Chapitre IX.

—

Méthode des rotations.

—

273. Considérations générales. Définitions. Le but des rotations est de ramener les données d'un problème dans une position favorable par rapport aux plans de projection considérés comme fixes, afin de simplifier les constructions graphiques (**242**).

Les éléments qui constituent les données du problème sont invariablement reliés entre eux et à un axe fixe autour duquel on les fait tourner. Cet axe est l'**axe de rotation.**

Aucun élément ne peut se déplacer sans entraîner l'ensemble des données dans son mouvement.

Loi du mouvement. Dans ce mouvement de rotation autour de l'axe de rotation :

1° *Chaque point décrit un arc de cercle, dont le plan est perpendiculaire à l'axe, dont le centre est sur cet axe, et dont le rayon est égal à la distance du point mobile à l'axe.*

2° *Chaque point du système des données se déplace sur l'arc qu'il décrit, et l'arc parcouru est mesuré par l'angle des perpendiculaires abaissées des positions initiale et finale du point mobile sur l'axe de rotation. Cet angle est l'*__angle de rotation__ ; *il sera désigné par* φ.

3° *L'angle de rotation est le même pour tous les points du système des données.*

274. Choix de l'axe de rotation. Le but des rotations étant de parvenir à la position particulière des données qui permet de simplifier les constructions graphiques que nécessite la solution d'un problème, on ne peut prendre pour axes de rotation que des droites perpendiculaires à l'un de plans de projection, ou parallèles à l'axe de projection.

Dans le cas d'un axe normal à P_1 ou à P_2, les arcs se projettent en véritable grandeur sur P_1 ou sur P_2.

Si l'axe est parallèle à l'axe de projection, les arcs décrits se projettent en véritable grandeur sur un plan P_3 perpendiculaire à l'axe de projection.

Parfois on prend pour axe une droite de P_1.

Etudions donc les différents cas suivants qui peuvent se présenter :

Rotation	d'un point d'une droite d'un plan	autour d'un axe	perpendiculaire à P_1 ; perpendiculaire à P_2 ; parallèle à l'axe de projection.

Remarque. Les rabattements autour de l'une des traces d'un plan, ou autour d'une parallèle à ces traces, constituent de véritables rotations, en tant que l'on fait opérer une rotation à des éléments *situés dans un même plan et autour d'un axe situé dans ce plan.*

—

Rotation d'un point.

—

275. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_1.

Problème. *Faire tourner un point donné autour d'un axe perpendiculaire à* P_1, *et construire les nouvelles projections de ce point.*

Solution. **(Ep. 186.)** Le point a décrira un arc de cercle, dont le plan est parallèle à P_1 et dont le centre est en m sur l'axe ω. Le rayon de cet arc est $a'm'$, véritable longueur de la distance du point a à l'axe ω.

Si φ est l'angle de rotation, comme l'arc de rotation est parallèle à P_1, on n'a qu'à construire en m' sur $a'm'$ un angle $a'm'a'_1 = \varphi$ et a'_1, point de rencontre du côté $m'a'_1$ de cet angle φ avec l'arc de rotation, sera la première projection de la nouvelle position du point a.

La nouvelle projection a''_1 sur P_2 se trouvera sur la parallèle à l'axe de projection menée par a'' (la deuxième projection de l'arc décrit), et sur la normale à l'axe de projection abaissée de a'_1.

276. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_2.

Problème. *Faire tourner un point donné autour d'un axe perpendiculaire à* P_2, *et construire les nouvelles projections de ce point.*

Solution. (**Ep. 187.**) D'après le raisonnement du § 275 on voit, qu'on n'a qu'à décrire dans P_2, de m'' comme centre avec $m''a''$ pour rayon un arc de cercle, construire en m'' sur $a''m''$ l'angle de rotation φ, pour avoir en a''_1 la projection sur P_2 de la nouvelle position du point a.

La nouvelle projection sur P_1 se trouvera en a'_1 sur la parallèle à l'axe de projection menée par a'.

Remarque. Dans les deux cas précédents et dans ceux qui suivent, la rotation peut se faire à gauche ou à droite de la position primitive du point mobile.

277. L'axe de rotation est parallèle à l'axe de projection.

Problème. *Faire tourner un point donné autour d'un axe de rotation parallèle à l'axe de projection, et déterminer les nouvelles projections de ce point.*

Solution. (**Ep. 188.**) Si l'axe ω est parallèle à l'axe de projection, les arcs de rotation se projettent en véritable longueur sur un nouveau plan P_3 perpendiculaire à l'axe de projection.

Opérons un changement de plans de projection et passons du système P_1P_2 au système P_1P_3. Dans ce nouveau système, l'axe ω est perpendiculaire à P_3 et par suite, si φ est l'angle de rotation, la nouvelle position de a après la rotation est accusée par les projections a'''_1 et a'_1 (**275** et **276**). Les projections sur P_1 et P_2 de la nouvelle position a_1 du point seront a'_1 et a''_1. (Voir les changements de plans de projection.)

278. L'axe de rotation est une droite quelconque de P_1. La rotation s'effectuera autour de ω, droite de P_1, donc dans un plan perpendiculaire à P_1. Rabattons ce plan de rotation sur P_1, en prenant sa trace-projection $a'm$ pour axe. Le point a se rabat en (a)

(**182**), et la vraie distance du point a de l'espace à l'axe de rotation sera $m(a)$. Si φ est l'angle de rotation, le rabattement sur P_1 de la nouvelle position de a, après la rotation, sera en (a_1) ; en relevant ce point dans le plan de rotation, nous aurons, pour projections de la nouvelle position a_1 du point, les positions a'_1 et a''_1.

—

Rotation d'une droite.

—

279. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_1.

Problème. *Faire tourner une droite autour d'un axe de rotation perpendiculaire à* P_1, *et déterminer les projections de la nouvelle position de cette droite.*

Solution. (**Ep. 189.**) La nouvelle position de la droite est déterminée par les nouvelles positions de deux de ses points (**275**).

Un seul point suffit, si la droite est parallèle à l'axe ou si elle le rencontre. Le point de rencontre de la droite avec l'axe appartient, en effet, à la droite dans toutes les positions que celle-ci peut occuper.

Le cas le plus général est celui où la droite et l'axe ne sont pas dans un même plan.

Soit d la droite donnée. Prenons, sur cette droite, le point a qui est le plus rapproché de l'axe de rotation ω. Ce point se projette sur P_1 au point de rencontre de d' avec la perpendiculaire qui mesure la plus courte distance entre d et l'axe (**170**); la projection d' de la droite sera tangente, en ce point, à l'arc de cercle décrit de m comme centre avec ma' pour rayon. Si la droite se déplace, chaque point se déplacera de la même quantité angulaire, φ par exemple; le point a aura le même mouvement et se trouvera, à la fin de celui-ci, en a_1, point qui se projette sur P_1 en a'_1; l'angle $a'ma'_1$ est égal à φ. Comme ce point est toujours resté à la même distance de l'axe, il se trouvera toujours être le plus rapproché de cet axe et, par suite, la nouvelle position de la droite sera tangente en a'_1 à l'arc de cercle décrit de m comme centre avec ma' pour rayon, ma' étant la plus courte distance de d à l'axe.

Un seul point suffit donc toujours pour déterminer la nouvelle position de la droite.

Vérifications. Prenons, sur la droite d, deux points c et b, à égale distance de l'axe, donc des points qui se projettent sur P_1 en c' et b', points appartenant à la circonférence de cercle décrite de m comme centre avec mc' pour rayon.

Ces points, après la rotation mesurée par l'angle φ, se trouveront en c_1 et b_1, et se projettent sur P_1 en c'_1 et b'_1, et sur P_2 en c''_1 et b''_1.

Les trois points a_1 b_1 c_1 seront en ligne droite dans les deux projections, et cette droite est projetée sur P_1 en $b'_1a'_1c'_1$, tangente, en son milieu a'_1, à la circonférence décrite de m comme centre avec ma' pour rayon.

280. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_2.

Problème. *Faire tourner une droite autour d'un axe perpendiculaire à* P_2, *et déterminer les projections de la nouvelle position de cette droite.*

Solution. (**Ep. 190.**) Les raisonnements du § 279 s'appliquent à ce cas particulier. Les arcs de rotation ont leurs plans parallèles à P_2 et s'y projettent suivant leur véritable longueur. La projection sur P_2 de la nouvelle position de la droite sera encore tangente à la circonférence de cercle décrite de la trace-projection m de l'axe comme centre, avec la plus petite distance de la droite à l'axe pour rayon.

Ces raisonnements, appliqués au cas général d'une droite se croisant avec l'axe, donnent l'épure (**190**).

L'épure (**191**) représentera la rotation d'une droite parallèle à l'axe et, dans l'épure (**192**), la droite d rencontre l'axe de rotation au point i qui reste fixe.

Remarque. Dans les deux paragraphes précédents, ainsi que dans ceux qui suivent, la rotation de la droite peut se faire à gauche ou à droite de la position primitive de celle-ci.

281. L'axe de rotation est parallèle à l'axe de projection ou coïncide avec ce dernier.

Problème. *Faire tourner une droite autour d'un axe parallèle à l'axe de projection, et déterminer les projections de la droite dans sa nouvelle position.*

Solution. (**Ep. 193.**) Si l'axe de rotation coïncide avec l'axe de projection ou qu'il est parallèle à cet axe, tous les points de la droite se déplacent, de la même quantité angulaire, dans des plans qui sont perpendiculaires à l'axe de projection.

On prendra pour nouveau système de plans de projection celui formé par les plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à l'axe de rotation.

On détermine les nouvelles projections de l'axe et de la droite donnée sur ce plan, et l'on effectue les opérations de la rotation d'après le § 279.

On n'a qu'à remplacer, dans ce paragraphe, P_1 par P_3. La rotation opérée, des projections des nouvelles positions sur P_3, on passe aux projections correspondantes sur l'ancien système de plans de projection P_1 et P_2. (Voir les changements de plans de projection.)

282. L'axe de rotation est une droite quelconque du plan P_1. On déterminera, comme au § 278, les nouvelles positions de deux points de la droite; elles détermineront la position nouvelle de la droite.

—

Rotation d'un plan.

—

283. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_1.

Problème. *Faire tourner un plan autour d'un axe perpendiculaire à* P_1, *et déterminer les traces du plan dans sa nouvelle position.*

Première solution. (**Ep. 194.**) Si le plan s tourne autour de l'axe de rotation, la trace s_1 sur P_1 ne sort pas de P_1; cette trace tournera autour de l'axe et sera, à chaque instant du mouvement, tangente à l'arc de cercle décrit de la trace-projection ω' de l'axe comme centre, avec $\omega' m$ pour rayon.

Prenons, sur cet arc, une longueur mn qui mesure la quantité angulaire φ; s'_1, tangente en n à cet arc, sera la nouvelle position de la première trace du plan (**279**).

Une droite quelconque h du plan donné s, située dans un plan parallèle à P_1, ne sortira pas de ce plan pendant le mouvement de rotation; elle se projette sur P_1, à chaque instant du mouvement, suivant une parallèle à la position qu'occupe, à cet instant, la trace s_1 du plan, et suivant une tangente à l'arc de cercle décrit de ω' comme centre, avec la distance de l'axe à cette ligne h pour rayon. Or, cette distance se projette sur P_1 suivant sa véritable longueur en $\omega' r$.

Si cette distance se réduit à zéro, la droite h devient la droite i, toujours parallèle à s_1 dans toutes les positions de cette dernière ligne, et passant toujours, dans sa projection sur P_1, par le point ω'.

De ce qui précède, nous déduisons la règle suivante :

Pour opérer la rotation d'un plan autour d'un axe ω *perpendiculaire à* P_1, *on n'a qu'à abaisser de* ω', *trace-projection de l'axe sur* P_1, *une perpendiculaire sur* s_1, *décrire de* ω' *comme centre, avec* $\omega' m$ *pour rayon, un arc de cercle mesurant l'angle de rotation* φ, *et mener, à l'extrémité* n *de cet arc, une tangente à ce dernier. Cette tangente* s'_1 *sera la nouvelle position de la trace du plan sur* P_1.

Par la trace-projection ω' *de l'axe, on mène une parallèle à* s'_1; *cette parallèle* i'_1 *sera la projection sur* P_1 *de la nouvelle position d'une droite du plan* s *parallèle à* P_1. *On détermine la trace de cette droite sur* P_2, *et l'on unit ce point au point de rencontre* x *de* s'_1 *avec l'axe de projection, pour avoir la nouvelle trace* s'_2 *du plan* s *sur* P_2.

Seconde solution. (**Ep. 195.**) On coupe le plan s par un plan passant par l'axe de rotation et normal à sa trace s_1.

La droite ab obtenue sera une ligne de plus grande pente du plan s sur P_1 et, comme telle, elle sera, dans toutes les positions du plan mobile, perpendiculaire à la trace de ce plan sur P_1 et se projetant sur ce plan suivant une normale à cette trace.

Comme cette ligne ab est entraînée dans le mouvement du plan, elle aura tourné autour de l'axe, qu'elle rencontre en b, de la quantité angulaire mesurée par l'angle de rotation φ.

On opère la rotation de la ligne de plus grande pente ab. Par la position nouvelle a'_1 de sa trace sur P_1, on mène la tangente s'_1 à l'arc décrit par a', et l'on aura la nouvelle position de la trace du plan. La nouvelle position de la trace du plan sur P_2 passe par x et par c''_1, trace sur P_2 de la nouvelle position de la ligne de plus grande pente ab.

Remarque. Les deux positions, ancienne et nouvelle, du plan s se coupent suivant une droite passant par z et par b, donc se projetant sur P_1 suivant $z'b'$, bissectrice de l'angle de rotation du plan.

284. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_2.

Problème. *Faire tourner un plan autour d'un axe normal à* P_2, *et déterminer les traces du plan dans sa nouvelle position.*

Première solution. (**Ep. 196.**) La nouvelle position de la trace sur P_2 sera en s'_2, tangente en n à l'arc décrit de ω'' comme centre avec ωm pour rayon et mesurant l'angle de rotation φ.

Pour avoir la nouvelle position de la trace du plan sur P_1, on se sert d'une droite du plan s passant par ω'' et parallèle à P_2. (§ 283.) (Mêmes raisonnements en substituant P_2 à P_1.)

Seconde solution. (**Ep. 197.**) On détermine une ligne de plus grande pente du plan s sur P_2. On opère la rotation de cette ligne ab autour de l'axe de rotation, l'angle de rotation étant égal à φ. Les traces du plan s, dans sa nouvelle position, passeront par les traces de même nom de la ligne de plus grande pente dans sa nouvelle position. La trace du plan s sur P_2 est de plus normale à la projection nouvelle de la ligne de plus grande pente du plan sur P_2. (§ 283.) (Mêmes raisonnements en remplaçant P_1 par P_2.)

285. L'axe de rotation est parallèle à l'axe de projection ou coïncide avec ce dernier.

Problème. *Faire tourner un plan autour d'une droite parallèle à l'axe de projection ou se confondant avec cette ligne, et déterminer les traces du plan dans cette nouvelle position.*

Solution. (**Ep. 198.**) On opère un changement de plan de projection, en prenant pour nouveau système celui formé par les plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à l'axe de projection, donc aussi à l'axe de rotation ω.

Dans ce nouveau système de plans, on opère la rotation du plan s (**284**), et des traces nouvelles s'_3 et s'_1 on remonte aux traces correspondantes dans l'ancien système de plans de projection P_1 et P_2.

Remarque. Les opérations sont identiquement les mêmes si l'axe de rotation coïncide avec l'axe de projection. Le point x sera le centre du cercle auquel les traces, dans leurs positions sur P_3, doivent toujours rester tangentes. Le rayon de ce cercle est la perpendiculaire abaissée de x sur s.

—

Applications. — Problèmes.

—

286. **Problème I**. *Une droite quelconque étant donnée, l'amener dans une position perpendiculaire à* P_1.

Solution. (**Ep**. **199**.) Par une première rotation de la droite d autour de l'axe ω, perpendiculaire à P_1 et rencontrant d au point b, on amène la droite dans la position d_1 parallèle à P_1 (**279**).

L'angle de rotation est égal à φ, angle que fait d' avec une parallèle à l'axe de projection.

Par une nouvelle rotation autour d'un axe ω_1 perpendiculaire à P_2, on amène la droite d_1 parallèle à P_2 dans la position de la perpendiculaire à P_1.

Dans cette rotation, on n'a qu'à décrire de ω''_1, trace-projection du second axe, comme centre, avec $\omega''_1 c''_1$ pour rayon un arc de cercle. La tangente d''_2 à cet arc, perpendiculaire à l'axe de projection, sera la projection, sur P_2, de la nouvelle position de la droite (**280**). La projection sur P_1 sera le point c'_2.

287. **Problème II**. *Un plan t étant donné, l'amener dans une position parallèle à* P_2.

Solution. (**Ep**. **200**.) Par une première rotation autour d'un axe perpendiculaire à P_2, on amène le plan t dans une position t' perpendiculaire à P_1 (**284**).

Par une nouvelle rotation autour d'un axe perpendiculaire à P_1, le plan t' est amené à être parallèle à P_2 (**283**). Ceci arrive dès que la trace t'_1 sur P_1 devient parallèle à l'axe de projection.

Dans ces deux rotations successives, les angles de rotation φ et φ' se déterminent par les conditions mêmes du problème.

288. Problème III. *Construire la véritable longueur d'une droite limitée à deux de ses points.*

Solution dans l'espace. A l'aide d'une rotation autour d'un axe normal à P_1, on amène la droite dans une position parallèle à P_2. La projection de cette nouvelle position de la droite sur P_2 sera la véritable longueur de cette droite.

L'épure de ce problème fait partie de l'épure du § 286.

289. Problème IV. *Construire l'angle d'un plan avec* P_1 *ou avec* P_2.

I. *Angle du plan* T *avec* P_1. **Solution dans l'espace.** On fera tourner le plan P autour d'un axe normal à P_1, jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire à P_2. Le plan T ne fera que changer de place, mais l'angle de T avec P_1 ne changera pas. Cet angle dièdre aura pour angle plan correspondant l'angle de la trace T'_2 de la nouvelle position du plan avec l'axe de projection.

Solution graphique. (**Ep. 201.**) La rotation s'opère autour de l'axe ω perpendiculaire à P_1, et les constructions s'effectuent d'après la seconde solution du § 283.

II. *Angle du plan* T *avec* P_2. **Solution dans l'espace.** On fera tourner le plan T pour l'amener à être normal à P_1. Dans cette nouvelle position, l'angle de sa nouvelle trace T'_1 avec l'axe de projection mesure le dièdre de T avec P_1.

Solution graphique. (**Ep. 202.**) On opère la rotation d'après la seconde solution donnée au § 284.

290. Problème V. *Construire la droite d'intersection de deux plans parallèles à l'axe de projection, ainsi que l'angle de ces deux plans.*

Solution dans l'espace. On fera tourner les deux plans autour d'un axe normal à P_1 situé dans P_2, jusqu'à ce qu'ils soient perpendiculaires à P_2. Dans cette nouvelle position, l'angle des traces des plans sur P_2 sera l'angle correspondant de leur dièdre, lequel angle dièdre n'a pas changé de grandeur pendant le mouvement de rotation.

Solution graphique. (**Ep. 203.**) L'axe de rotation ω est dans P_2 et rencontre les traces S_2 et T_2 en a'' et b'', points qui restent fixes pendant la rotation des deux plans. Cette rotation s'effectue comme au § 283. Les traces des deux plans sur P_2, dans la nouvelle position de ces derniers, donneront l'angle $a''m_1''b''$ pour l'angle du dièdre formé par S et T.

Dans la nouvelle position des plans, la droite d'intersection m se projette sur P_2 au point m''_1, et sur P_1 suivant m'_1 parallèle à T_1.

Cette droite m, ramenée avec les deux plans dans l'ancienne position de ceux-ci, aura pour projections m' et m'' parallèles à l'axe de projection.

291. Problème VI. *Etant donnés deux plans parallèles à l'axe, construire le plan bissecteur de leur angle dièdre.*

Solution. (**Fig. 203.**) On construira, comme au problème précédent, l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans, ainsi que la bissectrice de cet angle.

Le plan bissecteur contient cette bissectrice $c''d'_1$ et ses traces, parallèles à S'_1 et T'_1, passeront par les traces de même nom de la bissectrice.

En ramenant la bissectrice avec les deux plans donnés dans la position primitive de ces derniers, on aura b_2 et b_1 pour traces du plan bissecteur.

292. Problème VII. *Construire la distance d'un point à une droite.*

Solution dans l'espace. Si la droite d était parallèle au plan P_2, la distance du point à cette droite serait projetée sur P_2 suivant une normale à d'', par suite, les deux projections de la distance se construiraient aisément.

Pour amener la droite d dans cette position favorable, on la fera tourner autour d'un axe normal à P_1 et passant par le point donné a.

Solution graphique. (**Ep. 204.**) La rotation autour de l'axe ω perpendiculaire à P_1 et mené par a s'opère comme au § 279 et s'arrête si la droite est parallèle à P_2. Dans cette position, la distance demandée se projette sur P_2 suivant $a''b''_1$ normale à d'_1 et sur P_1 suivant $a'b'_1$.

Cette distance est ensuite ramenée en $a''b''$ et $a'b'$, ancienne position qu'elle occupait avant la rotation.

293. Exercices et cas particuliers. I. *Construire la distance d'un point donné :*

1° A l'axe ;

2° A une parallèle à l'axe.

II. *Construire la distance d'un point de l'axe à une droite quelconque.*

294. Problème VIII. *Construire la distance d'un point à un plan.*

Solution dans l'espace. Si le plan était normal à P_2, la distance demandée se projetterait sur P_2 suivant sa véritable longueur le long de la perpendiculaire abaissée de a'' sur la trace du plan sur P_2.

Pour amener le plan dans cette position favorable, on le fait tourner autour d'un axe normal à P_1 et passant par le point donné.

Solution graphique. (Ep. 205). La rotation du plan T autour de l'axe ω mené par le point a perpendiculairement à P_1 s'opère comme au §. 283 ; elle s'arrête si le plan T est devenu normal à P_2. Dans cette position, la distance du point a au plan T se projette sur P_2 suivant $a''\,b''_1$ normale à T'_2.

$a''b''_1$ est la vraie longueur de la distance demandée.

295. Exercices et cas particuliers. *Construire la distance d'un point à un plan :*

1° Le plan est parallèle à l'axe de projection ;

2° Le plan est déterminé par l'axe et par un point ;

3° Le plan est perpendiculaire au plan bissecteur B_2 ; ses deux traces sont en ligne droite.

296. Problème IX. *Construire l'angle de deux droites.*

Solution dans l'espace. Les deux droites déterminent un plan que l'on fait tourner autour d'un axe perpendiculaire à P_1 et passant par le point de rencontre a des deux droites jusqu'à ce qu'il soit devenu perpendiculaire à P_2. On rabat ensuite ce plan sur P_1.

Solution graphique. (**Ep. 206.**) On détermine $b'c'$, trace du plan des deux droites sur P_1. On amène $b'c'$ en $b'_1c'_1$ normale à l'axe de projection. Le triangle $a'b'_1c'_1$ contient l'angle demandé, l'angle au sommet a, et aura pour hauteur $a''m''_1$. Le rabattement s'établit donc facilement et $b'_1(a)c'_1$ est l'angle des deux droites.

297. Problème X. *Construire l'angle d'une droite avec* P_1 *puis avec* P_2.

Solution. Pour avoir l'angle de la droite d avec P_1, on fait tourner la droite autour d'un axe ω perpendiculaire à P_1 jusqu'à ce qu'elle soit devenue parallèle à P_2. L'angle de la nouvelle projection sur P_2 avec l'axe de projection sera l'angle que fait d avec P_1. (**Ep. 207.**)

Pour avoir l'angle de la droite d avec P_2, on fera tourner d autour d'un axe perpendiculaire à P_2 jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à P_1 ou dans P_1. L'angle de la nouvelle projection sur P_1 avec l'axe de projection sera l'angle de d avec P_2. (**Ep. 208**).

298. Problème XI. *Etant donné un plan t, construire un plan parallèle à t et distant de ce dernier d'une longueur donnée h.*

Solution. (**Ep. 209.**) Le problème est facilité si le plan t est perpendiculaire à P_2. Dans ce cas, la distance du plan à un plan qui lui est parallèle se projette sur P_2 suivant sa vraie longueur sur la perpendiculaire aux traces de ces plans sur P_2. On fera donc tourner le plan t autour d'un axe ω perpendiculaire à P_1 jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire à P_2.

On mène un plan parallèle à la nouvelle position t' de t et distant de t' de la longueur h. Le plan s' ainsi construit, on le fait tourner autour de ω jusqu'à ce qu'il soit devenu parallèle à t ; dans cette position, le plan s répond aux conditions du problème.

299. Problème XII. *Construire la distance de deux plans parallèles.*

Solution dans l'espace. On fera tourner les deux plans autour d'un axe perpendiculaire à P_1 jusqu'à ce qu'ils soient tous les deux perpendiculaires à P_2. La plus courte distance, dans ces nouvelles positions, se projette sur P_2 suivant sa véritable longueur, égale à la perpendiculaire commune aux deux nouvelles traces des deux plans sur P_2 et comprise entre ces traces.

Solution graphique. La solution graphique est comprise dans l'épure du problème précédent.

300. Problème XIII. *Construire l'angle de deux plans.*

Solution dans l'espace. Le cas le plus favorable pour ce problème est celui où les deux plans t et s ont une trace commune sur P_2 et que cette trace est perpendiculaire à l'axe de projection.

L'angle des deux traces sur P_1 mesurera alors l'angle dièdre des deux plans. Pour ramener le cas général à ce cas particulier, on opérera deux rotations successives.

Solution graphique. (Ep. 210.) Première rotation. On fera tourner les deux plans autour d'un axe perpendiculaire à P_1 et passant par le point a, point de rencontre des deux traces t_2 et s_2. Cet axe est donc dans P_2 et dans le premier plan projetant de l'intersection commune des deux plans t et s. Les deux plans tournent jusqu'à ce que leur intersection commune se trouve dans P_2 en $a''b''_1$. $a''b''_1$ sera la nouvelle trace commune des deux plans sur P_2. s'_1 et t'_1, droites menées par b''_1 et tangentes aux arcs décrits par les traces m et n des lignes de plus grande pente de t et de s, sont les nouvelles traces des deux plans sur P_1.

Deuxième rotation. Les nouvelles positions des deux plans tourneront autour de l'axe V, normal à P_2, jusqu'à ce que leur trace commune $a''b''_1$ soit devenue perpendiculaire à l'axe de projection. L'angle formé par les nouvelles traces s''_1 et t''_1 sur P_1 sera l'angle des deux plans, lesquels sont actuellement perpendiculaires à P_1 et ont une trace commune sur P_2.

301. Problème XIV. *Construire la plus courte distance de deux droites qui se croisent dans l'espace.*

Solution dans l'espace. La position la plus favorable des données de ce problème est la suivante :

Une des deux droites est perpendiculaire à P_1. La plus courte distance se projettera sur P_1 suivant une perpendiculaire à la première projection de la deuxième droite, et sur P_2 suivant une parallèle à l'axe de projection (**170**).

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, on doit opérer deux rotations successives. Par un point de la première droite d, sa deuxième trace, on fera passer une droite perpendiculaire à P_1. Cette perpendiculaire sera prise pour premier axe de rotation autour duquel on fera tourner le système des deux droites jusqu'à ce que la droite d soit dans P_2.

Par un point de la nouvelle position de d on mènera une perpendiculaire à P_2, droite que l'on prendra pour deuxième axe de rotation, et autour duquel on fera tourner le système des deux droites, déjà une fois changées de place, jusqu'à ce que la droite d, actuellement dans P_2, devienne perpendiculaire à l'axe de projection et par suite à P_1.

Dans cette nouvelle position des données, la solution du problème se simplifie.

Solution graphique. (**Ep. 211.**) **Première rotation.** Le premier axe de rotation ω passe par le point m de d, trace de d sur P_2. On amènera d dans P_2. La deuxième droite e prendra la position correspondante e_1. L'angle de rotation est l'angle que fait d' avec l'axe de projection.

Deuxième rotation. Le deuxième axe de rotation ς passe par le même point m de d et sera perpendiculaire à P_2. On fera tourner le système des deux droites d_1 et e_1 autour de cet axe jusqu'à ce que d_1 soit devenue perpendiculaire à P_1 et que le système des deux droites soit formé par d_2 et c_2.

Dans cette position, la plus courte distance sera a_2b_2.

En faisant retourner le système des deux droites d_2c_2 à sa position précédemment occupée d_1e_1, la plus courte distance viendra en a_1b_1.

En passant de la position d_1e_1 à la position primitive d et e, la plus courte distance viendra en ab. (Voir les §§. 279 et 280). Le problème précédent est une application de ces paragraphes.