites d'intersection, les arêtes latérales de la pyramide, d'après les principes exposés au § 139.

337. Problème XXVI. *Couper une pyramide quadrangulaire quelconque par un plan, de manière que la section soit un parallélogramme.*

Solution dans l'espace. (Fig. 248.) La pyramide est placée avec sa base quadrangulaire *abcd* sur P_1. Les deux faces latérales opposées *sad* et *sbc* se coupent suivant la droite *ms* ; les deux faces *sab* et *sdc* suivant *ns*. Le plan de ces deux droites coupe P_1 suivant *mn*.

Supposons le problème résolu et soit 1 2 3 4 le parallélogramme à construire sur la face latérale de la pyramide.

Puisque les deux côtés opposés 1 2 et 4 3 sont parallèles, les faces latérales *sad* et *sbc* menées suivant ces lignes se coupent suivant *ms* parallèle à ces côtés.

1 2 et 4 3 sont donc parallèles à *ms*. On prouvera de même que les côtés 4 1 et 3 2 sont parallèles à *ns*. Il résulte de là, que le plan du parallélogramme 1 2 3 4 est parallèle au plan *msn* et que réciproquement, tout plan parallèle à *msn* coupe la pyramide suivant une figure semblable à 1 2 3 4, donc suivant un parallélogramme.

Il suffira donc de déterminer le plan *msn* et de couper la pyramide par un plan parallèle au premier, pour avoir une section plane qui répond aux conditions du problème.

Solution graphique. (**Ep. 249**.) La solution graphique est entièrement indiquée dans la solution de l'espace. Remarquons toutefois, que pour avoir les droites d'intersection des faces latérales de la pyramide avec le plan parallèle au plan *msn,* il suffira d'avoir la trace de ce plan sur P_1, de marquer les points t', u', r' et v' où cette trace coupe les traces des faces latérales, et de mener par les points u' et t' des droites parallèles à $m's'$ et par les points r' et v' des droites parallèles à $n's'$. Ces deux couples de droites détermineront le parallélogramme de la section plane projeté sur P_1.

La projection du parallélogramme sur P_2 se déduit facilement de la projection de cette figure sur P_1.

Vérifications. 1° Les côtés 1 2 et 3 4 du parallélogramme obtenu sont parallèles à *ms*.

2° Les côtés 4 1 et 2 3 sont parallèles à *ns*.

3° Les sommets 1, 2, 3 et 4 du parallélogramme ont leurs deux projections reliées par des perpendiculaires à l'axe de projection.

338. Problème XXVIII. *Couper une pyramide à base trapèze par un plan, de manière que la section soit un parallélogramme.*

Ce problème n'est qu'un cas particulier du problème précédent.

339. Problème XXVII. *Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire.*

Solution dans l'espace. Le centre de la sphère est un point également distant des quatre sommets de la pyramide. Ce centre est donc le point d'intersection de trois plans perpendiculaires aux milieux de trois arêtes non situées dans une même face de la pyramide.

Solution graphique. (**Ep. 250**.) Prenons pour premier plan de projection P_1, le plan de la base $a'b'c'$ de la pyramide et supposons P_2 parallèle à l'arête sb.

Les plans perpendiculaires à $c'b'$ et à $a'c'$ menés par les milieux m et n de ces arêtes sont des plans perpendiculaires à P_1 ; ils se rencontrent suivant une normale à ce plan, laquelle a pour trace-projection sur P_1 le point o'. La deuxième projection $o''r$ sera perpendiculaire à l'axe.

Le plan mené par le milieu p de sb perpendiculairement à cette ligne est un plan normal à P_2 ; il rencontre ro'' en o'', centre de la sphère.

ob sera le rayon de cette sphère ; sa vraie longueur se détermine par un rabattement de son premier plan projetant autour de $o''r$ pris pour axe. Ce plan projetant, rabattu parallèlement à P_2 suivant $o'\beta$, donnera $o''b$ pour la vraie longueur du rayon de la sphère.

340. Problème XXIX. *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 251**.) Le centre o de la sphère se trouve à l'intersection des plans bissecteurs de trois dièdres de la pyramide, pourvu que ces trois dièdres ne passent pas par le même sommet.

Prenons les trois dièdres ayant pour arêtes les côtés ab, bc et ca de la base de la pyramide. Les trois plans bissecteurs se coupent en un point o, centre de la sphère.

En joignant le point o aux sommets a, b et c, on détermine un trièdre, une pyramide de même base que la pyramide donnée.

Tout plan parallèle à abc coupe cette nouvelle pyramide suivant un triangle $\alpha\beta\gamma$, dont les côtés sont parallèles à ceux de la base abc.

Si l'on avait les trois points α, β et γ, sommets de la section $\alpha\beta\gamma$, on n'aurait qu'à unir a et α, b et β, et la rencontre de ces deux droites déterminerait le centre o.

Remarquons aussi que si nous coupons la face sac par un plan perpendiculaire à ac et passant par le sommet s de la pyramide, ce plan coupe la base suivant ns', la face asc suivant sn, ligne de plus grande pente du plan sac, et le plan bissecteur de ac suivant nq, bissectrice de l'angle sns'. Cette bissectrice rencontrera le plan sécant $\alpha\beta\gamma$ en un point x situé sur la ligne $\alpha\gamma$.

Solution graphique. (**Ep. 252.**) On prendra le plan de la base *abc* pour premier plan de projection P_1. On coupera la pyramide par un plan *t* parallèle à P_1. Ce plan coupera les bissectrices des angles de pente des trois faces de la pyramide en des points *x*, *y* et *z*, par lesquels passeront les côtés de la section $\alpha\beta\gamma$, côtés parallèles à ceux de *abc* et qui donneront α, β et γ et par suite *o*.

Pour trouver les points *x, y* et *z*, on rabat chacun des trois plans, passant par le sommet et perpendiculaires aux côtés de la base *abc,* dans une position parallèle à P_2 autour de leur intersection commune *sv* prise pour axe de rotation.

Le rayon de la sphère est égal à $o''\tau$, la sphère devant être tangente à la base *abc* de la pyramide, donc à P_1.

EXERCICES.

1. Construire un trièdre rectangle, connaissant une des faces du dièdre droit et le dièdre opposé à la face connue.

2. Sur un des plans de projection on donne deux droites concourantes : déterminer les projections d'un point de l'espace, connaissant sa distance à chacune de ces droites, et faire connaître les angles que forme avec chaque ligne donnée la droite qui joint le point demandé au point de concours des deux premières.

3. Déterminer l'angle dièdre du tétraèdre régulier.

4. Déterminer l'angle dièdre de l'octaèdre régulier, ainsi que l'angle d'inclinaison d'une face sur le plan mené par l'extrémité de trois arêtes partant du même sommet.

5. Mêmes questions pour le dodécaèdre régulier.

6. — pour l'icosaèdre régulier.

7. Résoudre directement le cinquième cas de l'angle trièdre : on connaît deux dièdres et la face opposée à l'un d'eux.

8. On connaît la base d'une pyramide pentagonale régulière, ainsi que le dièdre que forment entre elles les faces latérales : déterminer la grandeur des faces latérales de la pyramide ainsi que leur inclinaison sur le plan de la base.

9. Mener un plan qui coupe un dièdre donné, de manière que le trièdre obtenu ait deux faces égales, et que la face interceptée sur le plan demandé ait une grandeur angulaire donnée.

10. Déterminer l'intersection des plans bissecteurs des trois dièdres formés par P_1 et deux autres plans.

11. Un triangle acutangle est donné sur P_1 : déterminer un point de l'espace tel qu'en le joignant aux trois sommets du triangle, on obtienne un trièdre trirectangle.

12. On donne les deux projections du sommet d'un trièdre tri-rectangle ainsi que la direction de la projection sur P_1 de chaque arête : déterminer les projections de ces arêtes sur P_2.

13. Construire un tétraèdre régulier, connaissant les projections d'un côté et la ligne de plus grande pente de la face qui le contient.

14. Déterminer la longueur de la diagonale d'un parallélipipède rectangle et l'angle qu'elle forme avec chaque arête, connaissant la longueur de chaque arête.

15. Étant données les directions des projections de trois arêtes contiguës d'un parallélipipède, ainsi que la longueur de ces arêtes, construire les projections du parallélipipède.

16. Construire un parallélipipède, connaissant le milieu de quatre arêtes.

17. Déterminer les projections d'un parallélipipède rectangle, connaissant un sommet, la projection sur P_1 d'une arête, et les directions des projections sur P_1 des deux autres arêtes qui aboutissent au sommet donné.

18. Déterminer les projections d'un parallélipipède rectangle, connaissant une arête, la projection sur P_1 d'une arête adjacente et la longueur de la troisième arête.

19. Étant donné un parallélipipède droit à base rectangulaire, le couper par un plan tel que la section soit un carré.

1° Le plan doit passer par un point donné sur une arête.

2° Le plan doit passer par un point donné de l'espace.

20. Couper un cube par un plan qui passe par le milieu de trois arêtes non contiguës et non parallèles deux à deux, et déterminer la vraie grandeur de la section.

21. On donne un point sur l'arête d'un tétraèdre quelconque : on demande les projections du chemin minimum qu'il faut suivre sur les faces pour revenir au point de départ.

22. On donne une pyramide triangulaire régulière : quelle est la ligne brisée minimum qui, partant d'un sommet de la base, viendrait se terminer à un point donné sur l'arête correspondante après avoir rencontré deux fois chaque arête latérale intermédiaire.

23. Par un point donné mener un plan qui coupe les trois faces latérales d'une pyramide triangulaire sous des angles égaux.

24. Par un point donné mener un plan qui coupe les trois arêtes d'une pyramide triangulaire sous le même angle.

25. Par un point pris sur l'arête d'une pyramide triangulaire quelconque, faire passer un plan sécant donnant pour section un triangle isocèle, la longueur des côtés égaux étant donnée.

26. Couper une pyramide triangulaire quelconque par un plan tel que la section soit un triangle isocèle dont la base ait une longueur donnée et soit parallèle à une droite située sur une des faces de la pyramide.

27. Un parallélipipède droit a pour base un parallélogramme quelconque : couper ce parallélipipède par un plan, de manière que la section soit un carré.